Calculamos X_f en un caso general.

Sea $D \subseteq \mathbb{C}^n$ dominio con métrica de Kähler:

$$g = \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}\, dz_j \otimes d\bar{z}_k,$$

y forma de Kähler:

$$\omega = i \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k.$$

Recordamos que para $f: D \to \mathbb{C}^n$ suave, el gradiente y el Hamiltoniano ∇f y X_f, resp., se definen por:

$$g(\nabla f, \cdot) = df = \omega(X_f, \cdot)$$

Proposición:

$$\nabla f = \sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}\left(\frac{\partial f}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\frac{\partial}{\partial z_k}\right)$$

$$X_f = i \sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}\left(\frac{\partial f}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\frac{\partial}{\partial z_k}\right)$$

donde $(g^{jk}) = (g_{jk})^{-1}$.

Demostración:

Como tenemos:

$$g(\nabla f, \cdot) = df = \omega(X_f, \cdot) = g(JX_f, \cdot)$$

$$\therefore \quad \nabla f = JX_f, \quad X_f = -J\nabla f$$

Por tanto, las fórmulas del enunciado son equivalentes usando:

$$J\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = -i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \quad J\frac{\partial}{\partial z_h} = i\frac{\partial}{\partial z_h}.$$

Basta obtener la fórmula de X_f.

Escribimos:

$$X_f = \sum_{j=1}^{n}\left(a_j\frac{\partial}{\partial z_j} + b_j\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right)$$

a_j, b_j por determinar. Resolvemos usando:

$$df = \omega(\underbrace{X_f}, \cdot)$$

Calculamos:

$$\omega(X_f, \cdot) =$$

$$= i\sum_{j,h=1}^{n} g_{jh}\underbrace{dz_j \wedge d\bar{z}_h}\left(\sum_{r=1}^{n} a_r\frac{\partial}{\partial z_r}, \cdot\right)$$

$$\hookrightarrow dz_j \otimes d\bar{z}_h - d\bar{z}_h \otimes dz_j$$

$$+ i \sum_{j,h=1}^{n} g_{j\bar{h}}\, dz_j \wedge d\bar{z}_h \left(\sum_{r=1}^{n} b_r \frac{\partial}{\partial \bar{z}_r}, \cdot \right)$$

$$= i \sum_{j,h,r=1}^{n} g_{j\bar{h}}\, a_r \underbrace{dz_j\left(\frac{\partial}{\partial z_r}\right)}_{\delta_{jr}} d\bar{z}_h$$

$$- i \sum_{j,h,r=1}^{n} g_{j\bar{h}}\, b_r \underbrace{d\bar{z}_h\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_r}, \cdot\right)}_{\delta_{hr}} dz_j$$

$$= i \sum_{j,h=1}^{n} a_j g_{j\bar{h}}\, d\bar{z}_h - i \sum_{j,h=1}^{n} g_{j\bar{h}} b_h\, dz_j$$

Comparamos con:

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_h} d\bar{z}_h$$

Por tanto:

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = -i \sum_{h=1}^{n} g_{j\bar{h}} b_h, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_h} = i \sum_{j=1}^{n} a_j g_{j\bar{h}}$$

Luego tenemos:

$$\sum_{j=1}^{n} g^{rj} \frac{\partial f}{\partial z_j} = -i \sum_{j,h=1}^{n} g^{rj} g_{j\bar{h}} b_h$$

$$= -i\sum_{h=1}^{n} \delta^r_h\, b_h = -i\, b_r$$

$$\therefore \quad b_r = i\sum_{j=1}^{n} g^{rj}\frac{\partial f}{\partial z_j} \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial \bar z_r}$$

Similarmente:

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar z_h} g^{hr} = i\sum_{j,h=1}^{n} a_j\, g_{jh}\, g^{hr}$$

$$= i\sum_{j=1}^{n} \delta^r_j\, a_j = i\, a_j$$

$$\therefore \quad a_r = -i\sum_{j=1}^{n} g^{hr}\frac{\partial f}{\partial \bar z_h} \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial z_r}$$

Por tanto:

$$X_f = \sum_{r=1}^{n}\left(-i\sum_{j=1}^{n} g^{hr}\frac{\partial f}{\partial \bar z_h}\right)\frac{\partial}{\partial z_r}$$

$$+ \sum_{r=1}^{n}\left(i\sum_{j=1}^{n} g^{rj}\frac{\partial f}{\partial z_j}\right)\frac{\partial}{\partial \bar z_r}$$

$$= i\sum_{j,h=1}^{n} g^{jh}\left(\frac{\partial f}{\partial z_h}\frac{\partial}{\partial \bar z_j} - \frac{\partial f}{\partial \bar z_j}\frac{\partial}{\partial z_h}\right). \quad //$$

La fórmula para X_f es explícita pero requiere calcular $(g^{jh}) = (g_{jh})^{-1}$.

Sea H grupo de Lie conexo que actúa sobre D por biholomorfismos y preservando g. Por tanto preserva ω.
Por simplicidad suponemos H Abeliano.

¿ μ = mapeo de momento de H ?

Buscamos $\mu : D \longrightarrow \mathfrak{h}^* \cong \mathfrak{h} \cong \mathbb{R}^h$
H-invariante $\ni$:

$$\mu_X(z) = \langle \mu(z), X \rangle$$

$$\Rightarrow \quad X_{\mu_X} = X^\# \quad \forall X \in \mathbb{R}^h.$$

Lo cual requiere calcular campos Hamiltonianos X_{μ_X}.

Pero tenemos para μ_X:

$$X_{\mu_X} = X^\# \iff \omega(X_{\mu_X}, \cdot) = \omega(X^\#, \cdot)$$

$$\iff d\mu_X = \omega(X^\#, \cdot)$$

Mas aún las expresiones:

$$X \longmapsto d\mu_X$$

$$X \longmapsto \omega(X^\#, \cdot)$$

son lineales en $X \in \mathfrak{h} \simeq \mathbb{R}^h$.
Por tanto, basta considerar una base ortonormal $X_1, \dots, X_h$ y proceder como sigue:

1) Calcular $X_1^\#, \dots, X_h^\#$ y $\omega(X_1^\#, \cdot), \dots, \omega(X_h^\#, \cdot)$

2) Hallar funciones $f_1, \dots, f_h$ tales que:

$$df_j = \omega(X_j^\#, \cdot) \quad j = 1, \dots, h.$$

Si las funcione $f_1, \dots, f_h$ son <u>H-invariantes</u>, entonces el mapeo de momento es:

$$\mu : D \longrightarrow \mathbb{R}^h$$

$$\mu(z) = \sum_{j=1}^{h} f_j(z) X_j$$

pues $\forall X \in \mathbb{R}^h$: $X = \sum_{j=1}^{h} \langle X, X_j \rangle X_j$.

Comparando ambos métodos, se debe calcular f_j de la ecuación:

$$df_j = \omega(X_j^{\#}, \cdot)$$

o de la ecuación:

$$X_{f_j} = X_j^{\#}.$$

La primera opción es más fácil de expresar y calcular en términos de f_j. Pero además se reduce a probar que $\omega(X_j^{\#}, \cdot)$ es exacta y hallar f_j.

¿$\omega(X_j^{\#}, \cdot)$ es cerrada? Sí, porque $X_j^{\#}$ es simpléctico.

D convexo $\xrightarrow[\text{alg.}]{\text{top.}}$ $\omega(X_j^{\#}, \cdot)$ es exacta.