Sea A una C^*-álgebra, $a \in A \setminus \{0\}$.

$\therefore \quad \|a^*a\| = \|a\|^2 \neq 0.$

$\therefore \quad a^*a \neq 0.$

Además, $a^*a \in A_+$. Por tanto:

$$-a^*a \notin A_+$$

Pues $a^*a \in -A_+$ implica:

$$a^*a \in A_+ \cap (-A_+) = 0$$

$\therefore \quad -a^*a \notin A_+.$

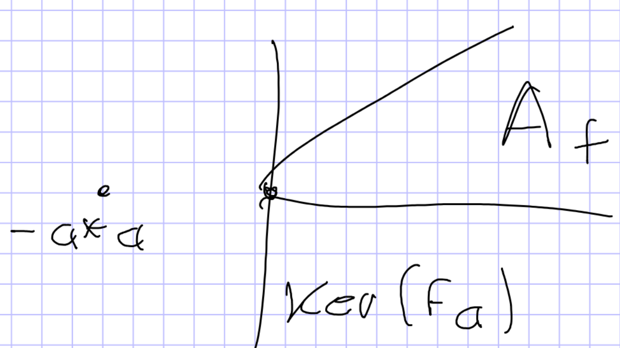
Sea A_h el espacio de Banach real de elementos Hermitianos.

$$A_+ \subseteq A_h \text{ es convexo cerrado}$$

$$\text{y} \quad -a^*a \in A_h, \ -a^*a \notin A_+.$$

Por un Tma. de Hahn-Banach $\exists$ $f_a : A_h \longrightarrow \mathbb{R}$ funcional continuo tal que:

$$f_a(-a^*a) < 0 \leq f_a(A_+)$$



Extendemos:

$$f_a : A \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f_a(x+iy) = f_a(x) + i f_a(y)$$
$$\forall x, y \in A_h.$$

que es lineal complejo.

Además: $x \in A$

$$f_a(x^*x) \geq 0$$

$x^*x \in A_+$. Luego f_a es un funcional lineal positivo de A.

Por tanto, $\exists$ una rep. de A:

$$\pi_a : A \longrightarrow \mathcal{L}(H_a) \quad , \xi_a$$
$$[\pi_a(A)\xi_a] = H_a$$
$$f_a(x) = \langle \pi_a(x)\xi_a, \xi_a \rangle$$

Pero además:

$$\|\pi_a(a)\xi_a\|^2 = \langle \pi_a(a)\xi_a, \pi_a(a)\xi_a \rangle$$
$$= \langle \pi_a(a)^*\pi_a(a)\xi_a, \xi_a \rangle$$
$$= \langle \pi_a(a^*a)\xi_a, \xi_a \rangle$$
$$= f_a(a^*a) > 0$$

$$\therefore \pi_a(a) \neq 0.$$

Conclusión: Hay muchas rep's. cíclicas: $\forall a \in A \setminus \{0\}$ existe una rep. cíclica $\pi_a \ni \pi_a(a) \neq 0$.

Teorema: Toda C^*-álgebra A admite una representación fiel (i.e. de $\ker = 0$). En particular, toda C^*-álgebra es isométricamente isomorfa a una C^*-álgebra cerrada en $\mathcal{L}(H)$ para algún espacio de Hilbert H.

Dem.:

Con la notación anterior tomamos:

$$H = \bigoplus_{a \in A \setminus \{0\}} H_a$$

$$\pi = \bigoplus_{a \in A \setminus \{0\}} \pi_a$$

$\therefore$ $\pi : A \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ es fiel:

$$x \in A \setminus \{0\} \Longrightarrow \pi_x(x) \neq 0 \Longrightarrow \pi(x) \neq 0.$$

Como A y $\mathcal{L}(H)$ son C^*-álgebras y π es 1-1:

$$\|\pi(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in A.$$

$\therefore$ $\pi(A)$ es C^*-subálgebra de $\mathcal{L}(H)$ y:

$$A \underset{\pi}{\cong} \pi(A) \subseteq \mathcal{L}(H).$$

//

Definición:
A álgebra de Banach involutiva se dice A^*-álgebra si posee una representación fiel.

