Existencia:

Sea ω dado.

$\omega \rightsquigarrow N_\omega : x \ni \omega(x^*x) = 0$

$\rightsquigarrow A/N_\omega$ con:

$$\eta_\omega : A \longrightarrow A/N_\omega$$

$$\langle \eta_\omega(x), \eta_\omega(y) \rangle = \omega(y^* x)$$

$\rightsquigarrow H_\omega$ completación de A/N_ω.

La representación:

$$\pi_\omega^0 : A \longrightarrow \mathcal{L}(A/N_\omega).$$

$$\pi_\omega^0(a) : A/N_\omega \longrightarrow A/N_\omega$$

$$\pi_\omega^0(a)\,\eta_\omega(x) = \eta_\omega(ax)$$

Bien definido pues:

$x' = x + n$ con $n \in N_\omega$

$\therefore\ ax' = ax + an \Rightarrow \eta_\omega(ax') = \eta_\omega(ax)$

Además:

$|\langle \pi_\omega^0(a)\,\eta_\omega(x), \eta_\omega(y) \rangle| =$

$= |\langle \eta_\omega(ax), \eta_\omega(y) \rangle|$ $\qquad \omega(x^* a^* a x)^{\frac{1}{2}}$

$= |\omega(y^* a x)|$

$\leq \omega(y^* y)^{\frac{1}{2}}\, \omega((ax)^* ax)^{\frac{1}{2}}$

$= \|\eta_\omega(y)\|\ \omega_{x^*}(a^* a)^{\frac{1}{2}}$

por un lema:

$\leq \|\eta_\omega(y)\|\ \|a^* a\|^{\frac{1}{2}}\ \omega(x^* x)^{\frac{1}{2}}$

$\leq \|a\| \, \|\eta_\omega(y)\| \, \|\eta_\omega(x)\|$

$\Rightarrow$ $\pi_\omega^0(a)$ acotado con $\|\pi_\omega^0(a)\| \leq \|a\|$

π_ω^0 es obviamente lineal.

$\pi_\omega^0(a^*) = \pi_\omega^0(a)^*$:

$\langle \pi_\omega^0(a)^* \eta_\omega(x), \eta_\omega(y) \rangle =$

$= \langle \eta_\omega(x), \pi_\omega^0(a)\, \eta_\omega(y) \rangle$

$= \langle \eta_\omega(x), \eta_\omega(ay) \rangle$

$= \omega((ay)^* x) = \omega(y^* a^* x)$

$= \langle \eta_\omega(a^* x), \eta_\omega(y) \rangle$

$= \langle \pi_\omega^0(a^*)\, \eta_\omega(x), \eta_\omega(y) \rangle$

$\therefore$ $\pi_\omega^0 : A \longrightarrow \mathcal{L}(A/N_\omega)$ es $*$-homomorfismo.

Como $H_\omega = \overline{A/N_\omega}$, entonces $\forall a \in A$ $\exists!$

$$\pi_\omega(a) : H_\omega \longrightarrow H_\omega$$

$\ni$ $$\pi_\omega(a)|_{A/N_\omega} = \pi_\omega^0(a).$$

Esto define $\pi_\omega : A \longrightarrow \mathcal{L}(H_\omega)$ representación.

Recordamos que:

$$|\omega(x)| \leq r \|\omega\|^{1/2} \|\eta_\omega(x)\|$$

r cota para una unidad aproximada.

Esto implica que podemos completar el diagrama con $\hat{\omega}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\eta_\omega"'] & \mathbb{C} \\ A/N_\omega \subseteq H_\omega \arrow[ur, dashed, "\tilde{\omega}"'] & \end{tikzcd} \qquad \tilde{\omega}(\eta_\omega(x)) = \omega(x)$$

Además, $\hat{\omega}$ es funcional lineal acotado con:

$$\|\hat{\omega}\| \leq \gamma \|\omega\|^{1/2}$$

Por el Tma. de Riesz, $\exists\ \xi_\omega \in H_\omega$ tal que:

$$\omega(x) = \hat{\omega}(\eta_\omega(x)) = \langle \eta_\omega(x), \xi_\omega \rangle$$

$\forall x \in A$.

Tenemos:

$$\langle \eta_\omega(x), \eta_\omega(y) \rangle = \omega(y^* x)$$
$$= \langle \eta_\omega(y^* x), \xi_\omega \rangle$$
$$= \langle \pi_\omega(y^*) \eta_\omega(x), \xi_\omega \rangle$$
$$= \langle \eta_\omega(x), \pi_\omega(y) \xi_\omega \rangle$$

$\therefore \quad \eta_\omega(y) = \pi_\omega(y) \xi_\omega \quad \forall y \in A.$

Concluimos:

$$\pi_\omega(A) \xi_\omega = A/N_\omega$$

$\therefore \quad [\pi_\omega(A) \xi_\omega] = H_\omega.$

Además:

$$\omega(x) = \langle \eta_\omega(x), \xi_\omega \rangle = \langle \pi_\omega(x) \xi_\omega, \xi_\omega \rangle \quad //$$

π rep. de A nodegenerada:

Def.: $H = [\pi(A)H]$

En este caso:

$$H_\omega = [\pi_\omega(A)\xi_\omega]$$

Definición:
Una representación $\pi : A \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ se dice cíclica si $\exists\ \xi \in H \ni$

$$H = [\pi(A)\xi]$$

y ξ es llamado vector cíclico.

