Análisis Armónico y Grupos: Parte 2

Raúl Quiroga Barranco

CIMAT, Mexico

Escuela de Verano 2022, Cimat
6 de julio de 2022

1. Convoluciones y $L^1(\mathbb{R}^n)$ como álgebra

2. Transformada de Fourier en $\mathbb{R}^n$

3. Análisis en los grupos $\mathbb{T}^n$ y $\mathbb{R}_+$

1. Convoluciones y $L^1(\mathbb{R}^n)$ como álgebra
   - La acciones de $\mathbb{R}^n$ sobre $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$
   - Convolución en $L^1(\mathbb{R}^n)$
   - Teoremas de Tonelli y Fubini
   - Convolución en $L^1(\mathbb{R}^n)$
   - Representación por convolución de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$
2. Transformada de Fourier en $\mathbb{R}^n$
3. Análisis en los grupos $\mathbb{T}^n$ y $\mathbb{R}_+$

- Recordamos que tenemos acciones de $\mathbb{R}^n$ sobre $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$ dadas por

$$(y, f) \mapsto y \cdot f = f_y,$$

donde $f_y(x) = f(x - y)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

- Recordamos que tenemos acciones de $\mathbb{R}^n$ sobre $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$ dadas por

$$(y, f) \mapsto y \cdot f = f_y,$$

donde $f_y(x) = f(x - y)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- Como notación alternativa, escribiremos

$$\pi_1 : \mathbb{R}^n \times L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n), \quad \pi_2 : \mathbb{R}^n \times L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n),$$

para las acciones respectivas. Más aún, usaremos la notación

$$\pi_1(y)(f) = \pi_1(y, f), \quad \pi_2(y)(f) = \pi_2(y, f),$$

respectivamente.

La acciones de $\mathbb{R}^n$ sobre $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$

- Recordamos que tenemos acciones de $\mathbb{R}^n$ sobre $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$ dadas por
$$(y, f) \mapsto y \cdot f = f_y,$$
donde $f_y(x) = f(x - y)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- Como notación alternativa, escribiremos
$$\pi_1 : \mathbb{R}^n \times L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n), \quad \pi_2 : \mathbb{R}^n \times L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n),$$
para las acciones respectivas. Más aún, usaremos la notación
$$\pi_1(y)(f) = \pi_1(y, f), \quad \pi_2(y)(f) = \pi_2(y, f),$$
respectivamente.
- En particular, para todo $y \in \mathbb{R}^n$, los mapeos
$$\pi_1(y) : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n), \quad \pi_2(y) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n),$$
actúan trasladando la gráfica de una función por el valor de y.

- Recordamos que tenemos acciones de $\mathbb{R}^n$ sobre $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$ dadas por
$$(y, f) \mapsto y \cdot f = f_y,$$
donde $f_y(x) = f(x - y)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- Como notación alternativa, escribiremos
$$\pi_1 : \mathbb{R}^n \times L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n), \quad \pi_2 : \mathbb{R}^n \times L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n),$$
para las acciones respectivas. Más aún, usaremos la notación
$$\pi_1(y)(f) = \pi_1(y, f), \quad \pi_2(y)(f) = \pi_2(y, f),$$
respectivamente.
- En particular, para todo $y \in \mathbb{R}^n$, los mapeos
$$\pi_1(y) : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n), \quad \pi_2(y) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n),$$
actúan trasladando la gráfica de una función por el valor de y.

Ejercicio

Los mapeos $\pi_1(y)$ y $\pi_2(y)$ son lineales acotados de norma 1.

- Dados $y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{R}^n$ y $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$, podemos formar el operador lineal

$$T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$$
$$T(f) = \sum_{j=1}^{k} c_j \pi_1(y_j)(f).$$

- Dados $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}^n$ y $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}$, podemos formar el operador lineal

$$T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$$
$$T(f) = \sum_{j=1}^{k} c_j \pi_1(y_j)(f).$$

- Observamos que para toda f se satisface

$$T(f)(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j \pi_1(y_j)(f)(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j f(x - y_j)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

- Dados $y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{R}^n$ y $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$, podemos formar el operador lineal

$$T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$$
$$T(f) = \sum_{j=1}^{k} c_j \pi_1(y_j)(f).$$

- Observamos que para toda f se satisface

$$T(f)(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j \pi_1(y_j)(f)(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j f(x - y_j)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

- Problema: Generalizar esta construcción de sumas finitas a integrales.

- Dada $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, podemos pensar que para cada $y \in \mathbb{R}^n$ la función g proporciona el número complejo $g(y)$. Cambiando la suma finita por una integral, obtenemos la siguiente definición.

- Dada $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, podemos pensar que para cada $y \in \mathbb{R}^n$ la función g proporciona el número complejo $g(y)$. Cambiando la suma finita por una integral, obtenemos la siguiente definición.