Ejemplo: $L^1(G)$, G grupo topológico localmente compacto.

Producto:

$$(f * g)(x) = \int_G f(xy^{-1})\, g(y)\, dy$$

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$$

(G con medida bi-invariante)

Sea A A^*-álgebra, con $\|\cdot\|$.

Definimos: $x \in A$

$$\|x\|_* = \sup \{ \|\pi(x)\| \mid \pi \text{ rep. de } A \}$$

En particular: $\forall x \in A$

$$\|x\|_* \leq \|x\|$$

pues $\pi : A \longrightarrow \mathcal{L}(H) \leftarrow C^*$-álgebra.

$\|\cdot\|_*$ es norma:

Desigualdad triangular y homogeneidad son claras.

Si $\|x\|_* = 0 \Rightarrow \|\pi(x)\| = 0$ $\forall \pi$ rep. de A

$\Rightarrow x = 0$ pues A admite una π fiel.

Además:

$$\|x^*\|_* = \sup \{ \|\pi(x^*)\| \mid \pi \text{ rep. de } A \}$$

$$= \sup \{ \|\pi(x)\| \mid \pi \text{ rep de } A \}$$

$$= \|x\|_*$$

$$\|x^*x\|_* = \sup\{\|\pi(x^*x)\| \mid \pi \text{ rep. de } A\}$$
$$= \sup\{\|\pi(x)^*\pi(x)\| \mid \pi \text{ rep. de } A\}$$
$$= \sup\{\|\pi(x)\|^2 \mid \pi \text{ rep. de } A\}$$
$$= \|x\|_*^2$$

¿$(A, \|\ \|_*)$ es completa?
No necesariamente.

Definición: Sea A una A^*-álgebra. La C^*-álgebra envolvente de A se denota por $C^*(A)$ y es la completación de $(A, \|\ \|_*)$.

Ejemplo:
$$L^1(G) \rightsquigarrow C^*(G) = C^*(L^1(G))$$

$\longrightarrow$) Lema de Schor.

Sea A álgebra de Banach involutiva y $\pi : A \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ una representación.

Sea $K \leq H$ un subespacio cerrado π-invariante:

$$\pi(x) K \subseteq K \quad \forall x \in A.$$

Denotamos:

$$\pi|_K : A \longrightarrow \mathcal{L}(K)$$
$$\pi|_K(x) = \pi(x)|_K : K \longrightarrow K$$

Sea $p: H \to M$ la proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado M.

Afirmación:
Son equivalentes:

(i) M es π-invariante.

(ii) $\pi(x)p = p\,\pi(x) \quad \forall x \in A$.

Dem.:

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Sea $\xi \in H$:

$\therefore\ p\xi \in M$

$\therefore\ \pi(x)p\xi \in M$

$\therefore\ p\,\pi(x)p\xi = \pi(x)p\xi \in M$

$\Rightarrow\ p\,\pi(x)p = \pi(x)p \quad \forall x \in A.$

Tomando adjunto:

$$\begin{aligned} p\,\pi(x) &= (\pi(x^*)p)^* \\ &= (p\,\pi(x^*)p)^* \\ &= p\,\pi(x)p = \pi(x)p \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): $\quad \xi \in M,\ x \in A$:

$$\pi(x)\xi = \pi(x)p\xi$$
$$= p\pi(x)\xi \in M \quad //$$

Sea $\pi : A \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ representa_ción.

Supongamos π irreducible.

