Análisis Armónico y Grupos: Parte 1

Raúl Quiroga Barranco

CIMAT, Mexico

Escuela de Verano 2022, Cimat
4 de julio de 2022

1. Las integrales de Riemann y de Lebesgue
2. Los espacios $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$
3. Acciones de $\mathbb{R}^n$ sobre $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$

1. Las integrales de Riemann y de Lebesgue
   - Integral de Riemann
   - La alternativa de Lebesgue
   - Medidas
   - Medidas de Radon
   - Medida de Lebesgue
2. Los espacios $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$
3. Acciones de $\mathbb{R}^n$ sobre $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$

- Definición de la integral de Riemann.

- Definición de la integral de Riemann.
  - Se toma $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada.

- Definición de la integral de Riemann.
  - Se toma $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada.
  - Se toman particiones $\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_k = b\}$, con magnitud $|\mathcal{P}| = \max_{j=1,\ldots,k} |t_j - t_{j-1}|$.

- Definición de la integral de Riemann.
  - Se toma $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada.
  - Se toman particiones $\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_k = b\}$, con magnitud $|\mathcal{P}| = \max_{j=1,\ldots,k} |t_j - t_{j-1}|$.
  - Se definen las sumas de Riemann inferior y superior

$$s_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{j=1}^{k} m_j(t_j - t_{j-1}), \quad S_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{j=1}^{k} M_j(t_j - t_{j-1}),$$

$$m_j = \text{ínf}\{f(t) \mid t \in [t_{j-1}, t_j]\},\ M_j = \sup\{f(t) \mid t \in [t_{j-1}, t_j]\}.$$

- Definición de la integral de Riemann.
  - Se toma $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada.
  - Se toman particiones $\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_k = b\}$, con magnitud $|\mathcal{P}| = \max_{j=1,\dots,k} |t_j - t_{j-1}|$.
  - Se definen las sumas de Riemann inferior y superior

$$s_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{j=1}^{k} m_j(t_j - t_{j-1}), \quad S_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{j=1}^{k} M_j(t_j - t_{j-1}),$$

$m_j = \inf\{f(t) \mid t \in [t_{j-1}, t_j]\}$, $M_j = \sup\{f(t) \mid t \in [t_{j-1}, t_j]\}$.

  - Se definen las integrales inferior y superior

$$\underline{I}_a^b(f) = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} s_{\mathcal{P}}(f), \quad \overline{I}_a^b(f) = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} S_{\mathcal{P}}(f).$$

- Definición de la integral de Riemann.
  - Se toma $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada.
  - Se toman particiones $\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_k = b\}$, con magnitud $|\mathcal{P}| = \max_{j=1,\ldots,k} |t_j - t_{j-1}|$.
  - Se definen las sumas de Riemann inferior y superior

$$s_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{j=1}^{k} m_j(t_j - t_{j-1}), \quad S_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{j=1}^{k} M_j(t_j - t_{j-1}),$$

$$m_j = \inf\{f(t) \mid t \in [t_{j-1}, t_j]\}, \; M_j = \sup\{f(t) \mid t \in [t_{j-1}, t_j]\}.$$

  - Se definen las integrales inferior y superior

$$\underline{I}_a^b(f) = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} s_{\mathcal{P}}(f), \quad \overline{I}_a^b(f) = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} S_{\mathcal{P}}(f).$$

  - Si $\underline{I}_a^b(f) = \overline{I}_a^b(f)$, entonces f se dice Riemann integrable y definimos su integral como

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \underline{I}_a^b(f) = \overline{I}_a^b(f).$$

Integral de Riemann

- La integral de Riemann tiene problemas con o sin solución.

- La integral de Riemann tiene problemas con o sin solución.
  - Las funciones no acotadas no son integrables. No tiene solución.

- La integral de Riemann tiene problemas con o sin solución.
  - Las funciones no acotadas no son integrables. No tiene solución.
  - No considera funciones complejas. Solución: integrar parte real e imaginaria.

- La integral de Riemann tiene problemas con o sin solución.
  - Las funciones no acotadas no son integrables. No tiene solución.
  - No considera funciones complejas. Solución: integrar parte real e imaginaria.
  - No considera intervalos no acotados. Solución: las integrales impropias se definen, por ejemplo, como

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

cuando el límite existe.

- La integral de Riemann tiene problemas con o sin solución.
  - Las funciones no acotadas no son integrables. No tiene solución.
  - No considera funciones complejas. Solución: integrar parte real e imaginaria.
  - No considera intervalos no acotados. Solución: las integrales impropias se definen, por ejemplo, como

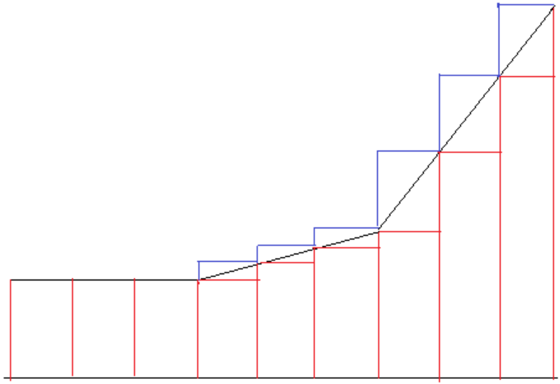
$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(t)\,dt,$$

    cuando el límite existe.
  - Se comporta mal respecto de límites. Si $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones en $[a,b]$ con límite puntual f, entonces f *no* es necesariamente integrable. Aún si lo es, en general

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt \neq \int_a^b f(t)\,dt.$$

- La principal causa de los problemas de la integral de Riemann es su ineficacia intrínseca.

