En $\mathbb{R}^n$ considere la familia $\mathcal{E}$ de subconjuntos de la forma

$$\prod_{j=1}^{n} I_j$$

donde $I_j \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo. Probar que $\mathcal{E}$ es una familia elemental!

Solución:

Como $\emptyset = \prod_{j=1}^{n} \emptyset$, tenemos $\emptyset \in \mathcal{E}$.

pues $\emptyset = (1, 0) \subseteq \mathbb{R}$ es intervalo.

Si $E = \prod_{j=1}^{n} I_j$, $F = \prod_{j=1}^{n} I_j' \in \mathcal{E}$, entonces:

$$E \cap F = \prod_{j=1}^{n} (I_j \cap I_j') \in \mathcal{E}$$

pues $I_j \cap I_j'$ es intervalo, posiblemente vacío.

Sea $E=\prod_{j=1}^{n} I_j \in \mathcal{E}$ y probemos que
$E^c \in \mathcal{E}$.

Observamos que:

$x \in E^c \iff \exists j \ni x_j \in I_j$

Por tanto $\forall x \in E^c \ \exists\ F \subseteq \{1, \ldots, n\}$
$F \neq \emptyset \ni$:

$x_j \in I_j^c$ si $j \in F$

$x_h \in I_h$ si $h \notin F$

Para todo $\emptyset \neq F \subseteq \{1, \ldots, n\}$ usaremos la notación:

$$\prod_{j\in F} I_j^c \times \prod_{h \notin F} I_j =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{ll} x_j \in I_j^c & j \in F \\ x_h \in I_h & h \notin F \end{array} \right\}$$

Por tanto, acabamos de probar que:

$$E^c \subseteq \bigcup_{\emptyset \neq F \subseteq \{1,\dots,n\}} \prod_{j\in F} I_j^c \times \prod_{h\notin F} I_h$$

Pero además, $F \neq \emptyset$ implica:

$$\prod_{j\in F} I_j^c \times \prod_{h\notin F} I_h \subseteq E^c$$

De modo que tenemos la unión:

$$E^c = \bigcup_{\emptyset \neq F \subseteq \{1,\dots,n\}} \prod_{j\in F} I_j^c \times \prod_{h\notin F} I_h \quad (*)$$

Si $F_1, F_2 \subseteq \{1,\dots,n\}$ distintos no vacíos, entonces podemos suponer que $\exists\, r \in F_1 \setminus F_2$. Por tanto:

$$\prod_{j\in F_1} I_j^c \times \prod_{h\notin F_1} I_h \quad y \quad \prod_{j\in F_2} I_j^c \times \prod_{h\notin F_2} I_h$$

son disjuntos, en el factor r. Se concluye que la unión $(*)$ es disjunta.

Por otro lado, escribimos:

$$\mathbb{R} = I_j^{-1} \cup I_j \cup I_j^{+1}$$

como unión disjunta de intervalos de modo que:

$$a < b < c \quad \forall a \in I_j^{-1}, b \in I_j, c I_j^{+1}$$

En esta descomposición tanto I_j^{-1} como I_j^{+1} puede ser vacío.
Con esta notación:

$$I_j^c = I_j^{-1} \cup I_j^{+1}$$

es unión disjunta de intervalos.

Denotamos para $\emptyset \neq F \subseteq \{1, \dots, n\}$:

$$\{\pm 1\}^F = \{\eta : F \longrightarrow \{\pm 1\} \mid \eta \text{ función}\}$$

Recordamos la fórmula de conjuntos:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

que al aplicarla a todos los

conjuntos $\emptyset \neq F \subseteq \{1, \dots, n\}$ nos da:

$$\prod_{j \in F} I_j^c \times \prod_{h \notin F} I_h =$$

$$= \bigcup_{\eta \in \{\pm 1\}^F} \prod_{j \in F} I_j^{\eta(j)} \times \prod_{h \notin F} I_h$$

esta unión es fácil ver que es disjunta, y sus términos son productos de intervalos.

Luego:

$$(I_1 \times \dots \times I_n)^c = E^c$$

$$= \bigcup_{\emptyset \neq F \subseteq \{1, \dots, n\}} \bigcup_{\eta \in \{\pm 1\}^F} \prod_{j \in F} I_j^{\eta(j)} \times \prod_{h \notin F} I_h$$

es una unión disjunta finita de productos de intervalos.

$\therefore$ $\mathcal{E}$ es familia elemental.