TERCER EXAMEN PARCIAL
TEORÍA DE LA MEDIDA
27 DE MAYO DE 2019.

Resolver por lo menos 4 de los siguientes problemas justificando todas sus afirmaciones. Puede resolver problemas adicionales para obtener mayor crédito. Cualquier resultado de las tareas debe probarse si lo desea usar.

1. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida positiva y $f \in L^1(X, \mu)$. Probar que la asignación
$$\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$$
$$\nu(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu$$
define una medida compleja en $(X, \mathcal{M})$.

Solución. En primer lugar observamos que para todo $E \in \mathcal{M}$ la integral
$$\nu(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu$$
es un número complejo porque $f \in L^1(X, \mu)$. Por otro lado, sabemos que
$$\nu(\emptyset) = \int_\emptyset f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$
Sea ahora $(E_n)_n$ una sucesión de conjuntos disjuntos en $\mathcal{M}$. Consideramos la sucesión de funciones dada por
$$g_k = \chi_{\bigcup_{n=1}^k E_n} f = \sum_{n=1}^k \chi_{E_n} f$$
donde $k \in \mathbb{Z}_+$. Observamos que la segunda desigualdad es consecuencia de que la sucesión de conjuntos es disjunta.

Por otro lado, tenemos $|g_k| \leq |f|$ y $f \in L^1(X, \mu)$. Además $(g_k)_k$ converge puntualmente a la función
$$g = \chi_{\bigcup_{n=1}^\infty} f.$$
Por el Teorema de Convergencia Dominada concluimos que
$$\sum_{n=1}^\infty \nu(E_n) = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^k \int_{E_n} f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int g_k \, \mathrm{d}\mu = \int g \, \mathrm{d}\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} f \, \mathrm{d}\mu = \nu(\bigcup_{n=1}^\infty E_n).$$
La expresión final no depende del orden de los términos en la expresión inicial. Concluimos que la serie converge a un límite independiemente de reordenamientos. Esto implica que la serie es absolutamente convergente. Por tanto, ν es contablemente aditiva con convergencia de la serie de manera absoluta, lo cual prueba que ν es una medida compleja. $\square$

2. Probar que si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida positiva con $\mu(X) < \infty$, entonces para todo $0 < p < q \leq \infty$ se tiene la inclusión $L^p(X, \mu) \supset L^q(X, \mu)$.

Solución. Si $p = \infty$ y $f \in L^\infty(X, \mu)$, entonces para cualquier $0 < p < \infty$ tenemos
$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_\infty^p \mu(X) < \infty.$$
Concluimos que $f \in L^p(X, \mu)$.

Supongamos ahora que $0 < p < q < \infty$ y tomamos $f \in L^q(X, \mu)$. Aplicamos la desigualdad de Hölder a las funciones $|f|^p$ y 1 con los exponentes duales
$$\frac{q}{p}, \quad \frac{q}{q-p}$$
para obtener
$$\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \left(\int_X |f|^{p\frac{q}{p}} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_X 1 \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{q-p}{q}}.$$
Lo anterior implica que
$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \mu(X)^{\frac{q-p}{pq}} < \infty.$$
Por tanto, $f \in L^q(X, \mu)$. $\square$

3. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida positiva. Para toda función medible $f : X \to \mathbb{C}$ definimos el rango esencial como el conjunto R_f de puntos $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen la siguiente condición
   - para todo $\varepsilon > 0$ se cumple $\mu(\{x \in X : |f(x) - z| < \varepsilon\}) > 0$.

   Probar las siguientes propiedades.
   a) Si $f : X \to \mathbb{C}$ es una función medible, entonces su rango esencial R_f es cerrado.
   b) Si $f \in L^\infty(X, \mu)$, entonces su rango esencial R_f es compacto.

Solución. Para probar el inciso (a), tomamos f como en su enunciado.

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $|z - w| < c$ para algún $c > 0$. Entonces

$$|f(x) - z| \leq |f(x) - w| + |z - w| < |f(x) - w| + c$$

para cualquier $x \in X$. Concluimos que se tiene la siguiente inclusión de conjuntos

$$\{x \in X : |f(x) - w| < \varepsilon\} \subset \{x \in X : |f(x) - z| < \varepsilon + c\}.$$

Sean ahora $z \in \overline{R}_f$ y $\varepsilon > 0$ dados. Entonces, existe $w \in R_f$ tal que $|z - w| < \frac{\varepsilon}{2}$ y por la inclusión que hemos probado tenemos

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - z| < \varepsilon\}) \geq \mu(\{x \in X : |f(x) - w| < \frac{\varepsilon}{2}\}) > 0$$

donde la última desigualdad se cumple porque $w \in R_f$. Como lo anterior es válido para cualquier $\varepsilon > 0$ concluimos que $z \in R_f$.

