Definición:
Una variedad simpléctica es un par (M, ω) donde M es una variedad y $\omega \in \Omega^2(M)$ (o $\Lambda_2^*(M)$) es una 2-forma suave tal que:

1) $\forall p \in M$: $\omega_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ es no-degenerada.

2) ω es cerrada: $d\omega = 0$.

Observación:
Si (M, ω) es variedad simpléctica, entonces:

$$\dim M = 2n$$

para algún n y

$$\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$$

no se anula.

Observación:
(M, ω) simpléctica. Entonces existe un difeomorfismo de haces vectoriales:

$$\begin{aligned} TM &\longrightarrow T^*M \\ v &\longmapsto \iota(v)\omega = \omega(v, \cdot) \end{aligned}$$

Esto es similar al caso Riemanniano.

Como notación:

$\mathfrak{X}(M)$ = campos vectoriales suaves en M.

$\Omega^1(M)$ = 1-formas suaves en M.

Entonces, tenemos una biyección:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \Omega^1(M) \\ X &\longmapsto \iota(X)\omega = \omega(X,\cdot) \end{aligned}$$

Definición:
Para (M,ω) variedad simpléctica, $\varphi : M \longrightarrow M$ difeomorfismo se dice simplectomorfismo si:

$$\varphi^* \omega = \omega.$$

El grupo de simplectomorfismos se denota:

$$\mathrm{Symp}(M,\omega)$$

Observación:
Si (M,g) es Riemanniana, entonces el grupo de isometrías es:

$$\mathrm{Iso}(M,g) = \left\{ \varphi : M \to M \;\middle|\; \begin{matrix} \varphi \text{ difeomorfismo} \\ \varphi^* g = g \end{matrix} \right\}$$

y es un grupo de Lie.

Pero $Symp(M,\omega)$ es de dimensión infinita en $Diff(M)$.

Definición:
(M,ω) variedad simpléctica. $X \in \mathfrak{X}(M)$ se dice campo vectorial simpléctico si:

$$L_X \omega = 0.$$

Denotamos por $\mathfrak{X}(M,\omega)$ el espacio de campos simplécticos de (M,ω).

Observación:
Por las propiedades de la derivada de Lie:

$X \in \mathfrak{X}(M,\omega) \iff$ el flujo local $(\varphi_t)_t$ de X consta de simplectomorfismos locales.

Proposición:
(M,ω) simpléctica, $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces:

$$L_X \omega = d(i(X)\omega)$$

En particular:

X es simpléctico ($L_X\omega = 0$)
$\iff$ $\iota(X)\omega = \omega(X, \ )$
es cerrada.

Dem.:
$$L_X\omega = d \circ \iota(X)\omega + \iota(X)\circ d\omega^{0}$$

Proposición:
Si (M, ω) es simpléctica, entonces:
$\mathfrak{X}(M, \omega)$ es álgebra de Lie.
Más aún, si $X, Y \in \mathfrak{X}(M, \omega)$ entonces:
$$\iota([X, Y])\omega$$
es exacta.

Dem.:
De las propiedades de la derivada de Lie:
$$L_{aX+bY} = aL_X + bL_Y$$
$\therefore$ $\mathfrak{X}(M, \omega)$ es espacio vectorial.

Además, por la identidad de Jacobi para $[\ ,\ ]$ en

$\mathfrak{X}(M)$, tenemos:

$$[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}$$

Por tanto, $\mathfrak{X}(M,\omega)$ es álgebra de Lie.

Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M,\omega)$ y veamos que:

$$\iota([X,Y])\,\omega$$

es exacta.

Tomemos $f = \omega(Y,X) : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Entonces:

$$df = d(\omega(Y,X))$$

$$= d \circ \iota(X) \circ \iota(Y)\,\omega$$

$$= L_X(\iota(Y)\,\omega) - \iota(X) \circ d(\iota(Y)\,\omega)$$

como $Y \in \mathfrak{X}(M,\omega)$:

$$= L_X(\iota(Y)\,\omega)$$

como $X \in \mathfrak{X}(M,\omega)$:

$$= L_X \circ \iota(Y)\,\omega - \iota(Y) \circ L_X\,\omega$$

$$= \iota([X,Y])\,\omega$$

Para la última fórmula usamos:

$$(L_X \circ \iota(Y)\omega)(Z) =$$
$$= L_X(\iota(Y)\omega)(Z)$$
$$= X((\iota(Y)\omega)(Z)) - \iota(Y)\omega([X,Z])$$
$$= X(\omega(Y,Z)) - \omega(Y,[X,Z])$$
$$= X(\omega(Y,Z)) - \omega(Y,[X,Z]) - \omega([X,Y],Z) + \omega([X,Y],Z)$$
$$= (\iota(Y)\circ L_X\omega)(Z) + (\iota([X,Y])\omega)(Z)$$

$$\therefore\ L_X \circ \iota(Y)\omega = \iota(Y)\circ L_X\omega + \iota([X,Y])\omega$$

