Variedades complejas y variedades de Kähler.

Sea V un espacio vectorial real. Una estructura compleja en V es una transformación lineal:

$$J : V \longrightarrow V$$

tal que $J^2 = -id.$

Si pensamos en J como una matriz real, su polinomio mínimo es:

$$x^2 + 1$$

Por tanto, sus eigenvalores como matriz son:

$$+i, -i.$$

Por otro lado, podemos definir:

$$\mathbb{C} \times V \longrightarrow V$$

$$(a+ib) \cdot v = av + bJv$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $v \in V$. Es fácil ver que con este producto V se convierte en un espacio vectorial complejo y por tanto:

$$\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$$

donde $n = \dim_{\mathbb{C}} V$.

Ejemplo:

$V = \mathbb{R}^{2n}$, $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$

Es posible y útil complexificar a V, J.

Sea V espacio vectorial real con estructura compleja J.

Recordamos la complexificación:

$$V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V = \mathbb{C} \otimes V$$

para lo cual $\mathbb{C}$ y V se toman como espacios vectoriales reales. Sus elementos son:

$$\sum_{j=1}^{k} z_j \otimes v_j$$

con $z_j \in \mathbb{C}$, $v_j \in V$. Pero podemos escribir:

$$\sum_{j=1}^{k} z_j \otimes v_j = \sum_{j=1}^{k} a_j \otimes v_j + \sum_{j=1}^{k} i(b_j \otimes v_j)$$

$(a_j, b_j \in \mathbb{R})$

$$= \sum_{j=1}^{k} 1 \otimes (a_j v_j) + i \sum_{j=1}^{k} 1 \otimes (b_j v_j)$$

$$= 1 \otimes v + i(1 \otimes u)$$

donde $v = \sum_{j=1}^{k} a_j v_j$, $u = \sum_{j=1}^{k} b_j v_j$.

Simbólicamente:

$$\text{"="} \quad v + iu$$

Ejemplo:

$\mathbb{R}^n$ se complexifica a $\mathbb{C}^n$:

$$\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$(1 \otimes v) + i(1 \otimes u) \longmapsto v + iu.$$

//

Lo anterior nos sugiere considerar el mapeo:

$$V \xrightarrow{\varphi} V^{\mathbb{C}}$$
$$v \longmapsto 1 \otimes v$$

el cual es $\mathbb{R}$-lineal y para el cual se cumple:

$$V^{\mathbb{C}} = \varphi(V) + i\varphi(V).$$

Más aún:

Lema: $\varphi(V) \cap i\varphi(V) = 0$. En otras palabras:

$$V^{\mathbb{C}} = \varphi(V) \oplus i\varphi(V) = V \oplus iV$$

donde la última identidad es bajo la identificación:

$$v \longrightarrow 1 \otimes v.$$

Dem.:

Sea $w \in \varphi(V) \cap i\varphi(V)$. Entonces podemos escribir:

$$w = 1 \otimes v = i(1 \otimes u)$$

para algunos $v, u \in V$.

Sea $v_1, \ldots, v_k$ una base de V sobre $\mathbb{R}$. Como $1, i$ es base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$, entonces por las propiedades de $\otimes_{\mathbb{R}}$ el conjunto:

$$1 \otimes v_1, \ldots, 1 \otimes v_k, i(1 \otimes v_1), \ldots, i(1 \otimes v_k)$$

es base de $V^{\mathbb{C}}$ sobre $\mathbb{R}$.

Sea:

$$v = \sum_{j=1}^{k} a_j v_j, \quad u = \sum_{j=1}^{k} b_j v_j.$$

Entonces $1\otimes v = i(1\otimes u)$ implica:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_j(1\otimes v_j) - b_j i(1\otimes v_j)\right) = 0$$

$\therefore\ a_j = 0 = b_j \ \therefore\ v = u = 0$

$\Longrightarrow\ w = 0$ //

Lema: Si $T: V \longrightarrow V$ es $\mathbb{R}$-lineal, entonces $\exists!$ $T^{\mathbb{C}}: V^{\mathbb{C}} \longrightarrow V^{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}$-lineal tal que:

$$T^{\mathbb{C}}\big|_V = T$$

Es decir:

$$T^{\mathbb{C}}\circ\varphi = \varphi\circ T.$$

Dem.:

Existencia:

Definimos:

$$T^{\mathbb{C}}: V^{\mathbb{C}} \longrightarrow V^{\mathbb{C}}$$

$$T^{\mathbb{C}}(1\otimes v + i(1\otimes u)) = $$
$$= 1\otimes Tv + i(1\otimes Tu)$$

Es fácil checar $\mathbb{C}$-linealidad.

Además:

$$T^{\mathbb{C}}\big|_V(1\otimes v) = 1\otimes Tv = T(v)$$

$\forall\, v\in V$, bajo la identificación que da φ.

Unicidad:

Si $T_1, T_2 : V^{\mathbb{C}} \longrightarrow V^{\mathbb{C}}$ son $\mathbb{C}$-lineales y:

$$T_1|_V = T = T_2|_V$$

entonces:

$$\begin{aligned} T_1(1\otimes v + i(1\otimes u)) &= \\ &= T_1(1\otimes v) + i\,T_1(1\otimes u) \\ &= 1\otimes Tv + i(1\otimes Tu) \\ &= T_2(1\otimes v) + i\,T_2(1\otimes u) \\ &= T_2(1\otimes v + i(1\otimes u)) \end{aligned}$$

//

Haciendo uso de la unicidad de $T^{\mathbb{C}}$ obtenemos:

Corolario:

Sean $T_1, T_2 : V \longrightarrow V$ $\mathbb{R}$-lineales. Entonces:

$$(T_1 \circ T_2)^{\mathbb{C}} = T_1^{\mathbb{C}} \circ T_2^{\mathbb{C}}$$

Sea V espacio vectorial real con estructura compleja J. Además de complexificar V:

$$V^{\mathbb{C}}$$

Complexificamos J:

$$J = J^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \longrightarrow V^{\mathbb{C}}$$

que se acostumbra a seguir denotando por J.

Por el Corolario anterior, tenemos:

$$(J^{\mathbb{C}})^2 = (J^2)^{\mathbb{C}} = -id$$

Por tanto, J en $V^{\mathbb{C}}$ sigue siendo una estructura compleja. Su polinomio mínimo sigue siendo:

$$X^2 + 1$$

y sus eigenvalores son

$$+i, -i$$

con multiplicidad 1 en el polinomio mínimo.

Consideramos los eigenespacios de J:

$$V^+ = \{ v \in V^{\mathbb{C}} \mid Jv = iv \}$$
$$V^- = \{ v \in V^{\mathbb{C}} \mid Jv = -iv \}.$$

Corolario:

Sea V espacio vectorial real y J estructura compleja. Entonces:

1) V^+, V^- son espacios vectoriales complejos

2) El mapeo dado por:

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow V^+ \\ v &\longmapsto \frac{1}{2}(v - iJv) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales complejos si dotamos a V de la estroctura compleja dada por J.

3) El mapeo dado por:

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow V^- \\ v &\longmapsto \frac{1}{2}(v + iJv) \end{aligned}$$

es un anti-isomorfismo de espacios vectoriales complejos si dotamos a V de la estroctura compleja dada por J.

