

$$x_1^2$$

$$\bar{x}_4 x_3 x_1$$

$$\bar{x}_1 x_2^2 x_3 x_4$$

$$\bar{x}_1 x_6$$

$$\bar{x}_6 x_5$$

$$\bar{x}_5 x_4$$

# Descomposiciones circulares

Víctor Núñez  
(Cimat)

**Fabiola Manjarrez**

**Enrique Ramírez**

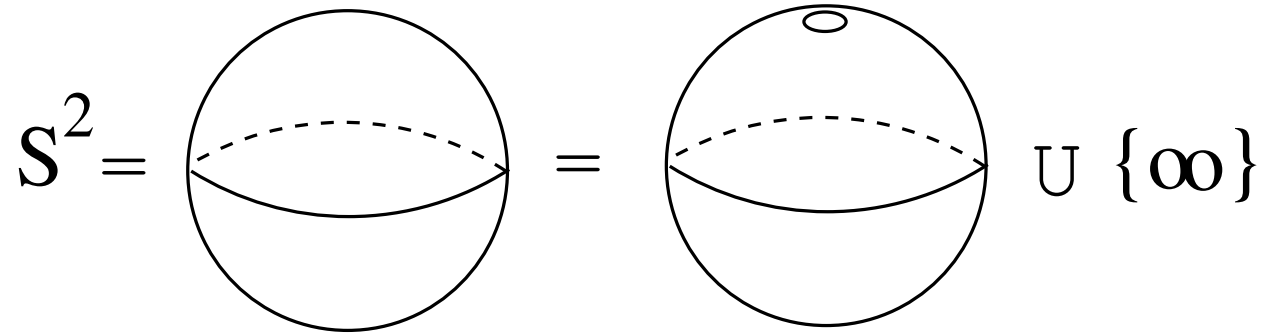
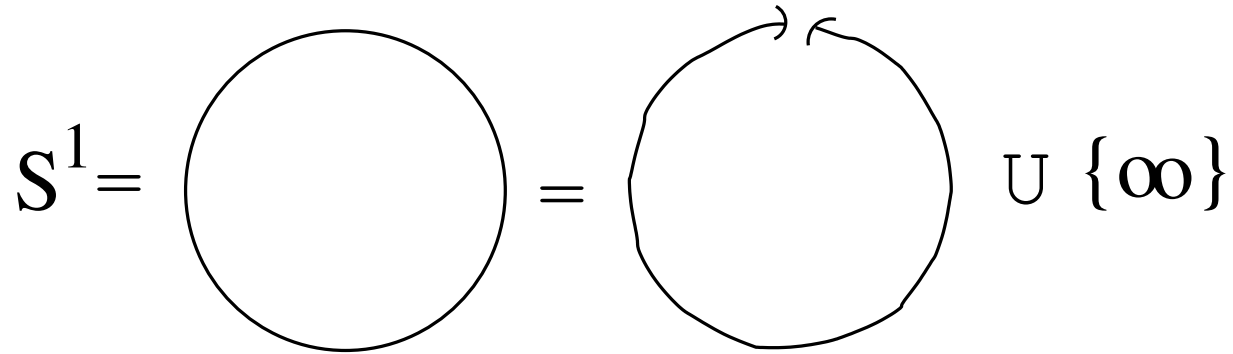
**Definición.**  $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$  es la  $n$ -bola.

Una  $n$ -bola es un espacio homeomorfo a  $B^n$ .

**Definición.** Una  $n$ -variedad es un espacio métrico  $M$  tal que cada punto de  $M$  tiene una vecindad homeomorfa a  $B^n$ .

