En el cambio de coordenadas:

$$w_j = z_j + \sum_{r,s=1}^{n} c^j_{rs} z_r z_s$$

dados r, s, el término que contiene a $z_r z_s$ es:

$$c^j_{rs} z_r z_s + c^j_{sr} z_s z_r =$$
$$= \underbrace{(c^j_{rs} + c^j_{sr})}_{\text{simétrico en } r,s.} z_r z_s$$

En la demostración de

$$(5) + (6) \Rightarrow (7)$$

se escogen c^j_{rs} $\ni$:

$$\frac{\partial g_{rs}}{\partial z_h}(z_0) = 0$$

pero también necesitamos:

$$\frac{\partial g_{rs}}{\partial \bar{z}_h}(z_0) = 0$$

$$0 = \overline{\frac{\partial g_{rs}}{\partial z_h}} = \frac{\partial \overline{g_{rs}}}{\partial \bar{z}_h} = \frac{\partial g_{sr}}{\partial \bar{z}_h}$$

(en z_0).

La equivalencia que más nos es útil es:

$$d\omega = 0 \iff g_{jh} = \frac{\partial^2 F}{\partial z_j \partial \bar{z}_h}$$

(localmente)

Ejemplo fundamental:

Sea D dominio acotado en $\mathbb{C}^n$, con la medida de Lebesgue.

$L^2(D)$ ✓

$$\mathcal{H}^2(D) = \{ f \in L^2(D) \mid f \text{ holomorfa} \}$$

Entonces $\mathcal{H}^2(D)$ es subespacio cerrado de $L^2(D)$ y la proyección ortogonal es dada como sigue.

(Ver Helgason ó Range)

$\exists\ K: D\times D \longrightarrow \mathbb{C}$ suave que cumple las siguientes propiedades:

*) $K(z,w) = \overline{K(w,z)}\ \ \forall\, z,w$

*) $\forall\, w\in D:\ K(\cdot, w)\in \mathcal{H}^2(D)$.

*) La proyección ortogonal $\pi: L^2(D) \longrightarrow \mathcal{H}^2(D)$ es dada por:

$$\pi(f)(z) = \int_D f(w)K(z,w)\,dw$$

K es llamado el Kernel de Bergman de D.

Afirmación: (métrica de Bergman)

El tensor dado por:

$$g = \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}\, dz_j \otimes d\bar{z}_k$$

$$g_{jk}(z) = \frac{\partial^2}{\partial z_j\,\partial \bar{z}_k}\left(\log K(z,z)\right)$$

define una métrica de Kähler en D

$K(z,w) \in \mathbb{C}$, pero

$$K(z,w) = \overline{K(w,z)}$$

implica $K(z,z) \in \mathbb{R}$. Más aún, se puede probar que:

$$K(z,z) > 0 \quad \forall z \in D.$$

(ver Helgason ó Range)

$\therefore$ se usa log real en la expresión $\log K(z,z)$, que toma valores reales.

Entonces:

$$\overline{g_{j\bar{k}}(z)} = \overline{\frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_h} (\log K(z,z))} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_j \partial z_h} (\log K(z,z)) = g_{h\bar{j}}(z)$$

$\therefore$ $(g_{j\bar{h}})_{j,h=1}^{n}$ es Hermitiana.

En Helgason y en Range se prueba que:

$$(g_{j\bar{h}})_{j,h=1}^{n} > 0$$

Luego g es métrica Hermitiana.

Pero además, por el Teorema que caracteriza la condición $d\omega = 0$ y ya que:

$$g_{j\bar{k}} = \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \log K(z,\bar{z})$$

entonces la métrica de Bergman g es de Kähler.