4) El mapeo dado por:

$$V^+ \longrightarrow V^-$$
$$\frac{1}{2}(v - iJv) \longmapsto \frac{1}{2}(v + iJv)$$

es un anti-isomorfismo de espacios vectoriales complejos.

En particular:

$$\dim_{\mathbb{C}} V^+ = \dim_{\mathbb{C}} V^-$$

$$\dim_{\mathbb{R}} V = 2\dim_{\mathbb{C}} V^+ = 2\dim_{\mathbb{C}} V^-.$$

Dem.:

1) es claro pues V^+, V^- son eigenespacios de la transformación lineal compleja J en $V^{\mathbb{C}}$.

Para ver 2), en primer lugar $\forall v \in V$:

$$J(v - iJv) =$$
$$= Jv - iJ^2 v = Jv + iv$$
$$= i(v - iJv)$$

$\therefore$ $v - iJv \in V^+$.

Así que el mapeo está bien

definido.

Supongamos que:

$$v - iJv = 0$$

que es una identidad en $V^{\mathbb{C}}$.
Como $v \in V$, entonces esta identidad corresponde a:

$$1 \otimes v = i(1 \otimes Jv)$$

$\therefore \quad v = 0 = Jv$

Luego el mapeo es inyec_tivo.

Veamos que es suprayectivo.
Sea $u \in V^+$.
Sabemos que:

$$u = 1 \otimes v_1 + i(1 \otimes v_2)$$
$$= v_1 + i v_2$$

Pero $Ju = iu$.

$$\therefore \quad Jv_1 + iJv_2 = i(v_1 + iv_2)$$

$$\therefore \quad Jv_1 + iJv_2 = -v_2 + iv_1$$

Por un lema anterior:

$$v_2 = -Jv_1$$

$$\therefore \quad u = v_1 + i v_2 = v_1 - iJv_1$$

Chegoemos ahora la linealidad de:

$$v \longmapsto \frac{1}{2}(v - iJv)$$

Esto es claramente lineal real.

Pero además:

$$\frac{1}{2}((Jv) - iJ(Jv)) =$$

$$= \frac{1}{2}(Jv + iv) = i\frac{1}{2}(v - iJv)$$

y así es lineal sobre $\mathbb{C}$.

3) se checa análogamente salvo por la antilinealidad:

$$\frac{1}{2}((Jv) + iJ(Jv)) =$$

$$= \frac{1}{2}(Jv - iv) = -i\frac{1}{2}(v + iJv)$$

Finalmente:

$$2), 3) \implies 4).$$

//

Sea M un espacio métrico segundo numerable.

Una carta de M es un par (U, φ) que cumple:

1) $U \subseteq M$ es abierto en M.
2) $\varphi: U \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, donde V es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Un atlas para M es una familia de cartas:

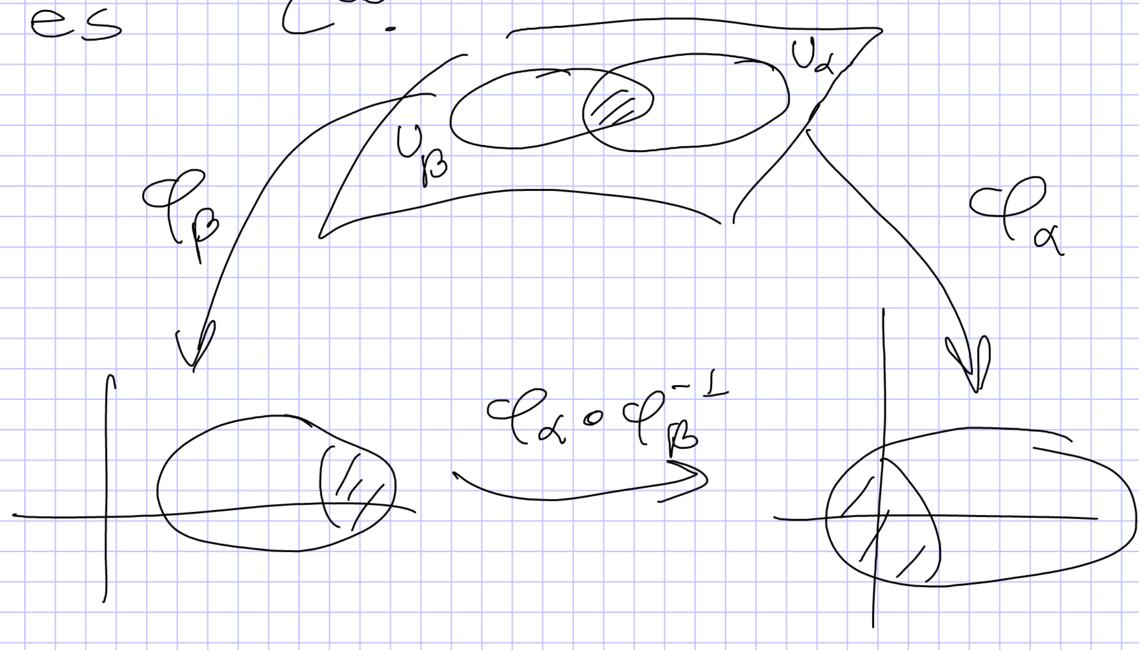
$$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$$

tal que n es fijo y que cumple:

1) $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$,
2) $\forall \alpha, \beta \in I$:

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es C^∞.



M con el atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ se dice variedad diferenciable de dimensión n.

Frecuentemente, una carta se escribe:

$$(U, \varphi), \quad \varphi = (x_1, \dots, x_n)$$

donde $x_1, \dots, x_n$ son las componentes de

$$\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

Un mapeo $f : M \longrightarrow N$ entre variedades diferenciables se dice suave si $\forall x_0 \in M$ existen:

(U, φ) carta de M con $x_0 \in U$

(V, ψ) carta de N con $f(x_0) \in V$

tal que:

$$\begin{tikzcd}
M \supseteq U \arrow[r, "f|_U"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \subseteq N \arrow[d, "\psi"] \\
\mathbb{R}^m \supseteq \varphi(U) \arrow[r, "\psi \circ f \circ \varphi^{-1}"] & \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es suave.

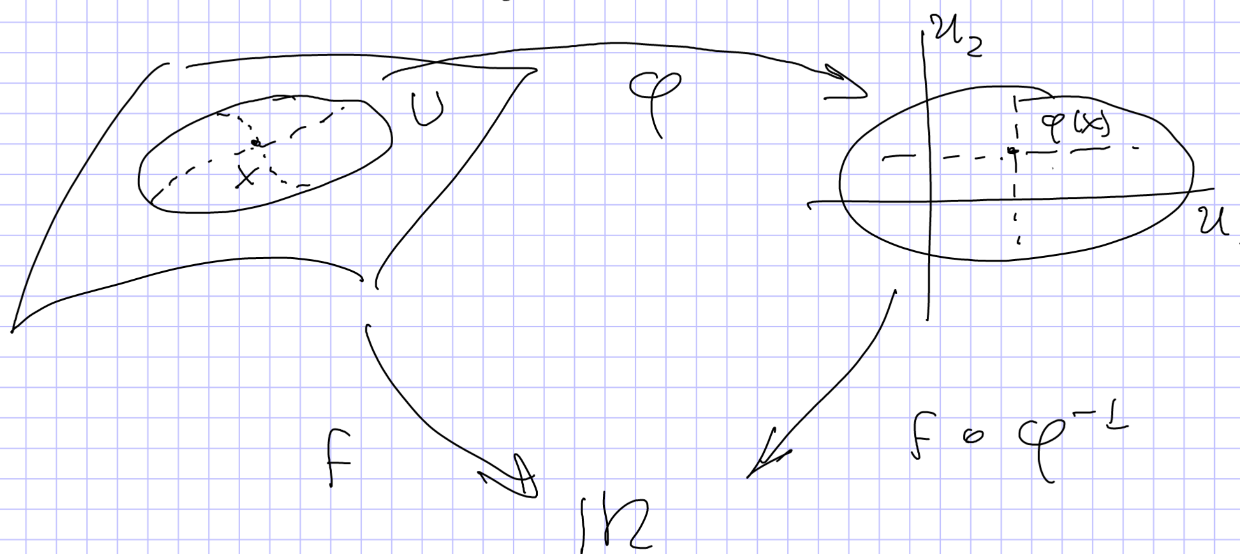
Derivadas parciales:

Sea $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función suave y (U, φ) una carta de M con componentes:

$$\varphi = (x_1, \dots, x_n).$$

Para todo $x \in M$ definimos:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_j}(\varphi(x))$$



Notación:

$$C_x^\infty(M) = \left\{ f: U \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ suave}, x \in U \\ U \subseteq M \text{ abierto} \end{array} \right\}$$

= funciones a valores reales suaves en una vecindad x en M.

Lema: M variedad, $x_0 \in M$. Si $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ es una carta de M con $x_0 \in U$, entonces para todo $j = 1, \dots, n$ el mapeo:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{x_0} : C^\infty_{x_0}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$$

es $\mathbb{R}$-lineal y satisface la regla de Leibniz:

$$\frac{\partial (fg)}{\partial x_j}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\, g(x_0) + f(x_0) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_0).$$

$\forall f, g \in C^\infty_{x_0}(M)$.

Espacio tangente:

El espacio tangente a una variedad M en el punto x_0 es el conjunto $T_{x_0}M$ que consta de los mapeos $\mathbb{R}$-lineales:

$$v : C^\infty_{x_0}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tales que:

$$v(fg) = v(f)g(x_0) + f(x_0)v(g)$$

$\forall f, g \in C^\infty_{x_0}(M)$.

Proposición (ver Warner)
Si M es una variedad y $x_0 \in M$, entonces $T_{x_0}M$ es un espacio vectorial real.
Si $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ es una carta con $x_0 \in U$, entonces:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{x_0}, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_{x_0}$$

es una base de $T_{x_0}M$.
Más aún, $\forall v \in T_{x_0}M$:

$$v = \sum_{j=1}^{n} v(x_j) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{x_0}.$$

Diferencial de un mapeo suave:

Si $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es un mapeo suave y $x_0 \in M$, definimos su diferencial por:

$$df_{x_0} : T_{x_0}M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$df_{x_0}(v) = v(f)$$

En particular, es una transformación lineal. Si

$$(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$$

es una carta con $x_0 \in U$, en_

tonces:

$$df_{x_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{x_0}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$$

y la representación matricial de df_{x_0} en la base:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{x_0} \quad j = 1, \dots, n$$

es dada por:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$$

Si $F: M \longrightarrow N$ es una función suave y $x_0 \in M$, entonces su diferencial se define como:

$$dF_{x_0}: T_{x_0}M \longrightarrow T_{F(x_0)}N$$
$$v \longmapsto dF_{x_0}(v)$$

donde:

$$dF_{x_0}(v): C^\infty_{F(x_0)}(N) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto v(f \circ F)$$

o bien:

$$(dF_{x_0}(v))(f) = v(f \circ F).$$

Sean:

$(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ carta de M con $x_0 \in U$.

$(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$ carta de M con $F(x_0) \in V$.

La representación matricial de dF_{x_0} se obtiene como sigue:

$$dF_{x_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{x_0}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{F(x_0)}$$

$(a_{ij} = ?)$

$$= \sum_{i=1}^{m} dF_{x_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{x_0}\right)(y_i) \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{F(x_0)}$$

Pero:

$$dF_{x_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{x_0}\right)(y_i) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{x_0}(y_i \circ F)$$

$$= \frac{\partial (y_i \circ F)}{\partial x_j}(x_0)$$

Por tanto, la matriz de dF_{x_0} es dada por:

$$\left(\frac{\partial (y_i \circ F)}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

En el caso $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$ con las coordenadas usuales, esto define la matriz Jacobiana usual.

Cambios de coordenadas:

Sean:

$$(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$$

$$(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$$

dos cartas de una misma variedad M con $U \cap V \neq \emptyset$ y $x_0 \in U \cap V$.

Tenemos dos bases para $T_{x_0}M$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{x_0} \right)_{j=1}^{n} , \quad \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{x_0} \right)_{j=1}^{n}$$

¿Como se relacionan?

Tenemos:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{x_0} = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{x_0}(y_i) \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{x_0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x_0) \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{x_0}$$

El cambio de base es por la matriz:

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{i,j=1}^{n}$$

Haces tangente y cotangente:
Para una variedad M definimos:

$$TM = \bigcup_{x\in M} T_x M \quad \text{haz tangente}$$

$$T^*M = \bigcup_{x\in M} T_x^* M \quad \text{haz cotangente.}$$

Donde por notación:

$$T_x^* M = (T_x M)^*$$

Tenemos proyecciones:

$$\begin{aligned} \pi : TM &\longrightarrow M \\ v &\longmapsto x \end{aligned}$$

si $v \in T_xM$, y también:

$$\begin{aligned} \pi^* : T^*M &\longrightarrow M \\ \lambda &\longmapsto x \end{aligned}$$

si $\lambda \in T_x^*M$.

Ambas se pueden ver como variedades diferenciables de dimensión $2\dim M$.

Cartas de TM:

Sea $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ una carta de M.

Se define una carta $(\pi^{-1}(U), \hat{\varphi})$ como sigue. El dominio es $\pi^{-1}(U)$ que se declara abierto en TM. Notamos que:

$$\pi^{-1}(U) = \left\{ v \in TM \;\middle|\; \begin{matrix} v \in T_xM \text{ con} \\ x \in U \end{matrix} \right\}$$

Se define:

$$\hat{\varphi} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$$

por:

$$\hat{\varphi}(v) = (\varphi(\pi(v)), \underbrace{v(x_1), \dots, v(x_n)}_{})$$

coordenadas del punto base de v

coordenadas de v en $T_{x_0}M$ respecto de la base:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\pi(v)} \quad j = 1, \dots, n.$$

$\hat{\varphi}$ es una biyección. Se define la topología en $\pi^{-1}(U)$ mediante $\hat{\varphi}$.

Sea $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$ otra carta. Hay un cambio de coordenadas:

$$\hat{\psi} \circ \hat{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

que se calcula como sigue.