- La principal causa de los problemas de la integral de Riemann es su ineficacia intrínseca.



- Las particiones en el dominio no consideran de manera eficiente los valores de la función.

- Si X es un conjunto y $E \subset X$, entonces denotamos con χ_E **la función característica o indicadora de** E.

- Si X es un conjunto y $E \subset X$, entonces denotamos con χ_E **la función característica o indicadora de** E.
- Las sumas de Riemann de tienen asociadas las siguientes funciones

$$\phi_{\mathcal{P}} = \sum_{j=1}^{k} m_j \chi_{(t_{j-1},t_j]}, \quad \Phi_{\mathcal{P}} = \sum_{j=1}^{k} M_j \chi_{(t_{j-1},t_j]}.$$

- Si X es un conjunto y $E \subset X$, entonces denotamos con χ_E **la función característica o indicadora de** E.
- Las sumas de Riemann de tienen asociadas las siguientes funciones

$$\phi_{\mathcal{P}} = \sum_{j=1}^{k} m_j \chi_{(t_{j-1},t_j]}, \quad \Phi_{\mathcal{P}} = \sum_{j=1}^{k} M_j \chi_{(t_{j-1},t_j]}.$$

- Si denotamos con $\mathrm{m}(I)$ **la longitud de un intervalo** I, las sumas de Riemann se recuperan de estas funciones mediante

$$s_{\mathcal{P}} = \sum_{j=1}^{k} m_j \,\mathrm{m}((t_{j-1}, t_j]), \quad S_{\mathcal{P}} = \sum_{j=1}^{k} M_j \,\mathrm{m}((t_{j-1}, t_j]).$$

- Si X es un conjunto y $E \subset X$, entonces denotamos con χ_E **la función característica o indicadora de** E.
- Las sumas de Riemann de tienen asociadas las siguientes funciones

$$\phi_{\mathcal{P}} = \sum_{j=1}^{k} m_j \chi_{(t_{j-1},t_j]}, \quad \Phi_{\mathcal{P}} = \sum_{j=1}^{k} M_j \chi_{(t_{j-1},t_j]}.$$

- Si denotamos con $\mathrm{m}(I)$ **la longitud de un intervalo** I, las sumas de Riemann se recuperan de estas funciones mediante

$$s_{\mathcal{P}} = \sum_{j=1}^{k} m_j \,\mathrm{m}((t_{j-1}, t_j]), \quad S_{\mathcal{P}} = \sum_{j=1}^{k} M_j \,\mathrm{m}((t_{j-1}, t_j]).$$

- Esta notación será útil para comprender la alternativa dada por la integral de Lebesgue.

- La integral de Lebesgue propone como alternativa particionar el rango de valores de una función $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dada.

- La integral de Lebesgue propone como alternativa particionar el rango de valores de una función $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dada.
- Expresamos al intervalo $(0, \infty)$ mediante intervalos acotados cada vez más grandes, que particionamos cada vez más finamente.

- La integral de Lebesgue propone como alternativa particionar el rango de valores de una función $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dada.
- Expresamos al intervalo $(0, \infty)$ mediante intervalos acotados cada vez más grandes, que particionamos cada vez más finamente.
  - $$(0, \infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (0, 2^k], \quad (0, 2^k] = \bigcup_{j=1}^{2^{2k}} (t_{j-1}, t_j], \quad t_j = \frac{j}{2^k}.$$

- La integral de Lebesgue propone como alternativa particionar el rango de valores de una función $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dada.
- Expresamos al intervalo $(0, \infty)$ mediante intervalos acotados cada vez más grandes, que particionamos cada vez más finamente.
  - $(0, \infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (0, 2^k], \quad (0, 2^k] = \bigcup_{j=1}^{2^{2k}} (t_{j-1}, t_j], \quad t_j = \dfrac{j}{2^k}.$
  - Definimos los conjuntos $E_{j,k} = f^{-1}((t_{j-1}, t_j])$ y consideramos, para cada k, la función

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{2^{2k}} \frac{j-1}{2^k} \chi_{E_{j,k}}.$$

