Sea $D \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto con una métrica de Kähler:

$$g = \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}\, dz_j \otimes d\bar{z}_k$$

y por tanto con forma de Kähler:

$$\omega = i \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

Sea H grupo de Lie que actúa por biholomorfismos en D y preservando g y ω.

Para todo $X \in \mathfrak{h}$ ($\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$) definimos $X^\# \in \mathfrak{X}(D)$ por:

$$X^\#_z = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp(sX)\cdot z$$

$\forall z \in D$.

Consideramos un mapeo:

$$\mu : D \longrightarrow \mathfrak{h}^*$$

suave. Suponemos que $\mathfrak{h}$

posee un producto interno natural $\langle , \rangle$, de modo que tenemos un isomorfismo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &\longrightarrow \mathfrak{h}^* \\ X &\longmapsto \langle X, \rangle \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos bajo esta identificación:

$$\mu : D \longrightarrow \mathfrak{h}.$$

$\forall X \in \mathfrak{h}$, μ nos permite definir la función:

$$\mu_X : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mu_X(z) = \langle \mu(z), X \rangle$$

Por tanto, podemos calcular los campos Hamiltonianos:

$$X_{\mu_X}$$

Vemos que el mapeo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &\longrightarrow \mathfrak{X}(D, \omega) \quad \text{campos simplécticos} \\ X \mapsto \mu_X &\longmapsto X_{\mu_X} \end{aligned}$$

es $\mathbb{R}$-lineal.

El mapeo $\mu: D \to \mathfrak{h}$ es un mapeo de momento para la H-acción sobre D si se cumplen:

1) $\forall X \in \mathfrak{h}$: $X_{\mu_X} = X^{\#}$ (en $\mathfrak{X}(D)$)

2) $\forall h \in H$: $\mu(h \cdot z) = Ad(h)(\mu(z))$ $\forall z \in D$.

Notamos el uso de $Ad(h)$ en vez de $Ad^*(h)$. Esto requiere suponer que:

$$\langle Ad(h)(X), Ad(h)(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$$

$\forall h, X, Y$. En todos nuestros ejemplos H es Abeliano y $Ad(h) = I_{\mathfrak{h}}$ $\forall h \in H$. En este caso 2) se reduce a:

2) (caso H Abeliano)

$$\mu(h \cdot z) = \mu(z) \quad \forall h \in H, z \in D.$$

Para calcular un mapeo de momento para una H-acción sobre D necesitamos:
(caso H Abeliano)

I) Calcular $\forall X \in \mathfrak{h}$ el campo:

$$X^{\#}_{z} = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp(sX)\cdot z$$

II) Proponer una función $\mu : \mathcal{O} \longrightarrow \mathfrak{h}$ tal que para:

$$\mu_X(z) = \langle \mu(z), X \rangle$$

se cumpla:

$$X_{\mu_X} = X^{\#} \quad \forall X \in \mathfrak{h}.$$

y también $\mu(h\cdot z) = \mu(z) \quad \forall h, z.$

Por otro lado ya menciona_ mos que:

$$X \longmapsto X_{\mu_X}$$

es $\mathbb{R}$-lineal. Pero además:

$$X \longmapsto X^{\#}$$

también es $\mathbb{R}$-lineal. Esto último es <u>cierto</u> en el <u>caso general de H</u> pero en el caso Abeliano se prueba como si_ gue:

$$(aX+bY)^{\#}_{z} =$$

$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp(s(aX+bY)) \cdot z$$

$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp(saX)\exp(sbY) \cdot z$$

pues $H = \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{T}^{k_2} \times \mathbb{R}^{k_3}_{>0}$ y su mapeo exponencial es:

$$\exp((s_1,\dots,s_{k_1}),(s'_1,\dots,s'_{k_2}),(s''_1,\dots,s''_{k_3})) =$$
$$= ((s_1,\dots,s_{k_1}),(e^{is'_1},\dots,e^{is'_{k_2}}),(e^{s''_1},\dots,e^{s''_{k_3}}))$$

y usando Leibniz en el producto:

$$= aX^{\#}_z + bY^{\#}_z.$$

Por tanto, para checar:

