PRIMER EXAMEN PARCIAL
TEORÍA DE LA MEDIDA
18 DE FEBRERO DE 2019.

Resolver por lo menos 4 de los siguientes problemas justificando todas sus afirmaciones. Puede resolver problemas adicionales para obtener mayor crédito.

1. Sea X un conjunto y sea $\{\mathcal{M}_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de álgebras de subconjuntos de X. Suponga que la familia de álgebras satisface la siguiente propiedad.
   - Para cualesquiera dos $\alpha, \beta \in I$ se cumple una de las contenciones $\mathcal{M}_\alpha \subset \mathcal{M}_\beta$ o $\mathcal{M}_\beta \subset \mathcal{M}_\alpha$.

   Probar que la unión $\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{M}_\alpha$ es un álgebra.

   Solución. Si $E \in \bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{M}_\alpha$, entonces $E \in \mathcal{M}_{\alpha_0}$ para alguna $\alpha_0 \in I$. Como $\mathcal{M}_{\alpha_0}$ es un álgebra tenemos $E^c \in \mathcal{M}_{\alpha_0}$. Por tanto, $E^c \in \bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{M}_\alpha$.

   Por otro lado, si $E, F \in \bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{M}_\alpha$, entonces existen $\alpha_0, \beta_0 \in I$ tales que
   $$E \in \mathcal{M}_{\alpha_0}, \quad F \in \mathcal{M}_{\beta_0}.$$
   Intercambiando los papeles de α_0, β_0 si es necesario, podemos suponer que $\mathcal{M}_{\alpha_0} \subset \mathcal{M}_{\beta_0}$. Por tanto, $E, F \in \mathcal{M}_{\beta_0}$, y como esta última es un álgebra se concluye que $E \cup F \in \mathcal{M}_{\beta_0}$. En particular, $E \cup F \in \bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{M}_\alpha$.

   Como $\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{M}_\alpha$ es no vacío y cerrado bajo complementos y uniones, concluimos que es un álgebra. $\square$

2. Sea μ^* una medida exterior sobre un conjunto X. Si $E \subset X$ es un conjunto tal que $\mu^*(X \setminus E) = 0$, entonces E es μ^*-medible.

   Solución. Primera solución: Los conjuntos μ^*-medibles forman una σ-álgebra que contiene a todos los conjuntos de medida exterior cero. Por tanto, el conjunto $X \setminus E$ es μ^*-medible. Pero entonces $E = (X \setminus E)^c$ es también μ^*-medible.

   Segunda solución: Sea $A \subset X$. Como $E^c = X \setminus E$ es de medida exterior cero, la monotonía de μ^* implica que
   $$\mu^*(A \cap E^c) = 0.$$
   Utilizando esta propiedad y de nuevo la monotonía de μ^* concluimos que para todo $A \subset X$ tenemos
   $$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$
   Como la desigualdad opuesta siempre se cumple, concluimos que
   $$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$
   para todo $A \subset X$. Por definición, esto implica que E es μ^*-medible. $\square$

3. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida finita. Si $E, F \in \mathcal{M}$ son tales $\mu(E\Delta F) = 0$, entonces $\mu(E) = \mu(F)$. (Recordamos que $E\Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$.)

   Solución. Tenemos las uniones disjuntas
   $$E = (E \cap F) \cup (E \setminus F),$$
   $$F = (E \cap F) \cup (F \setminus E).$$
   La aditividad numerable de μ implica que
   $$\mu(E) = \mu(E \cap F) + \mu(E \setminus F),$$
   $$\mu(F) = \mu(E \cap F) + \mu(F \setminus E).$$

Por otro lado, la monotonicidad de μ y la condición $\mu(E\Delta F) = 0$ implican que $\mu(E \setminus F) = \mu(F \setminus E) = 0$. De todo lo anterior concluimos que

$$\mu(E) = \mu(E \cap F) = \mu(F).$$

□

4. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida finita. Probar que si $E, F \in \mathcal{M}$ y $F \subset E$, entonces $\mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F)$. Dar un ejemplo para el cual esto no se cumple si μ no es finita.

Solución. Como $F \subset E$, tenemos la unión disjunta

$$E = F \cup (F \setminus E),$$

y la aditividad numerable de μ nos dice que

$$\mu(E) = \mu(F) + \mu(E \setminus F).$$

Como la medida es finita, los valores en la última expresión son números reales y entonces tenemos

$$\mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F).$$

Para el contraejemplo cuando la medida no es finita tomamos m la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Consideramos los conjuntos

$$E = (0, \infty), \quad F = (1, \infty).$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} m(E) &= +\infty, \\ m(F) &= +\infty, \\ m(E \setminus F) &= m((0,1]) = 1, \end{aligned}$$

lo cual da el contraejemplo. □

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente contínua por la derecha y μ_f su medida de Lebesgue-Stieljes. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$.
   a) f es contínua en x_0.
   b) $\mu_f(\{x_0\}) = 0$.