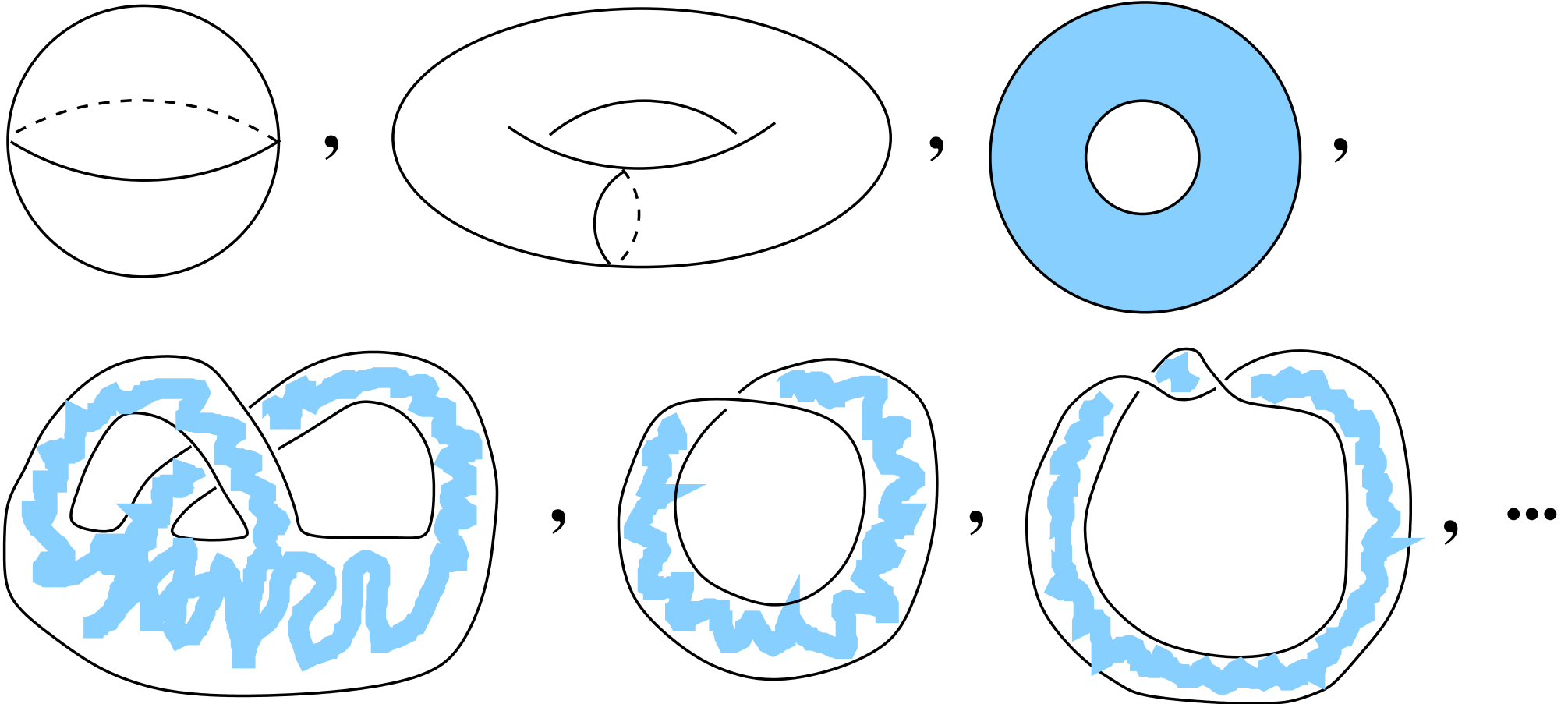
Ejemplo.  $S^n = \partial B^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$  es una  $n$ -variedad.