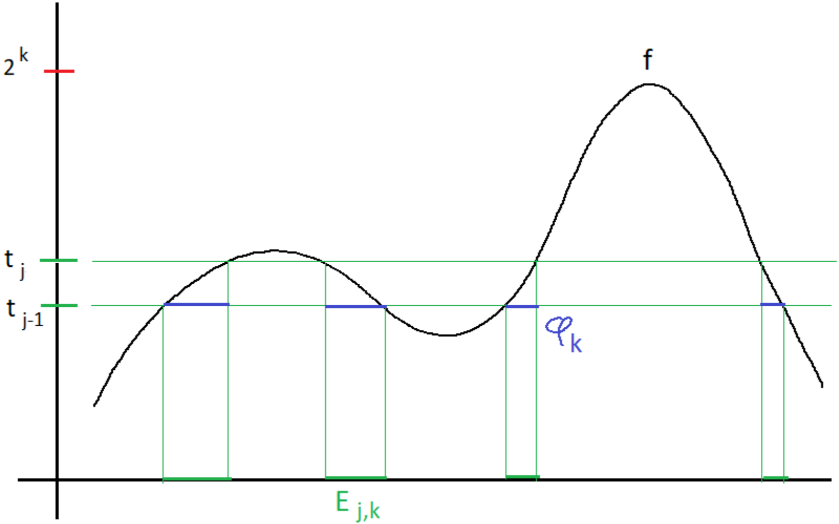
- La integral de Lebesgue propone como alternativa particionar el rango de valores de una función $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dada.
- Expresamos al intervalo $(0, \infty)$ mediante intervalos acotados cada vez más grandes, que particionamos cada vez más finamente.
  - $(0, \infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (0, 2^k], \quad (0, 2^k] = \bigcup_{j=1}^{2^{2k}} (t_{j-1}, t_j], \quad t_j = \frac{j}{2^k}.$
  - Definimos los conjuntos $E_{j,k} = f^{-1}((t_{j-1}, t_j])$ y consideramos, para cada k, la función

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{2^{2k}} \frac{j-1}{2^k} \chi_{E_{j,k}}.$$

  - La sucesión de funciones $(\varphi_k)_k$ converge puntualmente a f. Si f es acotada, entonces la convergencia es uniforme.

- Las funciones φ_k se construyen de acuerdo a la gráfica.

- Las funciones φ_k se construyen de acuerdo a la gráfica.



- Lo anterior induce una "suma de Lebesgue" dada por

$$\mathsf{S}_k = \sum_{j=1}^{2^{2k}} \frac{j-1}{2^k}\,\mathrm{m}(E_{j,k}).$$

- Lo anterior induce una "suma de Lebesgue" dada por

$$\mathrm{S}_k = \sum_{j=1}^{2^{2k}} \frac{j-1}{2^k}\,\mathrm{m}(E_{j,k}).$$

- La cual permite definir la integral de f como

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{dm}(t) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{S}_k\,.$$

- Lo anterior induce una “suma de Lebesgue” dada por

$$\mathrm{S}_k = \sum_{j=1}^{2^{2k}} \frac{j-1}{2^k}\, \mathrm{m}(E_{j,k}).$$

- La cual permite definir la integral de f como

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, \mathrm{dm}(t) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{S}_k\,.$$

- Problema: ¿Cómo se define $\mathrm{m}(E_{j,k})$, la “longitud” del conjunto $E_{j,k}$?.

- Lo anterior induce una "suma de Lebesgue" dada por

$$\mathrm{S}_k = \sum_{j=1}^{2^{2k}} \frac{j-1}{2^k}\, \mathrm{m}(E_{j,k}).$$

- La cual permite definir la integral de f como

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, \mathrm{dm}(t) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{S}_k\,.$$

- Problema: ¿Cómo se define $\mathrm{m}(E_{j,k})$, la "longitud" del conjunto $E_{j,k}$?.
- Para una función suficientemente suave los conjuntos $E_{j,k}$ son uniones finitas de intervalos. Pero para funciones f arbitrarias los conjuntos $E_{j,k}$ son subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$.

- Lo anterior induce una "suma de Lebesgue" dada por

$$\mathrm{S}_k = \sum_{j=1}^{2^{2k}} \frac{j-1}{2^k}\, \mathrm{m}(E_{j,k}).$$

- La cual permite definir la integral de f como

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, \mathrm{dm}(t) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{S}_k\,.$$

- Problema: ¿Cómo se define $\mathrm{m}(E_{j,k})$, la "longitud" del conjunto $E_{j,k}$?.
- Para una función suficientemente suave los conjuntos $E_{j,k}$ son uniones finitas de intervalos. Pero para funciones f arbitrarias los conjuntos $E_{j,k}$ son subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$.
- Problema: Definir la longitud de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

- Seguiremos la **definición general de una medida**.

- Seguiremos la **definición general de una medida**.
- En lo sucesivo X denota uno de los siguientes espacios.

- Seguiremos la **definición general de una medida**.
- En lo sucesivo X denota uno de los siguientes espacios.
  - Un subconjunto cerrado o abierto de $\mathbb{R}^n$.

- Seguiremos la **definición general de una medida**.
- En lo sucesivo X denota uno de los siguientes espacios.
  - Un subconjunto cerrado o abierto de $\mathbb{R}^n$.
  - Un espacio métrico localmente compacto.

- Seguiremos la **definición general de una medida**.
- En lo sucesivo X denota uno de los siguientes espacios.
  - Un subconjunto cerrado o abierto de $\mathbb{R}^n$.
  - Un espacio métrico localmente compacto.
  - Un espacio topológico Hausdorff localmente compacto.

