$[\,,\,]$ en campos vectoriales satisface Jacobi:

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$$

O bien:

$$[X,[Y,Z]]-[Y,[X,Z]]=[[X,Y],Z]$$

$$\therefore (L_X L_Y - L_Y L_X)(Z) = L_{[X,Y]}(Z)$$

$\therefore\ [L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}$ en campos.

Pero también en formas usando (por ejemplo):

$$(L_X\,\omega)(Y,Z) =$$

$$= X(\omega(Y,Z)) - \omega([X,Y],Z) - \omega(Y,[X,Z])$$

$$= L_X(\omega(Y,Z)) - \omega(L_X(Y),Z) - \omega(Y,L_X(Z))$$

Luego:

$$[L_X,L_Y]\,\omega = L_X L_Y\,\omega - L_Y L_X\,\omega$$

$$= \dots = L_{[X,Y]}\,\omega$$

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega \in \Omega^2(M)$:

$$\omega(Y,X) : M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$p \longmapsto \omega_p(Y_p, X_p)$$
$$\Big\downarrow d$$

$$\iota([X,Y])\omega = \omega([X,Y], \cdot)$$

— o —

$d(\omega(Y,X))$ primero evaluar en Y, X
y luego d

$(d\omega)(Y,X)$ ¡no tiene sentido!
(ω 2-forma)

— o —

$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ $n \times n$ reales
tiene centro $\mathbb{R} I_n$
y no es semisimple.

$[\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}), \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})] = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$
que es semisimple
y entonces sin
centro.

Esto es similar al caso de
$\mathfrak{X}(M,\omega)$:

$\mathfrak{X}(M,\omega)$: $X \ni \iota(X)\omega$ es cerrada

$[\mathfrak{X}(M,\omega),\mathfrak{X}(M,\omega)] =$ campos Hamiltonianos
$\iota(X)\omega$ es exacta.

Recordamos $d^2=0$, lo que implica:

$$\alpha \text{ exacta} \Rightarrow \alpha \text{ cerrada}$$
$$(\alpha = d\beta) \Rightarrow (d\alpha = d^2\beta = 0)$$

Recordamos que como ω es no-degenerada tenemos isomorfismos:

$$TM \longrightarrow T^*M$$
$$v \longmapsto \omega(v,\cdot)$$

$$\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$$
$$X \longmapsto \omega(X,\cdot) = \iota(X)\omega$$
$$X_\alpha \longleftarrow\!\shortmid\ \alpha$$

$\exists!\, X_\alpha \ni \alpha(\ ) = \omega(X_\alpha,\cdot) = \iota(X_\alpha)\omega$

Si $\alpha = df$:

$$df = \omega(X_f,\cdot) = \iota(X_f)\omega$$

Sea X Hamiltoniano.
Entonces $\exists$ $f \in C^{\infty}(M)$ $\ni$:

$$\iota(X)\omega = df = \iota(X_f)\omega$$

$$\Longrightarrow \quad X = X_f = X_{f+c} \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$