$$S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$$



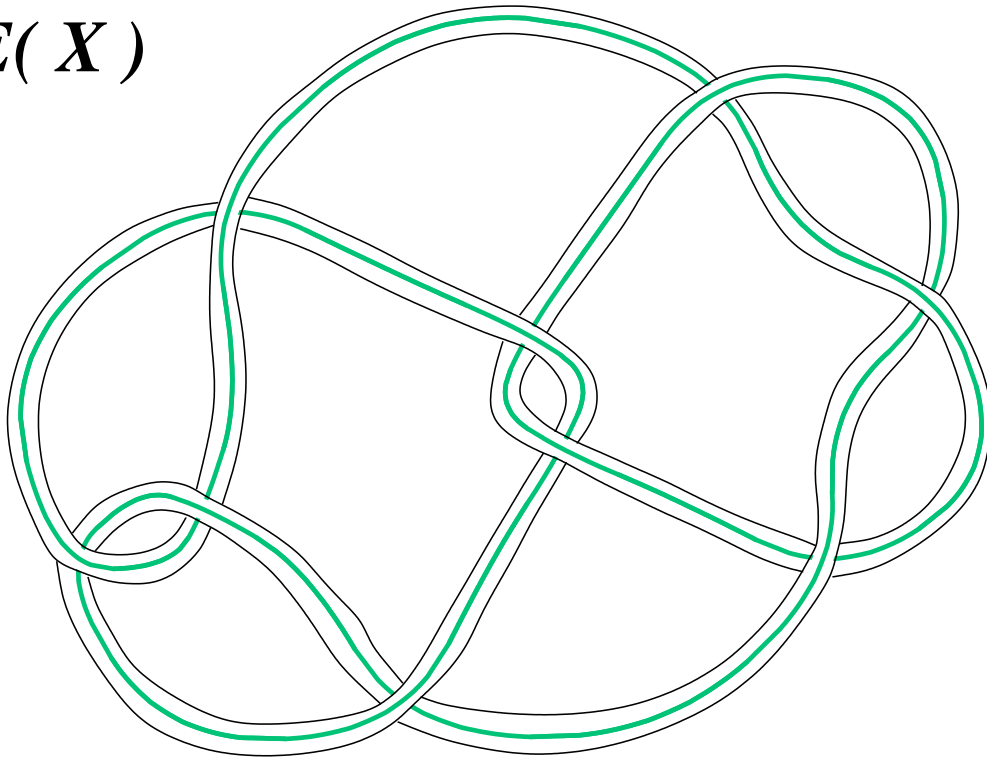
$$S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$$

Una *superficie* es una 2-variedad (*conexa*).

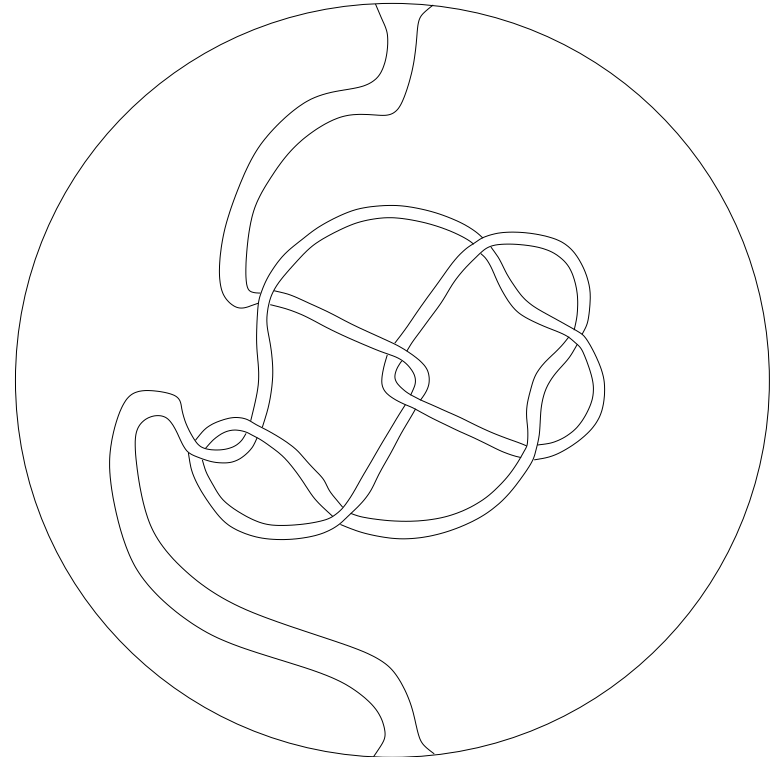


Dada una variedad  $M$  y una subvariedad  $X \subset M$ , el exterior de  $X$  en  $M$  es la subvariedad  $E(X) = \overline{M - \mathcal{N}(X)}$ .

