M variedad y ∇ conexión, por ejemplo de Levi-Civita. Entonces:

$$\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$\nabla_X (fY) = X(f)\, Y + f\nabla_X Y$$

En el caso de una curva γ y campos $\mathfrak{X}(\gamma)$:

$$\nabla_{\gamma'} \equiv \frac{\nabla}{dt}$$

Por ello definimos $\frac{\nabla}{dt}$ pidiendo:

$\mathbb{R}$-linealidad
Leibniz

más la condición:

*) Si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ (o sobre U abierto, $U \supseteq \gamma(I)$), denotamos:

$$Y_\gamma = Y|_\gamma : I \longrightarrow TM$$

$$Y_\gamma(t) = Y_{\gamma(t)}$$

entonces:

$$\frac{\nabla}{dt} Y_\gamma \Big|_t = \nabla_{\gamma'(t)} Y$$

A ∇ también se le pide:

$$\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\, \nabla_{X_2} Y$$

$$\forall\, f, g \in C^\infty(M).$$

∇, $\frac{\nabla}{dt}$ nos permiten definir:

Definición:

(M, g) Riemanniana, $\gamma : I \to M$ curva suave.

1) $X \in \mathfrak{X}(M)$ se dice paralelo si $\nabla_Z X = 0 \quad \forall\, Z \in \mathfrak{X}(M)$.
(i.e. $\nabla X = 0$)

2) $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ se dice paralelo a lo largo γ si:

$$\left(\nabla_{\gamma'} X \text{"="} \right) \frac{\nabla}{dt} X = 0$$

Proposición:
(M,g) Riemanniana, $\gamma: I \longrightarrow M$ curva.
Si $t_0 \in I$, $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, entonces $\exists!$ campo paralelo $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ tal que:
$$X_{t_0} = v_0$$

Dem.:
Resolver la EDO con condición inicial:
$$\frac{\nabla}{dt} X = 0 \ , \ X_{t_0} = v_0$$

Revisar O'Neill. //

Definición:
(M,g) Riemanniana, $\gamma: I \longrightarrow M$ curva.
Dados $x_0 = \gamma(t_0)$, $x_1 = \gamma(t_1)$, el transporte paralelo a lo largo de γ de x_0 a x_1 es el mapeo
$$\tau = \tau_{x_0}^{x_1}(\gamma) : T_{x_0}M \longrightarrow T_{x_1}M$$
$$v \longmapsto \tau(v)$$

donde $\tau(v) = X_{t_1}$ para X el único campo paralelo $\Rightarrow X_{t_0} = v$.

Se sabe que τ es $\mathbb{R}$-lineal biyectivo e isométrico. Luego se puede extender a un mapeo $\mathbb{C}$-lineal:

$$\tau = \tau^{\mathbb{C}} : T^{\mathbb{C}}_{x_0}M \longrightarrow T^{\mathbb{C}}_{x_1}M.$$

$\therefore$

$$\tau(T_{x_0}M) = T_{x_1}M \quad \checkmark$$

$$\tau(T^{\mathbb{C}}_{x_0}M) = T^{\mathbb{C}}_{x_1}M$$

pero:

$$\left.\begin{aligned} \tau(T^{1,0}_{x_0}M) &\overset{?}{=} T^{1,0}_{x_1}M \\ \tau(T^{0,1}_{x_0}M) &\overset{?}{=} T^{0,1}_{x_0}M. \end{aligned}\right\} \circledast$$

$\circledast$ para poder considerar $T^{1,0}$, $T^{0,1}$ se requiere M compleja, y las identidades se cumplen $\Leftrightarrow d\omega = 0$.
$\Leftrightarrow \nabla\omega = 0 \Leftrightarrow \nabla J = 0$ ...

$$\nabla\omega = ?\,,\ \nabla J = ?\,,\ \nabla g = ?$$

(M, g) Riemanniana y ∇ conexión de Levi-Civita.

∇ como derivación covariante en todo tensor.

Inicialmente:

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$$

es decir:

$$\nabla_X : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M).$$

Definimos:

$$\nabla_X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$
$$f \longmapsto X(f)$$

$$X(f) : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X(f)(p) = X_p(f) = df_p(X_p)$$

Siguiente paso: (en 1-formas)

$$\nabla_X : \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$$

la cual se define en base a la siguiente motivación.

