Para una C^*-álgebra:

*) hay muchas rep's. cíclicas.
*) cíclicas $\longleftrightarrow$ funcionales pos.

Falta:

*) ¿hay muchas rep's. irred.?
*) irred. $\longleftrightarrow$? Resp.: positivo puro.

Definición:
Sea A un álgebra de Banach involutiva. Un funcional lineal positivo φ se dice <u>puro</u> si cumple lo siguiente:

*) Si ψ es un funcional lineal positivo acotado por φ, i.e.

$$\psi(x^*x) \leq \varphi(x^*x) \quad \forall x \in A.$$

entonces $\psi = \lambda\varphi$ para algún $\lambda \in [0,1]$.

Denotamos:

$$P(A) = \left\{ \varphi \;\middle|\; \begin{array}{c} \varphi \text{ funcional positivo puro} \\ \|\varphi\| = 1 \end{array} \right\}$$

$$= \text{estados puros.}$$

Obs.: Sea φ funcional positivo, con rep. (π_φ, H_φ).

Sea $H \leq H_\varphi$ un subespacio cerrado invariante:

$$\pi_\varphi(x) H \subseteq H \quad \forall x \in A.$$

Si $p: H_\varphi \longrightarrow H$ es la proyección entonces:

$$\pi_\varphi(x) p = p \pi_\varphi(x) \quad \forall x \in A$$

Definimos:

$$\psi: A \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\psi(x) = \langle \pi_\varphi(x) p \xi_\varphi , p \xi_\varphi \rangle$$

$$= \langle p \pi_\varphi(x) \xi_\varphi , p \xi_\varphi \rangle$$

Afirmaciones:

ψ es funcional lineal positivo

$\psi(x^*x) \leq \varphi(x^*x) \quad \forall x \in A.$

Dem.:

$$\psi(x^*x) = \langle \pi_\varphi(x^*x) p \xi_\varphi , p \xi_\varphi \rangle$$
$$= \| \pi_\varphi(x) p \xi_\varphi \|^2 \geq 0.$$

$$\psi(x^*x) = \| \pi_\varphi(x) p \xi_\varphi \|^2$$
$$= \| p \pi_\varphi(x) \xi_\varphi \|^2$$
$$\leq \| \pi_\varphi(x) \xi_\varphi \|^2 = \varphi(x^*x)$$

//

Tma.: A álgebra de Banach involotiva con identidad aproximada acotada. Para φ funcional lineal positivo (continuos) son equivalentes:

(i) φ es puro.

(ii) La rep. cíclica (π_φ, H_φ) con ξ_φ es irreducible.

Dem.:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Suponemos φ puro.

¿(π_φ, H_φ) es irreducible?

Sea $H \leq H_\varphi$ π_φ-invariante. Con la construcción anterior tenemos:

$$\psi(x) = \langle \pi_\varphi(x) p\, \xi_\varphi, p\, \xi_\varphi \rangle$$

Funcional positivo acotado por φ.

Por tanto $\exists\ \lambda \in [0,1] \ni$:

$$\psi = \lambda \varphi$$

Luego $\forall x, y \in A$:

$$\langle \lambda \pi_\varphi(x) \xi_\varphi, \pi_\varphi(y) \xi_\varphi \rangle =$$
$$= \lambda \varphi(y^* x) = \psi(y^* x)$$
$$= \langle \pi_\varphi(y^* x) p\, \xi_\varphi, p\, \xi_\varphi \rangle$$
$$= \langle \pi_\varphi(x) p\, \xi_\varphi, \pi_\varphi(y) p\, \xi_\varphi \rangle$$
$$= \langle p\, \pi_\varphi(x) \xi_\varphi, p\, \pi_\varphi(y) \xi_\varphi \rangle$$

$= \langle p\, \pi_\varphi(x)\xi_\varphi, \pi_\varphi(y)\xi_\varphi \rangle$ (*)

$\therefore\ \langle \lambda \xi, \xi' \rangle = \langle p\xi, \xi' \rangle$

$\forall\, \xi, \xi' \in H_\varphi.$

$\therefore\ p = \lambda I \implies p = 0$ ó $p = I$

$\implies H = 0$ ó $H = H_\varphi.$

(*) $\pi_\varphi(y)\xi_\varphi = \underbrace{p\,\pi_\varphi(y)\xi_\varphi}_{\text{en } H} + \underbrace{p'\pi_\varphi(y)\xi_\varphi}_{\text{en } H^\perp}$

$\underbrace{p\,\pi_\varphi(x)\xi_\varphi}_{\text{en } H}$ $\perp$

(ii) $\implies$ (i):

Suponemos (π_φ, H_φ) irred.

