Representaciones de C^*-álgebras.

Sea A C^*-álgebra, H espacio de Hilbert

$\therefore$ $\mathcal{L}(H)$ operadores acotados es C^*-álgebra.

Una representación de A es un $*$-homomorfismo:

$$\pi : A \longrightarrow \mathcal{L}(H).$$

¿π continua? Siempre.

$$\|\pi(x)\| \leq \|x\| \quad \forall x \in A.$$

Notación: (π, H) de A.

(π_1, H_1), (π_2, H_2) representaciones de A son unitariamente equivalentes si

$\exists$ $U : H_1 \longrightarrow H_2$ unitario

$\ni$ $\pi_2(x) U = U \pi_1(x) \quad \forall x \in A.$

$U^* \pi_2(x) U = \pi_1(x)$

Obs: Si $1 \in A$:

$$1^* = 1 \ , \quad 1^2 = 1$$

$\therefore$ $\pi(1) = \pi(1)^*$, $\pi(1)^2 = \pi(1)$

Sea (π, H) rep. de A.
Si $\xi, \eta \in H$, $x \in A$:

$$\langle \pi(x)\eta, \xi \rangle = \langle \eta, \pi(x)^* \xi \rangle$$
$$= \langle \eta, \pi(x^*) \xi \rangle$$

$$\pi(x^*)\xi = 0 \quad \forall x \in A$$
$$\iff \xi \perp \pi(x)\eta \quad \forall x \in A, \eta \in H.$$

Por tanto:

$$\bigcap_{x \in A} \operatorname{Ker}(\pi(x)) = (\pi(A)H)^{\perp}$$

Luego son equivalentes:

1) $\bigcap_{x \in A} \operatorname{Ker}(\pi(x)) = 0$

2) El subespacio cerrado generado por $\pi(A)H$ es H:
$$[\pi(A)H] = H$$

(Prop. 9.2)

Def.: La representacion (π, H) de A es propia o nodegenerada si se cumple 1) o 2).

En general, $[\pi(A)H]$ es el espacio esencial de (π, H).

Obs.: (π, H) de A,

$$\pi(x)\pi(A)H = \pi(xA)H \subseteq \pi(A)H$$

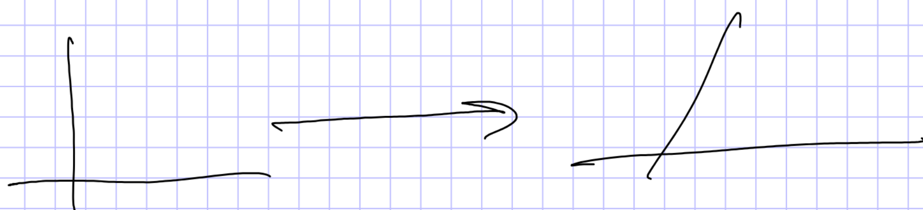
$$\therefore \quad \pi(x)[\pi(A)H] \subseteq [\pi(A)H]$$

Obs.: $T : H \longrightarrow H$ acotado

$M \subseteq H$ subespacio invariante.

i.e. $T(M) \subseteq M$.

$\not\Rightarrow \quad T(M^\perp) \subseteq M^\perp$



Pero para (π, H) de A.

$M \subseteq H$ se dice invariante bajo π si

$$\pi(x)M \subseteq M \quad \forall x \in A.$$

En este caso:

$$\pi(x)M^\perp \subseteq M^\perp \quad \forall x \in A$$

Pues:

$$\langle \pi(x)\eta, \xi \rangle = \langle \underset{\uparrow M^\perp}{\eta}, \underset{\uparrow M}{\pi(x^*)\xi} \rangle = 0$$

$\eta \in M^\perp$, $\xi \in M$

$$\therefore \quad \pi(x)\eta \in M^\perp$$

Suma directa:

Sean (π_α, H_α), $\alpha \in I$, rep's. de A.