**$E(X)$**



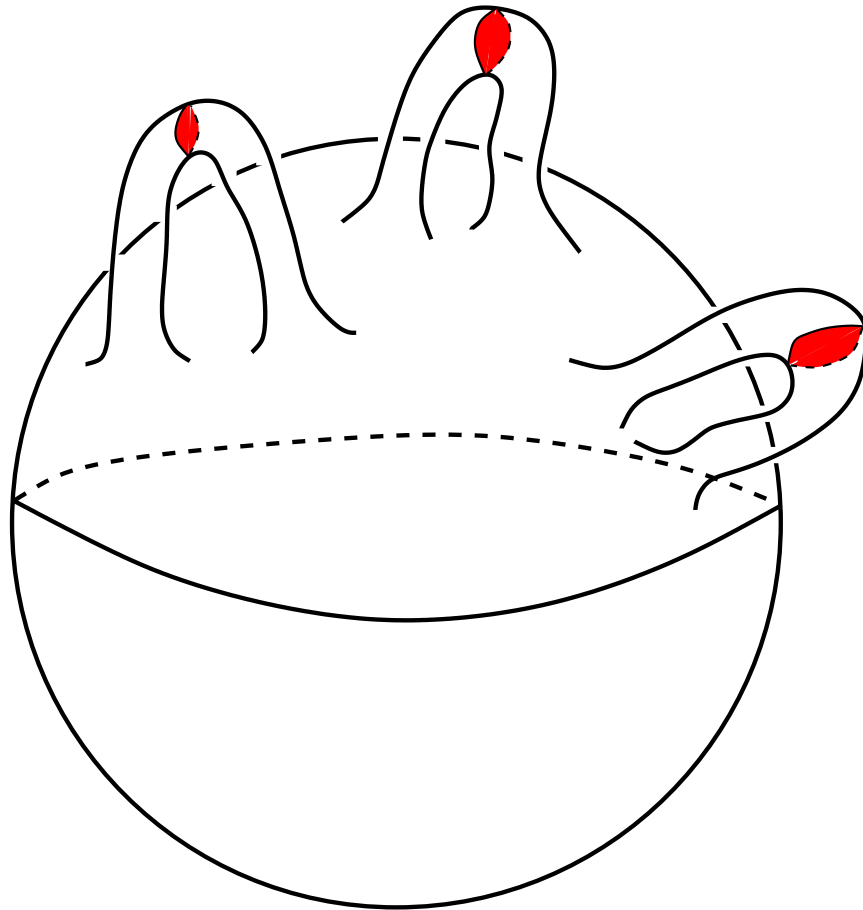
=



$(X \subset S^3$  es el nudo verde)

Un *cubo con g asas* es una 3-variedad  $V \subset \mathbb{R}^3$  compacta para la que:

- existe un sistema de discos bidimensionales  $D_1, D_2, \dots, D_g \subset V$
- $D_1, D_2, \dots, D_g$  son ajenos y están propiamente encajados
- el exterior en  $V$ ,  $E(D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_g) \cong B^3$