¿ φ es puro?

Sea ω funcional positivo acotado por φ.

Sobre $\pi_\varphi(A)\xi_\varphi$ (denso en H_φ) definimos:

$$\langle \pi_\varphi(x)\xi_\varphi, \pi_\varphi(y)\xi_\varphi \rangle_0 = \omega(y^*x)$$

Tenemos:

$$\omega(y^*x) \leq \varphi(y^*x) \quad (*)$$

y recordamos

$$\eta_\varphi : A \longrightarrow A/N_\varphi = \pi_\varphi(A)\xi_\varphi \subseteq H_\varphi$$

$$\eta_\varphi(x) = \pi_\varphi(x)\,\xi_\varphi$$

Por tanto estamos definiendo:

$$\langle \eta_\varphi(x), \eta_\varphi(y)\rangle_0 = \omega(y^* x) \quad (**)$$

pero $(*)$ implica:

$$\eta_\varphi(x) = 0 \implies \omega(x^* x) = 0$$

Por tanto $(**)$ no depende de la clase módolo N_φ.

Además:

$$\langle \pi_\varphi(x)\xi_\varphi, \pi_\varphi(x)\xi_\varphi\rangle_0 \leq \langle \pi_\varphi(x)\xi_\varphi, \pi_\varphi(x)\xi_\varphi\rangle$$

pues $\omega(x^* x) \qquad \leq \qquad \varphi(x^* x)$

Por tanto:

$$|\langle \pi_\varphi(x)\xi_\varphi, \pi_\varphi(y)\xi_\varphi\rangle_0| \leq$$

$$\leq \langle \pi_\varphi(x)\xi_\varphi, \pi_\varphi(x)\xi_\varphi\rangle_0^{\frac{1}{2}} \langle \pi_\varphi(y)\xi_\varphi, \pi_\varphi(y)\xi_\varphi\rangle_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \|\pi_\varphi(x)\xi_\varphi\| \; \|\pi_\varphi(y)\xi_\varphi\|$$

$\therefore$ $\langle\ ,\ \rangle_0$ es continua en $\pi_\varphi(A)\xi_\varphi$, en la top. de H_φ.

Por tanto $\langle\ ,\ \rangle_0$ se extiende a H_φ, como forma Hermitiana tal que:

$$|\langle \xi, \xi'\rangle_0| \leq \|\xi\|\;\|\xi'\| \quad \forall\, \xi, \xi' \in H_\varphi$$

Por tanto $\exists\, a \in \mathcal{L}(H_\varphi)$ positivo tal que:

$$\langle \xi, \xi' \rangle_0 = \langle a\xi, \xi' \rangle \quad \forall \xi, \xi' \in H_\varphi$$

Veamos que a conmuta con $\pi_\varphi(x)$:

$$\langle a\pi_\varphi(x)\pi_\varphi(y)\xi_\varphi, \pi_\varphi(z)\xi_\varphi \rangle =$$
$$= \langle \pi_\varphi(x)\pi_\varphi(y)\xi_\varphi, \pi_\varphi(z)\xi_\varphi \rangle_0$$
$$= \omega(z^*xy)$$
$$= \omega((x^*z)^*y)$$
$$= \langle \pi_\varphi(y)\xi_\varphi, \pi_\varphi(x^*)\pi_\varphi(z)\xi_\varphi \rangle_0$$
$$= \langle a\,\pi_\varphi(y)\xi_\varphi, \pi_\varphi(x)^*\pi_\varphi(z)\xi_\varphi \rangle$$
$$= \langle \pi_\varphi(x)\,a\,\pi_\varphi(y)\xi_\varphi, \pi_\varphi(z)\xi_\varphi \rangle$$

$$\Longrightarrow \quad \pi_\varphi(x)a = a\,\pi_\varphi(x) \quad \forall x \in A.$$

