# Medidas.

Definición:

En un espacio medible $(X, \mathcal{M})$ ($X$ conjunto y $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ $\sigma$-álgebra), una medida es una función:

$$\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$$

tal que:

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) Si $\{A_j\}_{j=1}^{+\infty} \subseteq \mathcal{M}$ es disjunta, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j)$$

A esta última condición se le llama aditividad numerable.

1), 2) implican la aditividad

finita:

$$\left.\begin{array}{l} A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M} \text{ disjuntos} \\ \Rightarrow \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \\ \qquad = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n) \end{array}\right\} \circledast$$

(tomar $A_j = \emptyset \quad \forall j \geq n+1$)

Si $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ satisface solamente $\mu(\emptyset) = 0$ y $\circledast$, entonces $\mu$ se dice una medida finitamente aditiva.

Hasta el momento tenemos:

$X$ conjunto o un espacio topológico (o $\mathbb{R}^n$)

$\mathcal{M}$ una $\sigma$-álgebra (e.g. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$)

$(X, \mathcal{M})$ espacio medible

$\mu$ medidas

Para $(X, \mathcal{M})$ dado los elementos $E \in \mathcal{M}$ se llaman conjuntos medibles.

Si $\mu$ es medida en $(X, \mathcal{M})$ (espacio medible), entonces a

$$(X, \mathcal{M}, \mu)$$

se le llama espacio de medida.

Algunas propiedades especiales:

*) $\mu$ ó $(X, \mathcal{M}, \mu)$ se dice finito (ó finito) si

$$\mu(X) < +\infty.$$

En este caso $\forall E \in \mathcal{M}$:

$$0 \leq \mu(E) \leq \mu(E) + \mu(E^c) = \mu(X) < +\infty$$

$$\therefore \mu(E) < +\infty \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

En este caso:

$$\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \mu(X)]$$

Si $\mu(X) = 1$, entonces $(X, \mathcal{M}, \mu)$ se llama espacio de probabilidad.

*) $\mu$ ó $(X, \mathcal{M}, \mu)$ se dice $\sigma$-finita si $\exists \, \{E_j\}_{j=1}^{+\infty} \subseteq \mathcal{M} \ni$:

$$X = \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j \quad , \quad \mu(E_j) < +\infty \quad \forall j$$

Si tomamos:

$$F_j = \bigcup_{k=1}^{j} E_k$$

$$L_j = F_j \setminus F_{j-1} \quad (F_0 = \emptyset)$$

entonces podemos cambiar a uniones:

$$X = \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{+\infty} F_j = \bigcup_{j=1}^{+\infty} L_j$$

creciente disjunta

Además:

$$\mu(F_j) \leq \sum_{h=1}^{j} \mu(E_h) < +\infty$$

(ver adelante)

$$\mu(L_j) \leq \mu(F_j) < +\infty$$

*) $\mu$ ó $(X, \mathcal{M}, \mu)$ se dice semifinita si $\forall F \in \mathcal{M}$ con $\mu(F) = +\infty$ $\exists$ $E \in \mathcal{M}$ con $E \subseteq F$ con:

$$0 < \mu(E) < +\infty$$

Proposición:
Si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es $\sigma$-finito
$\Rightarrow$ $\mu$ es semifinita.

Dem.:
Sea $F \in \mathcal{M}$ con $\mu(F) = +\infty$.
Sabemos que:

$$X = \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j \,, \; E_j \in \mathcal{M}$$

$$\mu(E_j) < +\infty.$$

Podemos suponer que la unión es disjunta.

$$\therefore \; F = \bigcup_{j=1}^{+\infty} F \cap E_j \quad \text{disjunta.}$$

Además:

$$\mu(F \cap E_j) < +\infty \quad \forall j$$

y $\displaystyle +\infty = \mu(F) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(F \cap E_j)$

$\therefore \exists\, j_0 \ni 0 < \mu(F \cap E_{j_0}) < +\infty$ //

Ejemplos:

1) $X$ conjunto arbitrario
$\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$

Sea $f: X \longrightarrow [0, +\infty]$ función arbitraria.