- Seguiremos la **definición general de una medida**.
- En lo sucesivo X denota uno de los siguientes espacios.
  - Un subconjunto cerrado o abierto de $\mathbb{R}^n$.
  - Un espacio métrico localmente compacto.
  - Un espacio topológico Hausdorff localmente compacto.

Definición

*Una **medida** μ **en** X es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definida sobre una familia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ (con propiedades por determinar) que satisface*

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ *cuando* $\{E_j\}_j \subset \mathcal{A}$ *es numerable y disjunta.*

- Consideramos familias $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ con las siguientes propiedades (σ-**álgebra**).

- Consideramos familias $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ con las siguientes propiedades (σ-**álgebra**).
  - $\mathcal{A}$ es cerrado bajo uniones numerables y $\emptyset \in \mathcal{A}$.

- Consideramos familias $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ con las siguientes propiedades (σ-**álgebra**).
  - $\mathcal{A}$ es cerrado bajo uniones numerables y $\emptyset \in \mathcal{A}$.
  - $\mathcal{A}$ es cerrado bajo complementos y $X \in \mathcal{A}$.

- Consideramos familias $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ con las siguientes propiedades (σ-**álgebra**).
  - $\mathcal{A}$ es cerrado bajo uniones numerables y $\emptyset \in \mathcal{A}$.
  - $\mathcal{A}$ es cerrado bajo complementos y $X \in \mathcal{A}$.
  - $\mathcal{A}$ es cerrado bajo intersecciones numerables.

- Consideramos familias $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ con las siguientes propiedades (σ-**álgebra**).
  - $\mathcal{A}$ es cerrado bajo uniones numerables y $\emptyset \in \mathcal{A}$.
  - $\mathcal{A}$ es cerrado bajo complementos y $X \in \mathcal{A}$.
  - $\mathcal{A}$ es cerrado bajo intersecciones numerables.
- Usando la topología de X pedimos también.

- Consideramos familias $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ con las siguientes propiedades (σ-**álgebra**).
  - $\mathcal{A}$ es cerrado bajo uniones numerables y $\emptyset \in \mathcal{A}$.
  - $\mathcal{A}$ es cerrado bajo complementos y $X \in \mathcal{A}$.
  - $\mathcal{A}$ es cerrado bajo intersecciones numerables.
- Usando la topología de X pedimos también.
  - $\mathcal{A}$ contiene los conjuntos abiertos y cerrados.

- Consideramos familias $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ con las siguientes propiedades (σ-**álgebra**).
  - $\mathcal{A}$ es cerrado bajo uniones numerables y $\emptyset \in \mathcal{A}$.
  - $\mathcal{A}$ es cerrado bajo complementos y $X \in \mathcal{A}$.
  - $\mathcal{A}$ es cerrado bajo intersecciones numerables.
- Usando la topología de X pedimos también.
  - $\mathcal{A}$ contiene los conjuntos abiertos y cerrados.
  - $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra más pequeña, por inclusión, que satisface todo lo anterior.

- Consideramos familias $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ con las siguientes propiedades (σ-**álgebra**).
  - $\mathcal{A}$ es cerrado bajo uniones numerables y $\emptyset \in \mathcal{A}$.
  - $\mathcal{A}$ es cerrado bajo complementos y $X \in \mathcal{A}$.
  - $\mathcal{A}$ es cerrado bajo intersecciones numerables.
- Usando la topología de X pedimos también.
  - $\mathcal{A}$ contiene los conjuntos abiertos y cerrados.
  - $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra más pequeña, por inclusión, que satisface todo lo anterior.

Proposición

*Para todo X como antes, existe una única σ-álgebra que cumple las propiedades anteriores. Esta **σ-álgebra se denota por $\mathcal{B}_X$ y es llamada la σ-álgebra de Borel de X**. Sus elementos son llamados **conjuntos de Borel**.*

- Consideramos familias $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ con las siguientes propiedades (σ-**álgebra**).
  - $\mathcal{A}$ es cerrado bajo uniones numerables y $\emptyset \in \mathcal{A}$.
  - $\mathcal{A}$ es cerrado bajo complementos y $X \in \mathcal{A}$.
  - $\mathcal{A}$ es cerrado bajo intersecciones numerables.
- Usando la topología de X pedimos también.
  - $\mathcal{A}$ contiene los conjuntos abiertos y cerrados.
  - $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra más pequeña, por inclusión, que satisface todo lo anterior.

Proposición

*Para todo X como antes, existe una única σ-álgebra que cumple las propiedades anteriores. Esta σ-**álgebra se denota por** $\mathcal{B}_X$ **y es llamada la** σ-**álgebra de Borel de** X. Sus elementos son llamados **conjuntos de Borel**.*

Ejercicio

Investigar los conceptos de conjuntos F_σ y G_δ, y probar que tales conjuntos son de Borel.

- Para un espacio X, una medida μ definida en $\mathcal{B}_X$ es llamada **medida de Borel**. Pero buscamos medidas con buen comportamiento.

