Tarea 1.

1) Escribir la demostración del Teorema 3.62 del libro de Warner.

2) Escribir la demostración del Teorema 3.64 del libro de Warner.

3) Sean:

$$M = \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{l} A^t = A \\ A \text{ definida positiva} \end{array} \right\}$$

$$P = \left\{ \langle\, , \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} \langle\, , \rangle \text{ producto interno} \\ \text{definido positivo en } \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$$

a) Probar que:

$$\begin{array}{rcl} P & \longrightarrow & M \\ \langle\, , \rangle & \longmapsto & [\langle\, , \rangle]_{\mathcal{B}} \end{array}$$

es una biyección donde $[\langle\, , \rangle]_{\mathcal{B}}$ es la representación matricial de $\langle\, , \rangle$ respecto de la base canónica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.

b) Probar que:

$$\begin{array}{rcl} GL(n, \mathbb{R}) \times M & \longrightarrow & M \\ (A, B) & \longmapsto & A \circ B = ABA^{-1} \end{array}$$

define una acción transitiva.

c) Probar que

$$O(n) = \{ A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A \circ I_n = I_n \}.$$

d) Concluir que:

$$M = GL(n, \mathbb{R}) / O(n)$$

posee una estructura de variedad diferenciable.

4) Para $k < n$ fijo sea:

$$M_{n,k} = \left\{ (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^{n \times k} \;\middle|\; \begin{array}{l} v_1, \dots, v_k \text{ conjunto} \\ \text{ortonormal de } \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$$

a) Probar que:

$$O(n) \times M_{n,k} \longrightarrow M_{n,k}$$

$$(A, (v_1, \dots, v_k)) \longmapsto A(v_1, \dots, v_k) = (Av_1, \dots, Av_k)$$

define una acción transitiva.

b) Calcular:

$$H = \{ A \in O(n) \mid A(e_1, \dots, e_k) = (e_1, \dots, e_k) \}$$

donde $(e_1, \dots, e_n)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

c) Usar lo anterior para probar que $M_{n,k}$ admite una estructura de variedad.

5) Sea $\varphi : G \longrightarrow G$ un automorfismo de grupos de Lie. Usar el Teorema 3.62 del libro de Warner para probar que si $H \leq G$ es un subgrupo cerrado, entonces el mapeo:

$$\begin{aligned} G/H &\longrightarrow G/\varphi(H) \\ gH &\longmapsto \varphi(g)\varphi(H) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo.

6) Considere el mapeo:

$$\begin{aligned} \varphi : O(n) &\longrightarrow O(n) \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde A, B, C, D tienen tamaños $k\times k$, $k\times(n-k)$, $(n-k)\times k$, $(n-k)\times(n-k)$, respectivamente.

a) Probar que φ es un automorfismo de $O(n)$ tal que:

$$\varphi\left(\left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} A \in O(k) \\ B \in O(n-k) \end{matrix}\right\}\right) =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} A \in O(n-k) \\ B \in O(k) \end{array} \right\}.$$

b) Usar lo anterior y lo visto en clase para probar que las variedades:

$$Gr(n,k) = \left\{ V \subseteq \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} V \text{ subespacio} \\ \text{de dim } k \end{array} \right\}$$

$$Gr(n,n-k) = \left\{ V \subseteq \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} V \text{ subespacio} \\ \text{de dim } n-k \end{array} \right\}$$

son difeomorfas.