Tarea 8.

Sea M una variedad suave y $p \in M$. Entonces para todo $v \in T_pM$ existe un campo vectorial suave $X \in \mathfrak{X}(M)$ definido sobre todo M tal que $X_p = v$.

Probar la afirmación anterior mediante la demostración de los siguientes puntos.

1) Probar que existe una función

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

suave tal que:

$$\varphi|_{B(0,1)} \equiv 1$$

$$0 \leq \varphi \leq 1$$

$$\varphi|_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,2)} \equiv 0.$$

2) Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función sobre una variedad tal que:

$F|_{U_\alpha}$ es suave $\forall \alpha$

donde $M = \bigcup U_\alpha$ y U_α es abierto $\forall \alpha$. Probar que F es suave.

3) Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función suave donde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto. Probar que para todo $p \in U$ existe V una vecindad de p con $V \subseteq U$ y $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ suave tal que:

$$F|_V = f|_V.$$

4) Sea X un campo vectorial suave en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Probar que para todo $p \in U$ existe una vecindad V de p con $V \subseteq U$ y $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ tales que:

$$Y|_V = X|_V.$$

5) Usando cartas, probar la afirmación enunciada al principio de esta tarea.