Definición

Si $g, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces la ***convolución de** g **y** f* *es la función $h = g * f$ definida por*

$$\begin{aligned} h &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \\ h(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) f(x-y)\, \mathrm{dm}(y). \end{aligned}$$

- Dada $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, podemos pensar que para cada $y \in \mathbb{R}^n$ la función g proporciona el número complejo $g(y)$. Cambiando la suma finita por una integral, obtenemos la siguiente definición.

Definición

Si $g, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces la ***convolución de g y f*** *es la función $h = g * f$ definida por*

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$$

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) f(x-y) \, \mathrm{dm}(y).$$

Proposición

Si $g, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces la convolución $g * f$ está bien definida, pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$ y satisface

$$\|g * f\|_1 \leq \|g\|_1 \|f\|_1.$$

Teorema (Tonelli)

Para toda función $F : \mathbb{R}^{m+n} \to [0, \infty)$ *se cumple*

Teorema (Tonelli)

Para toda función $F : \mathbb{R}^{m+n} \to [0, \infty)$ *se cumple*

- *Las funciones dadas por*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m &\to [0,\infty), \qquad & \mathbb{R}^n &\to [0,\infty), \\ x &\mapsto F(x, y_0), \qquad & y &\mapsto F(x_0, y) \end{aligned}$$

  son medibles para casi todo $y_0 \in \mathbb{R}^n$ *y para casi todo* $x_0 \in \mathbb{R}^m$, *respectivamente.*

Teorema (Tonelli)

Para toda función $F : \mathbb{R}^{m+n} \to [0, \infty)$ *se cumple*

- *Las funciones dadas por*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m &\to [0, \infty), \\ x &\mapsto F(x, y_0), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to [0, \infty), \\ y &\mapsto F(x_0, y) \end{aligned}$$

  son medibles para casi todo $y_0 \in \mathbb{R}^n$ *y para casi todo* $x_0 \in \mathbb{R}^m$, *respectivamente.*

- *Se satisface*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{m+n}} F(x, y)\, \mathrm{dm}(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} F(x, y)\, \mathrm{dm}(x) \right) \mathrm{dm}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} F(x, y)\, \mathrm{dm}(y) \right) \mathrm{dm}(x) \end{aligned}$$

  incluyendo que las funciones entre paréntesis son medibles.

Teorema (Fubini)

Para toda función $F \in L^1(\mathbb{R}^{m+n})$ *se cumple*

Teorema (Fubini)

Para toda función $F \in L^1(\mathbb{R}^{m+n})$ se cumple

- *Las funciones dadas por*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m &\to \mathbb{C}, \\ x &\mapsto F(x, y_0), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{C}, \\ y &\mapsto F(x_0, y) \end{aligned}$$

  pertenecen a $L^1(\mathbb{R}^m)$ y $L^1(\mathbb{R}^n)$, respectivamente, para casi todo $y_0 \in \mathbb{R}^n$ y para casi todo $x_0 \in \mathbb{R}^m$, respectivamente.

Teorema (Fubini)

Para toda función $F \in L^1(\mathbb{R}^{m+n})$ se cumple

- *Las funciones dadas por*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m &\to \mathbb{C}, \\ x &\mapsto F(x, y_0), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{C}, \\ y &\mapsto F(x_0, y) \end{aligned}$$

  pertenecen a $L^1(\mathbb{R}^m)$ y $L^1(\mathbb{R}^n)$, respectivamente, para casi todo $y_0 \in \mathbb{R}^n$ y para casi todo $x_0 \in \mathbb{R}^m$, respectivamente.
- *Se satisface*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{m+n}} F(x, y)\,\mathrm{dm}(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} F(x, y)\,\mathrm{dm}(x) \right) \mathrm{dm}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} F(x, y)\,\mathrm{dm}(y) \right) \mathrm{dm}(x) \end{aligned}$$

  incluyendo que las funciones entre paréntesis son L^1.

- Sean $g, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dadas. Por el Teorema de Tonelli y la invarianza de la medida de Lebesgue tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{2n}} |g(y)f(x-y)| \,\mathrm{dm}(x,y) = \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)f(x-y)| \,\mathrm{dm}(x) \right) \mathrm{dm}(y) \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \,\mathrm{dm}(x) \right) \mathrm{dm}(y) \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \,\mathrm{dm}(x) \right) \mathrm{dm}(y) \\
&\qquad = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

- Sean $g, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dadas. Por el Teorema de Tonelli y la invarianza de la medida de Lebesgue tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{2n}} |g(y)f(x-y)| \,\mathrm{dm}(x,y) = \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)f(x-y)| \,\mathrm{dm}(x) \right) \mathrm{dm}(y) \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \,\mathrm{dm}(x) \right) \mathrm{dm}(y) \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \,\mathrm{dm}(x) \right) \mathrm{dm}(y) \\
&\qquad = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

- El teorema de Fubini implica que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, la función $y \mapsto g(y)f(x-y)$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$.