En la demostración probamos que:

Corolario:
Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M,\omega)$, entonces:

$$d(\omega(Y,X)) = \iota([X,Y])\omega = \omega([X,Y],\cdot)$$

De lo anterior, vemos que

$X \in \mathfrak{X}(M, \omega)$

$\iff L_X \omega = 0$ (X preserva ω)

$\iff d(\iota(X)\omega) = 0$

Pero tenemos una nueva noción:

Definición:
Sea (M, ω) variedad simpléctica, un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se dice Hamiltoniano si

$\iota(X)\omega$ es exacta

i.e. si $\exists\, f \in C^\infty(M)$ tal que

$$df = \iota(X)\omega = \omega(X, \ ).$$

En particular:

X Hamiltoniano $\Rightarrow X \in \mathfrak{X}(M, \omega)$.

Ejemplo:
$X, Y \in \mathfrak{X}(M, \omega)$

$\Rightarrow \iota([X, Y])\omega = d(\omega(Y, X))$

$\Rightarrow [X, Y]$ es Hamiltoniano.

Sea (M, ω) variedad simpléctica y $f \in C^{\infty}(M)$.

Como df es 1-forma en M existe un único campo vectorial $X_f \in \mathfrak{X}(M)$ tal que:

$$df = \omega(X_f, \cdot) = \iota(X_f)\omega.$$

Definición: En (M, ω) variedad simpléctica, y para $f \in C^{\infty}(M)$, el campo vectorial $X_f \in \mathfrak{X}(M)$ tal que:

$$df = \iota(X_f)\omega = \omega(X_f, \cdot)$$

es llamado el campo vectorial Hamiltoniano asociado a f.

Como $d(\iota(X_f)\omega) = d^2 f = 0$, X_f es Hamiltoniano y $\therefore$ $X_f \in \mathfrak{X}(M, \omega)$.

Observación:
(M, ω) simpléctica.
Toda función
$f \in C^{\infty}(M)$

define el campo Hamiltoniano X_f y este a su vez da lugar a un flujo local

$$\varphi_t^f \text{ : flujo local Hamiltoniano de } f.$$

Por tanto, toda función $f \in C^\infty(M)$ define un flujo local de simplectomorfismos locales.

Comparar con el caso Riemanniano:

(M, g) variedad Riemanniana.
$f \in C^\infty(M)$.
$\therefore \exists!$ campo vectorial ∇f tal que:

$$df = g(\nabla f, \cdot) = \iota(\nabla f)\, g$$

∇f es llamado el gradiente de f.

Trivialmente:

$$0 = d^2 f = d(\iota(\nabla f)\, g)$$

pero el que $\iota(\nabla f)\, g$ sea exacta o cerrada NO implica que ∇f sea com_ po de Killing.

Recordamos que con (M,g) Riemanniana $X \in \mathfrak{X}(M)$ se dice campo vectorial de Killing si

$$L_X g = 0$$

que es equivalente a:

$$X(g(Y,Z)) = g([X,Y],Z) + g(Y,[X,Z])$$

que es equivalente a:

el flujo local φ_t de X actua por isometrías locales: $\varphi_t^* g = g$.

//

Proposición:

Si (M,ω) es simpléctica y $f \in C^\infty(M)$, entonces f es constante en la curvas integrales de X_f:

$$f(\gamma_p(t)) \equiv cte \text{ en } t \quad \forall p \in M$$

o bien f es invariante bajo el flujo φ_t^f:

$$f(\varphi_t^f(p)) \equiv cte \text{ en } t \quad \forall p \in M.$$

Dem.:

Fijamos p y derivamos:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} f(\varphi_t^f(p)) =$$

$$= df_{\varphi_{t_0}^f(p)}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0}\varphi_t^f(p)\right)$$

$$= df_{\varphi_{t_0}^f(p)}\left((X_f)_{\varphi_{t_0}^f(p)}\right)$$

$$= \omega_{\varphi_t^f(p)}(X_f, X_f) = 0. \quad //$$

Hemos definido un mapeo:

$$\begin{aligned} C^\infty(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M,\omega) \\ f &\longmapsto X_f \end{aligned}$$

cuya imagen es por definición el conjunto de campos Hamiltonianos.

Usamos este mapeo para definir una estructura de álgebra de Lie en $C^\infty(M)$.

Definición:

(M,ω) variedad simpléctica. Si $f,g \in C^\infty(M)$, definimos los corchetes de Poisson de f,g por:

$$\{f,g\} = \omega(X_f, X_g)$$
$$= df(X_g) = X_g(f)$$
$$= -dg(X_f) = -X_f(g).$$

El mapeo:

$$C^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{H}(M,\omega)$$
$$f \longmapsto X_f$$

al ser dado por la relación:

$$df = \omega(X_f, \ )$$

es claramente $\mathbb{R}$-lineal. Por tanto, el mapeo:

$$(f,g) \longmapsto \{f,g\}$$

es $\mathbb{R}$-bilineal. De su definición es claramente antisimétrico.

