Tarea 3.

Resolver los siguientes problemas de las páginas 120 y 121 del libro de Hungerford: 1, 3, 6, 7, 12

Resolver también los siguientes problemas.

1) Sea $R = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ el espacio de funciones suaves $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Probar que con las operaciones usuales de suma y producto de

funciones, R es un anillo conmutativo con identidad. Probar que R posee divisores de cero (Sugerencia: Existen funciones suaves no idénticamente cero que se anulan en un intervalo no vacío).

2) Sea $(R_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de anillos con identidad. Defina la suma directa:

$$R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n = \left\{ (r_n)_{n\in\mathbb{Z}} \;\middle|\; \begin{array}{l} r_n \in R_n \ \forall n \in \mathbb{Z} \\ r_n \neq 0 \text{ solo para} \\ \text{un número finito} \\ \text{de índices } n \end{array} \right\}$$

Probar que con la suma y el producto componente a componente, R es un anillo.

Probar que si $1_{R_n} \neq 0_{R_n}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, entonces R no tiene identidad.

3) Para todo campo K probar que:

$$K^* = \{x \in K \mid x \neq 0\}$$

es un grupo con la operación producto heredada de K.

Probar que si $f: K \longrightarrow L$ es un homomorfismo de anillos, $f \neq 0$ y K, L son campos, entonces:

$$f(K^*) \subseteq L^*.$$

En particular, f define un homomorfismo de grupos $K^* \longrightarrow L^*$.