Las rep's del Tma. son cíclicas.
Sea (π, H) rep. cíclica de A, con vector ξ. Sea:

$$\omega(x) = \langle \pi(x)\xi, \xi \rangle \quad \forall x \in A.$$

$\therefore$ ω es funcional positivo y el Tma. nos da:

$$(\pi_\omega, H_\omega), \ \xi_\omega \in H_\omega$$

Por unicidad del Tma., $\exists$

$$U : H \longrightarrow H_\omega \text{ unitario } \ni$$

$$\pi_\omega(x)U = U\pi(x) \quad \forall x \in A.$$

$$U\xi = \xi_\omega.$$

Luego hay una correspondencia:

$$\omega \text{ positivo} \longleftrightarrow (\pi, H), \xi \text{ cíclica.}$$

Obs.: Sea ω positivo en A.

$\Rightarrow \forall c>0 \quad c\omega$ es positivo.

$$c\omega(x^*x) \geq 0 \quad \forall x \in A.$$

$$\begin{array}{l} N_\omega : x \ni \omega(x^*x) = 0 \\ \parallel \\ N_{c\omega} : x \ni c\omega(x^*x) = 0 \end{array}$$

$$\therefore \; A/N_\omega = A/N_{c\omega} \xleftarrow{\eta} A$$

Los productos internos son:

$$\langle \eta(x), \eta(y) \rangle_{c\omega} = c\omega(y^*x)$$
$$= c\langle \eta(x), \eta(y) \rangle_\omega$$

$\therefore \; H_{c\omega} = H_\omega$ como espacios

pero $\langle \, , \, \rangle_{c\omega} = c\langle \, , \, \rangle_\omega$

Además $\pi_\omega(a) = \pi_{c\omega}(a)$.

Se puede ver que $\xi_\omega = \xi_{c\omega}$.

Dado ω positivo, $\omega \neq 0$, siempre podemos reemplazarlo con un múltiplo y suponer:

$$\underbrace{\|\omega\| = 1}_{\omega \text{ estado.}} \quad \text{ó} \quad \|\omega\| \leq 1$$

Def.: Sea (π, H) representación de A.

$K \leq H$ subespacio cerrado se dice π-invariante si:

$$\pi(x) K \subseteq K \quad \forall x \in A.$$

$(\Rightarrow \pi(x) K^\perp \subseteq K^\perp \quad \forall x \in A)$

(π, H) se dice irreducible si $K \leq H$ cerrado invariante $\Rightarrow K = 0$ ó $K = H$.

Problemas en representaciones:

*) Dada (π, H) rep., escribirla

$$H = \bigoplus_{i \in I} H_i, \quad \pi = \bigoplus_{i \in I} \pi_i$$

(π_i, H_i) irreducibles. NO siempre es posible. Pero:

$$H = \int_{i \in I}^{\oplus} H_i \, d\mu(i)$$

sí es posible.

*) Dada (π, H) escribir:

$$H = \bigoplus_{i \in I} H_i, \quad \pi = \bigoplus_{i \in I} \pi_i$$

con (π_i, H_i) cíclica.

Sí es posible.

$\Leftarrow$) Relación:

rep. cíclica $\longleftrightarrow$ rep. irreducible.

Sea (π, H) rep. irreducible nodegenerada y $H \neq 0$.

π nodegenerada $\Rightarrow \exists\, x \in A,\ \xi \in H$
$\ni \pi(x)\xi \neq 0$.

Sea $K = [\pi(A)\xi] \neq 0$.

K es π-invariante pues: $x \in A$

$$\pi(x)\pi(A)\xi = \pi(xA)\xi \subseteq \pi(A)\xi \subseteq K.$$

Como $\pi(x)$ es continuo:

$$\pi(x)K \subseteq K.$$

$$\Rightarrow \quad H = K = [\pi(A)\xi]$$

$\therefore$ irreducible nodegenerado $\Rightarrow$ cíclico.

$\Rightarrow$) Tarea:

$\mathbb{R}$ con Lebesgue, $L^2(\mathbb{R})$.

Tenemos una representación unitaria de grupos:

$$\tau : \mathbb{R} \longrightarrow U(L^2(\mathbb{R}))$$
$$x \longmapsto \tau_x$$
$$\tau_x : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$
$$(\tau_x f)(y) = f(y+x)$$

Afirmación: $L^2(\mathbb{R})$ no posee subespacios irreducibles $\neq 0$.
Todo subespacio $H \subseteq L^2(\mathbb{R})$ $\tilde{\tau}$-inv., $H \neq 0$ posee un subespacio $K \neq 0, H$ $\tilde{\tau}$-invariante.

Tarea: (ver página)
Desarrollar (siguiendo el libro de Rudin) la descripción de subespacios invariantes de $L^2(\mathbb{R})$.

Para pasar álgebras:

$$\underset{+}{\mathbb{R} \text{ grupo}} \rightsquigarrow L^1(\mathbb{R}), \text{ convolución}$$

$$\underset{\text{de } \mathbb{R}}{\tilde{\tau}} \longrightarrow \hat{\tilde{\tau}} \text{ rep. de } L^1(\mathbb{R}).$$

Teorema:
Sea (π, H) rep. de A, nodeg.
$\Rightarrow \exists\ ((\pi_i, H_i))_{i \in I}$ de rep's. cíclicas $\ni$:

$$H = \bigoplus_{i \in I} H_i \quad , \quad \pi = \bigoplus_{i \in I} \pi_i$$

Dem.: Sabemos que:

$$[\pi(A)H] = H$$

$\therefore \exists\ \xi \in H \setminus \{0\} \ni K = [\pi(A)\xi] \neq 0$
$\therefore (\pi|_K, K)$ es cíclica.

$$H = K \oplus K^{\perp}$$

cíclica

$K^{\perp}$ ...

Por lema de Zorn o inducción transfinita se sigue el resoltado.