9/Mayo/2023

$\mathfrak{A}$ C^*-álgebra, $A \in \mathfrak{A}$ normal

El mapeo:

$$C(sp(A)) \longrightarrow \mathfrak{A}$$
$$f \longmapsto f(A)$$

(único) tal que:

$$f(A) = \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk} A^j (A^*)^k$$

cuando $f(z) = \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk} z^j \bar{z}^k$,

se llama el cálculo funcional de A.

$$AA^* = A^*A \implies \varphi(A)\varphi(A)^* = \varphi(A)^*\varphi(A)$$

Sobre Prop. 4.4.7:

$$C(sp(A)) \longrightarrow \mathfrak{B}$$
$$f \longmapsto f(\varphi(A))$$
$$f \longmapsto \varphi(f(A))$$

son $*$-homomorfismos, que coinciden en $*$-álgebra densa:

$$\left\{ p \in C(sp(A)) \;\middle|\; \begin{array}{c} p \text{ polinomio} \\ \text{en } z, \bar{z} \end{array} \right\}$$

$$\Longrightarrow \quad f(\varphi(A)) = \varphi(f(A)) \quad \forall f \in C(sp(A)).$$

Ejemplo:
Cuando las expresiones tienen sentido:

$$\varphi(e^{A}) = e^{\varphi(A)}.$$

$$\varphi(\sin(A)) = \sin(\varphi(A))$$

En un cálculo funcional

$$C(sp(A)) \longrightarrow \mathcal{Q}$$
$$f \longmapsto f(A)$$

por su continuidad:

$$\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow \quad f_n(A) \longrightarrow f(A)$$

en $(\mathcal{A}, \| \ \|)$

Por ejemplo:

Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$$

con $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continuas y convergencia uniforme en compactos, entonces:

$$f(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(A)$$

A normal:

$$sp(f(A)) = f(sp(A))$$

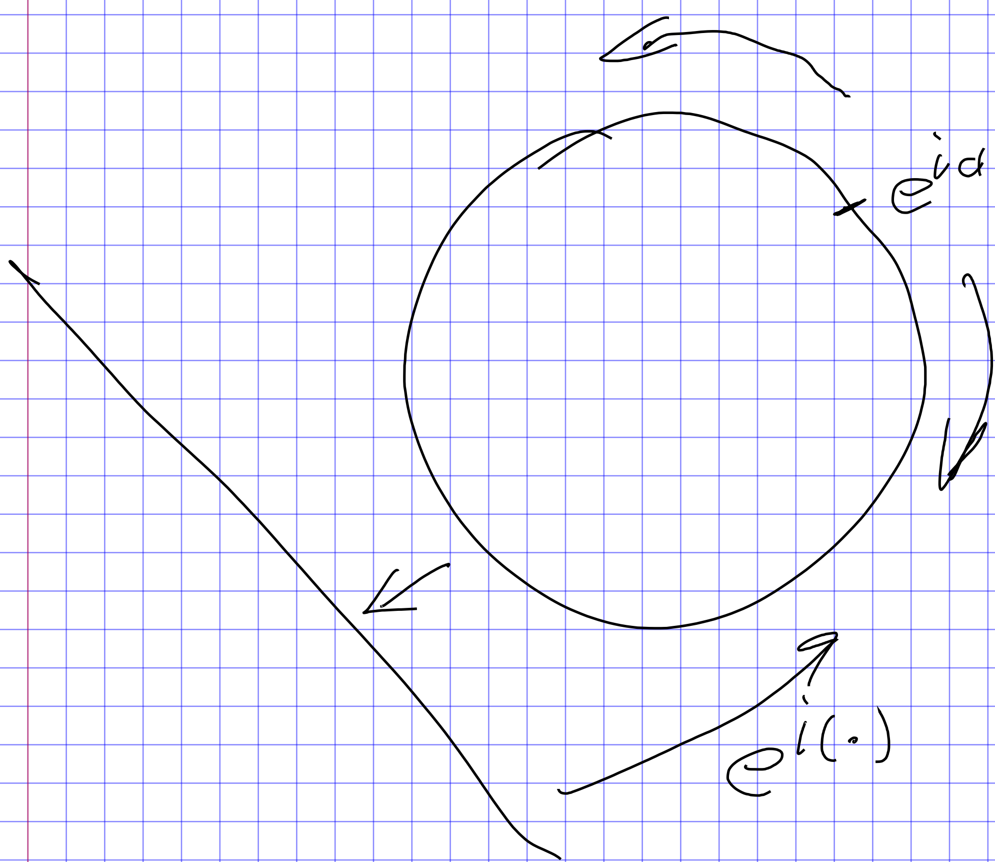
pues bajo el cálculo funcional:

$$C(sp(A)) \longrightarrow \mathcal{A}$$

$$f \longleftrightarrow f(A)$$

como isometría de C^*-álgebras a su imagen.

$$\therefore \quad sp(f(A)) = sp_{C(sp(A))}(f) = Im(f) = f(sp(A))$$



$\mathfrak{A}$ C^*-álgebra

$A \in \mathfrak{A}^+$

$\therefore \quad sp(A) \subseteq [0, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$f(t) = t^{\frac{1}{n}}$$

Por tanto tenemos

$$f(A) = A^{\frac{1}{n}}$$

y satisface $\left(A^{\frac{1}{n}}\right)^n = A$

pues $f(t)^n = t$.

