Tarea 3.

1) Sea $S^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\| = 1\}$ con la estructura de variedad usual. Considere la carta (U, φ) dada por:

$$U = \{p \in S^n \mid p_{n+1} > 0\}$$

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\varphi(p) = (p_1, \ldots, p_n)$$

cuya inversa es dada por:

$$\varphi^{-1} : B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow U$$

$$\varphi^{-1}(y) = \left(y_1, \ldots, y_n, \sqrt{1 - y_1^2 - \ldots - y_n^2}\right)$$

a) Escriba $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ con $x^1, \ldots, x^n$ las funciones componentes de φ. Es decir:

$$x_i : U \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

$$x_i(p) = p_i.$$

Sea $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ suave y $f = F|_{S^n}$. Utilice la definición de derivada parcial en variedades para verificar que:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial (F \circ \varphi^{-1})}{\partial y^i}(\varphi(p))$$

y verifique también que:

$$F\circ\varphi^{-1}(y_1,\dots,y_n) = F\left(y_1,\dots,y_n,\sqrt{1-y_1^2-\dots-y_n^2}\right).$$

b) Utilizar el inciso a) para probar que además se cumple:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial F}{\partial p_j}(p)\,\frac{\partial(\varphi^{-1})^j}{\partial y^i}(\varphi(p))$$

c) Usar ahora b) para concluir que:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial F}{\partial p_i}(p) - \frac{p_i}{p_{n+1}}\,\frac{\partial F}{\partial p_{n+1}}(p)$$

(Es decir, podemos interpretar:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \left.\frac{\partial}{\partial p_i}\right|_p - \frac{p_i}{p_{n+1}}\left.\frac{\partial}{\partial p_{n+1}}\right|_p$$

con el lado izquierdo un elemento en T_pM puesto en términos del lado derecho que son derivadas ordinarias en $\mathbb{R}^{n+1}$.)

2) Considere los siguientes mapeos suaves de variedades:

$$M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{f} P$$

Dado $x_0 \in M$ sean:

(U, φ) carta de M con $x_0 \in U$
(V, ψ) carta de N con $g(x_0) \in V$
(W, θ) carta de P con $f(g(x_0)) \in W$

y suponga que:

$$\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$$
$$\psi = (y^1, \ldots, y^n)$$
$$\theta = (z^1, \ldots, z^p).$$

Probar que:

$$\frac{\partial(z^i \circ f \circ g)}{\partial x^j}(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(z^i \circ f)}{\partial y^k}(g(x_0)) \frac{\partial(y^k \circ g)}{\partial x^j}(x_0)$$

3) Sea $f: M \longrightarrow N$ un mapeo suave y $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$ una curva suave. Si definimos:

$$\beta = f \circ \alpha : I \longrightarrow N$$

entonces:

$$\beta'(t) = df_{\alpha(t)}(\alpha'(t))$$

$\forall t \in I.$

4) Sean $f, g: M \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones suaves.
Probar que $\forall p \in M$ y $v \in T_pM$ se cumple:

$$d(fg)_p(v) = df_p(v)\,g(p) + f(p)\,dg_p(v).$$

5) Considere $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ con la estructura de variedad usual. Considere la carta (U, φ) donde:

$$U = \left\{ \ell \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} \ell = \mathbb{R}(x_1, \dots, x_{n+1}) \\ \text{con } x_1 \neq 0 \end{array} \right\}$$

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\ell \longmapsto \left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_1}\right).$$

Recuerde que la función inversa es dada por:

$$\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{R}(1, x_2, \dots, x_n).$$

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función suave y para cada entero i tal que $2 \leq i \leq n+1$ defina:

$$f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f_i(\ell) = f\left(\frac{x_i}{x_1}\right)$$

cuando $\ell = \mathbb{R}(x_1, \dots, x_{n+1})$.

a) Probar que cada f_i es una función bien definida y suave en U.

b) Con respecto a

$$\varphi = (y^1, \ldots, y^n)$$

calcular:

$$\frac{\partial f_i}{\partial y^j}(\ell)$$

cuando $\ell \in U$.