$(p, a) \in \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$

$$\hat{\varphi}^{-1}(p, a) = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\varphi^{-1}(p)}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\varphi^{-1}(p)) \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{\varphi^{-1}(p)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\varphi^{-1}(p)) a_j \right) \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{\varphi^{-1}(p)}$$

Por tanto:

$$\hat{\psi}\circ\hat{\varphi}^{-1}(p,a) =$$
$$= \left(\psi\circ\varphi^{-1}(p), \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\varphi^{-1}(p))\right)_{i,j=1}^{n} \cdot a\right)$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\varphi^{-1}(p)) = \frac{\partial(y_i\circ\varphi^{-1})}{\partial u_j}(\varphi(\varphi^{-1}(p)))$$
$$= \frac{\partial((\psi\circ\varphi^{-1})_i)}{\partial u_j}(p)$$

y esta es la matriz de

$$d(\psi\circ\varphi^{-1})_p$$

Por tanto:

$$\hat{\varphi}\circ\hat{\psi}^{-1} : \psi(U\cap V)\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi(U\cap V)\times\mathbb{R}^n$$
$$(\hat{\varphi}\circ\hat{\psi}^{-1})(p,a) = ((\varphi\circ\psi^{-1})(p), d(\varphi\circ\psi^{-1})_p(a))$$

que es suave.

$\therefore$ la topología de M esta bien definida y:

$$\{(\pi^{-1}(U),\hat{\varphi}) \mid (U,\varphi) \text{ carta de } M\}$$

es atlas para TM.

Haz cotangente:

Sea $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ carta de M y $x_0 \in U$.

Tenemos:

$$x_1, \dots, x_n : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

suaves. Por tanto, se tienen:

$$d(x_j)_{x_0} : T_{x_0}M \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Además, tenemos:

$$d(x_j)_{x_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x_0}\right) =$$

$$= \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial (x_j \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i}(\varphi(x_0))$$

$$= \frac{\partial ((\varphi \circ \varphi^{-1})_j)}{\partial u_i}(\varphi(x_0)) = \delta_{ij}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{x_0}\right)_{j=1}^{n} \quad y \quad \left(dx_j|_{x_0}\right)_{j=1}^{n}$$

son bases duales.

Para (U, φ) construimos una carta $((\pi^*)^{-1}(U), \hat{\varphi})$ de T^*M como sigue.

$$\hat{\varphi} : (\pi^*)^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$$

$$\hat{\varphi}(\alpha) = (\underbrace{\varphi(\pi^*(\alpha))}_{\text{coordenadas del punto base de } \alpha.}, \underbrace{\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{x_0}\right), \dots, \lambda\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_{x_0}\right)}_{\text{coordenadas de } \lambda \text{ en } T^*_{x_0}M \text{ respecto de la base: } dx_j|_{x_0},\ j=1,\dots,n.})$$

De nuevo hay una biyección y una topología en $(\pi^*)^{-1}(U)$.

Sea $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$ otra carta y calculamos:

$$\hat{\varphi} \circ \hat{\psi}^{-1} : \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

Dado $(p, a) \in \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$, tenemos:

$$\hat{\psi}^{-1}(p, a) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, dy_i\big|_{\psi^{-1}(p)}$$

Pero tenemos:

$$dy_i\big|_{\psi^{-1}(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\psi^{-1}(p)}\right) =$$

$$= \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\psi^{-1}(p))$$

y por tanto:

$$dy_i|_{\psi^{-1}(p)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\psi^{-1}(p))\, dx_j|_{\psi^{-1}(p)}.$$

Entonces:

$$\hat{\psi}^{-1}(p, a) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_i \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\psi^{-1}(p))\, dx_j|_{\psi^{-1}(p)}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\psi^{-1}(p)) \right) dx_j|_{\psi^{-1}(p)}$$

y esto implica:

$$\hat{\varphi} \circ \hat{\psi}^{-1}(p, a) =$$
$$= \left(\varphi \circ \psi^{-1}(p),\ d(\varphi \circ \psi^{-1})_p^T(a)\right)$$

que es suave.

Funciones holomorfas y ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Sea $f: U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función sobre un abierto U de $\mathbb{C}$. Usando las variables:

$$z = x + iy$$

tenemos la identificación

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2.$$

Si f es suave con componentes reales dadas por:

$$f = u + iv$$

entonces en coordenadas reales:

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Se sabe que las siguientes condiciones son equivalentes en todo $z \in U$:

1) df_z es $\mathbb{C}$-lineal

2) $df_z J_0 = J_0 df_z$ donde:

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z)$$

4) El límite:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe.

La condición 3) se puede escribir como una sola ecuación.

Definimos:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Observamos que:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

Por tanto, se tiene la equivalencia:

3) se cumple en z $\iff$ $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$

Por otro lado:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)(z)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right](z)$$

y si suponemos que f es holomorfa:

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(z) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(z)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}}} \frac{f(z+x)-f(z)}{x}$$

$$+ \frac{1}{2}\lim_{\substack{y\to 0\\ y\in\mathbb{R}}} \frac{f(z+iy)-f(z)}{iy} = f'(z)$$

que es la derivada compleja.
El operador $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sirve para determinar si una función es o no holomorfa.

Si la función es holomorfa, el operador $\frac{\partial}{\partial z}$ calcula su derivada holomorfa o compleja.

Es fácil ver la semejanza entre las expresiones:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

y los mapeos lineales:

$$V \longrightarrow V^{+} : \quad v \longmapsto \frac{1}{2}(v - iJv)$$

$$V \longrightarrow V^{-} : \quad v \longmapsto \frac{1}{2}(v + iJv)$$

Lo hacemos explícito a continuación.

El espacio $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ posee la estructura compleja:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

que mapea los básicos canónicos:

$$e_1 \longmapsto e_2 \,, \quad e_2 \longmapsto -e_1$$

Por otro lado:

$$\mathbb{R}^2 \cong T_0\mathbb{R}^2$$

cuya base corresponde a:

$$e_1 \sim \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad e_2 \sim \frac{\partial}{\partial y}$$

Por tanto tenemos la estructura compleja en $T_0\mathbb{R}^2$ dada por:

$$J\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad J\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}$$

Bajo esta construcción:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - iJ\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + iJ\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Además, observamos que:

$$J\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}J\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial x}\right) \; (*)$$

$$= i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) = i\frac{\partial}{\partial z}$$

$$(*) \; = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y} - iJ\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Similarmente:

$$J\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}J\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}-i\frac{\partial}{\partial x}\right) \circledast$$
$$= -i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right) = -i\frac{\partial}{\partial z}$$
$$\circledast = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}+iJ\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

En los cálculos anteriores J actúa originalmente sobre $T_0\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$ con base

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$$

pero luego hacemos que J actúe sobre

$$\frac{\partial}{\partial x}, i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, i\frac{\partial}{\partial y}$$

que corresponde a la complexificación de $T_0\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$.
La formalización de estas operaciones se hace aplicando nuestras construcciones:

$$V, J \longrightarrow V^{\mathbb{C}}, J, V^+, V^-$$

a los espacios tangentes.

Variedades complejas.

Sea M una variedad real. Una estructura casi-compleja en M es un mapeo suave:

$$J : TM \longrightarrow TM$$

tal que:

1) $\forall x \in M : J(T_xM) \subseteq T_xM$. Denotamos este mapeo por:
$$J_x : T_xM \longrightarrow T_xM$$

2) J_x es una estructura compleja en T_xM $\forall x \in M$.

Por otro lado, M se dice variedad compleja u holomorfa si posee una familia de cartas

$$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$$

tal que:

1) $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto en $\mathbb{C}^n$.

2) $\forall \alpha, \beta \in I$:
$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$
es holomorfa.

Las cartas del atlas son llamadas cartas holomorfas.

En la definición anterior $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son abiertos en $\mathbb{C}^n$.

