Tarea 6.

1) Considere la función:

$$F: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Determinar los valores regulares de F. Usar su cálculo para probar que:

$$SL(2, \mathbb{R}) = \{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1 \}$$

es una subvariedad de $M_2(\mathbb{R})$.

2) Considere la función:

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F(x, y, z) = (x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$$

a) Determinar todos los valores regulares de F.

b) Dado $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ un valor regular de F tal que $M = F^{-1}(r, s) \neq \emptyset$, calcular para cada $(x, y, z) \in M$ el espacio tangente $T_{(x,y,z)} M$.

c) Calcular el conjunto de puntos (r, s) tales que $F^{-1}(r, s)$ es subvariedad pero (r, s) no es valor regular de F.

3) Considere la función:

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2).$$

Resolver para esta función lo requerido en los incisos a), b), c) del Problema 2.

4) Considere la función:

$$F : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$
$$[x_1, x_2, x_3, x_4] \longmapsto [x_2^2 - x_3^2, x_3^2 - x_4^2, x_1^2].$$

Probar que $[1, 1, 1]$ es un valor regular de F.

5) Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función suave y $r_0 \in \mathbb{R}$ un valor regular. Considere la subvariedad $M = f^{-1}(r_0)$. Probar que existe un mapeo suave

$$N : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que $\|N(x)\| = 1 \quad \forall x \in M$

y:

$$N(x) \perp T_x M$$

$\forall x \in M$. (Observación: N define un campo vectorial normal a M.)