Por la observación 4.4.11

$A^{\frac{1}{n}}$ es el único elemento en $\mathfrak{A}^+ \ni$

$$\left(A^{\frac{1}{n}}\right)^n = A.$$

Hecho fundamental:

Toda C^*-álgebra es subálgebra de un $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert.

Nos interesan C^*-álgebra homomorfismos:

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

$\longrightarrow$ representaciones.

Gelfand-Neumark-Segal:

$\forall\ \mathcal{A}\ \ \exists\ \ \rho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ representación inyectiva.

Comparación de la noción de cíclico:

En grupos: $x_0 \in G$

$\forall\ x \in G\ \exists\ n \in \mathbb{Z} \ni$

$x = x_0^n$

i.e.:

$\mathbb{Z} \ni n$ aplicado a x_0 vía $n \cdot x_0 = x_0^n$ permite obtener todo G.

En C^*-álgebras:

$$\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

$$x_0 \in \mathcal{H}$$

$$\overline{\{\varphi(A)x_0 \mid A \in \mathcal{A}\}} = \mathcal{H}$$

y x_0 se dice vector cíclico o generador.

φ se dice cíclica.

Algunas operaciones con representaciones:

Sean $(\varphi_i)_{i \in I}$ una familia de representaciones de $\mathcal{A}$:

$$\varphi_i : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$$

La suma directa es:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i$$

$$= \left\{ (x_i)_{i \in I} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_i \in \mathcal{H}_i \ \forall i \in I \\ \sum_{i \in I} \|x_i\|^2 < +\infty \end{array} \right\}$$

$$\varphi = \bigoplus_{i \in I} \varphi_i : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

$$\varphi(A) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

$$\varphi(A)\big((x_i)_{i \in I}\big) = \big(\varphi_i(A)(x_i)\big)_{i \in I}$$

Vemos que:

$$\sum_{i \in I} \|\varphi_i(A)(x_i)\|^2_{\mathcal{H}_i} \leq \sum_{i \in I} \|\varphi_i(A)\|^2 \|x_i\|^2_{\mathcal{H}_i}$$

$$\leq \sum_{i \in I} \|A\|^2 \|x_i\|^2_{\mathcal{H}_i}$$

$$\leq \|A\|^2 \sum_{i \in I} \|x_i\|^2_{\mathcal{H}_i} < +\infty$$

$\therefore$ φ está bien definida.

Además:

$$\|\varphi(A)\| \leq \|A\| \quad \forall A \in \mathfrak{A}.$$

$\therefore$ φ es representación.

Teorema:

Toda representación:

$$\varphi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

es suma directa de representaciones cíclicas.

Dem.:

Idea: $x_0 \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$

Tomamos:

$$\mathcal{H}_0 = \overline{\varphi(\mathfrak{A})x_0}$$

que es φ-invariante y cíclico:

$$\varphi(A)\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_0 \quad \forall A \in \mathfrak{A}$$

En particular:

$$\varphi(A)^* \mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_0 \quad \forall A \in \mathfrak{A}$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi(A)\mathcal{H}_0^\perp = \mathcal{H}_0^\perp \quad \forall A \in \mathfrak{A}.$$

Es decir, $\varphi(\mathfrak{A})$ preserva

$$\mathcal{H} = \underbrace{\mathcal{H}_0}_{\text{cíclico.}} \oplus \mathcal{H}_0^\perp$$

Y continuamos con $\mathcal{H}_0^\perp$ si $\dim \mathcal{H} < +\infty$.

En el caso general se usa lema de Zorn.

$$S = \left\{ (\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha \in J} \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{propiedad} \\ p\end{array} \right\}$$

Propiedad p:

$$\mathcal{H}_\alpha \leq \mathcal{H} \quad \forall \alpha \in J$$

$$\bigoplus_{\alpha \in J} \mathcal{H}_\alpha \leq \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}_\alpha \text{ cíclico } \forall \alpha \in J$$

Ordenamos $\mathcal{S}$ por inclusión.

→ Se prueba que en $\mathcal{S}$ toda cadena tiene una cota superior.

→ Se toma un elemento maximal $(\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha \in J}$

Si $\mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha \in J} \mathcal{H}_\alpha \oplus \mathcal{H}_1$

$\mathcal{H}_1 \neq 0$

$\mathcal{H}_1$ contiene un subespacio cíclico $\mathcal{H}_0$ y

$(\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha \in J} \cup (\mathcal{H}_0) \in \mathcal{S}$

$\therefore \quad \mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha \in J} \mathcal{H}_\alpha$ //