Solución. Sea $(a_n)_n$ una sucesión creciente que converge a x_0. Entonces

$$f(x_0-) = \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

Por otro lado, tenemos la identidad

$$\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a_n, x_0]$$

la cual es una intersección de una familia decreciente de intervalos. Como tales intervalos tienen medida finita para μ_f, la continuidad por arriba de las medidas nos implica que

$$\begin{aligned} \mu_f(\{x_0\}) &= \lim_{n\to\infty} \mu_f((a_n, x_0]) \\ &= \lim_{n\to\infty} (f(x_0) - f(a_n)) \\ &= f(x_0) - f(x_0-). \end{aligned}$$

Usando la última identidad concluimos que

$$\begin{aligned} \mu_f(\{x_0\}) = 0 &\iff f(x_0) = f(x_0-) \\ &\iff \text{f es contínua en } x_0. \end{aligned}$$

□

6. Considere la función creciente contínua por la derecha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como la parte entera, es decir, $f(x)=n$ si n es el entero tal que $n\leq x<n+1$.
   a) Probar que $\mu_f(\mathbb{Z}^c)=0$ y que, por tanto, todo subconjunto de $\mathbb{Z}^c$ es μ_f-medible.
   b) Utilizando que todo subconjunto $E\subset\mathbb{R}$ se puede escribir como
   $$E=(E\cap\mathbb{Z}^c)\cup(E\cap\mathbb{Z}),$$
   probar que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es μ_f-medible.
   c) Probar que la medida de Lebesgue-Stieljes μ_f es dada por
   $$\mu_f(E)=\text{número de elementos de } E\cap\mathbb{Z}.$$

Solución. Parte a): Primero observamos que
$$\mathbb{Z}^c=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n,n+1),$$
el cual es abierto y por tanto medible. Además, esta identidad implica que basta probar que $\mu_f((n,n+1))=0$ para todo entero n.

Fijemos $n\in\mathbb{Z}$ y sea $(b_k)_k\subset(n,n+1)$ una sucesión creciente que converja a $n+1$. En particular, la unión creciente
$$(n,n+1)=\bigcup_{k=1}^{\infty}(n,b_k]$$
junto con la continuidad por abajo de μ_f implican que
$$\begin{aligned}\mu_f((n,n+1))&=\lim_{k\to\infty}\mu_f((n,b_k])\\&=\lim_{k\to\infty}(f(b_k)-f(n))\\&=\lim_{k\to\infty}(n-n)\\&=0.\end{aligned}$$
Observamos que en la tercera indentidad hemos usado que la parte entera de cada b_k es precisamente n pues $b_k\in(n,n+1)$.

Por lo anterior, concluimos que $\mu_f(\mathbb{Z}^c)=0$.

Parte b): Si $E\subset\mathbb{R}$ podemos escribir
$$E=(E\cap\mathbb{Z}^c)\cup(E\cap\mathbb{Z}).$$
Por un lado, $E\cap\mathbb{Z}$ es subconjunto de $\mathbb{Z}$ y por tanto cerrado. Por otro lado, $E\cap\mathbb{Z}^c$ es subconjunto del conjunto de medida cero $\mathbb{Z}^c$ (parte a)). Como la medida μ_f es completa, concluimos que $E\cap\mathbb{Z}^c$ es μ_f-medible. Como E es la unión de dos conjuntos μ_f-medible, concluimos que E es μ_f-medible.

Parte c): Sea $E\subset\mathbb{R}$. Utilizando la expresión
$$E=(E\cap\mathbb{Z}^c)\cup(E\cap\mathbb{Z}),$$
junto con la parte a) concluimos que
$$\mu_f(E)=\mu_f(E\cap\mathbb{Z}).$$
Por tanto, basta probar que
$$\mu_f(\{n\})=1,$$
para todo entero $n\in\mathbb{Z}$.

Fijamos $n \in \mathbb{Z}$ y escogemos una sucesión creciente $(a_k)_k \subset (n-1, n)$ que converja a n. Dada la intersección de conjuntos

$$\{n\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} (a_k, n],$$

tenemos que la continuidad por arriba de μ_f implica que

$$\begin{aligned}\mu_f(\{n\}) &= \lim_{k\infty}(f(n) - f(a_k)) \\ &= \lim_{k\infty}(n - (n-1)) \\ &= 1,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado en la segunda identidad que la parte entera de cada a_k es $n-1$ pues $a_k \in (n-1, n)$. $\square$