PRIMER EXAMEN PARCIAL
ANÁLISIS FUNCIONAL
13 DE SEPTIEMBRE DE 2018.

Resolver los siguientes problemas justificando todas sus afirmaciones.

1. Sea H un espacio de Hilbert. Probar que la siguiente identidad se cumple para todo $f, g \in H$
$$4\langle f, g\rangle = \|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\|f+ig\|^2 - i\|f-ig\|^2.$$
2. Sea H un espacio de Hilbert con un conjunto ortonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Probar que para todo $h \in H$ se cumple
$$\lim_{n\to+\infty} \langle h, e_n\rangle = 0.$$
3. Sean H, K espacios de Hilbert y $T : H \to K$ una isometría. Es decir, se cumple
$$\langle T(f), T(g)\rangle_K = \langle f, g\rangle_H$$
para cualesquiera $f, g \in H$. Probar que el subespacio $T(H)$ es cerrado en K.
4. Sobre el espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$ considere la transformación lineal $T : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ tal que para todo $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ la sucesión $T(a)$ es dada por
$$(T(a))_k = a_{k+1}$$
para todo $k \in \mathbb{Z}$. Probar que T es un operador acotado con $\|T\| = 1$. Calcular el operador adjunto T^*.
5. Sea $T : H \to K$ un operador abierto entre espacios de Hilbert. Es decir, para todo $U \subset H$ abierto, el conjunto $T(U)$ es abierto en K. Probar que si T es compacto, entonces K es de dimensión finita.

Soluciones.

- Problema 1.
Desarrollando el producto interno tenemos

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^2 &= \langle f+g, f+g\rangle \\
&= \langle f, f\rangle + \langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle + \langle g, g\rangle \\
&= \|f\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle f, g\rangle) + \|g\|^2.
\end{aligned} \tag{1}$$

Reemplazando en (1) g con $-g$ obtenemos

$$\|f-g\|^2 = \|f|^2 - 2\mathrm{Re}(\langle f,g\rangle) + \|g\|^2. \tag{2}$$

Reemplazando en (1) g con ig obtenemos

$$\begin{aligned} \|f+ig\|^2 &= \|f\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle f,ig\rangle) + \|ig\|^2 \\ &= \|f\|^2 + 2\mathrm{Im}(\langle f,g\rangle) + \|g\|^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Finalmente, reemplazando en (1) g con $-ig$ obtenemos

$$\|f-ig\|^2 = \|f\|^2 - 2\mathrm{Im}(\langle f,g\rangle) + \|g\|^2. \tag{4}$$

Al sumar las ecuaciones $(1) - (2) + i(3) - i(4)$ obtenemos el resultado.

- Problema 2.
  Por la desigualdad de Bessel tenemos
  $$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle h,e_n\rangle|^2 \leq \|h\|^2.$$
  En particular, la serie
  $$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle h,e_n\rangle|^2$$
  converge y por tanto $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle h,e_n\rangle = 0$.

- Problema 3.
  La condición implica que
  $$\|T(h)\|_K^2 = \langle T(h),T(h)\rangle_K = \langle h,h\rangle_K = \|h\|^2,$$
  para todo $h \in H$. En particular, T es un operador acotado.
  Sea $(h_n)_n$ una sucesión en H tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} T(h_n) = k$ donde $k \in K$. Por tanto, $(T(h_n))_n$ es de Cauchy y la identidad
  $$\|h_n - h_m\|_H = \|T(h_n) - T(h_m)\|_K$$
  implica que $(h_n)_n$ es de Cauchy H. Como H es espacio de Hilbert, concluimos la existencia de $h \in H$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = h$. Luego por la continuidad de T tenemos
  $$k = \lim_{n\to+\infty} T(h_n) = T\left(\lim_{n\to+\infty} h_n\right) = T(h).$$
  Por tanto, $k \in T(H)$ y concluimos así que $T(H)$ es cerrado.

- Problema 4.

  Para $a \in \ell^2(\mathbb{Z})$ calculamos que

$$\begin{aligned}\|T(a)\|^2 &= \langle T(a), T(a)\rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |T(a)_k|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{k+1}|^2 \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 = \|a\|^2.\end{aligned}$$

  En particular, T es acotado y $\|T\| = 1$.

  Para $a, b \in \ell^2(\mathbb{Z})$ observamos que

$$\langle T(a), b\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} T(a)_k \bar{b}_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{k+1}\bar{b}_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \bar{b}_{k-1}.$$

  Por tanto, el operador adjunto es dado por

$$T^*(b)_k = b_{k-1}$$

  para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $b \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

- Problema 5.

  Denotamos con $B_H(x, r)$ y $B_K(y, r)$ las bolas abiertas de radio r centradas en $x \in H$ y $y \in K$, respectivamente.

  Como T es compacto, el conjunto $T(B_H(0, 1))$ es relativamente compacto en K. Por otro lado, como T es abierto el conjunto $T(B_H(0, 1))$ es además abierto. Por tanto, existe $r > 0$ tal que

$$B_K(0, r) \subset T(B_H(0, 1)).$$

  Lo anterior implica que $B_K(0, r)$ es relativamente compacto. También sabemos que

$$B_K(0, r) = rB_K(0, 1)$$

  y como el mapeo $y \mapsto ry$ es un homeomorfismo en K concluimos que $B_K(0, 1)$ es relativamente compacto. Este último hecho prueba que K es de dimensión finita.