Espacios vectoriales simplécticos.

V espacio vectorial real y $\dim < +\infty$.

con $\omega: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineal, antisimétrica, nodegenerada.

nodegenerado:

$$\left.\begin{array}{l} v \in V \\ \omega(v,u) = 0 \\ \quad \forall u \in V \end{array}\right. \Longrightarrow v = 0$$

Consecuencia:

Si (V,ω) es espacio vectorial simpléctico, entonces:

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^* \\ v & \longmapsto & \omega(v,\cdot) \end{array}$$

es isomorfismo.

Definición:

(V,ω) simpléctico.

$T: V \longrightarrow V$ se dice simplectomorfismo lineal si

*) T es lineal

*) $\omega(Tv, Tu) = \omega(v,u) \quad \forall v,u \in V.$

T simplectomorfismo lineal
$\Rightarrow$ T invertible.

Supongamos dada una base en V y representaciones matriciales:

$$\omega \longleftrightarrow B$$
$$T \longleftrightarrow A$$

Entonces:

$$\omega(Tv, Tu) = \omega(v, u) \quad \forall v, u \in V \iff A^T B A = B$$

y en este caso:

$$\det(A)^2 \det(B) = \det(B)$$

$\therefore$ ω nodegenerada
$$\Rightarrow \det(A)^2 = 1.$$

Ejemplos:

1) E espacio vectorial real, $\dim < +\infty$.

Sea $V = E \oplus E^* \; (= T^*E)$
Definimos:

$$\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega((v, \lambda), (u, \mu)) = \mu(v) - \lambda(u)$$

En una base del tipo:

base de E $\cup$ base dual

tenemos matriz de ω:

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

2) En $\mathbb{R}^{2n}$ consideramos:

$$\omega_0 : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j$$

Con la siguiente notación:

$\mathbb{R}^{2n}$ con coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$

$x_j, y_j : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ son también funciones.

sus diferenciales:

$$dx_j, dy_j : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

son ellas mismas.

Finalmente:

$$dx_j \wedge dy_j = dx_j \otimes dy_j - dy_j \otimes dx_j$$

$$dx_j \wedge dy_j (v, u) =$$

$$= dx_j(v)\, dy_j(u) - dy_j(v)\, dx_j(u)$$

Por tanto:

$$\omega_0((x,y),(x',y')) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j ((x,y),(x',y'))$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j y_j' - y_j x_j')$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (-y_j, x_j) \cdot (x_j', y_j')$$

- $\cdot$ es el producto interno usual en todo $\mathbb{R}^k$.

Por tanto:

$$\omega_0((x,y),(x',y')) = (-y,x) \cdot (x',y')$$
$$= (J_0(x,y)) \cdot (x',y')$$

donde:

$$J_0 : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$
$$(x,y) \longmapsto (-y,x)$$

es la estructura compleja que viene del isomorfismo real:

$$\mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$(x,y) \longmapsto x+iy$$

pues:

$$i(x+iy) = -y+ix$$

Matricialmente:

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

En lo sucesivo (V,ω) es espacio vectorial simpléctico.

Algunas definiciones y notaciones:

$W \subseteq V$ subespacio.

Complemento simpléctico:

$$W^\omega = \{v \in V \mid \omega(v,w)=0 \ \ \forall w \in W\}$$

$\omega(v,v)=0$ implica:

$$v \in (\mathbb{R}v)^\omega$$

W es isotrópico si

$W \subseteq W^\omega$ $(\Leftrightarrow \omega|_{W\times W} = 0)$

W es coisotrópico si

$W^\omega \subseteq W$

W es simpléctico si

$W \cap W^\omega = \{0\}$ $(\Leftrightarrow \omega|_{W\times W}$ es nodegenerado]

W es Lagrangiano si:

$$W = W^\omega$$

Lema: $W \subseteq V$ subespacio.

Entonces:

$$W^{\omega\omega} = W$$

$$\dim W + \dim W^\omega = \dim V.$$

Además:

1) W simplectico $\Longleftrightarrow$ W^ω simpléctico

2) W isotrópico $\Longleftrightarrow$ W^ω coisotrópico.

3) W Lagrangiano

$\Longleftrightarrow$ W isotropico

y $\dim W = \frac{1}{2} \dim V.$

Dem.:

Recordamos:

$$\varphi : V \xrightarrow{\cong} V^*$$

$$v \longmapsto \omega(v, \cdot)$$

Bajo φ:

$\varphi(W^\omega) = W^0 =$ anulador de W en V^*.

Pero entonces:

$$\dim W^\omega = \dim W^0$$

(álg. lineal) $= \dim V - \dim W$.

Además:

$$W \subseteq W^{\omega\omega}$$

y también:

$$\dim W + \dim W^{\omega} = \dim V$$
$$\dim W^{\omega} + \dim W^{\omega\omega} = \dim V$$

$$\therefore \quad \dim W = \dim W^{\omega\omega}$$
$$\therefore \quad W = W^{\omega\omega}$$

Para ver 1):

$$W \cap W^{\omega} = W^{\omega} \cap W^{\omega\omega}$$

Para ver 2):

$$W \subseteq W^{\omega} \implies W^{\omega\omega} \subseteq W^{\omega}$$

$$(A \subseteq B \implies B^{\omega} \subseteq A^{\omega})$$

$$W^{\omega\omega} \subseteq W^{\omega} \implies W \subseteq W^{\omega}$$

$$=$$

Para ver 3):

W Lagrangiano:

$$\therefore \quad W = W^{\omega}$$

$\therefore \quad W \subseteq W^{\omega}$ (isotropico)

$$\dim V = \dim W + \dim W^{\omega} = 2 \dim W$$

Si W es isotrópico y

$$\dim W = \frac{1}{2} \dim V$$

entonces:

$$W \subseteq W^{\omega}$$

$$\dim W = \frac{1}{2} \dim V = \frac{1}{2} \dim W + \frac{1}{2} \dim W^{\omega}$$

$\therefore \quad \dim W = \dim W^{\omega}$

$\therefore \quad W = W^{\omega}.$