$\omega \in \Omega^1(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$. En coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$:

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j \, dx_j \, , \quad X = \sum_{h=1}^{n} g_h \frac{\partial}{\partial x_h}$$

$$\therefore \quad \omega(X) = \sum_{j=1}^{n} f_j g_j$$

que se puede ver como un producto.

Esto sugiere calcular como sigue:

$$X(\omega(Y)) = \nabla_X(\omega(Y))$$

$$\underset{\text{¿?}}{\text{“}=\text{”}} \; (\nabla_X \omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y)$$

"producto"

Con esta idea, <u>definimos</u>:

$$\longrightarrow \quad (\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$$

$\forall \, \omega \in \Omega^1(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Afirmación: $\nabla_X \omega$ define una 1-forma como sigue:

$$p \in M: \; (\nabla_X \omega)_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto (\nabla_X \omega)(V)(p)$$

donde $V \in \mathfrak{X}(M) \ni V_p = v$.

Dos problemas:

*) existencia de V

*) $V_p = v = V'_p$

$$\Rightarrow (\nabla_X \omega)(V)(p) = (\nabla_X \omega)(V')(p)$$

Esto similar al problema de definir la curvatura:

$$R(X,Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

$$R_p : T_pM^3 \longrightarrow T_pM$$

$$R_p(u,v)w = \left(R(U,V)W\right)_p$$

donde $U_p = u$, $V_p = v$, $W_p = w$.

En ambos casos, $\nabla_X \omega$, R, el valor no depende de la extension $V \ni V_p = v$ porque hay linealidad sobre $C^\infty(M)$:

$$(\nabla_X \omega)(fY) = f(\nabla_X \omega)(Y) \qquad f \in C^\infty(M)$$

$$R(f_1X, f_2Y)f_3Z = f_1f_2f_3R(X,Y)Z.$$

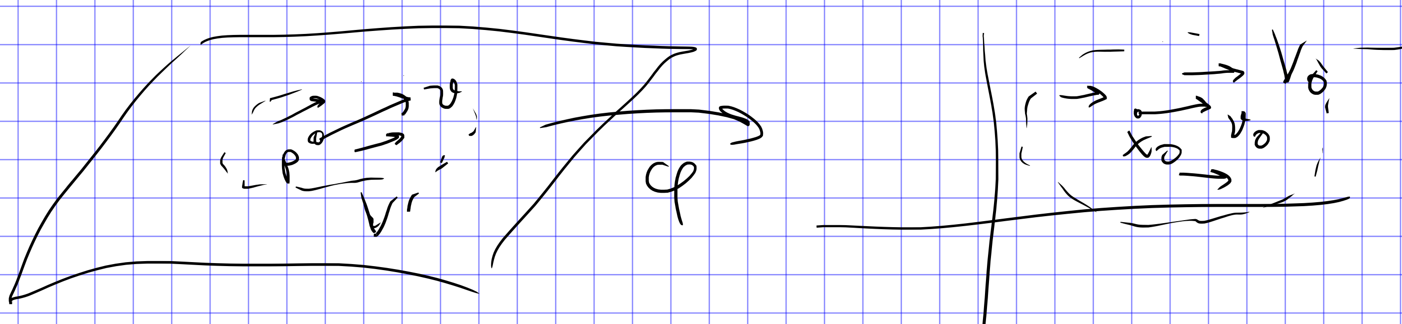
Por ejemplo:

$$(\nabla_X \omega)(fY) = X(\omega(fY)) - \omega(\nabla_X(fY))$$
$$= X(f\omega(Y)) - \omega(X(f)Y + f\nabla_X Y)$$
$$= X(f)\omega(Y) + f X(\omega(Y))$$
$$- X(f)\omega(Y) - f\omega(\nabla_X Y)$$
$$= f(X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y))$$
$$= f(\nabla_X \omega)(Y)$$

Para ver que:
$C^\infty(M)$-linealidad
$\Rightarrow$ independencia de la extensión V de v

ver O'Neill página 37, sección Tensors at a point.

Para la existencia de V:



$V' = d\varphi^{-1}(V_0)$

$V = fV'$ f bump function.