- Sean $g, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dadas. Por el Teorema de Tonelli y la invarianza de la medida de Lebesgue tenemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{2n}} |g(y)f(x-y)| \,\mathrm{dm}(x,y) = \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)f(x-y)| \,\mathrm{dm}(x) \right) \mathrm{dm}(y) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \,\mathrm{dm}(x) \right) \mathrm{dm}(y) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \,\mathrm{dm}(x) \right) \mathrm{dm}(y) \\
&\quad = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty.
\end{aligned}
$$

- El teorema de Fubini implica que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, la función $y \mapsto g(y)f(x-y)$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$.
- Por tanto $h(x) = (g * f)(x)$, la integral de esta función, está bien definida.

- Por Fubini, la convolución dada por

$$(g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) f(x-y)\, \mathrm{dm}(y)$$

define una función que pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$.

- Por Fubini, la convolución dada por

$$(g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) f(x-y)\, \mathrm{dm}(y)$$

define una función que pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Ejercicio

Usar las identidades establecidas para probar que $\|g * f\|_1 \leq \|g\|_1 \|f\|_1$.

- El espacio de Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ admite la **involución** $*: L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$f^*(x) = \overline{f(-x)}$$

para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

- El espacio de Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ admite la **involución** $* : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$f^*(x) = \overline{f(-x)}$$

para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

- El espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$ con el producto dado por la convolución es un álgebra compleja conmutativa y asociativa que satisface

$$(f * g)^* = g^* * f^*$$

para cualesquiera $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

- El espacio de Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ admite la **involución** $* : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$f^*(x) = \overline{f(-x)}$$

para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- El espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$ con el producto dado por la convolución es un álgebra compleja conmutativa y asociativa que satisface

$$(f * g)^* = g^* * f^*$$

para cualesquiera $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Con estas operaciones, y por sus propiedades, $L^1(\mathbb{R}^n)$ es llamada un **álgebra de Banach (conmutativa) con involución**.

- El espacio de Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ admite la **involución** $* : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$f^*(x) = \overline{f(-x)}$$

para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

- El espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$ con el producto dado por la convolución es un álgebra compleja conmutativa y asociativa que satisface

$$(f * g)^* = g^* * f^*$$

para cualesquiera $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Con estas operaciones, y por sus propiedades, $L^1(\mathbb{R}^n)$ es llamada un **álgebra de Banach (conmutativa) con involución**.

Ejercicio

Probar la conmutatividad de la convolución usando el cambio de coordenadas $y \mapsto -y$ y una traslación. Probar la última identidad usando una traslación.

Representación por convolución de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$

- Tenemos la representación $\pi_2 : \mathbb{R}^n \times L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.

- Tenemos la representación $\pi_2 : \mathbb{R}^n \times L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.
- Extendemos ahora a una representación

$$\begin{aligned} \pi_2 : L^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) &\to L^2(\mathbb{R}^n) \\ \pi_2(f)(g) = \pi_2(f, g) &= f * g, \end{aligned}$$

donde para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) \, \mathrm{dm}(y),$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

- Tenemos la representación $\pi_2 : \mathbb{R}^n \times L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.
- Extendemos ahora a una representación

$$\pi_2 : L^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$
$$\pi_2(f)(g) = \pi_2(f, g) = f * g,$$

donde para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y)\, \mathrm{dm}(y),$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

- En este caso se satisface $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$, de modo que $\pi_2(f)$ es un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

- Tenemos la representación $\pi_2 : \mathbb{R}^n \times L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.
- Extendemos ahora a una representación

$$\pi_2 : L^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$
$$\pi_2(f)(g) = \pi_2(f, g) = f * g,$$

donde para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,\mathrm{dm}(y),$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

- En este caso se satisface $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$, de modo que $\pi_2(f)$ es un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Ejercicio

Investigar sobre la desigualdad de Minkowski para integrales y usarla para probar las afirmaciones anteriores.

- Dados $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, podemos dar una interpretación geométrica de la convolución $f * g$.

- Dados $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, podemos dar una interpretación geométrica de la convolución $f * g$.
    - Se comienza con la función g.

- Dados $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, podemos dar una interpretación geométrica de la convolución $f * g$.
    - Se comienza con la función g.
    - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$ obtenemos la función trasladada $x \mapsto g(x-y)$, la cual representamos por $g((\cdot)-y)$.

- Dados $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, podemos dar una interpretación geométrica de la convolución $f * g$.
  - Se comienza con la función g.
  - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$ obtenemos la función trasladada $x \mapsto g(x-y)$, la cual representamos por $g((\cdot)-y)$.
  - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, el valor $f(y) \in \mathbb{C}$ se puede pensar como un peso complejo.