π_φ irreducible + Schur implican:

$$a = \lambda I \quad \text{algún } \lambda \geq 0.$$

Luego:

$$\omega(y^*x) = \langle a\pi_\varphi(x)\xi_\varphi, \pi_\varphi(y)\xi_\varphi \rangle$$
$$= \lambda \langle \pi_\varphi(x)\xi_\varphi, \pi_\varphi(y)\xi_\varphi \rangle$$
$$= \lambda\varphi(y^*x)$$

Usando unidad aproximada $y^* = y_i$

$$\omega(x) = \lambda\varphi(x) \quad \forall x \in A.$$

Pero además:

$$0 \leq \lambda \varphi(x^*x) = \omega(x^*x) \leq \varphi(x^*x)$$

$\therefore \quad \lambda \leq 1.$

Observación:

Supongamos que ω_1, ω_2 sea dos funcionales positivos que no son múltiplos entre sí.

$\therefore \quad \varphi = \omega_1 + \omega_2$

$$\varphi(x^*x) = \omega_1(x^*x) + \omega_2(x^*x) \geq 0$$

$\therefore \quad \varphi$ es positivo.

Además:

$$\varphi(x^*x) \geq \omega_1(x^*x), \omega_2(x^*x)$$

φ no puede ser puro, pues:

$$\omega_1 = \lambda_1 \varphi \quad , \quad \omega_2 = \lambda_2 \varphi$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \omega_2 \quad \Rightarrow \Leftarrow$$

Tma.: Sea A una A^*-álgebra, i.e. $\exists \; \pi : A \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ rep. inyectiva. (En particular, $\forall x \in A \setminus \{0\} \; \exists \; (\pi_x, H_x)$ rep. cíclica tal que $\pi_x(x) \neq 0$).

Entonces $\forall x \in A \setminus \{0\} \; \exists \; (\pi, H)$ rep.

irred. de A tal que $\pi(x) \neq 0$.
En particular, esto se cumple para C^*-álgebras.

Dem.:
Sea $B = C^*(A)$, la C^*-álgebra envolvente.
Tenemos:

$$A \subseteq C^*(A) \xrightarrow{\pi} \mathcal{L}(H)$$
$$\bar{A} = C^*(A) = B$$

y por la densidad:

$\forall K \leq H$ subespacio cerrado

$$\begin{matrix} \pi(x)K \subseteq K \\ \forall x \in A \end{matrix} \iff \begin{matrix} \pi(x)K \subseteq K \\ \forall x \in C^*(A) \end{matrix}$$

$\therefore$ π irred. $\iff$ $\pi|_A$ irred.

Luego basta probar el resultado para B que es C^*-álgebra.

Denotamos:

$$S = \{\varphi \in B^* \mid \varphi \text{ positivo}, \|\varphi\| \leq 1\}$$

Luego:
S es convexo:

$$\varphi_1, \varphi_2 \in S \Rightarrow \lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2 \in S \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

S es cerrado en la top. $*$-débil de B^*:

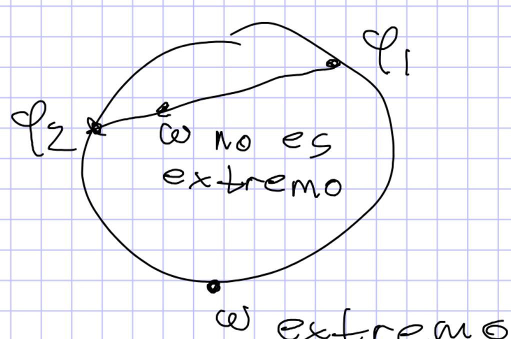
$(\varphi_\alpha)_\alpha \subseteq S$, $\varphi_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} \varphi$ (top. $*$-débil)

$$\varphi(x^*x) = \lim_\alpha \varphi_\alpha(x^*x) \geq 0$$

Por Alouglu:
S es compacto en la top.
$*$-débil.

Tenemos los dos siguientes hechos:

1) Los puntos extremos de S son 0 y los estados puros $P(B)$.
($\omega \in S$ extremo ssi:
$\omega = \lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2$ con $\lambda \in (0,1)$
$\varphi_1, \varphi_2 \in S$
$\Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = \omega$.)



Ver Dixmier
C*-algebras.
Prop. 2.5.5.

2) Krein-Milman dice que todo compacto convexo tiene muchos puntos extremos.

$\longrightarrow$ Folland, A Course in Abstract Harmonic Analysis.

$L'(G)$