Tarea 4.

1) Sea M una variedad de dimensión n y T^*M su haz cotangente. Denote

$$\begin{aligned} \pi : T^*M &\longrightarrow M \\ v^* &\longmapsto p \end{aligned}$$

cuando $v^* \in T_p^*M$.
Para cada carta (U, φ) de M considere la función:

$$\hat{\varphi} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$$

$$\hat{\varphi}(v^*) = \left(\varphi(\pi(v^*)), v^*\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_{\pi(v^*)}\right), \dots, v^*\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_{\pi(v^*)}\right)\right)$$

Siguiendo los métodos empleados en clase para el haz tangente TM, probar que T^*M es una variedad diferenciable con el atlas:

$$\{(\pi^{-1}(U), \hat{\varphi}) \mid (U, \varphi) \text{ carta de } M\}.$$

Probar también que

$$\pi : T^*M \longrightarrow M$$

es suave.

2) Sean M, N variedades.
En el espacio $M \times N$ probar que la familia:

$$\{(U\times V, \varphi\times\psi) \mid \begin{array}{l}(U,\varphi) \text{ carta de } M\\ (V,\psi) \text{ carta de } N\end{array}\}$$

define un atlas en $M\times N$ que lo convierte en variedad.

Recordamos que:

$$\varphi\times\psi : U\times V \longrightarrow \varphi(U)\times\psi(V)$$
$$(\varphi\times\psi)(x,y) = (\varphi(x),\psi(y)).$$

$M\times N$ es llamada la variedad producto.

3) Sean M, N variedades y $M\times N$ la variedad producto. Para cada $y_0\in N$ considere el mapeo:

$$f_{y_0} : M \longrightarrow M\times N$$
$$x \longmapsto (x, y_0).$$

Probar que (M, f_{y_0}) es una subvariedad de $M\times N$.

4) Sea M una variedad y $U\subseteq M$ abierto. Dada una carta (V,ψ) de M considere:

$$(U\cap V, \psi|_V)$$

con $\psi_V : U\cap V \longrightarrow \psi(U\cap V)$.

Probar que

$$\{(U\cap V, \psi_V) \mid (V,\psi) \text{ carta de } M\}$$

es un atlas para U que lo convierte en una variedad.

Probar que (U, i) es subvariedad de M donde:

$$i : U \longrightarrow M$$

es la inclusión natural.