- Dados $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, podemos dar una interpretación geométrica de la convolución $f * g$.
    - Se comienza con la función g.
    - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$ obtenemos la función trasladada $x \mapsto g(x - y)$, la cual representamos por $g((\cdot) - y)$.
    - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, el valor $f(y) \in \mathbb{C}$ se puede pensar como un peso complejo.
    - El producto $f(y)g((\cdot) - y)$ es la traslación de g por y seguida de multiplicar por el peso $f(y)$. Es decir, una traslación con peso.

- Dados $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, podemos dar una interpretación geométrica de la convolución $f * g$.
  - Se comienza con la función g.
  - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$ obtenemos la función trasladada $x \mapsto g(x - y)$, la cual representamos por $g((\cdot) - y)$.
  - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, el valor $f(y) \in \mathbb{C}$ se puede pensar como un peso complejo.
  - El producto $f(y)g((\cdot) - y)$ es la traslación de g por y seguida de multiplicar por el peso $f(y)$. Es decir, una traslación con peso.
  - Promediamos las funciones obtenidas integrando sobre $y \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g((\cdot) - y)\,\mathrm{dm}(y)$$

- Dados $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, podemos dar una interpretación geométrica de la convolución $f * g$.
  - Se comienza con la función g.
  - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$ obtenemos la función trasladada $x \mapsto g(x-y)$, la cual representamos por $g((\cdot)-y)$.
  - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, el valor $f(y) \in \mathbb{C}$ se puede pensar como un peso complejo.
  - El producto $f(y)g((\cdot)-y)$ es la traslación de g por y seguida de multiplicar por el peso $f(y)$. Es decir, una traslación con peso.
  - Promediamos las funciones obtenidas integrando sobre $y \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,\mathrm{dm}(y)$$

para obtener la convolución $(f * g)(x)$.

- Dados $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, podemos dar una interpretación geométrica de la convolución $f * g$.
    - Se comienza con la función g.
    - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$ obtenemos la función trasladada $x \mapsto g(x-y)$, la cual representamos por $g((\cdot)-y)$.
    - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, el valor $f(y) \in \mathbb{C}$ se puede pensar como un peso complejo.
    - El producto $f(y)g((\cdot)-y)$ es la traslación de g por y seguida de multiplicar por el peso $f(y)$. Es decir, una traslación con peso.
    - Promediamos las funciones obtenidas integrando sobre $y \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,\mathrm{dm}(y)$$

      para obtener la convolución $(f * g)(x)$.
- Esta mecanismo se puede generalizar a otras construcciones. En particular, para obtener la transformada de Fourier.

- Si G y H son dos grupos, entonces un mapeo $\varphi : G \to H$ se dice **homomorfismo** si $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

- Si G y H son dos grupos, entonces un mapeo $\varphi : G \to H$ se dice **homomorfismo** si $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.
- Si G es un grupo y V un espacio vectorial complejo, entonces una **representación de G en V** es un homomorfismo $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$, donde $\mathrm{GL}(V)$ es el grupo de todas las transformaciones lineales $V \to V$ invertibles. Advertencia: V puede ser de dimensión infinita.

- Si G y H son dos grupos, entonces un mapeo $\varphi : G \to H$ se dice **homomorfismo** si $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.
- Si G es un grupo y V un espacio vectorial complejo, entonces una **representación de G en V** es un homomorfismo $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$, donde $\mathrm{GL}(V)$ es el grupo de todas las transformaciones lineales $V \to V$ invertibles. Advertencia: V puede ser de dimensión infinita.
- Dada una representación $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$, un subespacio $W \subset V$ se dice **invariante** si $\pi(x)(W) = W$ para todo $x \in G$.

- Si G y H son dos grupos, entonces un mapeo $\varphi : G \to H$ se dice **homomorfismo** si $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.
- Si G es un grupo y V un espacio vectorial complejo, entonces una **representación de G en V** es un homomorfismo $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$, donde $\mathrm{GL}(V)$ es el grupo de todas las transformaciones lineales $V \to V$ invertibles. Advertencia: V puede ser de dimensión infinita.
- Dada una representación $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$, un subespacio $W \subset V$ se dice **invariante** si $\pi(x)(W) = W$ para todo $x \in G$.
- Una representación $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ se dice **irreducible** si los únicos subespacios invariantes de V son 0 y V.

- Si G y H son dos grupos, entonces un mapeo $\varphi : G \to H$ se dice **homomorfismo** si $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.
- Si G es un grupo y V un espacio vectorial complejo, entonces una **representación de G en V** es un homomorfismo $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$, donde $\mathrm{GL}(V)$ es el grupo de todas las transformaciones lineales $V \to V$ invertibles. Advertencia: V puede ser de dimensión infinita.
- Dada una representación $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$, un subespacio $W \subset V$ se dice **invariante** si $\pi(x)(W) = W$ para todo $x \in G$.
- Una representación $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ se dice **irreducible** si los únicos subespacios invariantes de V son 0 y V.
- Cuando hay topologías involucradas se suele considerar solamente representaciones continuas y subespacios cerrados. En lo sucesivo todo homomorfismo o representación se considerará continua en la presencia de topologías.

