Tarea 2.

1) Sea $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia de subgrupos normales de un grupo G. Probar que $\bigcap_{i\in I} N_i$ es normal en G.

2) Sea G un grupo y H un subgrupo con $|H| = n < +\infty$. Probar que si H es el único subgrupo de G de orden n, entonces H es normal en G.

3) Sea $f: G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Si H es Abeliano y K es un subgrupo de G tal que $Ker(f) \subseteq K$, entonces K es normal en G.

4) Llamamos a un grupo finitamente generado si es generado por algún conjunto finito. Sean G un grupo y H un subgrupo normal. Probar que si H y G/H son finitamente generados, entonces

G también lo es.

5) Sea $f: G \longrightarrow H$ un homomorfismo con Kernel N. Probar que para todo subgrupo K de G se cumple:

$$f^{-1}(f(K)) = KN$$

Concluir que:

$$K = f^{-1}(f(K)) \iff N \leq K.$$

6) Sea G un grupo y defina

$$[G, G] = \langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G \rangle,$$

es decir, $[G,G]$ es el subgrupo generado por los conmutadores:

$$[x,y]=xyx^{-1}y^{-1}, \quad x,y\in G.$$

Probar que $[G,G]$ es normal en G y que:

$$G/[G,G]$$

es Abeliano.

($[G,G]$ se conoce como el subgrupo conmutador de G)

7) Sea $f: G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos con H Abeliano. Probar que existe un homomorfismo $\hat{f}: G/_{[G,G]} \longrightarrow H$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d] & H \\
G/_{[G,G]} \arrow[ur, "\hat{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

8) Si G es un grupo y H un subgrupo denotamos:

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gH = Hg\}$$

(normalizador de H en G)

$$Z_G(H) = \{g \in G \mid gh = hg \ \forall h \in H\}$$

(centralizador de H en G).

Probar que $N_G(H)$, $Z_G(H)$ son subgrupos de G tales que: $Z_G(H) \leq N_G(H)$, $H \trianglelefteq N_G(H)$.