Tarea 2.

1) Sea $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función suave sobre un abierto en $\mathbb{R}^n$. Sea:

$$Gr(F) = \{(x, F(x)) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x \in U\}$$

la variedad diferenciable con la carta:

$$\begin{aligned} \varphi : Gr(F) &\longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n \\ (x, F(x)) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Probar que si $G : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función suave, entonces $g = G|_{Gr(F)}$ es suave.

2) Defina la Grassmanniana de k-planos en $\mathbb{R}^n$ por:

$$Gr(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) = \left\{ V \subseteq \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} V \text{ subespacio} \\ \dim V = k \end{array} \right\}$$

a) Probar que $V \in Gr(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ posee una base $v_1, \dots, v_k$ tal que la matriz

$$A = (v_1, \dots, v_k) \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$$

se descompone como:

$$A = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$$

con B $k \times k$ no-singular si y

sólo si $\pi(V)=\mathbb{R}^k$ donde:

$$\pi(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_k).$$

En particular, si $v_1',\dots,v_k'$ es también base de V y escribimos:

$$A'=(v_1',\dots,v_k')=\begin{pmatrix}B'\\C'\end{pmatrix}$$

con B' $k\times k$, entonces B es no-singular si y sólo si B' es no-singular.

b) Sea:

$$U=\{V\in Gr(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n) \mid \pi(V)=\mathbb{R}^k\}$$

donde π es como arriba.

Probar que si $v_1,\dots,v_k$ y

$v_1',\dots,v_k'$ son bases de V y escribimos:

$$A=(v_1,\dots,v_k)=\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix} \qquad B\ k\times k$$

$$A'=(v_1',\dots,v_k')=\begin{pmatrix}B'\\C'\end{pmatrix} \qquad B'\ k\times k$$

entonces:

$$A'=AD$$

$$\begin{pmatrix}B'\\C'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}BD\\CD\end{pmatrix}$$

donde D es la matriz de cambio de base entre $v_1,\dots,v_k$ y $v_1',\dots,v_k'$.

c) Usar b) para probar que el mapeo:

$$\varphi : U \longrightarrow M_{(n-k)\times k}(\mathbb{R})$$
$$V \longmapsto CB^{-1}$$

está bien definido y es biyección para

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = A = (v_1, \dots, v_k)$$

donde $v_1, \dots, v_k$ es base de V y B es $k \times k$.

d) Sea $F = \{ I = (i_1, \dots, i_k) \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \}$ y para todo $I \in F$:

$$\mathbb{R}^I = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0 \text{ si } i \notin I \}.$$

En particular,

$$\{ \mathbb{R}^I \mid I \in F \}$$

es la colección de subespacios de dimensión k generados por k ejes de $\mathbb{R}^n$.

Defina:

$$\pi_I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$$
$$\pi_I(x_1, \dots, x_n) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$$

si $I = (i_1, \dots, i_k)$.

Sea:

$$U_I = \{ V \in Gr(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) \mid \pi_I(V) = \mathbb{R}^k \}$$

Probar: $Gr(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) = \bigcup_{I \in F} U_I$.

Defina el mapeo:

$$\varphi_I : U_I \longrightarrow M_{(n-k)\times k}(\mathbb{R})$$
$$V \longmapsto CB^{-1}$$

donde B, C están definidas como sigue. Dado $V \in U_I$ escogemos una base $v_1, \dots, v_k$ de V, formamos la matriz $n \times k$ $(v_1, \dots, v_k)$, B es la submatriz $k \times k$ obtenida de las filas con índices en I y C es la submatriz $(n-k)\times k$ obtenida de las filas con índices en $\{1, \dots, n\} \setminus I$.

Probar que φ está bien definido y que es biyección.

e) Probar que si $I, J \in F$, entonces:

$$\varphi_J \circ \varphi_I^{-1}(C) = C_1 B_1^{-1}$$

donde B_1, C_1 se obtienen como sigue. Se forma A matriz $n \times k$ de modo que la submatriz con índices en I sea la identidad $k \times k$ y el resto de las filas sean dadas por C. Entonces B_1, C_1 son las submatrices obtenidas de las filas en J y $\{1, \ldots, n\} \setminus J$, respectivamente. Concluir que $\varphi_J \circ \varphi_I^{-1}$ es suave.

f) Usar lo anterior para probar que $Gr(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ es variedad diferenciable con el atlas $\{(U_I, \varphi_I) \mid I \in F\}$.