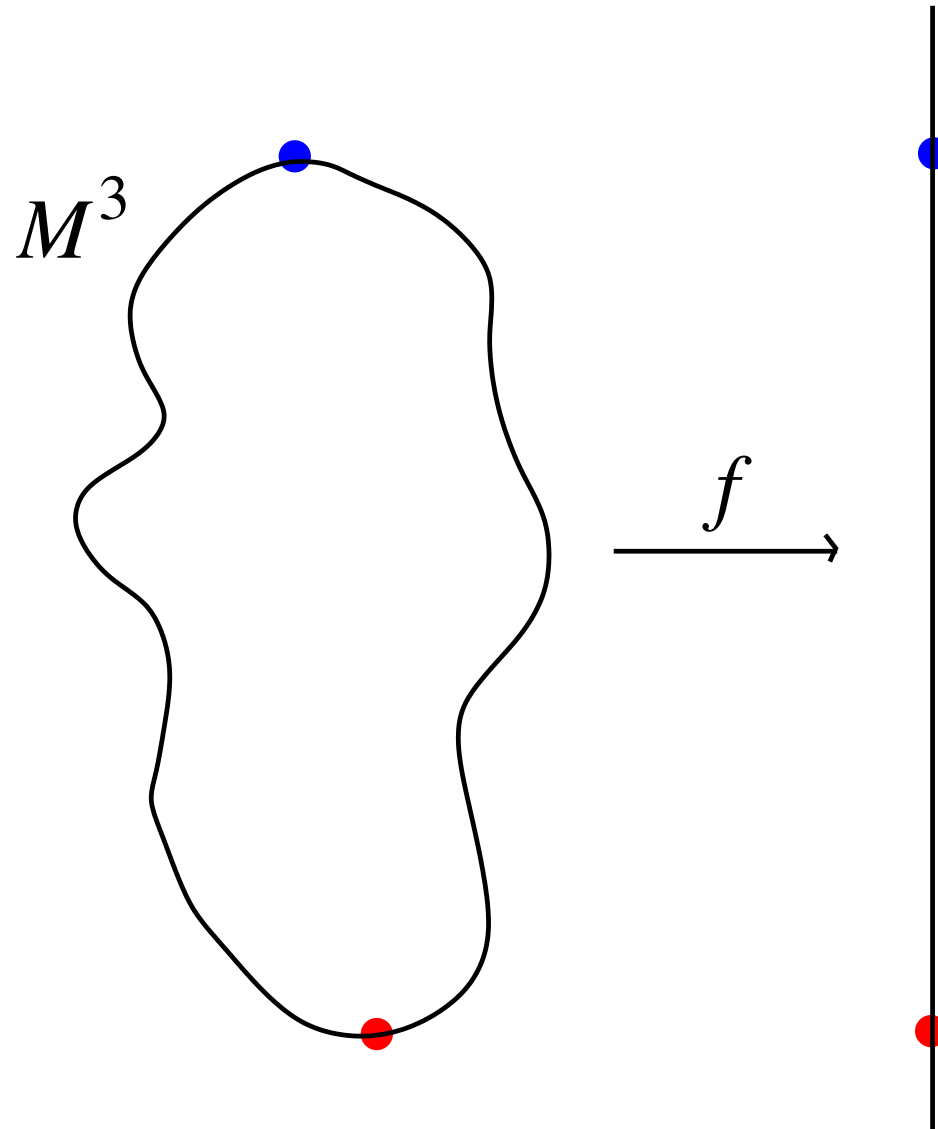


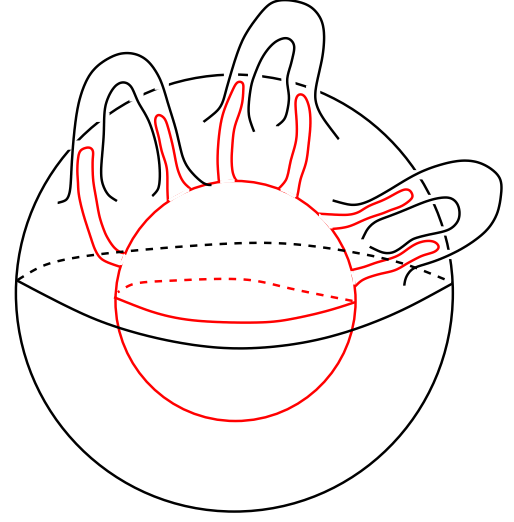
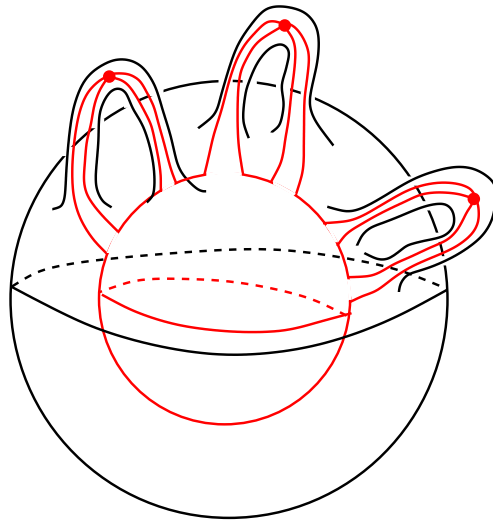
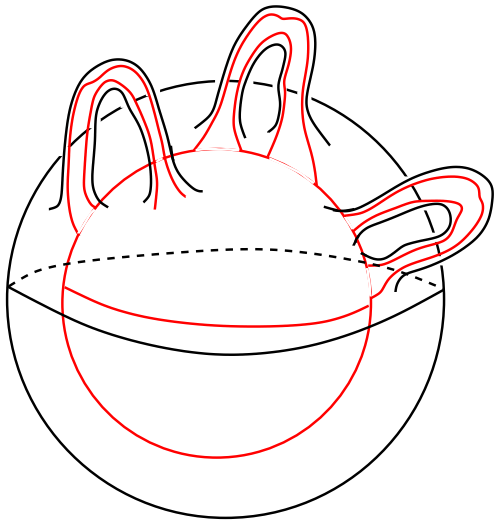
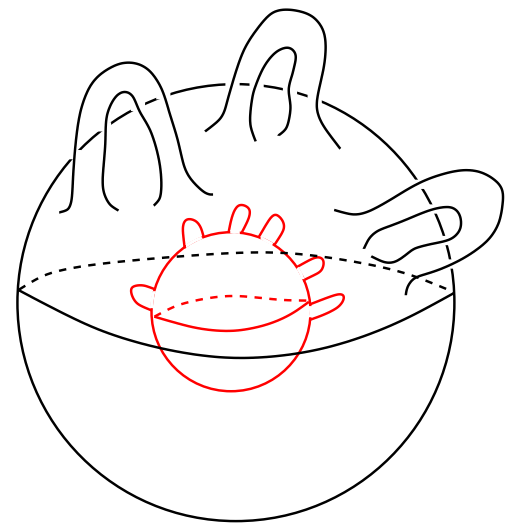