- Problema: ¿Cuáles son las representaciones unitarias irreducibles de $\mathbb{R}^n$ en espacios de Hilbert?

- Problema: ¿Cuáles son las representaciones unitarias irreducibles de $\mathbb{R}^n$ en espacios de Hilbert?
- Todas las representaciones unitarias irreducibles de un grupo Abeliano son 1-dimensionales.

- Problema: ¿Cuáles son las representaciones unitarias irreducibles de $\mathbb{R}^n$ en espacios de Hilbert?
- Todas las representaciones unitarias irreducibles de un grupo Abeliano son 1-dimensionales.

Teorema

- *Para todo* $y \in \mathbb{R}^n$, *el mapeo* $\pi_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T} \subset \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ *dado por* $\pi_y(x) = e^{ix \cdot y}$ *es una representación irreducible unitaria.*

- Problema: ¿Cuáles son las representaciones unitarias irreducibles de $\mathbb{R}^n$ en espacios de Hilbert?
- Todas las representaciones unitarias irreducibles de un grupo Abeliano son 1-dimensionales.

Teorema

- *Para todo $y \in \mathbb{R}^n$, el mapeo $\pi_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T} \subset \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ dado por $\pi_y(x) = e^{ix\cdot y}$ es una representación irreducible unitaria.*
- *Toda representación irreducible unitaria de $\mathbb{R}^n$ es de la forma π_y para algún $y \in \mathbb{R}^n$.*

- Seguimos el mecanismo dado en la interpretación de la convolución para encontrar la definición de la transformada de Fourier de una función f.

- Seguimos el mecanismo dado en la interpretación de la convolución para encontrar la definición de la transformada de Fourier de una función f.
  - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, tenemos una representación π_y.

- Seguimos el mecanismo dado en la interpretación de la convolución para encontrar la definición de la transformada de Fourier de una función f.
  - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, tenemos una representación π_y.
  - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, el valor $f(y) \in \mathbb{C}$ se puede pensar como un peso complejo.

- Seguimos el mecanismo dado en la interpretación de la convolución para encontrar la definición de la transformada de Fourier de una función f.
  - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, tenemos una representación π_y.
  - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, el valor $f(y) \in \mathbb{C}$ se puede pensar como un peso complejo.
  - El producto $f(y)\pi_y$ es un mapeo $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

- Seguimos el mecanismo dado en la interpretación de la convolución para encontrar la definición de la transformada de Fourier de una función f.
  - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, tenemos una representación π_y.
  - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, el valor $f(y) \in \mathbb{C}$ se puede pensar como un peso complejo.
  - El producto $f(y)\pi_y$ es un mapeo $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.
  - Promediamos estos mapeos sobre $y \in \mathbb{R}^n$ para obtener un mapeo de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\pi_y \, \mathrm{dm}(y).$$

- Seguimos el mecanismo dado en la interpretación de la convolución para encontrar la definición de la transformada de Fourier de una función f.
  - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, tenemos una representación π_y.
  - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, el valor $f(y) \in \mathbb{C}$ se puede pensar como un peso complejo.
  - El producto $f(y)\pi_y$ es un mapeo $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.
  - Promediamos estos mapeos sobre $y \in \mathbb{R}^n$ para obtener un mapeo de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\pi_y \, \mathrm{dm}(y).$$

  - Escribimos el promedio evaluando previamente en cada $x \in \mathbb{R}^n$ para obtener la **(primera) definición de la transformada de Fourier de f**

$$\widetilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\pi_y(x) \, \mathrm{dm}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{ix\cdot y} \, \mathrm{dm}(y).$$

- Seguimos el mecanismo dado en la interpretación de la convolución para encontrar la definición de la transformada de Fourier de una función f.
  - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, tenemos una representación π_y.
  - Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, el valor $f(y) \in \mathbb{C}$ se puede pensar como un peso complejo.
  - El producto $f(y)\pi_y$ es un mapeo $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.
  - Promediamos estos mapeos sobre $y \in \mathbb{R}^n$ para obtener un mapeo de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\pi_y \, \mathrm{dm}(y).$$

  - Escribimos el promedio evaluando previamente en cada $x \in \mathbb{R}^n$ para obtener la **(primera) definición de la transformada de Fourier de f**

$$\widetilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\pi_y(x) \, \mathrm{dm}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{ix\cdot y} \, \mathrm{dm}(y).$$

  - Como $|f(y)e^{ix\cdot y}| = |f(y)|$, la integral está bien definida, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Transformada de Fourier

- Algunos ajustes suelen ser necesarios.