- Para un espacio X, una medida μ definida en $\mathcal{B}_X$ es llamada **medida de Borel**. Pero buscamos medidas con buen comportamiento.

Definición

Una medida de Borel μ en un espacio X es llamada ***medida de Radon*** *si satisface las siguientes propiedades.*

- $\mu(K) < \infty$ *para todo conjunto compacto* K.
- μ *es regular exteriormente: para todo* E *conjunto de Borel*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) \mid U \supset E,\ U \text{ abierto}\}.$$

- μ *es regular interiormente: para todo* U *abierto*

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset U,\ K \text{ compacto}\}.$$

- Llamaremos **rectángulo o cubo en** $\mathbb{R}^n$ a todo subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ dado como un producto $C = \prod_{j=1}^{n} I_j$ de intervalos $I_j \subset \mathbb{R}$. Los intervalos I_j son llamados los **lados de** C.

- Llamaremos **rectángulo o cubo en** $\mathbb{R}^n$ a todo subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ dado como un producto $C = \prod_{j=1}^{n} I_j$ de intervalos $I_j \subset \mathbb{R}$. Los intervalos I_j son llamados los **lados de** C.

Teorema (Medida de Lebesgue)

En los conjuntos de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ *definimos* $\mathrm{m} = \mathrm{m}^n$ *mediante*

- $\mathrm{m}^n(C) = \ell(I_1)\cdots\ell(I_n)$, *para todo cubo con lados* $I_1, \ldots, I_n$ *(convención:* $0\cdot\infty = 0$, $x\cdot\infty = \infty$ *para todo* $x > 0$*).*
- *Para todo conjunto de Borel* E

$$\mathrm{m}^n(E) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{m}^n(C_j) \;\middle|\; E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ C_j \textit{ cubos} \right\}.$$

Entonces, m^n *es una medida de Radon llamada la* ***medida de Lebesgue de*** $\mathbb{R}^n$.

- Es claro que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es **invariante bajo traslaciones**: $\mathrm{m}(E + x) = \mathrm{m}(E)$ para todo E conjunto de Borel y $x \in \mathbb{R}^n$.

- Es claro que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es **invariante bajo traslaciones**: $\mathrm{m}(E + x) = \mathrm{m}(E)$ para todo E conjunto de Borel y $x \in \mathbb{R}^n$.
- La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ depende de la base canónica.

- Es claro que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es **invariante bajo traslaciones**: $\mathrm{m}(E + x) = \mathrm{m}(E)$ para todo E conjunto de Borel y $x \in \mathbb{R}^n$.
- La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ depende de la base canónica. Pero solamente en apariencia.

- Es claro que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es **invariante bajo traslaciones**: $\mathrm{m}(E + x) = \mathrm{m}(E)$ para todo E conjunto de Borel y $x \in \mathbb{R}^n$.
- La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ depende de la base canónica. Pero solamente en apariencia.
- ¿Hay unicidad de la medida de Lebesgue? Sí, bajo condiciones adecuadas.

- Es claro que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es **invariante bajo traslaciones**: $\mathrm{m}(E+x)=\mathrm{m}(E)$ para todo E conjunto de Borel y $x\in\mathbb{R}^n$.
- La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ depende de la base canónica. Pero solamente en apariencia.
- ¿Hay unicidad de la medida de Lebesgue? Sí, bajo condiciones adecuadas.

Teorema

Sea μ una medida de Radon en $\mathbb{R}^n$ invariante bajo traslaciones. Entonces, existe una constante $a>0$ tal que $\mu=a\,\mathrm{m}^n$. En particular, salvo normalización, la medida de Lebesgue depende solamente de su estructura de grupo aditivo: $(\mathbb{R}^n,+)$. En particular, salvo normalización, la medida de Lebesgue no depende de bases en $\mathbb{R}^n$, ni de su estructura de espacio vectorial.

- Veamos un bosquejo de la demostración. Sea μ una medida de Radon en $\mathbb{R}^n$ invariante bajo traslaciones.

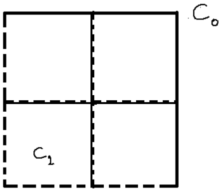
- Veamos un bosquejo de la demostración. Sea μ una medida de Radon en $\mathbb{R}^n$ invariante bajo traslaciones.
- Sea $C_0 \subset \mathbb{R}^n$ el cubo cuyos lados son todos $(0,1]$, y sea $a = \mu(C_0)$.