Así aclaramos:

$$F : U \subseteq \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

es holomorfa en el abierto U de $\mathbb{C}^n$ si es C^∞ y su diferencial:

$$dF_z : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

es lineal compleja $\forall z \in U$.

Lo anterior es equivalente a las siguientes condiciones:

1) $\forall z \in U$ y cada $j = 1, \dots, m$ la diferencial:

$$d(F_j)_z : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

es lineal compleja.

2) Considerando a dF_z como una matriz real $2m \times 2n$ se cumple:

$$J_m \, dF_z = dF_z \, J_n$$

donde:

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

3) $\forall h = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_h}(z) = \frac{\partial v_j}{\partial y_h}(z)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial y_h}(z) = -\frac{\partial v_j}{\partial x_h}(z) \qquad \forall z \in U.$$

4) $\forall h = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$:

$$\frac{\partial F_j}{\partial \bar{z}_h}(z) = 0 \qquad \forall z \in U.$$

En el último punto definimos:

$$\frac{\partial}{\partial z_h} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_h} - i\frac{\partial}{\partial y_h}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_h} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_h} + i\frac{\partial}{\partial y_h}\right) \qquad h = 1, \ldots, n.$$

Entonces, hemos llevado a cabo la siguiente construcción.

Tenemos $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ vía:

$$(z_1, \dots, z_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$$

con $z_j = x_j + i y_j$. La estructura compleja es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Identificamos en todo $z \in \mathbb{C}^n$:

$$T_z \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$$

con la base:

$$(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right)$$

Al complexificar tenemos:

$$T_z^{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = (\mathbb{R}^{2n})^{\mathbb{C}}$$

que consta de las combinaciones lineales:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

con $a_j, b_j \in \mathbb{C}$.

La estructura compleja en $T_z^{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n$ es dada por la misma matriz:

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

De modo que:

$$J_0 \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}$$
$$J_0 \frac{\partial}{\partial y_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \qquad \forall j = 1, \dots, n.$$

Los espacios V^+, V^- y sus mapeos son ahora:

$$\begin{aligned} T_z\mathbb{C}^n &\longrightarrow T_z^{1,0}\mathbb{C}^n \\ v &\longmapsto \tfrac{1}{2}(v - iJv) \end{aligned}$$

en particular:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \longmapsto \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \frac{\partial}{\partial z_j}$$

También:

$$\begin{aligned} T_z\mathbb{C} &\longrightarrow T_z^{0,1}\mathbb{C}^n \\ v &\longmapsto \tfrac{1}{2}(v + iJv) \end{aligned}$$

en particular:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \longmapsto \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \frac{\partial}{\partial z_j}$$

Lema: Si M es variedad compleja entonces M admite una estructura casi-compleja construida como sigue.

$\forall z \in M$, sea (U, φ) carta holomorfa $\ni z \in U$. Definimos J_z como el único mapeo lineal tal que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} T_zM & \xrightarrow{J_z} & T_zM \\ {\scriptstyle d\varphi_z}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d\varphi_z} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{i\times} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

es conmutativo.

Dem.:

Debemos probar que J_z no depende de la elección de la carta.

Por definición para φ:

$$J_z^{\varphi} v = (d\varphi_z)^{-1}(i\, d\varphi_z(v))$$

$\forall v \in T_zM$,

y para otra carta ψ:

$$J_z^{\psi} v = (d\psi_z)^{-1}(i\, d\psi_z(v))$$

$\forall v \in T_z M$.

Vemos que se cumple $\forall v \in T_z M$:

$$J_z^{\varphi} v = (d\varphi_z)^{-1}(i\, d\varphi_z(v))$$

$$= (d\varphi_z)^{-1}(i\, d\varphi_z \circ (d\psi_z)^{-1} \circ d\psi_z(v))$$

$$= (d\varphi_z)^{-1}(i\, d(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(z)} \circ d\psi_z(v))$$

pero $d(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(z)}$ es $\mathbb{C}$-lineal:

$$= (d\varphi_z)^{-1}(d(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(z)}(i\, d\psi_z(v))$$

$$= (d\psi_z)^{-1}(i\, d\psi_z(v)) = J_z^{\psi} v.$$

Observación:

El recíproco es falso.

$\longrightarrow$ Ver tensor de Nijenhuis en Kobayashi-Nomizu vol. 2.

T_zM, $T_z^{\mathbb{C}}M$, $T_z^{1,0}M$, $T_z^{0,1}M$:

M variedad compleja
$z \in M$, J_z estructura compleja en T_zM.

Definimos:

$$T_z^{\mathbb{C}}M = (T_zM)^{\mathbb{C}}$$

y extendemos J_z

$T_z^{1,0}M$ es el $(+i)$-eigenespacio de J_z.

$$T_z^{1,0}M = \{v \in T_z^{\mathbb{C}}M \mid Jv = iv\}$$

$T_z^{0,1}M$ es el $(-i)$-eigenespacio de J_z

$$T_z^{0,1}M = \{v \in T_z^{\mathbb{C}}M \mid Jv = -iv\}$$

Tenemos:

$$T_z^{\mathbb{C}}M = T_z^{1,0}M \oplus T_z^{0,1}M$$

junto con mapeos:

$$\begin{aligned} T_zM &\longrightarrow T_z^{1,0}M \\ v &\longmapsto \tfrac{1}{2}(v - iJv) \end{aligned} \qquad \mathbb{C}\text{-lineal}$$

$$T_zM \longrightarrow T_z^{0,1}M$$
$$v \longmapsto \frac{1}{2}(v + iJv)$$
$\mathbb{C}$-antilineal.

Si $(U, \varphi = (z_1, \ldots, z_n))$ es carta holomorfa con $z_j = x_j + iy_j$, entonces el primer mapeo lleva:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \longmapsto \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \frac{\partial}{\partial z_j}$$

definición

$$\therefore \frac{\partial}{\partial y_j} \longmapsto i\frac{\partial}{\partial z_j}$$

y para el segundo mapeo:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \longmapsto \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$$

definición

$$\therefore \frac{\partial}{\partial y_j} \longmapsto -i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}.$$

En particular, tenemos las siguientes bases: $(j = 1, \ldots, n)$

$\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}$ de T_zM sobre $\mathbb{R}$.

$\frac{\partial}{\partial z_j}$ de $T_z^{1,0}M$ sobre $\mathbb{C}$

$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ de $T_z^{0,1}M$ sobre $\mathbb{C}$

$\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ de $T_z^{\mathbb{C}}M$ sobre $\mathbb{C}$.

Se definen haces:

$$TM = \bigcup_{z \in M} T_z M$$

$$T^{\mathbb{C}}M = \bigcup_{z \in M} T^{\mathbb{C}}M$$

$$T^{1,0}M = \bigcup_{z \in M} T_z^{1,0}M$$

$$T^{0,1}M = \bigcup_{z \in M} T_z^{0,1}M.$$

Por otro lado, para una carta $(U, \varphi = (z_1, \ldots, z_n))$ holomorfa tenemos:

$$z_j : U \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \bar{z}_j : U \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z_j = x_j + i y_j \qquad \bar{z}_j = x_j - i y_j$$

ambas suaves. Sus diferenciales son:

$$dz_j = dx_j + i dy_j$$
$$d\bar{z}_j = dx_j - i dy_j$$

$\forall z_0 \in M$, los elementos de $T_{z_0}M$ son derivaciones:

$$v \in T_{z_0}M$$

$$v : C^{\infty}_{z_0}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

v $\mathbb{R}$-lineal que satisface la regla de Leibniz.

