Sean (V_1, ω_1), (V_2, ω_2) espacios simplécticos.

Si $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces $V_1 \oplus V_2$ tiene la forma simpléctica:

$$c_1\omega_1 \oplus c_2\omega_2$$

$$((u_1,u_2),(v_1,v_2)) \longmapsto c_1\omega_1(u_1,v_1) + c_2\omega_2(u_2,v_2)$$

$$\omega_1 \longleftrightarrow A_1 \quad , \quad \omega_2 \longleftrightarrow A_2$$

$$\Rightarrow \quad c_1\omega_1 + c_2\omega_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} c_1A_1 & 0 \\ 0 & c_2A_2 \end{pmatrix}$$

En particular:

$$\omega_1 \oplus (-\omega_2)$$

es forma simpléctica en $V_1 \oplus V_2$.

Supongamos $\dim V_1 = \dim V_2$.

Sea $T: V_1 \longrightarrow V_2$ lineal y sea:

$$G(T) = \{(v, Tv) \mid v \in V_1\} \subseteq V_1 \oplus V_2$$

Evaluamos $\omega_1 \oplus (-\omega_2)$ en $G(T)$:

$$(\omega_1 \oplus (-\omega_2))((v_1, Tv_1), (v_2, Tv_2)) =$$
$$= \omega_1(v_1, v_2) - \omega_2(Tv_1, Tv_2)$$

$\therefore$ $G(T)$ es isotrópico

$$\iff \omega_1(v_1, v_2) = \omega_2(Tv_1, Tv_2)$$
$$\forall v_1, v_2 \in V.$$

Conclusión:

$G(T)$ es Lagrangiano

$\iff$ T es simplectomorfismo lineal.

Observamos:

$$\dim G(T) = \dim V_1 = \frac{1}{2}(\dim(V_1) + \dim(V_2))$$
$$(V_1 = \mathrm{dom}(T))$$

$\rightarrow$) Bases simplécticas.

Teorema.
Sea (V, ω) espacio simpléctico.
Entonces:

1) $\dim V$ es par.

2) $\exists$ una base $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ tal que:

$$\omega(u_i, u_j) = \omega(v_i, v_j) = 0$$
$$\omega(u_i, v_j) = \delta_{ij} \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

En particular $\exists$ $T : \mathbb{R}^{2n} \to V$ lineal tal que:

$$T^*\omega = \omega_0$$

$$(T^*\omega = \omega(T(\ ), T(\ )))$$

Dem.:

Por inducción sobre $m = \dim V$.

$m=1$: $V = \mathbb{R} v_0$, $v_0 \neq 0$.

$\therefore$ $\omega(v_0, v_0) = 0$

$\therefore$ $\omega = 0$

Es decir, $\dim V \neq 1$.

$m=2$: $\omega \neq 0$ implica $\exists\, u_1, v_1 \in V$ tales que:

$$\omega(u_1, v_1) = 1$$

u_1, v_1 es necesariamente l.i.

$\therefore$ u_1, v_1 es base simpléctica.

Probamos para m suponiendo que vale en toda $\dim < m$.

$\omega \neq 0$ implica $\exists\, u_1, v_1 \in V \ni$:

$$\omega(u_1, v_1) = 1.$$

Sea $W = \mathbb{R}\langle u_1, v_1 \rangle$ (de $\dim = 2$)

Entonces:

$$\dim W^{\omega} = m - 2$$

W^{ω} es simpléctico

$$V = W \oplus W^{\omega}$$

pues $(W, \omega|_{W \times W})$ es simpléctica:

$$\omega|_{W\times W} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ en } u_1, v_1$$

Aplicamos hipótesis inductiva a W^{ω}:

$\therefore$ $\dim W^{\omega}$ es par y

$\exists$ $u_2, \dots, u_n, v_2, \dots, v_n$ $(m = 2n)$

base simpléctica de W^{ω}.

$\therefore$ $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ es base simpléctica de V.

