PRIMER EXAMEN PARCIAL
ÁLGEBRA
1 DE MARZO DE 2017

Instrucciones: Resolver todos los problemas presentado justificaciones y cálculos completos.

1. Probar que un grupo G es Abeliano si y sólo si el mapeo $x \mapsto x^{-1}$ de G en si mismo es un homomorfismo.
2. Probar que para un grupo finito G las siguientes condiciones son equivalentes.
   a) $|G|$ es primo.
   b) $G \neq \{e\}$ y G no posee subgrupos propios (es decir distintos de G y de $\{e\}$).
   c) G es isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ para algún número primo p.
3. Sea G un grupo y N un subgrupo. Suponga que para cualesquiera $x, y \in G$ tenemos $xyx^{-1}y^{-1} \in N$. En otras palabras N contiene al subgrupo conmutador $[G, G]$ de G. Probar que N es normal en G.
4. Sea $f : R \to S$ un homomorfismo de anillos no idénticamente cero. Si R posee identidad 1_R y S no posee divisores de cero, entonces S es un anillo con identidad dada por $f(1_R)$.
5. Sea R un anillo conmutativo con identidad 1 y sea $M \neq R$ un ideal. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes.
   a) M es un ideal maximal.
   b) Si $x \in R \setminus M$, entonces existe $y \in R$ tal que $1 - xy \in M$.
   Además, dado x como en (b) describa la colección de todos los y que satisfacen la conclusión de (b).
6. Sea R un dominio Euclideano. Si $a \in R$ es distinto de cero, entonces existe solamente un número finito de ideales que contienen al ideal (a).