Para probar el inciso (b) tomamos f como en su enunciado. Observamos también que podemos suponer que $f \neq 0$, de modo que $\|f\|_\infty > 0$. Esto se debe a que si $f = 0$, entonces existe $Y \subset X$ conulo tal que $f(Y) = \{0\}$ lo cual implica que

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - z| < \frac{|z|}{2}\}) = 0$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por tanto, $R_f = \{0\}$.

Sea $M > 0$ dado y $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > M$. Entonces, tenemos

$$|f(x)| \geq |z| - |f(x) - z| > M - |f(x) - z|$$

para cualquier $x \in X$. Concluimos que se tiene la siguiente inclusión de conjuntos

$$\{x \in X : |f(x) - z| < c\} \subset \{x \in X : |f(x)| > M - c\}.$$

Tomamos ahora $M = 2\|f\|_\infty$ y $c = \|f\|_\infty$ para concluir que si $|z| > 2\|f\|_\infty$ entonces

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - z| < \|f\|_\infty\} \leq \mu(\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\}) = 0$$

donde la última desigualdad se sigue de la definición de $\|f\|_\infty$. Por tanto, todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > 2\|f\|_\infty$ no pertenece al rango esencial. Concluimos que

$$R_f \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\|f\|_\infty\},$$

y por tanto R_f es acotado. Por el inciso (a) esto implica que R_f es compacto.

Para una demostración alternativa de (b), dada f considere el conjunto

$$N = \{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\},$$

el cual es nulo por la definición de $\|f\|_\infty$.

Sea ahora $z \notin \overline{D}(0, \|f\|_\infty)$, de modo que $d = d(z, \overline{D}(0, \|f\|_\infty)) > 0$. Si $w \in \overline{D}(0, \|f\|_\infty)$ y $x \in X$ es tal que $|f(x) - z| < \frac{d}{2}$, entonces

$$|f(x) - w| \geq |z - w| - |f(x) - z| > d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > 0,$$

y para tal elección de x tenemos $f(x) \notin \overline{D}(0, \|f\|_\infty)$. De este modo hemos probado que

$$\{x \in X : |f(x) - z| < \frac{d}{2}\} \subset N.$$

Por tanto, tenemos que

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - z| < \frac{d}{2}\}) = 0,$$

lo cual implica que $z \notin R_f$. Es decir, hemos probado que

$$R_f \subset \overline{D}(0, \|f\|_\infty).$$

De nuevo se sigue que R_f es acotado y por el inciso (a) es compacto. □

4. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios de medida positiva σ-finitos. Sea $K \in L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$ y considere la expresión dada por
$$T_K(f)(y) = \int_X f(x) K(x,y) \, \mathrm{d}\mu(x)$$
donde $y \in Y$ y $f \in L^2(X, \mu)$. Probar las siguientes afirmaciones.
   a) Para toda $f \in L^2(X, \mu)$ se cumple
$$\int_Y \left(\int_X |f(x)K(x,y)| \, \mathrm{d}\mu(x) \right)^2 \mathrm{d}\nu(y) \leq \|f\|_2^2 \|K\|_2^2$$
   b) La expresión de arriba define un operador acotado $T_K : L^2(X, \mu) \to L^2(Y, \nu)$. Más aún, tenemos la desigualdad $\|T_K\| \leq \|K\|_2$.

Solución. Para el inciso (a) calculamos como sigue.
$$\begin{aligned}
\int_Y \left(\int_X |f(x)K(x,y)| \, \mathrm{d}\mu(x) \right)^2 \mathrm{d}\nu(y) &\leq \int_Y \left(\int_X |f(x)|^2 \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \left(\int_X |K(x,y)|^2 \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) \\
&= \int_Y \|f\|_2^2 \int_X |K(x,y)|^2 \, \mathrm{d}\mu(x) \, \mathrm{d}\nu(y) \\
&= \|f\|_2^2 \int_{X \times Y} |K(x,y)|^2 \, \mathrm{d}\mu(x) \, \mathrm{d}\nu(y) \\
&= \|f\|_2^2 \|K\|_2^2.
\end{aligned}$$
En la primer desigualdad aplicamos la desigualdad de Hölder en la integral respecto de μ. En la primer igualdad aplicamos la definición de $\|f\|_2$. En la segunda desigualdad usamos el Teorema de Fubini-Tonelli.

