Tarea 7.

1) Sea $\varphi : M \longrightarrow N$ un difeo_morfismo. Probar que si $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces la asig_nación:

$$p \longmapsto d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}\left(X_{\varphi^{-1}(p)}\right)$$

define un campo vectorial suave sobre N.

2) Recordamos que si

$$f : M \longrightarrow N$$

es un mapeo suave, entonces

tenemos un mapeo suave:

$$df : TM \longrightarrow TN$$
$$v \longmapsto df_p(v)$$

donde $v \in T_pM$, $p \in M$.
Explicar porqué <u>no</u> se puede definir en general un mapeo:

$$\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(N)$$

que asigne $X \longmapsto Y$ y de modo que satisfaga:

$$Y_{f(p)} = df_p(X_p)$$

$\forall p \in M$.

3) Sean M una variedad y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Sea γ una curva integral de X.

a) Probar que si existe t_0 tal que $\gamma'(t_0) = 0$, entonces γ es constante.

b) Probar que si existe t_0 tal que $\gamma'(t_0) \neq 0$, entonces $\gamma'(t) \neq 0$ para todo t en el dominio de γ.

4) Sea $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ una carta en M.

a) Probar que para todo $p \in M$ se cumple:

$$d\varphi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) = e_j$$

para todo $j = 1, \ldots, n$.

b) Probar que:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right] = 0$$

como campos vectoriales en U para cualesquiera $j, k = 1, \ldots, n$.

5) Sea X un campo vectorial suave sobre M. Fije $p \in M$, considere γ_p la curva integral maximal de X tal que $\gamma_p(0) = p$ y sea $q = \gamma_p(t_0)$ donde $t_0 \in I_p$.

a) Probar que

$$I_p = t_0 + I_q.$$

(Recuerde que I_x es el dominio de la curva integral maximal γ_x).

b) Probar que

$$\gamma_q(t) = \gamma_p(t_0 + t)$$

para todo $t \in I_q$.