TAREA 5
ANÁLISIS ARMÓNICO EN GRUPOS COMPACTOS
11 DE OCTUBRE DE 2017

Fecha de entrega: 18 de Octubre.

1. Para un espacio vectorial complejo V defina el espacio conjugado $\overline{V}$ mediante las siguientes condiciones.
   a) El conjunto $\overline{V}$ consta de los mismos puntos que V.
   b) La suma en $\overline{V}$ es la misma que la de V.
   c) El producto por escalares $\odot$ de $\overline{V}$ es dado en términos del de V mediante
   $$z \odot v = \overline{z}v$$
   donde $z \in \mathbb{C}$ y $v \in \overline{V} = V$.

   Probar que para cualquier espacio vectorial complejo W y $T : V \to W$ una transformación aditiva las siguientes condiciones son equivalentes.
   a) $T : V \to W$ es anti-lineal compleja, es decir, $T(zv) = \overline{z}T(v)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $v \in V$.
   b) $T : \overline{V} \to W$ es lineal compleja.
2. Sean $\rho_j : G \to \mathrm{GL}(V_j)$ $(j = 1, 2)$ dos representaciones de dimensión finita de un grupo de Lie. Probar que el mapeo
   $$\rho : G \to \mathrm{GL}(V_1 \oplus V_2)$$
   $$\rho(g)(v_1 + v_2) = \rho_1(g)v_1 + \rho_2(g)v_2$$
   donde $g \in G$ y $v_j \in V_j$ $(j = 1, 2)$, es un homomorfismo de grupos y por tanto define una representación de G sobre $V_1 \oplus V_2$.
3. Sea $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación de un grupo de Lie sobre un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Probar que si existen V_1, V_2 subespacios G-invariantes de V tales que $V = V_1 \oplus V_2$, entonces el mapeo
   $$T : V_1 \oplus V_2 \to V$$
   $$(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2,$$
   define un isomorfismo de G-módulos.
4. Sean $\rho_j : G \to \mathrm{GL}(V_j)$ $(j = 1, 2)$ dos representaciones de dimensión finita de un grupo de Lie. Probar que $V_1^* \otimes V_2^*$ es un G-módulo isomorfo al G-módulo $B(V_1 \times V_2; \mathbb{C})$ de formas bilineales complejas con dominio $V_1 \times V_2$.

5. Sea $n \neq 0$ un entero y considere la representación del círculo $\mathbb{T}$ dada por

$$\rho_n : \mathbb{T} \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$$
$$\rho_n(z) = z^n.$$

Probar que 0 es el único vector $\mathbb{T}$-invariante en $\mathbb{C}$ respecto de la representación ρ_n.