- Veamos un bosquejo de la demostración. Sea μ una medida de Radon en $\mathbb{R}^n$ invariante bajo traslaciones.
- Sea $C_0 \subset \mathbb{R}^n$ el cubo cuyos lados son todos $(0,1]$, y sea $a = \mu(C_0)$.
- Escribimos $(0,1] = (0,1/2] \cup (1/2,1]$, y usamos esta unión para particionar a C_0 en 2^n cubos disjuntos cuyos lados son uno de estos dos intervalos.

$$C_0 = \bigcup_{j=1}^{2^n} C_{0,j}.$$

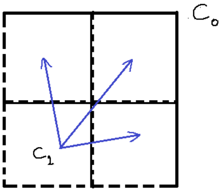
- Veamos un bosquejo de la demostración. Sea μ una medida de Radon en $\mathbb{R}^n$ invariante bajo traslaciones.
- Sea $C_0 \subset \mathbb{R}^n$ el cubo cuyos lados son todos $(0,1]$, y sea $a = \mu(C_0)$.
- Escribimos $(0,1] = (0,1/2] \cup (1/2,1]$, y usamos esta unión para particionar a C_0 en 2^n cubos disjuntos cuyos lados son uno de estos dos intervalos.

$$C_0 = \bigcup_{j=1}^{2^n} C_{0,j}.$$



- Veamos un bosquejo de la demostración. Sea μ una medida de Radon en $\mathbb{R}^n$ invariante bajo traslaciones.
- Sea $C_0 \subset \mathbb{R}^n$ el cubo cuyos lados son todos $(0,1]$, y sea $a = \mu(C_0)$.
- Escribimos $(0,1] = (0,1/2] \cup (1/2,1]$, y usamos esta unión para particionar a C_0 en 2^n cubos disjuntos cuyos lados son uno de estos dos intervalos.

$$C_0 = \bigcup_{j=1}^{2^n} C_{0,j}.$$



- Todos los cubos $C_{0,j}$ son una traslación del cubo C_1 cuyos lados son todos $(0, 1/2]$.

- Todos los cubos $C_{0,j}$ son una traslación del cubo C_1 cuyos lados son todos $(0, 1/2]$. Por tanto

$$2^n \mu(C_1) = \sum_{j=1}^{2^n} \mu(C_{0,j}) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{2^n} C_{0,j}\Big) = \mu(C_0) = a$$

$$= a\,\mathrm{m}^n(C_0) = a\,\mathrm{m}^n\Big(\bigcup_{j=1}^{2^n} C_{0,j}\Big) = a\sum_{j=1}^{2^n} \mathrm{m}^n(C_{0,j}) = 2^n a\,\mathrm{m}^n(C_1),$$

y entonces $\mu(C_1) = a\,\mathrm{m}^n(C_1)$.

- Todos los cubos $C_{0,j}$ son una traslación del cubo C_1 cuyos lados son todos $(0, 1/2]$. Por tanto

$$2^n \mu(C_1) = \sum_{j=1}^{2^n} \mu(C_{0,j}) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{2^n} C_{0,j}\right) = \mu(C_0) = a$$

$$= a\,\mathrm{m}^n(C_0) = a\,\mathrm{m}^n\left(\bigcup_{j=1}^{2^n} C_{0,j}\right) = a \sum_{j=1}^{2^n} \mathrm{m}^n(C_{0,j}) = 2^n a\,\mathrm{m}^n(C_1),$$

  y entonces $\mu(C_1) = a\,\mathrm{m}^n(C_1)$.
- Repitiendo el proceso con C_1 y continuando inductivamente, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario

Si C es un cubo cuyos lados son todos de la forma $(x, x + 1/2^k]$, para algunos $x \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $\mu(C) = a\,\mathrm{m}^n(C)$.

Ejercicio

Todo abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es unión numerable disjunta de cubos cuyos lados son todos de la forma $(x, x + 1/2^k]$, para algunos $x \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio

Todo abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ *es unión numerable disjunta de cubos cuyos lados son todos de la forma* $(x, x + 1/2^k]$, *para algunos* $x \in \mathbb{R}$ *y* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración.

Cuadricular $\mathbb{R}^n$ con lados de longitud $1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$. $\square$

Ejercicio

Todo abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es unión numerable disjunta de cubos cuyos lados son todos de la forma $(x, x + 1/2^k]$, para algunos $x \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$.

Demostración.

Cuadricular $\mathbb{R}^n$ con lados de longitud $1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$. □

- Concluimos que $\mu(U) = a\,\mathrm{m}^n(U)$ para todo abierto $U \subset \mathbb{R}^n$.

Ejercicio

Todo abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es unión numerable disjunta de cubos cuyos lados son todos de la forma $(x, x + 1/2^k]$, para algunos $x \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$.

Demostración.

Cuadricular $\mathbb{R}^n$ con lados de longitud $1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$. $\square$

- Concluimos que $\mu(U) = a\, \mathrm{m}^n(U)$ para todo abierto $U \subset \mathbb{R}^n$.
- Por regularidad exterior, se concluye que $\mu = a\, \mathrm{m}^n$.

1. Las integrales de Riemann y de Lebesgue

2. Los espacios $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$
   - Integral de funciones no-negativas
   - El espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$
   - El espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$

3. Acciones de $\mathbb{R}^n$ sobre $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$

- La medida de Lebesgue m en $\mathbb{R}^n$ permite integrar funciones.

- La medida de Lebesgue m en $\mathbb{R}^n$ permite integrar funciones.
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ se dice **función (Borel) medible** si para todo abierto $U \subset \mathbb{C}$ el conjunto $f^{-1}(U)$ es de Borel en $\mathbb{R}^n$.