Por otro lado, consideramos:

$$C^{\infty}_{z_0}(M, \mathbb{C}) = \left\{ f : U \longrightarrow \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ suave en} \\ U \text{ abierto en } M \\ z_0 \in U \end{array} \right\}$$

y para todo $v \in T^{\mathbb{C}}_{z_0}M$ definimos:

$$v : C^{\infty}_{z_0}(M, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

por:

$$\begin{aligned} v(f) &= (v_1 + i v_2)(f_1 + i f_2) \\ &= (v_1(f_1) - v_2(f_2)) + i(v_1(f_2) + v_2(f_1)) \end{aligned}$$

donde $v_1, v_2 \in T_{z_0}M$, $f_1, f_2 \in C^{\infty}_{z_0}(M)$ son tales que:

$$v = v_1 + i v_2 \quad , \quad f = f_1 + i f_2 .$$

Es fácil ver que el mapeo:

$$C^{\infty}_{z_0}(M, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

que induce $v \in T_{z_0}M$ es $\mathbb{C}$-lineal y satisface la regla de Leibniz:

$$v(fg) = v(f)\,g(z_0) + f(z_0)\,v(g)$$

$\forall\, f, g \in C^\infty_{z_0}(M, \mathbb{C})$.

Corolario:

Con la notación anterior, $\forall z_0 \in M$:

$$T^{\mathbb{C}}_{z_0} M \equiv \left\{ v : C^\infty_{z_0}(M, \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} v\ \mathbb{C}\text{-lineal} \\ \text{y satisface} \\ \text{Leibniz} \end{array} \right\}$$

Dem.:

Las afirmaciones anteriores prueban $\subseteq$. Pero veamos algunos detalles:

$$v(fg) = (v_1 + i v_2)((f_1 + i f_2)(g_1 + i g_2))$$

$$= (v_1 + i v_2)(f_1 g_1 - f_2 g_2 + i(f_1 g_2 + f_2 g_1))$$

$$= v_1(f_1 g_1 - f_2 g_2) - v_2(f_1 g_2 + f_2 g_1)$$
$$+ i(v_1(f_1 g_2 + f_2 g_1) + v_2(f_1 g_1 - f_2 g_2))$$

$$= v_1(f_1)\,g_1(z_0) + f_1(z_0)\,v_1(g_1)$$
$$- v_1(f_2)\,g_2(z_0) - f_2(z_0)\,v_1(g_2)$$
$$- v_2(f_1)\,g_2(z_0) - f_1(z_0)\,v_2(g_2)$$
$$- v_2(f_2)\,g_1(z_0) - f_2(z_0)\,v_2(g_1)$$

$$+ i\big(v_1(f_1)\,g_2(z_0) + f_1(z_0)\,v_1(g_2)$$
$$+ v_1(f_2)\,g_1(z_0) + f_2(z_0)\,v_1(g_1)$$
$$+ v_2(f_1)\,g_1(z_0) + f_1(z_0)\,v_2(g_1)$$
$$- v_2(f_2)\,g_2(z_0) - f_2(z_0)\,v_2(g_2)\big)$$

Por otro lado:

$$v(f)\,g(z_0) + f(z_0)\,v(g) =$$
$$= (v_1 + i v_2)(f_1 + i f_2)(g_1(z_0) + i\,g_2(z_0))$$
$$+ (f_1(z_0) + i f_2(z_0))(v_1 + i v_2)(g_1 + i g_2)$$
$$= \big(v_1(f_1) - v_2(f_2) + i(v_1(f_2) + v_2(f_1))\big)\cdot$$
$$\cdot\,(g_1(z_0) + i\,g_2(z_0))$$
$$+ (f_1(z_0) + i f_2(z_0))\cdot$$
$$\cdot\,\big(v_1(g_1) - v_2(g_2) + i(v_1(g_2) + v_2(g_1))\big)$$

que se expande a los mismos términos de arriba.

Para $\supseteq$, sea:

$$v : C^\infty_{z_0}(M, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

derivación compleja.
Tenemos:

$$C^\infty_{z_0}(M, \mathbb{C}) = C^\infty_{z_0}(M) \oplus i\, C^\infty_{z_0}(M)$$

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$$

Por tanto, podemos escribir:

$$v = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$$

en el sentido de que:

$$v(f) = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

si $f = f_1 + i f_2$. Como v es $\mathbb{C}$-lineal:

$$v_{11} = v_{22}, \quad v_{12} = -v_{21}$$

y podemos escribir:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix}$$

En otras palabras

$$v_1, v_2 : C^\infty_{z_0}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

son $\mathbb{R}$-lineales y:

$$v(f) = (v_1(f_1) - v_2(f_2)) + i(v_1(f_2) + v_2(f_1))$$

Es decir:

$$v = v_1 + i v_2$$

con v_1, v_2 definidas como mapeos $\mathbb{C}$-lineales:

$$C^\infty_{z_0}(M, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Resta ver que v_1, v_2 son derivaciones:

Si $f, g \in C^\infty_{z_0}(M)$, entonces:

$$v(fg) = v(f)g(z_0) + f(z_0)v(g)$$

Pero esto equivale a:

$$v_1(fg) + i v_2(fg) =$$
$$= (v_1(f) + i v_2(f))g(z_0)$$
$$+ f(z_0)(v_1(g) + i v_2(g))$$

$\therefore$ v_1, v_2 son derivaciones. //

Lema:

Con la notación anterior:

$$dz_j\left(\frac{\partial}{\partial z_h}\right) = \delta_{jh} = d\bar{z}_j\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_h}\right)$$

$$dz_j\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_h}\right) = 0 = d\bar{z}_j\left(\frac{\partial}{\partial z_h}\right)$$

Observación:

$d(z_j)_z : T_zM \longrightarrow \mathbb{C}$

pero $\left.\frac{\partial}{\partial z_h}\right|_z \in T_z^{1,0}M \setminus T_zM$

Por convención, si

$$\alpha : T_zM \longrightarrow \mathbb{C}$$

es $\mathbb{R}$-lineal, entonces se extiende a:

$$\alpha = \alpha^{\mathbb{C}} : T_z^{\mathbb{C}}M \longrightarrow \mathbb{C}$$

$\mathbb{C}$-lineal.

Dem. del Lema:

$$dz_j\left(\frac{\partial}{\partial z_h}\right) = \frac{1}{2}(dx_j + i\,dy_j)\left(\frac{\partial}{\partial x_h} - i\frac{\partial}{\partial y_h}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(dx_j\left(\frac{\partial}{\partial x_h}\right) + dy_j\left(\frac{\partial}{\partial y_h}\right)\right) = \delta_{jh}$$

$$dz_j\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_h}\right) = \frac{1}{2}(dx_j + i\,dy_j)\left(\frac{\partial}{\partial x_h} + i\frac{\partial}{\partial y_h}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(dx_j\left(\frac{\partial}{\partial x_h}\right) - dy_j\left(\frac{\partial}{\partial y_h}\right)\right) = 0 \quad //$$

Lo anterior nos permite calcular ejemplos como el siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial z_j}(|z_h|^2) = \frac{\partial}{\partial z_j}(z_h \overline{z}_h)$$

$$= \frac{\partial z_h}{\partial z_j}\overline{z}_h + z_h \frac{\partial \overline{z}_h}{\partial z_j} = \delta_{jh}\overline{z}_h.$$

Variedades de Kähler.