◇ Algunos ajustes suelen ser necesarios.

Definición

Para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *la* ***transformada de Fourier de*** f *se define como la función* $\mathcal{F}(f) = \widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-ix\cdot y} \, \mathrm{dm}(y),$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

- Algunos ajustes suelen ser necesarios.

Definición

*Para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la **transformada de Fourier de** f se define como la función $\mathcal{F}(f) = \widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ dada por*

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-ix\cdot y} \, \mathrm{dm}(y),$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

- La transformada de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es un promedio de la familia de representaciones unitarias irreducibles de $\mathbb{R}^n$ respecto de los pesos proporcionados por los valores de f.

- Para $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ hay una interpretación alternativa de su transformada de Fourier.

- Para $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ hay una interpretación alternativa de su transformada de Fourier.
  - Tenemos la identidad $e^{ix\cdot y} = \cos(x \cdot y) + i \sin(x \cdot y)$.

- Para $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ hay una interpretación alternativa de su transformada de Fourier.
    - Tenemos la identidad $e^{ix\cdot y} = \cos(x \cdot y) + i \sin(x \cdot y)$.
    - La función $y \mapsto e^{ix\cdot y}$ representa un frente de onda que es constante en las traslaciones del subespacio $(\mathbb{R}x)^{\top}$. Por tanto, se mueve en la dirección de x. La periodicidad de la onda es $2\pi/\|x\|$.

- Para $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ hay una interpretación alternativa de su transformada de Fourier.
  - Tenemos la identidad $e^{ix\cdot y} = \cos(x \cdot y) + i \sin(x \cdot y)$.
  - La función $y \mapsto e^{ix\cdot y}$ representa un frente de onda que es constante en las traslaciones del subespacio $(\mathbb{R}x)^\top$. Por tanto, se mueve en la dirección de x. La periodicidad de la onda es $2\pi/\|x\|$.
  - Tomamos el producto interno entre f y el frente de onda $y \mapsto e^{ix\cdot y}$
  $$\langle f, e^{ix\cdot(\cdot)} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-ix\cdot y}\, \mathrm{dm}(y),$$
  para obtener la componente de f en la dirección del frente de onda correspondiente a x.

- Para $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ hay una interpretación alternativa de su transformada de Fourier.
  - Tenemos la identidad $e^{ix\cdot y} = \cos(x \cdot y) + i \sin(x \cdot y)$.
  - La función $y \mapsto e^{ix\cdot y}$ representa un frente de onda que es constante en las traslaciones del subespacio $(\mathbb{R}x)^\top$. Por tanto, se mueve en la dirección de x. La periodicidad de la onda es $2\pi/\|x\|$.
  - Tomamos el producto interno entre f y el frente de onda $y \mapsto e^{ix\cdot y}$
  $$\langle f, e^{ix\cdot(\cdot)}\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-ix\cdot y}\, \mathrm{dm}(y),$$
  para obtener la componente de f en la dirección del frente de onda correspondiente a x.
  - Normalizamos con la constante $(2\pi)^{\frac{n}{2}}$ para obtener la transformada de Fourier.

- Para $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ hay una interpretación alternativa de su transformada de Fourier.
  - Tenemos la identidad $e^{ix\cdot y} = \cos(x \cdot y) + i \sin(x \cdot y)$.
  - La función $y \mapsto e^{ix\cdot y}$ representa un frente de onda que es constante en las traslaciones del subespacio $(\mathbb{R}x)^\top$. Por tanto, se mueve en la dirección de x. La periodicidad de la onda es $2\pi/\|x\|$.
  - Tomamos el producto interno entre f y el frente de onda $y \mapsto e^{ix\cdot y}$
    $$\langle f, e^{ix\cdot(\cdot)}\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-ix\cdot y}\,\mathrm{dm}(y),$$
    para obtener la componente de f en la dirección del frente de onda correspondiente a x.
  - Normalizamos con la constante $(2\pi)^{\frac{n}{2}}$ para obtener la transformada de Fourier.
- La transformada de Fourier de $\widehat{f}$ da las componentes de f respecto de los frentes de onda planos periódicos sinusoidales.

- Enunciamos algunas de las propiedades de la transformada de Fourier. Abajo tomamos $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $x, y \in \mathbb{R}^n$.

- Enunciamos algunas de las propiedades de la transformada de Fourier. Abajo tomamos $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $x, y \in \mathbb{R}^n$.
  - Si $h = f * g$, entonces $\widehat{h} = \widehat{f}\widehat{g}$.

- Enunciamos algunas de las propiedades de la transformada de Fourier. Abajo tomamos $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $x, y \in \mathbb{R}^n$.
  - Si $h = f * g$, entonces $\widehat{h} = \widehat{f}\widehat{g}$.
  - $\widehat{\pi_1(x)(f)} = \pi_{-x}\widehat{f}, \quad \widehat{\pi_x f} = \pi_1(x)(\widehat{f})$.