Para el inciso (b) usamos el inciso (a) para concluir que la integral que define a $T_K(f)$ es absolutamente convergente para casi todo $y \in Y$. Esto se concluye de que $\|f\|_2, \|K\|_2 < \infty$ y por una aplicación del Teorema de Fubini-Tonelli. Además, podemos concluir que
$$\begin{aligned}
\int_Y |T_K(f)(y)|^2 \, \mathrm{d}\nu(y) &= \int_Y \left| \int_X f(x) K(x,y) \, \mathrm{d}\mu(x) \right|^2 \mathrm{d}\nu(y) \\
&\leq \int_Y \left(\int_X |f(x)K(x,y)| \, \mathrm{d}\mu(x) \right)^2 \mathrm{d}\nu(y) \\
&\leq \|f\|_2^2 \|K\|_2^2.
\end{aligned}$$
Por tanto, T_K es un operadore acotado y además
$$\|T_K\| \leq \|K\|_2.$$
□

5. Sean $1 \leq p < \infty$ y $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida positiva. Usar la desigualdad de Chebyshev para probar que si $(f_n)_n, f$ son elementos en $L^p(X, \mu)$ tales que $(f_n)_n$ converge a f en la norma L^p, entonces $(f_n)_n$ converge en medida a f.

Solución. Por hipótesis $f - f_n \in L^p(X, \mu)$ para todo n. Por tanto, aplicando la desigualdad de Chebyshev concluimos que
$$\mu(\{x \in X : |f(x) - f_n| > \alpha\}) \leq \left(\frac{\|f - f_n\|_p}{\alpha} \right)^p$$
para todo $\alpha > 0$ y $n \in \mathbb{Z}_+$.

Suponiendo que $(f_n)_n$ converge en norma L^p a f concluimos que
$$\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$
Por la desigualdad anterior, si fijamos $\alpha = \varepsilon >$ entonces concluimos que
$$\lim_{n \to \infty} \mu(\{x \in X : |f(x) - f_n| > \varepsilon\}) = 0,$$
lo cual dice que $(f_n)_n$ converge a f en medida. □

6. Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto y μ una medida de Radon en X. Probar las siguientes afirmaciones.
   a) Sea N la unión de los conjuntos abiertos U de X tales que $\mu(U) = 0$. Entonces, N es abierto y $\mu(N) = 0$. Al complemento de N lo denotamos con $\mathrm{supp}(\mu)$ y lo llamamos el soporte de μ.

b) $x \in \operatorname{supp}(\mu)$ si y sólo si
$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu > 0$$
para todo $f \in C_c(X, [0,1])$ tal que $f(x) > 0$. (Sugerencia: En una dirección puede usar el Lema de Urysohn para espacios Hausdorff localmente compactos.)

Solución. Para el inciso (a) observamos que N es abierto por ser unión de abiertos.

Por hipótesis podemos escribir
$$N = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$
donde U_α es un abierto nulo. No podemos calcular la medida de N como la suma de las medidas de los conjuntos U_α porque I puede ser no numerable.

Sea $K \subset N$ compacto. Por lo anterior existe un conjunto finito de indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$ tal que
$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$$
lo cual implica que
$$\mu(K) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(U_{\alpha_i}) = 0.$$
Por tanto, todo subconjunto compacto K de N es nulo. Entonces, la regularidad interior para abiertos de μ implica que
$$\mu(N) = \sup\{\mu(K) : K \subset N, K \text{ is compact } \} = 0.$$

Para el inciso (b) probamos primero $\Longrightarrow$. Sea pues $x \in \operatorname{supp}(\mu)$, entonces todo conjunto abierto U que contiene a x satisface $\mu(U) > 0$. De otro modo existiría un conjunto abierto nulo U que contiene a x, pero en este caso $x \in U \subset N$, lo cual es una contradicción.

Sea $f \in C_c(X, [0,1])$ tal que $f(x) > 0$. Considere el conjunto abierto
$$U = \{y \in X : f(y) > \frac{f(x)}{2}\}$$
el cual contiene a x y por lo anterior es de medida positiva. Por tanto, tenemos
$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_U f \, \mathrm{d}\mu \geq \frac{f(x)}{2} \mu(U) > 0.$$

Probamos ahora $\Longleftarrow$. Sea pues x con la condición correspondiente y supongamos que $x \notin \operatorname{supp}(\mu)$, es decir, $x \in N$. Por el Lema de Urysohn podemos encontrar una función $f \in C_c(X, [0,1])$ tal que $f(x) = 1$ y $f \prec N$. Entonces, tenemos
$$0 \leq \int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_N f \, \mathrm{d}\mu \leq \mu(N) = 0.$$
Esto contradice nuestras hipótesis sobre x. Por tanto, $x \in \operatorname{supp}(\mu)$. $\square$