Referencia principal:

Capítulo 2 de Metric Rigidity Theorems on Hermitian Symmetric Manifolds de Mok.

Definición:

Sea M una variedad compleja con estructura compleja J. Una métrica Riemanniana g en M es llamada métrica Hermitiana si:

$$g_z(J_z u, J_z v) = g_z(u, v)$$

$\forall z \in M$, $u, v \in T_z M$.

Decimos que (M, g) es una variedad Hermitiana.

Sea (M, g) una variedad Hermitiana. Extendemos a g por complexificación:

$$\forall z \in M, \quad g_z : T_z^{\mathbb{C}} M \times T_z^{\mathbb{C}} M \longrightarrow \mathbb{C}$$

es dada $\forall u, v \in T_z^{\mathbb{C}} M$ por:

$$g_z(u, v) = g_z(u_1, v_1) - g_z(u_2, v_2) + i\left(g_z(u_1, v_2) + g_z(u_2, v_1)\right)$$

donde $u = u_1 + i u_2$
 $v_1 = v_1 + i v_2$

y $u_1, u_2, v_1, v_2 \in T_z M$.

En particular, g complexificada es $\mathbb{C}$-bilineal en $T^{\mathbb{C}}M$. Además se sigue cumpliendo:

$$g_z(J_z u, J_z v) = g_z(u, v)$$

$\forall z \in M$, $u, v \in T_z^{\mathbb{C}} M$.

Corolario:
Si (M, g) es variedad Hermitiana, entonces $\forall z \in M$:

$$u, v \in T_z^{1,0} M \implies g_z(u, v) = 0$$
$$u, v \in T_z^{0,1} M \implies g_z(u, v) = 0.$$

Dem.:
Si $u, v \in T_z^{1,0} M$:

$$\begin{aligned} g_z(u, v) &= g_z(J_z u, J_z v) \\ &= g_z(iu, iv) = -g_z(u, v) \end{aligned}$$

//

Sea $(U, \varphi = (z_1, \ldots, z_n))$ una carta holomorfa de una variedad Hermitiana (M, g).

Entonces, $\forall z \in U$ tenemos las siguientes bases donde $z_j = x_j + i y_j$:

$dx_j|_z, dy_j|_z, j = 1, \ldots, n$ base de $T_z^* M$ sobre $\mathbb{R}$.

$dz_j|_z, d\bar{z}_j|_z, j = 1, \ldots, n$ base de $T_z^{\mathbb{C}*} M$ sobre $\mathbb{C}$

$\frac{\partial}{\partial z_j}\Big|_z, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\Big|_z, j = 1, \ldots, n$ base de $T_z^{\mathbb{C}} M$ sobre $\mathbb{C}$

(las dos últimas son bases duales)

$dx_j \otimes dx_k, dx_j \otimes dy_k, dy_j \otimes dx_k, dy_j \otimes dy_k, j, k = 1, \ldots, n$ base de $T_z^* M \otimes T_z^* M$ sobre $\mathbb{R}$.

$dz_j \otimes dz_k, dz_j \otimes d\bar{z}_k, d\bar{z}_j \otimes dz_k, d\bar{z}_j \otimes d\bar{z}_k, j, k = 1, \ldots, n$ base de $T_z^{\mathbb{C}*} M \otimes T_z^{\mathbb{C}*} M$ sobre $\mathbb{C}$.

En particular, en las coordenadas de (U, φ) podemos escribir:

g real:

$$g = \sum_{j,h=1}^{n} \Big(a_{jh}\, dx_j \otimes dx_h + b_{jh}\, dx_j \otimes dy_h$$
$$+ c_{jh}\, dy_j \otimes dx_h + d_{jh}\, dy_j \otimes dy_h \Big)$$

g complexificada:

$$g = \sum_{j,h=1}^{n} g_{jh}\, dz_j \otimes d\bar{z}_h$$
$$+ \sum_{j,h=1}^{n} \hat{g}_{jh}\, d\bar{z}_j \otimes dz_h$$

Recordamos que:

$$g\left(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_h}\right) = 0 = g\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_h}\right)$$

por lo cual los coeficientes de $dz_j \otimes dz_h$ y $d\bar{z}_j \otimes d\bar{z}_h$ son cero.

Además:

$$g_{jh} = g\left(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_h}\right)$$

$$\hat{g}_{jh} = g\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \frac{\partial}{\partial z_h}\right)$$

En particular:

$$\hat{g}_{jh} = g_{hj}$$

Obs.: A veces se escribe $g_{j\bar{h}}$.

La identidad:

$$T_z^{\mathbb{C}} M = T_z M \oplus i T_z M$$

nos proporciona la conjugación:

$$\begin{aligned} T_z^{\mathbb{C}} M &\longrightarrow T_z^{\mathbb{C}} M \\ u + iv &\longmapsto u - iv \end{aligned}$$

$\forall u, v \in T_z M$, la cual mapea:

$$\begin{aligned} T_z^{1,0} M &\longrightarrow T_z^{0,1} M \\ \tfrac{1}{2}(u - iJu) &\longmapsto \tfrac{1}{2}(u + iJu) \end{aligned}$$

$\forall u \in T_z M$, antilinealmente.

Mediante esta conjugacion inducimos un producto Hermitiano: $\forall z \in M$:

$$h_z : T_z^{1,0} M \times T_z^{1,0} M \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$h_z(u, v) = g_z(u, \bar{v})$$

y por ello escribimos:

$$h_z = \sum_{j,h=1}^{n} g_{jh}(z)\, dz_j \otimes d\bar{z}_h$$

Por otro lado, toda variedad Hermitiana (M, g) tiene asociada una 2-forma definida por:

$$\forall z \in M: \quad \omega_z : T_zM \times T_zM \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega_z(u, v) = g_z(J_z u, v)$$

Vemos que:

$$\omega_z(u, v) = g_z(J_z u, v) = g_z(J_z^2 u, J_z v)$$
$$= - g_z(u, J_z v) =$$
$$= - g_z(J_z v, u) = - \omega_z(v, u)$$

y ω es efectivamente una 2-forma.

Necesitamos condiciones adicionales para asegurar que ω es cerrada.

Además, podemos relacionar h_z Hermitiana y $g_z^{\mathbb{C}}$ (complexificada) con g_z y ω_z.

Consideramos:

$$\begin{tikzcd}
T_zM\times T_zM \arrow[r] & T_z^{1,0}M\times T_z^{1,0}M \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "h_z"] & T_z^{1,0}M\times T_z^{0,1}M \arrow[r, "g_z^{\mathbb{C}}"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

$$(u,v)\longmapsto \tfrac{1}{2}(u-iJu,v-iJv)\longmapsto \tfrac{1}{2}(u-iJu,v+iJv)$$

$$(u,v)\longmapsto \tfrac{1}{4}h_z(u-iJu,v-iJv)$$

Vemos que: $z\in M$, $u,v\in T_zM$

$$h_z\left(\tfrac{1}{2}(u-iJu),\tfrac{1}{2}(v-iJv)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}g_z^{\mathbb{C}}(u-iJu,v+iJv)$$

$$=\frac{1}{4}\Big[g_z(u,v)+g_z(Ju,Jv)+i\big(g_z(u,Jv)-g_z(Ju,v)\big)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}g_z(u,v)-\frac{1}{2}i\,g_z(Ju,v)$$

$$=\frac{1}{2}g_z(u,v)-\frac{1}{2}i\,\omega_z(u,v)$$

Corolario:
Con la notación anterior:

$$g=2\operatorname{Re}(h),\quad \omega=-2\operatorname{Im}(h).$$

En particular, h_z es Hermitiana definida positiva $\forall z\in M$.