- La medida de Lebesgue m en $\mathbb{R}^n$ permite integrar funciones.
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ se dice **función (Borel) medible** si para todo abierto $U \subset \mathbb{C}$ el conjunto $f^{-1}(U)$ es de Borel en $\mathbb{R}^n$.
- Si $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ es medible, entonces la integral de f se define como
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\,\mathrm{dm}(t) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{S}_k,$$
donde ("suma de Lebesgue")
$$S_k = \sum_{j=1}^{2^{2k}} \frac{j-1}{2^k}\, \mathrm{m}\left(f^{-1}\left(\left(\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\right]\right)\right).$$

- La medida de Lebesgue m en $\mathbb{R}^n$ permite integrar funciones.
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ se dice **función (Borel) medible** si para todo abierto $U \subset \mathbb{C}$ el conjunto $f^{-1}(U)$ es de Borel en $\mathbb{R}^n$.
- Si $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ es medible, entonces la integral de f se define como
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\,\mathrm{dm}(t) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{S}_k,$$
donde ("suma de Lebesgue")
$$S_k = \sum_{j=1}^{2^{2k}} \frac{j-1}{2^k}\, \mathrm{m}\left(f^{-1}\left(\left(\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\right]\right)\right).$$
- El límite siempre existe, aunque puede ser infinito.

- El espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$ consta de las funciones medibles $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| \, \mathrm{dm}(t) < \infty.$$

- El espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$ consta de las funciones medibles $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| \, \mathrm{dm}(t) < \infty.$$

- Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ escribimos $f = u + iv$, con u y v sus partes real e imaginaria. También tomamos

$$\begin{aligned} u^+ &= \max(u, 0), & v^+ &= \max(v, 0), \\ u^- &= \max(-u, 0), & v^- &= \max(-v, 0), \end{aligned}$$

de modo que $u = u^+ - u^-$ y $v = v^+ - v^-$.

- El espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$ consta de las funciones medibles $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| \, \mathrm{dm}(t) < \infty.$$

- Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ escribimos $f = u + iv$, con u y v sus partes real e imaginaria. También tomamos

$$\begin{aligned} u^+ &= \max(u,0), & v^+ &= \max(v,0), \\ u^- &= \max(-u,0), & v^- &= \max(-v,0), \end{aligned}$$

de modo que $u = u^+ - u^-$ y $v = v^+ - v^-$.

- Como se cumple $0 \leq u^+, u^-, v^+, v^- \leq |f|$ podemos definir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \, \mathrm{dm}(t) = & \int_{\mathbb{R}^n} u^+(t) \, \mathrm{dm}(t) - \int_{\mathbb{R}^n} u^-(t) \, \mathrm{dm}(t) \\ & + i \left(\int_{\mathbb{R}^n} v^+(t) \, \mathrm{dm}(t) - \int_{\mathbb{R}^n} v^-(t) \, \mathrm{dm}(t) \right). \end{aligned}$$

- La asignación $f \mapsto \|f\|_1$ define una norma $L^1(\mathbb{R}^n)$.

- La asignación $f \mapsto \|f\|_1$ define una norma $L^1(\mathbb{R}^n)$. Después de identificar funciones f, g tales que $\|f - g\|_1 = 0$. Es decir, si f y g son iguales en casi todo punto.

- La asignación $f \mapsto \|f\|_1$ define una norma $L^1(\mathbb{R}^n)$. Después de identificar funciones f, g tales que $\|f - g\|_1 = 0$. Es decir, si f y g son iguales en casi todo punto.
- Una propiedad se cumple en **casi todo punto** si se cumple en el **complemento de un conjunto de medida cero**.

- La asignación $f \mapsto \|f\|_1$ define una norma $L^1(\mathbb{R}^n)$. Después de identificar funciones f, g tales que $\|f - g\|_1 = 0$. Es decir, si f y g son iguales en casi todo punto.
- Una propiedad se cumple en **casi todo punto** si se cumple en el **complemento de un conjunto de medida cero**.
- Por tanto, $L^1(\mathbb{R}^n)$ es un espacio normado y también un espacio métrico.

- La asignación $f \mapsto \|f\|_1$ define una norma $L^1(\mathbb{R}^n)$. Después de identificar funciones f, g tales que $\|f - g\|_1 = 0$. Es decir, si f y g son iguales en casi todo punto.
- Una propiedad se cumple en **casi todo punto** si se cumple en el **complemento de un conjunto de medida cero**.
- Por tanto, $L^1(\mathbb{R}^n)$ es un espacio normado y también un espacio métrico.

Teorema

El espacio normado $(L^1(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1)$ *es de Banach, es decir, completo como espacio métrico. Más aún, si* $(f_k)_k$ *converge a* f *en* $L^1(\mathbb{R}^n)$*, entonces existe una subsucesión* $(f_{k_l})_l$ *que converge puntualmente a* f *en casi todo punto.*

El espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$

- El espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ consta de las funciones medibles $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 \, \mathrm{dm}(t) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

- El espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ consta de las funciones medibles $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 \, \mathrm{dm}(t) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

- Se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz para $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)\overline{g(t)}| \, \mathrm{dm}(t) \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

- El espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ consta de las funciones medibles $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 \,\mathrm{dm}(t) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

- Se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz para $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)\overline{g(t)}| \,\mathrm{dm}(t) \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

- Esto nos permite definir el producto interno en $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)} \,\mathrm{dm}(t),$$

cuya norma asociada es $\| \cdot \|_2$.