Tomamos:

$$\bigoplus_{\alpha \in I} H_\alpha = \left\{ (v_\alpha)_{\alpha \in I} \;\middle|\; \begin{array}{l} v_\alpha \in H_\alpha \ \forall \alpha \in I \\ \sum_\alpha \|v_\alpha\|_\alpha^2 < +\infty \end{array} \right\}$$

$$\langle (v_\alpha)_\alpha, (u_\alpha)_\alpha \rangle = \sum_{\alpha \in I} \langle v_\alpha, u_\alpha \rangle_\alpha$$

Definimos:

$$\pi = (\pi_\alpha)_{\alpha \in I} = \bigoplus_{\alpha \in I} \pi_\alpha : A \longrightarrow \mathcal{L}(H)$$

$$H = \bigoplus_{\alpha \in I} H_\alpha$$

$$\pi(x)((v_\alpha)_\alpha) = (\pi_\alpha(x) v_\alpha)_{\alpha \in I} \quad (¿\in H?)$$

Vemos que:

$$\sum_{\alpha \in I} \|\pi_\alpha(x) v_\alpha\|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{\alpha \in I} \|\pi_\alpha(x)\|^2 \|v_\alpha\|^2$$

$$\leq \sum_{\alpha \in I} \|x\|^2 \|v_\alpha\|^2 < +\infty.$$

Problema: Dada A C^*-álgebra hallar representaciones.

De hecho hallar:

$$A \hookrightarrow \mathcal{L}(H) \quad ©$$

Más generalmente, hacerlo para A álgebra de Banach involutiva salvo por ☺

Dada A (álgebra de Banach involutiva):

hallar un H donde A actue y $\exists$ un $\langle , \rangle$.

A tiene $\| \|$ pero no $\langle , \rangle$.

A cuenta con el mapeo:

$$A \times A \longrightarrow A$$
$$(x, y) \longmapsto y^* x$$

que es Hermitiano, pero $A \neq \mathbb{C}$.

Problema: Hallar:

$$\omega : A \longrightarrow \mathbb{C}$$

Funcional lineal tal que

$$(x, y) \longmapsto \omega(y^* x)$$

"genere" espacios de Hilbert.

Definición:
Un funcional lineal ω en A se dice positivo si:

$$\omega(x^* x) \geq 0 \quad \forall x \in A.$$

Si $\|\omega\| = 1$, ω se dice estado.

Si $\omega(x^* x) \neq 0$ $\forall x \neq 0$, ω se dice fiel.

Recordamos el cono positivo:

$$A_+ = \{ y \in A \mid y = x^*x,\ x \in A \}$$

ω es positivo

$\iff \omega(y) \geq 0 \quad \forall y \in A_+$.

Ejemplo:

(π, H) rep. de A.

Dado $\xi \in H$ se define:

$$\omega = \omega_\xi = \omega(\pi, \xi) : A \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\omega(x) = \langle \pi(x)\xi, \xi \rangle$$

$\therefore$ ω es positivo:

$$\begin{aligned}\omega(x^*x) &= \langle \pi(x^*x)\xi, \xi \rangle \\ &= \langle \pi(x)^*\pi(x)\xi, \xi \rangle \\ &= \langle \pi(x)\xi, \pi(x)\xi \rangle \geq 0\end{aligned}$$

Notación:

A álgebra de Banach involutiva.

$f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ funcional lineal.

Denotamos el adjunto de f:

$$f^* : A \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f^*(x) = \overline{f(x^*)}$$

f se dice Hermitiano si
$$f^* = f.$$

Ejemplo:

(π, H) de A, $\xi, \eta \in H$

$$\omega = \omega(\pi, \xi, \eta) : A \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\omega(x) = \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle$$

$$\therefore \quad \omega(\pi, \xi, \eta)^* = \omega(\pi, \eta, \xi)$$

Veremos que:

$$(x, y) \longmapsto \omega(y^* x)$$

es producto Hermitiano si ω es positivo.

Prop.: A algebra de Banach involutiva, ω funcional positivo. <u>Entonces</u>:

$$\omega(y^* x) = \overline{\omega(x^* y)}$$

$$|\omega(y^* x)|^2 \leq \omega(x^* x)\, \omega(y^* y)$$

$\forall x, y \in A$.

(Pero: $\omega(x^* x) = 0 \not\Rightarrow x = 0$)

Recordamos:

En $L^1(\mathbb{R}^n)$ la función:

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx$$

NO es norma, si $L^1(\mathbb{R}^n)$ son funciones (no clases de funciones)

En nuestro caso tomamos:

$$N_\omega = \{x \in A \mid \omega(x^*x) = 0\}$$

Y vemos que en A/N_ω:

$$([x],[y]) \longmapsto \omega(y^*x)$$

es producto Hermitiano definido positivo.