Definimos:

$$\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$$

$$\mu(E) = \sum_{x \in E} f(x)$$

$$= \sup \left\{ \sum_{x \in F} f(x) \;\middle|\; F \subseteq E \text{ finito} \right\}$$

Afirmación:

Si $\sum_{x \in E} f(x) < +\infty$, entonces: $\tilde{E} = \{x \in E \mid f(x) > 0\}$ es numerable, en parti_ cular:

$$\sum_{x \in E} f(x) = \sum_{x \in \tilde{E}} f(x)$$

numerable.

Dem.:

Sea $E_n = \{x \in E \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}$

$n = 1, \ldots$

$$\therefore \quad \tilde{E} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$$

$f(x) > 0$ $\qquad$ $f(x) \geq \frac{1}{n} > 0$

Por otro lado:

$$+\infty > \sum_{x \in E} f(x) = \sum_{x \in \tilde{E}} f(x) \geq \sum_{x \in E_n} f(x)$$

$$\geq \frac{1}{n} \# (E_n)$$

cardinalidad

$\therefore$ $E_n$ es finito $\forall n$ y

$$\tilde{E} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$$

es numerable. //

$\mu$ es medida pues clara_
mente:

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad (\text{por convención})$$

$$0 \leq \mu(E) \leq +\infty \quad \forall E \neq \emptyset$$

además: $E = \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j$ unión disjunta

Entonces:

$\forall F \subseteq E$ finito:

$$F = \bigcup_{j=1}^{+\infty} F \cap E_j$$

$$F_j = \underbrace{F \cap E_j}_{\text{finito!}} \subseteq E_j$$

Claramente:

$$\sum_{x\in F} f(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{x\in F_j} f(x)$$

Por tanto:

$$\mu(E) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(E_j)$$

Por otro lado, sean:

$F_1 \subseteq E_1, \ldots, F_n \subseteq E_n$ finitos.

$$\therefore \quad \sum_{j=1}^{n} \sum_{x\in F_j} f(x) = \underbrace{\sum_{x\in \bigcup_{j=1}^{n} F_j}}_{\text{finito en } E} f(x) \leq \mu(E)$$

tomando supremo en la izquierda:

$$\sum_{j=1}^{n} \mu(E_j) \leq \mu(E)$$

$\Rightarrow \quad (n \to +\infty)$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mu(E_j) \leq \mu(E)$$

$$\therefore \quad \mu(E) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(E_j).$$

Si $f(x) \equiv 1 \quad \forall x \in X$, entonces:

$$\mu(E) = \begin{cases} \#(E) & E \text{ finito} \\ +\infty & E \text{ infinito} \end{cases}$$

(medida de contar)

Si $\exists x_0 \ni f(x_0) = 1$ y $f(x) = 0$ $\forall x \neq x_0$, entonces:

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 & x_0 \in E \\ 0 & x_0 \notin E \end{cases}$$

medida de Dirac en $x_0$.

Teorema:

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida.

1) Monotonía:

$E, F \in \mathcal{M}$ , $E \subseteq F$

$\Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$

2) Subaditividad:

$E = \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j$ , $E_j \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow \mu(E) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(E_j)$

3) Continuidad por abajo:

Si $\{E_j\}_{j=1}^{+\infty} \subseteq \mathcal{M}$ es creciente: $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_j \subseteq \ldots$

$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(E_n)$

4) Continuidad por arriba

Si $\{E_j\}_{j=1}^{+\infty}$ es decreciente:

$$E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots \supseteq E_j \supseteq \dots$$

y $\mu(E_1) < +\infty$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcap_{j=1}^{+\infty} E_j\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n)$$

Dem.:

1) $E \subseteq F$, $E, F \in \mathcal{M}$

$$\mu(E) \leq \mu(E) + \mu(F \setminus E) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aditividad} \\ \text{finita}}}{=} \mu(F)$$

...