- Enunciamos algunas de las propiedades de la transformada de Fourier. Abajo tomamos $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $x, y \in \mathbb{R}^n$.
  - Si $h = f * g$, entonces $\widehat{h} = \widehat{f}\widehat{g}$.
  - $\widehat{\pi_1(x)(f)} = \pi_{-x}\widehat{f}, \quad \widehat{\pi_x f} = \pi_1(x)(\widehat{f})$.
  - $\widehat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}(f * \pi_x)(0)$.

- Enunciamos algunas de las propiedades de la transformada de Fourier. Abajo tomamos $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $x, y \in \mathbb{R}^n$.
  - Si $h = f * g$, entonces $\widehat{h} = \widehat{f}\widehat{g}$.
  - $\widehat{\pi_1(x)(f)} = \pi_{-x}\widehat{f}, \quad \widehat{\pi_x f} = \pi_1(x)(\widehat{f})$.
  - $\widehat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}(f * \pi_x)(0)$.

Teorema (Plancherel, Fórmula de Inversión)

Existe una transformación unitaria $U : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene $U(f) = \widehat{f}$. En particular, la transformada de Fourier preserva la norma $\|\cdot\|_2$ (cuando tiene sentido): $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.
La inversa de U es dada por

$$U^{-1}(f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{ix\cdot y}\, \mathrm{dm}(y),$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

1. Convoluciones y $L^1(\mathbb{R}^n)$ como álgebra
2. Transformada de Fourier en $\mathbb{R}^n$
3. Análisis en los grupos $\mathbb{T}^n$ y $\mathbb{R}_+$
   - Medidas invariantes en $\mathbb{T}^n$ y $\mathbb{R}_+$
   - Transformadas en los grupos $\mathbb{T}^n$ y $\mathbb{R}_+$

Medidas invariantes en $\mathbb{T}^n$ y $\mathbb{R}_+$

- Otros grupos Abelianos poseen medidas invariantes naturales.

- Otros grupos Abelianos poseen medidas invariantes naturales.
- El círculo complejo $\mathbb{T}$ posee la medida dada por la longitud de arco normalizada. En términos de integrales, para todo subconjunto de Borel E de $\mathbb{T}$ definimos

$$\mathrm{m}_{\mathbb{T}}(E) = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi)} \chi_E(e^{ix})\,\mathrm{dm}(x).$$

- Otros grupos Abelianos poseen medidas invariantes naturales.
- El círculo complejo $\mathbb{T}$ posee la medida dada por la longitud de arco normalizada. En términos de integrales, para todo subconjunto de Borel E de $\mathbb{T}$ definimos

$$m_{\mathbb{T}}(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi)} \chi_E(e^{ix})\, dm(x).$$

- Más generalmente, en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$, definimos la medida $m_{\mathbb{T}^n}$ por

$$m_{\mathbb{T}^n}(E) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi)^n} \chi_E(e^{i(x_1+\cdots+x_n)})\, dm^n(x),$$

para todo conjunto de Borel E de $\mathbb{T}^n$.

- Otros grupos Abelianos poseen medidas invariantes naturales.
- El círculo complejo $\mathbb{T}$ posee la medida dada por la longitud de arco normalizada. En términos de integrales, para todo subconjunto de Borel E de $\mathbb{T}$ definimos

$$\mathrm{m}_{\mathbb{T}}(E) = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi)} \chi_E(e^{ix})\, \mathrm{dm}(x).$$

- Más generalmente, en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$, definimos la medida $\mathrm{m}_{\mathbb{T}^n}$ por

$$\mathrm{m}_{\mathbb{T}^n}(E) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[0,2\pi)^n} \chi_E(e^{i(x_1+\cdots+x_n)})\, \mathrm{dm}^n(x),$$

para todo conjunto de Borel E de $\mathbb{T}^n$.
- Por la propiedad $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ del mapeo exponencial, se sigue que

$$\mathrm{m}_{\mathbb{T}^n}(t\cdot E) = \mathrm{m}_{\mathbb{T}^n}(E),$$

para todo $E \subset \mathbb{T}^n$ y $t \in \mathbb{T}^n$.

- En el grupo multiplicativo $\mathbb{R}_+$ de números reales positivos la medida de Lebesgue satisface

$$\mathrm{m}(aE) = a\,\mathrm{m}(E),$$

para todo $E \subset \mathbb{R}_+$ Borel y $a \in \mathbb{R}_+$.

- En el grupo multiplicativo $\mathbb{R}_+$ de números reales positivos la medida de Lebesgue satisface

$$\mathrm{m}(aE) = a\,\mathrm{m}(E),$$

para todo $E \subset \mathbb{R}_+$ Borel y $a \in \mathbb{R}_+$.