- El espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ consta de las funciones medibles $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tales que
$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 \, \mathrm{dm}(t) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$
- Se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz para $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$
$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)\overline{g(t)}| \, \mathrm{dm}(t) \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$
- Esto nos permite definir el producto interno en $L^2(\mathbb{R}^n)$
$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)} \, \mathrm{dm}(t),$$
cuya norma asociada es $\|\cdot\|_2$.

Teorema

El espacio con producto interno $(L^2(\mathbb{R}^n), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es de Hilbert, es decir, completo como espacio métrico.

1. Las integrales de Riemann y de Lebesgue

2. Los espacios $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$

3. Acciones de $\mathbb{R}^n$ sobre $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$
   - Traslaciones en $\mathbb{R}^n$
   - Traslaciones de funciones en $\mathbb{R}^n$

- La principal propiedad de la medida de Lebesgue, como medida de Radon, es ser invariante bajo traslaciones

$$\mathrm{m}(E+x)=\mathrm{m}(E)$$

para todo conjunto de Borel E y todo $x \in \mathbb{R}^n$.

- La principal propiedad de la medida de Lebesgue, como medida de Radon, es ser invariante bajo traslaciones

$$\mathrm{m}(E + x) = \mathrm{m}(E)$$

para todo conjunto de Borel E y todo $x \in \mathbb{R}^n$.

- Esto implica que para toda función medible $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ se cumple

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t + x)\, \mathrm{dm}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, \mathrm{dm}(t),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

- Dados una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, definimos **la traslación de f por x** como la función en $\mathbb{R}^n$ dada por $f_x(t) = f(t - x)$.

- Dados una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, definimos **la traslación de** f **por** x como la función en $\mathbb{R}^n$ dada por $f_x(t) = f(t - x)$.
- Entonces, se cumplen

- Dados una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, definimos **la traslación de f por x** como la función en $\mathbb{R}^n$ dada por $f_x(t) = f(t - x)$.
- Entonces, se cumplen
    - $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ implica $f_x \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\|f_x\|_1 = \|f\|_1$.

- Dados una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, definimos **la traslación de** f **por** x como la función en $\mathbb{R}^n$ dada por $f_x(t) = f(t - x)$.
- Entonces, se cumplen
  - $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ implica $f_x \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\|f_x\|_1 = \|f\|_1$.
  - $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ implica $f_x, g_x \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\langle f_x, g_x \rangle = \langle f, g \rangle$, lo cual implica $\|f_x\|_2 = \|f\|_2$.

- Dados una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, definimos **la traslación de** f **por** x como la función en $\mathbb{R}^n$ dada por $f_x(t) = f(t - x)$.
- Entonces, se cumplen
  - $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ implica $f_x \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\|f_x\|_1 = \|f\|_1$.
  - $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ implica $f_x, g_x \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\langle f_x, g_x \rangle = \langle f, g \rangle$, lo cual implica $\|f_x\|_2 = \|f\|_2$.
  - En ambos casos es fácil ver que $f_0 = f$ y $(f_x)_y = f_{x+y}$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

- Dados una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, definimos **la traslación de** f **por** x como la función en $\mathbb{R}^n$ dada por $f_x(t) = f(t - x)$.
- Entonces, se cumplen
  - $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ implica $f_x \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\|f_x\|_1 = \|f\|_1$.
  - $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ implica $f_x, g_x \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\langle f_x, g_x\rangle = \langle f, g\rangle$, lo cual implica $\|f_x\|_2 = \|f\|_2$.
  - En ambos casos es fácil ver que $f_0 = f$ y $(f_x)_y = f_{x+y}$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- Por tanto, el grupo aditivo $(\mathbb{R}^n, +)$ actúa isométricamente sobre los espacios $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$.

- Dados una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, definimos **la traslación de** f **por** x como la función en $\mathbb{R}^n$ dada por $f_x(t) = f(t - x)$.
- Entonces, se cumplen
  - $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ implica $f_x \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\|f_x\|_1 = \|f\|_1$.
  - $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ implica $f_x, g_x \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\langle f_x, g_x \rangle = \langle f, g \rangle$, lo cual implica $\|f_x\|_2 = \|f\|_2$.
  - En ambos casos es fácil ver que $f_0 = f$ y $(f_x)_y = f_{x+y}$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- Por tanto, el grupo aditivo $(\mathbb{R}^n, +)$ actúa isométricamente sobre los espacios $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$.
- Las acciones de $\mathbb{R}^n$, definidas por $(x, f) \mapsto f_x$, y pensadas como mapeos

$$\mathbb{R}^n \times L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n), \quad \mathbb{R}^n \times L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n),$$

son ambas contínuas. La acción sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ se dice que es una **acción unitaria**.