TAREA 6
ANÁLISIS ARMÓNICO EN GRUPOS COMPACTOS
18 DE OCTUBRE DE 2017

Fecha de entrega: 1 de Noviembre.

En todos los problemas G denota un grupo de Lie compacto y todas las representaciones son continuas en espacios vectoriales complejos de dimensión finita. Además, para cada representación $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ suponemos dado y fijo un producto Hermitiano G-invariante.

1. Para una representación $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ recordamos que la representación dual es definida por

$$\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$$
$$\rho^*(g)(\lambda) = \lambda \circ \rho(g^{-1}).$$

Si r^ρ_{ij} son los coeficientes matriciales respecto de una base ortonormal $e_1, \dots, e_n$ de V, entonces respecto de la base dual $e^*_1, \dots, e^*_n$ de V^* los coeficientes matriciales de ρ^* satisfacen

$$r^{\rho^*}_{ij}(g) = r^\rho_{ji}(g^{-1}),$$

para todo $g \in G$ y para cualesquiera $i, j = 1, \dots, n$.

Dada $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación, considere la transformación bilineal compleja dada por

$$B : V^* \times V \to \mathbb{C}$$
$$B(\lambda, v) = \lambda(v).$$

2. Probar que B satisface

$$B(\rho^*(g)\lambda, v) = B(\lambda, \rho(g^{-1})v),$$

para todo $g \in G, v \in V, \lambda \in V^*$.

3. Utilizar el problema anterior para probar que el isomorfismo lineal complejo

$$\varphi : V \to V^{**} = (V^*)^*$$
$$v \mapsto B(\cdot, v),$$

es un mapeo de entrelace. Concluir así que $V \simeq V^{**}$ como G-módulos.

4. Para todo subespacio W de V definimos el aniquilador de W por
$$W^{\perp} = \{\lambda \in V^* | B(\lambda, v) = \lambda(v) = 0,\ \forall v \in W\}.$$
Probar que si W es subespacio G-invariante de V, entonces $W^{\perp}$ es subespacio G-invariante de V^*. Usar este hecho para probar que si V es irreducible, entonces V^* es irreducible.
5. Si $\sigma : G \to \mathrm{GL}(W)$ es otra representación, $T : V \to W$ es un mapeo lineal, y $T^* : W^* \to V^*$ es el mapeo dual definido por la relación
$$B(T^*(\lambda), v) = B(\lambda, T(v)),$$
donde $v \in V$ y $\lambda \in V^*$, entonces
$$T \text{ es de entrelace } \iff T^* \text{ es de entrelace.}$$
6. Usar los problemas anteriores para probar que si V, W son dos G-módulos, entonces se cumple
$$V \simeq W \iff V^* \simeq W^*,$$
donde el isomorfismo es de G-módulos.