SEGUNDO EXAMEN PARCIAL
VARIEDADES DIFERENCIABLES Y GRUPOS DE LIE
3 DE DICIEMBRE DE 2015

Instrucciones: Resolver los 5 problemas siguientes justificando todas sus afirmaciones y presentando todos sus cálculos. Puede utilizar cualquier resultado del libro de Warner hasta la página 108.

1. Considere el conjunto
$$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R}) \mid AJA^t = J\},$$
donde
$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$
Probar que $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ es un subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$ que además es subvariedad encajada. Calcular la dimensión y la subálgebra de Lie de este subgrupo.
2. Sea $\mathbb{R}$ como grupo de Lie con la operación de suma y sea $\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$ como grupo de Lie con la operación de producto. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ un homomorfismo continuo de grupos. Resolver los siguientes incisos para probar que
$$\varphi(t) = \varphi(1)^t,$$
para todo $t \in \mathbb{R}$.
   a) Probar que $\varphi(nt_0) = \varphi(t_0)^n$ para todo entero no-negativo n y para todo $t_0 \in \mathbb{R}$.
   b) Probar que $\varphi(-t_0) = \varphi(t_0)^{-1}$ y que $\varphi(nt_0) = \varphi(t_0)^n$ para todo entero n y para todo $t_0 \in \mathbb{R}$.
   c) Probar que $\varphi\left(\frac{1}{m}\right) = \varphi(1)^{\frac{1}{m}}$ para todo entero m.
   d) Probar que $\varphi(r) = \varphi(1)^r$ para todo racional r.
   e) Concluir que $\varphi(t) = \varphi(1)^t$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
3. Sea G un grupo de Lie, denotemos con $p : G\times G \to G$ la operación producto y sean $X, Y \in \mathfrak{g}$ consideramos como campos vectoriales sobre G.
   a) Probar que se satisfacen las identidades
$$dp_{(g,h)}(X_g, 0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} p(g\exp(tX), h) = d(R_h)_g(X_g)$$
para cualesquiera $g, h \in G$.

b) Probar que se satisfacen las identidades

$$dp_{(g,h)}(0, Y_h) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} p(g, h\exp(tY)) = d(L_g)_h(Y_h)$$

para cualesquiera $g, h \in G$.

c) Sean $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to G$ curvas suaves tales que $\alpha(0) = \beta(0) = e$. Probar que si γ es la curva dada por $\gamma(t) = \alpha(t)\beta(t)$, entonces

$$\gamma'(0) = \alpha'(0) + \beta'(0).$$

4. Sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo suave de grupos de Lie con G un grupo de Lie conexo. Utilizar que $\ker(\varphi)$ es normal en G y que G es arco-conexo para probar que si $\ker\varphi$ es discreto, entonces $\ker\varphi$ está contenido en el centro de G.

5. *a*) Sea $\mathfrak{g}_0$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 2 con base X, Y. Definimos la operación $[\cdot,\cdot]$ mediante

$$[X, X] = [Y, Y] = 0, \quad [X, Y] = Y = -[Y, X],$$

y extendiendo por bilinealidad. Probar que $(\mathfrak{g}_0, [\cdot,\cdot])$ es un álgebra de Lie.

b) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión 2. Probar que si $\mathfrak{g}$ no es Abeliana, entonces $\mathfrak{g}$ posee una base que satisface las condiciones del inciso anterior. Concluir que en tal caso $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathfrak{g}_0$.