TERCER EXAMEN PARCIAL
ÁLGEBRA I
24 DE MAYO DE 2017

Instrucciones: Resolver 5 de los problemas siguientes presentado justificaciones y cálculos completos. Para cada entero k, denotaremos por $[k]$ la clase de k en $\mathbb{Z}_m$.

1. Dar un ejemplo de un anillo R y de un R-módulo A tales que $A^* = 0$.
2. Probar que si m, n son enteros positivos primos relativos, entonces $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) = 0$.
3. Sea R un anillo con identidad y A un R-módulo izquierdo unitario. Probar que se cumplen los siguientes isomorfismos de R-módulos izquierdos.
   a) $A \simeq \operatorname{Hom}_R(R, A)$.
   b) $A \simeq R \otimes_R A$.
4. Sean R un anillo conmutativo y A, B, C R-módulos. Probar que existen isomorfismos de R-módulos con las propiedades indicadas. En particular, definir de manera precisa cada mapeo y probar que efectivamente son isomorfismos.
   a) $A \otimes_R B \simeq B \otimes_R A$, tal que $a \otimes b \mapsto b \otimes a$.
   b) $A \otimes_R (B \otimes_R C) \simeq (A \otimes_R B) \otimes_R C$ tal que $a \otimes (b \otimes c) \mapsto (a \otimes b) \otimes c$.
   c) $\operatorname{Hom}_R(A, \operatorname{Hom}_R(B, C)) \simeq \operatorname{Hom}_R(A \otimes_R B, C)$ tal que $f \mapsto \widehat{f}$ donde $\widehat{f}(a \otimes b) = f(a)(b)$.
5. Sean A un grupo Abeliano finito y m un entero positivo tal que $mA = 0$. Probar que existe un homomorfismo $A \otimes \mathbb{Z}_m \to A$ bien definido tal que
$$a \otimes [k] \mapsto ka.$$
   Probar además que tal homomorfismo es un isomorfismo.
6. Sea m un entero positivo fijo.
   a) Sea $\rho : \mathbb{Z}_m \to \operatorname{GL}(V)$ una representación en un espacio complejo V de dimensión finita. Probar que para todo $[k] \in \mathbb{Z}_m$, se cumple $\rho([k])^m = 1$
   b) Usar el inciso anterior para describir todas las representaciones de grado 1 de $\mathbb{Z}_m$.
7. Sea G un grupo finito y $\rho : G \to \operatorname{GL}(V)$ una representación en un espacio vectorial V complejo de dimensión finita.

a) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal que entrelaza a la representación ρ. Es decir, tal que

$$T \circ \rho(g) = \rho(g) \circ T$$

para todo $g \in G$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un eigenvalor de T. Probar que $\rho(g)(W_\lambda) = W_\lambda$ para todo $g \in G$, donde W_λ es el eigenespacio de T para el eigenvalor λ.

b) Suponga que G es Abeliano. Diagonalizar simultáneamente a las transformaciones lineales $\rho(g)$ ($g \in G$) para concluir que existe una descomposición finita

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k,$$

que satisface $\rho(g)(W_j) = W_j$ y tal que cada $\rho(g)|_{W_j}$ es un múltiplo de la identidad para cada $g \in G$ y $j = 1, \ldots, k$.

c) Usar los incisos anteriores para probar que si G es Abeliano, ρ es irreducible y $V \neq 0$, entonces V es dimensión 1.