Sea $p : H \longrightarrow M$ proyección.

$$M \ \pi\text{-inv.} \iff \pi(x)p = p\pi(x) \quad \forall x \in A.$$

Luego:

Si $p\pi(x) = \pi(x)p \quad \forall x \in A$

$$\implies p = 0 \ \text{ó} \ p = I_H.$$

Recíprocamente, si $0, I_H$ son las únicas proyecciones tales que:

$$p\pi(x) = \pi(x)p \quad \forall x \in A$$

$\implies \pi$ es irreducible.

Pues si $M \leq H$ π-invariante y $p : H \to M$ es su proyección, entonces:

$$p\pi(x) = \pi(x)p \quad \forall x \in A$$

$\implies p = 0$ ($\therefore M = 0$) ó

$p = I_H$ (i.e. $M = H$).

O sea:

Proposición: (Schur para proy.)
Una rep. $\pi : A \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ de A es irreducible si y sólo si se cumple:
*) Si $p \in \mathcal{L}(H)$ es proyección tal que $p\pi(x) = \pi(x)p \quad \forall x \in A$ entonces $p = 0$ ó I_H.

Tma.: (Lema de Schur)
Sea (π, H) una rep. de un álgebra de Banach involutiva.
Son equivalentes:
(i) π es irreducible.
(ii) $\{T \in \mathcal{L}(H) \mid \pi(x)T = T\pi(x) \quad \forall x \in A\} =$

$$= \mathbb{C} I_H.$$

Dem.:
__(ii) $\Rightarrow$ (i)__
Si $p \in \mathcal{L}(H)$ es proyección y
$$p\pi(x) = \pi(x)p \quad \forall x \in A$$
$$\overset{(ii)}{\Longrightarrow} \quad p = \lambda I_H$$

Y $p^2 = p \Rightarrow \lambda = 0$ ó $\lambda = 1$

O sea $p = 0$ ó $p = I_H$.

$\Rightarrow \pi$ irreducible.

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Sea $T \in \mathcal{L}(H) \ni \pi(x) T = T \pi(x)$
$\forall x \in A$.

$$\therefore \; T^* \pi(x) = (\pi(x^*) T)^* = (T\pi(x^*))^* = \pi(x) T^*$$

$\therefore$ con $\mathrm{Re}(T) = \frac{1}{2}(T + T^*)$

$\mathrm{Im}(T) = \frac{1}{2i}(T - T^*)$

$$\mathrm{Re}(T)\pi(x) = \pi(x)\,\mathrm{Re}(T)$$
$$\mathrm{Im}(T)\pi(x) = \pi(x)\,\mathrm{Im}(T)$$

Basta ver que:

$$\mathrm{Re}(T), \mathrm{Im}(T) \in \mathbb{C} I_H.$$

pues $T = \mathrm{Re}(T) + i\,\mathrm{Im}(T)$

Por tanto podemos suponer $T^* = T$.

En este caso:

(Tma. espectral)

$$T = \int_{\lambda \in \mathrm{Spec}(T)} \lambda \, dP(\lambda)$$

donde $P : \mathcal{B}(\operatorname{Spec}(T)) \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ es una medida a valores en proyecciones.

Además:

$$\pi(x)T = T\pi(x)$$

$$\Rightarrow \quad \pi(x)P(E) = P(E)\pi(x) \quad \forall x \in A,\ E \text{ Borel}$$

$P(E)$ proyección:

$$\therefore \quad P(E) = 0 \ \text{ó}\ I_H$$

$$\therefore \quad \operatorname{Im} P = P(\text{Borel}) \subseteq \{0, I_H\}$$

$$\therefore \quad T = \lambda_1 0 + \lambda_2 I_H \in \mathbb{C} I_H.$$

$$\begin{array}{ccc}
L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\ \hat{g}\ } & L^2(\mathbb{R}) \\
\cup & & \cup \\
M_E & \longleftrightarrow & L^2(\mathbb{R} \setminus E) \\
 & & \\
M_F & \longleftrightarrow & L^2(F) \quad m(F) \neq 0 \\
 & & \subsetneq \\
 & & L^2(F_1) \quad m(F_1) \neq 0
\end{array}$$