Tarea 1.

1) En un espacio topológico M considere la siguiente relación entre cartas de M.

$$(U_1, \varphi_1) \sim (U_2, \varphi_2)$$

$$\iff \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

es difeomorfismo.

Probar que $\sim$ es reflexiva, simétrica y que satisface la siguiente propiedad de transi_ tividad:

*) Si $(U_1, \varphi_1) \sim (U_2, \varphi_2) \sim (U_3, \varphi_3)$ entonces:

$$\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2 \cap U_3) \longrightarrow \varphi_3(U_1 \cap U_2 \cap U_3)$$

es difeomorfismo.

(Sugerencia: Dibuje diagramas. Revise donde está definido $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$).

2) Sea $\mathcal{A}$ un atlas sobre una variedad M, y sean (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) dos cartas de M no necesariamente pertenecientes a $\mathcal{A}$. Probar que si se cumple

$$(U_1, \varphi_1) \sim (U, \varphi) \sim (U_2, \varphi_2)$$

$\forall\, (U, \varphi) \in \mathcal{U}$, entonces:

$$(U_1, \varphi_1) \sim (U_2, \varphi_2).$$

3) Si $\mathcal{U}$ es un atlas en M, decimos que $\mathcal{U}$ es un atlas maximal si satisface:

*) si (U, φ) es una carta compatible con cada elemento de $\mathcal{U}$, entonces $(U, \varphi) \in \mathcal{U}$.

Probar que $\mathcal{U}$ es un atlas maximal si y sólo si satisface

**) Si $\mathcal{U}'$ es un atlas en

M tal que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$, entonces $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$.