El recíproco también es cierto. Es decir, toda métrica Hermitiana h como arriba define una metrica Hermitiana g tal que $h = 2\,\mathrm{Re}(g)$. En forma más precisa, tenemos el siguiente resultado.

Proposición.
Sea M una variedad compleja. Supongamos dado un tensor:

$$h : \bigcup_{z \in M} \left(T_z^{1,0} M \times T_z^{1,0} M \right) \longrightarrow \mathbb{C}$$

suave tal que $\forall z \in M$, h_z es una forma Hermitiana definida positiva. Entonces, existe una una métrica Riemanniana g en M que satisface:

1) g es Hermitiana para la estructura compleja J de M.

2) $g_z(u,v) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(h_z(u - iJu, v - iJv)\right)$ $\forall z \in M$, $u, v \in T_z M$.

Dem.:
La condición 2) asegura la unicidad y suavidad de g.
Para la existencia, definimos g por 2). Entonces $\forall z \in M$:

$$g_z : T_z M \times T_z M \longrightarrow \mathbb{R}$$

es bilineal real.

Además:

$$g_z(u,u) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(h_z(u-iJu, u-iJu))$$
$$= \frac{1}{2} h_z(u-iJu, u-iJu) \geq 0$$

con igualdad a cero ssi $u - iJu = 0$ ssi $u = 0$.

Resta ver que:

$$g_z(Ju, Jv) = g_z(u,v).$$

Para ello calculamos:

$$2g_z(Ju,Jv) = \operatorname{Re}(h_z(Ju - iJ^2u, Jv - iJ^2v))$$
$$= \operatorname{Re}(h_z(Ju+iu, Jv+iv))$$
$$= \operatorname{Re}(h_z(i(u-iJu), i(v-iJv)))$$
$$= \operatorname{Re}(i(-i)h_z(u-iJu, v-iJv))$$
$$= 2g_z(u,v).$$

Corolario:
Para toda variedad compleja M, en coordenadas locales $(U, \varphi = (z_1, \dots, z_n))$, existe una correspondencia biyectiva entre métricas Hermitianas y tensores Hermitianos

$$h_z = \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}(z)\, dz_j \otimes d\bar{z}_k \qquad z \in U$$

donde $(g_{jk}(z))_{j,k=1}^{n}$ es Herm. > 0.

Tenemos en coordenadas locales:

$$h = \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}\, dz_j \otimes d\bar{z}_k$$

$$g = 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}\, dz_j \otimes d\bar{z}_k\right)$$

donde $g_{jk} = g^{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right)$.

Ahora obtenemos una expresión para ω.

Localmente:

$dx_j \wedge dx_k$, $dx_j \wedge dy_k$, $dy_j \wedge dy_k$ es base de las 2-formas con funciones como coeficientes.

Tales 2-formas son en todo $z \in M$ mapeos $\mathbb{R}$-bilineales anti-simétricos:

$$T_zM \times T_zM \longrightarrow \mathbb{R},$$

Consideramos k-formas α complejas en M. Para todo $z \in M$ tenemos:

$$\alpha_z : \underbrace{T_z^{\mathbb{C}}M \times \ldots \times T_z^{\mathbb{C}}M}_{k \text{ veces}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

k-multilineal anti-simétrica.

Para las 2-formas complejas una base es localmente dada por:

$dx_j \wedge dx_k,\ dx_j \wedge dy_k,\ dy_j \wedge dy_k$

$i\,dx_j \wedge dx_k,\ i\,dx_j \wedge dy_k,\ i\,dy_j \wedge dy_k$

Por otro lado, tenemos:

$$dz_j = dx_j + i\,dy_j$$
$$d\bar{z}_j = dx_j - i\,dy_j$$

Por tanto:

$$dz_j \wedge dz_k = dx_j \wedge dx_k - dy_j \wedge dy_k + i(dx_j \wedge dy_k + dy_j \wedge dx_k)$$

$$dz_j \wedge d\bar{z}_k = dx_j \wedge dx_k + dy_j \wedge dy_k - i(dx_j \wedge dy_k - dy_j \wedge dx_k)$$

$$d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k = dx_j \wedge dx_k - dy_j \wedge dy_k - i(dx_j \wedge dy_k + dy_j \wedge dx_k)$$

Corolario:

Una base (con coeficientes funciones) para las 2-formas complejas es dada por:

$$dz_j \wedge dz_k,\ dz_j \wedge d\bar{z}_k,\ d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k$$

$j,k = 1, \ldots, n$ (escoger adecuadamente).

Más aún, si ω es una 2-forma compleja, entonces:

$$\omega = \sum_{j<k} \left(a_{jk}\, dz_j \wedge dz_k + b_{jk}\, d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k \right) + \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

donde:

$$a_{jk} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k} \right)$$

$$b_{jk} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right)$$

$$c_{jk} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right).$$

Dem.: Solamente falta la última afirmación, la cual se sigue de:

$$dz_j \wedge dz_k\left(\frac{\partial}{\partial z_r}, \frac{\partial}{\partial z_s}\right) = \delta_{jr}\,\delta_{ks}$$
$$\forall\, j<k,\ r<s$$

$$d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_r}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_s}\right) = \delta_{jr}\,\delta_{ks}$$
$$\forall\, j<k,\ r<s$$

$$dz_j \wedge d\bar{z}_k\left(\frac{\partial}{\partial z_r}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_s}\right) = \delta_{jr}\,\delta_{ks}$$
$$\forall\, j, k, r, s$$

y todas las demas evaluaciones son 0. //

Sea (M, g) Hermitiana y ω su 2-forma asociada:

$$\omega_z(u, v) = g_z(J_z u, v)$$

$\forall z \in M,\ u, v \in T_z M$.

Primero complexificamos a ω y la denotamos con el mismo símbolo. Por tanto,

$$\omega_z(u, v) = g_z^{\mathbb{C}}(J_z u, v)$$

$\forall z \in M,\ u, v \in T_z^{\mathbb{C}} M$.

Vemos que en coordenadas locales:

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_h}\right) = g^{\mathbb{C}}\left(J\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_h}\right)$$
$$= i\, g^{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_h}\right) = 0$$

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_h}\right) = g^{\mathbb{C}}\left(J\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_h}\right)$$
$$= -i\, g^{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_h}\right) = 0$$

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_h}\right) = g^{\mathbb{C}}\left(J\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_h}\right)$$
$$= i\, g^{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_h}\right)$$

Corolario:
Si (M, g) es una variedad Hermitiana con métrica dada localmente por:

$$h = \sum_{j,h=1}^{n} g_{jh}\, dz_j \otimes d\bar{z}_h$$

donde $g_{jh} = g\left(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_h}\right)$, entonces su 2-forma asociada tiene complexificación localmente dada por:

$$\omega = i \sum_{j,h=1}^{n} g_{jh}\, dz_j \wedge d\bar{z}_h$$

Se dice que ω es una $(1,1)$-forma.