Por un corolario anterior:

$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M,\omega)$:
$$d(\omega(Y,X)) = \omega([X,Y],\cdot)$$

Por tanto $\forall f, g \in C^{\infty}(M)$:
$$d(\{f,g\}) = d(\omega(X_f, X_g))$$
$$= \omega([X_g, X_f], \cdot)$$
$$= -\omega([X_f, X_g], \cdot)$$

$$\therefore \quad X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$$

Corolario: El mapeo
$$C^{\infty}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M,\omega)$$
$$f \longmapsto X_f$$
es un anti-homomorfismo de álgebras.

Observación: El mapeo:
$$f \longmapsto X_f$$

tiene por kernel, cuando M es conexa, a las funciones constantes. No podemos concluir de ahí la identidad de Jacobi para $\{,\}$:

$$[[X_f, X_g], X_h] =$$
$$= -[X_{\{f,g\}}, X_h] = X_{\{\{f,g\},h\}}$$
$$\therefore \; 0 = [[X_f, X_g], X_h] + [[X_g, X_h], X_f] + [[X_h, X_f], X_g]$$
$$= X_{\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\}}$$
$$\Rightarrow \quad \{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = cte.$$

Proposición:
$\{\,,\,\}$ satisface la identidad de Jacobi:
$\forall f,g,h \in C^\infty(M)$
$$\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0$$

Dem.:
Comenzamos con:
$$\{\{f,g\},h\} = \omega(X_{\{f,g\}}, X_h)$$
$$= d\{f,g\}(X_h)$$

$$= X_h(\{f,g\})$$
$$= X_h(\omega(X_f,X_g))$$

Pero también tenemos:

$$X_h(\omega(X_f,X_g)) =$$
$$= \omega(X_{\{f,g\}},X_h)$$
$$= -\omega([X_f,X_g],X_h)$$

Por tanto:

$$\{\{f,g\},h\} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(X_h(\omega(X_f,X_g)) - \omega([X_f,X_g],X_h)\right)$$

Sumando sobre las permutaciones cíclicas:

$$\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} =$$
$$= \frac{1}{2}\Big[X_h(\omega(X_f,X_g)) - \omega([X_f,X_g],X_h)$$
$$+ X_f(\omega(X_g,X_h)) - \omega([X_g,X_h],X_f)$$
$$+ X_g(\omega(X_h,X_f)) - \omega([X_h,X_f],X_g)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[X_f(\omega(X_g,X_h)) - X_g(\omega(X_f,X_h)) + X_h(\omega(X_f,X_g)) - \omega([X_f,X_g],X_h) + \omega([X_f,X_h],X_g) - \omega([X_g,X_h],X_f)\Big]$$

$$= \frac{1}{2} d\omega(X_f,X_g,X_h) = 0 \quad //$$

Teorema:

1) $(C^\infty(M), \{,\})$ es un álgebra de Lie.

2) $$\begin{aligned} C^\infty(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M,\omega) \\ f &\longmapsto X_f \end{aligned}$$

es un anti-homomorfismo de álgebras de Lie:

$$X_{\{f,g\}} = -[X_f,X_g].$$

Su imagen es el conjunto de campos Hamiltonianos. En particular, el conjunto de campos Hamiltonianos es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M,\omega)$.

Un resultado más:

Proposición:
(M, ω) variedad simpléctica. $\forall f \in C^\infty(M)$ y
$$\varphi \in Symp(M, \omega)$$
se cumple:
$$X_{f \circ \varphi^{-1}} = d\varphi(X_f)$$
En otras palabras el mapeo:
$$C^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M, \omega)$$
es equivariante bajo la acción de $Symp(M, \omega)$.

Dem.:
$$\iota(X_{f\circ\varphi^{-1}})\omega = d(f \circ \varphi^{-1})$$
$$= df \circ d(\varphi^{-1})$$
$$= \omega(X_f, d(\varphi^{-1})(\ \ ))$$
$$= \omega(d\varphi(X_f), \ \ )$$
$$= \iota(d\varphi(X_f))\omega$$
$$\therefore \quad X_{f\circ\varphi^{-1}} = d\varphi(X_f) \quad //$$

Sin demostración, enunciamos:

Teorema de Darboux.

Sea (M, ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$. Entonces $\forall\, x_0 \in M$ $\exists$ U vecindad de x_0 en M, V vecindad de y_0 en $\mathbb{R}^{2n}$ y:

$$\varphi : (U, \omega) \longrightarrow (V, \omega_0)$$

simplectomorfismo tal que:

$$\varphi(x_0) = y_0.$$

Corolario:

Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Entonces $\exists$

$$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$$

un atlas de M tal que $\forall\, \alpha, \beta \in I$:

$$d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_{\varphi_\alpha(x)} \in Sp(n, \mathbb{R})$$

$\forall\, x \in U_\alpha \cap U_\beta$.