- Concluimos que la medida en $\mathbb{R}_+$ dada por

$$d\mathrm{m}_{\mathbb{R}_+}(x) = \frac{d\mathrm{m}(x)}{x},$$

es invariante bajo las traslaciones dadas por el producto en $\mathbb{R}_+$.

- En el grupo multiplicativo $\mathbb{R}_+$ de números reales positivos la medida de Lebesgue satisface

$$\mathrm{m}(aE) = a\,\mathrm{m}(E),$$

para todo $E \subset \mathbb{R}_+$ Borel y $a \in \mathbb{R}_+$.

- Concluimos que la medida en $\mathbb{R}_+$ dada por

$$d\mathrm{m}_{\mathbb{R}_+}(x) = \frac{d\mathrm{m}(x)}{x},$$

es invariante bajo las traslaciones dadas por el producto en $\mathbb{R}_+$.

- Para ambos grupos obtenemos los correspondientes espacios de funciones integrables: $L^1(\mathbb{T}^n)$ y $L^2(\mathbb{T}^n)$, para $\mathbb{T}^n$, y $L^1(\mathbb{R}_+)$ y $L^2(\mathbb{R}_+)$, para $\mathbb{R}_+$.

- Para ambos grupos $\mathbb{T}^n$ y $\mathbb{R}_+$ se pueden considerar "transformadas de Fourier" a partir de sus homomorfismos.

- Para ambos grupos $\mathbb{T}^n$ y $\mathbb{R}_+$ se pueden considerar "transformadas de Fourier" a partir de sus homomorfismos.

Teorema

- *Las representaciones irreducible unitarias de $\mathbb{T}^n$ son todas dadas por los mapeos $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}$ de la forma $z \mapsto z^\alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ y $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$.*

- Para ambos grupos $\mathbb{T}^n$ y $\mathbb{R}_+$ se pueden considerar "transformadas de Fourier" a partir de sus homomorfismos.

Teorema

- *Las representaciones irreducible unitarias de $\mathbb{T}^n$ son todas dadas por los mapeos $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}$ de la forma $z \mapsto z^\alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ y $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$.*
- *Las representaciones irreducibles reales de $\mathbb{R}_+$ son todas dadas por los mapeos $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de la forma $r \mapsto r^x$, donde $x \in \mathbb{R}$.*

Definición

Dada $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$, los ***coeficientes de Fourier de*** f *son dados por la sucesión* $(\widehat{f}(\alpha))_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ *donde*

$$\widehat{f}(\alpha) = \langle f, z^\alpha \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(z)\overline{z}^\alpha \, \mathrm{dm}_{\mathbb{T}^n}(z).$$

Definición

*Dada $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$, los **coeficientes de Fourier de** f son dados por la sucesión $(\widehat{f}(\alpha))_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ donde*

$$\widehat{f}(\alpha) = \langle f, z^\alpha \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(z)\overline{z}^\alpha \, \mathrm{dm}_{\mathbb{T}^n}(z).$$

Teorema

Dada $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$, se tiene $\widehat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$. Además

Definición

*Dada $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$, los **coeficientes de Fourier de** f son dados por la sucesión $(\widehat{f}(\alpha))_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ donde*

$$\widehat{f}(\alpha) = \langle f, z^\alpha\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(z)\overline{z}^\alpha \,\mathrm{dm}_{\mathbb{T}^n}(z).$$

Teorema

Dada $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$, se tiene $\widehat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$. Además

- ***(Plancherel)*** $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$, *y* $f \mapsto \widehat{f}$ *es una isometría.*

Definición

*Dada $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$, los **coeficientes de Fourier de** f son dados por la sucesión $(\widehat{f}(\alpha))_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ donde*

$$\widehat{f}(\alpha) = \langle f, z^\alpha\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(z)\overline{z}^\alpha \, \mathrm{d}m_{\mathbb{T}^n}(z).$$

Teorema

Dada $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$, se tiene $\widehat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$. Además

- ***(Plancherel)*** $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$, *y* $f \mapsto \widehat{f}$ *es una isometría.*
- ***(Fórmula de inversión)*** *Para toda* $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\alpha) z^\alpha,$$

con convergencia en $L^2(\mathbb{T}^n)$.

Definición

*La **transformada de Mellin de una función** $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ se define por*

$$\mathcal{M}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(r) r^x \, \mathrm{dm}_{\mathbb{R}_+}(r) = \int_{\mathbb{R}_+} f(r) r^{x-1} \, \mathrm{dm}(r).$$

Definición

*La **transformada de Mellin de una función** $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ se define por*

$$\mathcal{M}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(r) r^x \, \mathrm{dm}_{\mathbb{R}_+}(r) = \int_{\mathbb{R}_+} f(r) r^{x-1} \, \mathrm{dm}(r).$$

Ejercicio (*)

Investigar las propiedades de la transformada de Mellin.