$$X_{\mu_x} = x^{\#} \quad \forall\, x \in \mathfrak{h}$$

basta elegir una base $X_1,\dots,X_k$ ($k = \dim \mathfrak{h} = \dim H$) y checar:

$$X_{\mu_{x_j}} = X_j^{\#} \quad \forall\, j = 1,\dots,k.$$

Para calcular μ podemos buscar funciones $f_1,\dots,f_k$ tales que:

$$\circledast \quad X_{f_j} = X_j^{\#} \quad \forall j = 1,\dots,k.$$

Si escogemos $X_1, \dots, X_k$ como base ortonormal y f_j resuelven ⊛ entonces:

$$\mu(z) = \sum_{j=1}^{k} \langle \mu(z), X_j \rangle X_j$$

(⊛⊛)

$$= \sum_{j=1}^{k} \mu_{X_j}(z) X_j = \sum_{j=1}^{k} f_j(z) X_j$$

Solamente hay que escoger $f_j \ni$:

$$f_j(hz) = f_j(z) \quad \forall j$$

$\forall h, z$. y μ definida por (⊛⊛) es un mapeo de momento.

Ejemplos:

1) $D = \mathbb{C}^n$ con la mótrica:

$$g = \sum_{j=1}^{n} dz_j \otimes d\bar{z}_j$$

y con forma de Kähler:

$$\omega = i \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j .$$

Sea $\mathbb{T}^n$ actuando sobre $\mathbb{C}^n$ por:

$$t \cdot z = (t_1 z_1, \dots, t_n z_n)$$

$t \in \mathbb{T}^n$, $z \in \mathbb{C}^n$ $(t_j = e^{i\theta_j})$. Esta acción es lineal unitaria para el producto Hermitiano canónico de $\mathbb{C}^n$ y por tanto es biholomorfa y preserva g, ω.

Calculamos el mapeo de momento para la $\mathbb{T}^n$-acción sobre $\mathbb{C}^n$.

Paso I):

$$\mathrm{Lie}(\mathbb{T}^n) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{Lie}(\mathbb{T}) = \mathbb{R}^n$$

$$\exp : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n$$

$$X = (s_1, \dots, s_n) \longmapsto (e^{is_1}, \dots, e^{is_n})$$

Calculamos: $X = (s_1, \ldots, s_n)$

$$X^{\#}_z = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp(sX)\cdot z$$

$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (e^{iss_1}, \ldots, e^{iss_n})\cdot z$$

$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (e^{iss_1} z_1, \ldots, e^{iss_n} z_n)$$

$$= (is_1 z_1, \ldots, is_n z_n)$$

Necesitamos escribir $X^{\#}$ en términos de $\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}$.

En este momento tenemos $X^{\#}$ en la forma:

$$X^{\#}_z = (h_1(z), \ldots, h_n(z))$$

para $h_j(z) = i s_j z_j$.

Lema: Si $Y \in \mathcal{X}(D)$ ($D \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto) es de la forma:

$$Y_z = (h_1(z), \ldots, h_n(z))$$

entonces:

$$Y_z = \sum_{j=1}^{n} \left(h_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j} + \overline{h_j(z)} \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} \right)$$

Dem.:

Se escribe $h_j = u_j + i v_j$ (u_j, v_j reales) y entonces:

$$Y = (\underset{\frac{\partial}{\partial x_1}}{u_1} + i \underset{\frac{\partial}{\partial y_1}}{v_1}, \ldots, u_n + i v_n) \ \text{- - - -}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(u_j \frac{\partial}{\partial x_j} + i v_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \quad (*)$$

pero:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(h_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \overline{h}_j \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left((u_j + i v_j) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) + (u_j - i v_j) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \right)$$

que se desarrolla a $(*)$. //

En nuestro caso $\forall X = (s_1, \ldots, s_n)$ en $\mathbb{R}^n$:

$$X_z^{\#} = \sum_{j=1}^{n} \left(\underbrace{i s_j z_j}_{h_j(z)} \frac{\partial}{\partial z_j} - \underbrace{i s_j \overline{z}_j}_{\overline{h_j(z)}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \right)$$