Recordamos: en $\mathbb{R}^{2n}$

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j$$

$\therefore$ la base canónica

$e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$

$$\omega_0(e_i, e_j) = \omega_0(f_i, f_j) = 0$$

$$\omega_0(e_i, f_j) = \delta_{ij}$$

y basta definir:

$$T : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow V$$

tal que:

$$T(e_j) = u_j, \quad T(f_j) = v_j$$

//

Observación: En $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j$$

Por tanto:

$$\omega_0^n = \omega_0 \wedge \dots \wedge \omega_0 \quad (n \text{ veces})$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j\right)$$

vemos que: $dx_j \wedge dy_j \wedge dx_j \wedge dy_j = 0$

$j \neq k$: $dx_j \wedge dy_j \wedge dx_k \wedge dy_k =$
$$= -dx_j \wedge dx_k \wedge dy_j \wedge dy_k$$

en $\longrightarrow (e_j, e_k, f_j, f_k) \rightsquigarrow -1$

$$dx_j \wedge dy_j \wedge dx_k \wedge dy_k =$$
$$= -dx_j \wedge dx_k \wedge dy_j \wedge dy_k$$
$$= dx_k \wedge dx_j \wedge dy_j \wedge dy_k = dx_k \wedge dy_k \wedge dx_j \wedge dy_j$$

Por tanto:

$$\omega_0^n = \sum_{j_1, \dots, j_n} dx_{j_1} \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_n} \wedge dy_{j_n}$$

suma sobre $j_1, \dots, j_n$ todos distintos, que son $n!$ posibilidades.

$\therefore$ $\omega_0^n = n!\, dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n$

$\therefore$ $\omega_0^n = n!$ Forma de volumen en $\mathbb{R}^{2n}$

Es decir:

$$\text{"}\omega_0^n = n!\, dx_1 dy_1 \cdots dx_n dy_n\text{"}$$

Corolario:

Si $T: \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ preserva ω_0 (es simplectomorfismo lineal), entonces $\det(T) = 1$.

Dem.:

Por hipótesis:

$$T^* \omega_0 = \omega_0$$

$$\therefore \quad T^* \omega_0^n = \omega_0^n$$

pues:

$$T(\omega_0 \wedge \cdots \wedge \omega_0) = T^*\omega_0 \wedge \cdots \wedge T^*\omega_0$$

Luego:

$$T^*(dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n) = \\ = dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n$$

Pero:

$$T^*(dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n) = \\ = \det(T)\, dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n$$

//

Grupos simplécticos:

Si (V, ω) es espacio simpléctico, su grupo simpléctico es:

$$Sp(V,\omega) = \left\{ T : V \to V \;\middle|\; \begin{array}{l} T \text{ lineal} \\ T^*\omega = \omega \end{array} \right\}$$

Para $(V,\omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ se denota:

$$Sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) = Sp(n, \mathbb{R}).$$

Dado (V,ω) con $2n = \dim V$
$\exists$ $S : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow V$ tal que:

$$S^*\omega = \omega_0.$$

Por tanto, tenemos un isomorfismo:

$$\begin{array}{rcl} Sp(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & Sp(V,\omega) \\ T & \longmapsto & STS^{-1} \end{array}$$

Por el Corolario:

$$Sp(n,\mathbb{R}) \subseteq SL(2n,\mathbb{R}).$$

Comparar con:

$$\begin{array}{ccc} O(n) & \subseteq & GL(n,\mathbb{R}) \\ \cup\!\!\!\!\!\!\;\;\text{\small I} & & \\ SO(n) & \subseteq & SL(n,\mathbb{R}) \end{array}$$

6

Espacios Lagrangianos:

Sea (V, ω) simpléctico, y $W \subseteq V$ isotrópico.

$\therefore \quad W \subseteq W^{\omega}$

Si $\exists\, v \in W^{\omega} \setminus W$, entonces:

$W \oplus \mathbb{R}v$ es isotrópico.

Se deduce:

Afirmación:

$\Lambda \subseteq V$ es Lagrangiano

$\iff \Lambda$ es isotrópico maximal.

Dem.:

$\Rightarrow$): $\Lambda \subseteq W \leftarrow$ isotrópico

$\therefore \quad W \subseteq W^{\omega} \subseteq \Lambda^{\omega} = \Lambda$

$\therefore \quad W = \Lambda.$

$\Leftarrow$) $\Lambda \subseteq \Lambda^{\omega}$ por ser isotrópico

Si $\Lambda^{\omega} \setminus \Lambda \neq 0$ entonces $\exists\, W$ isotrópico $\ni$:

$\Lambda \subsetneq W$

(por la construcción anterior)

$\therefore \quad \Lambda = \Lambda^{\omega}.$ //