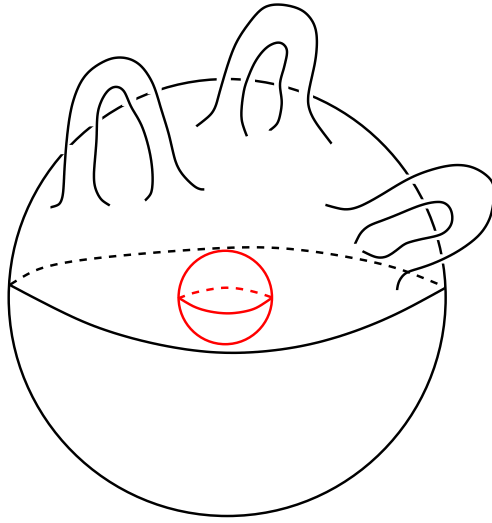
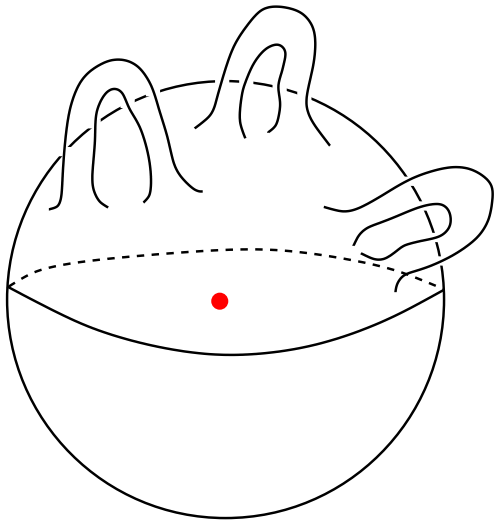


**Teorema** (Heegaard). Sea  $M$  una 3-variedad orientable, cerrada y conexa. Entonces  $M$  es unión de dos cubos con asas con interiores ajenos.

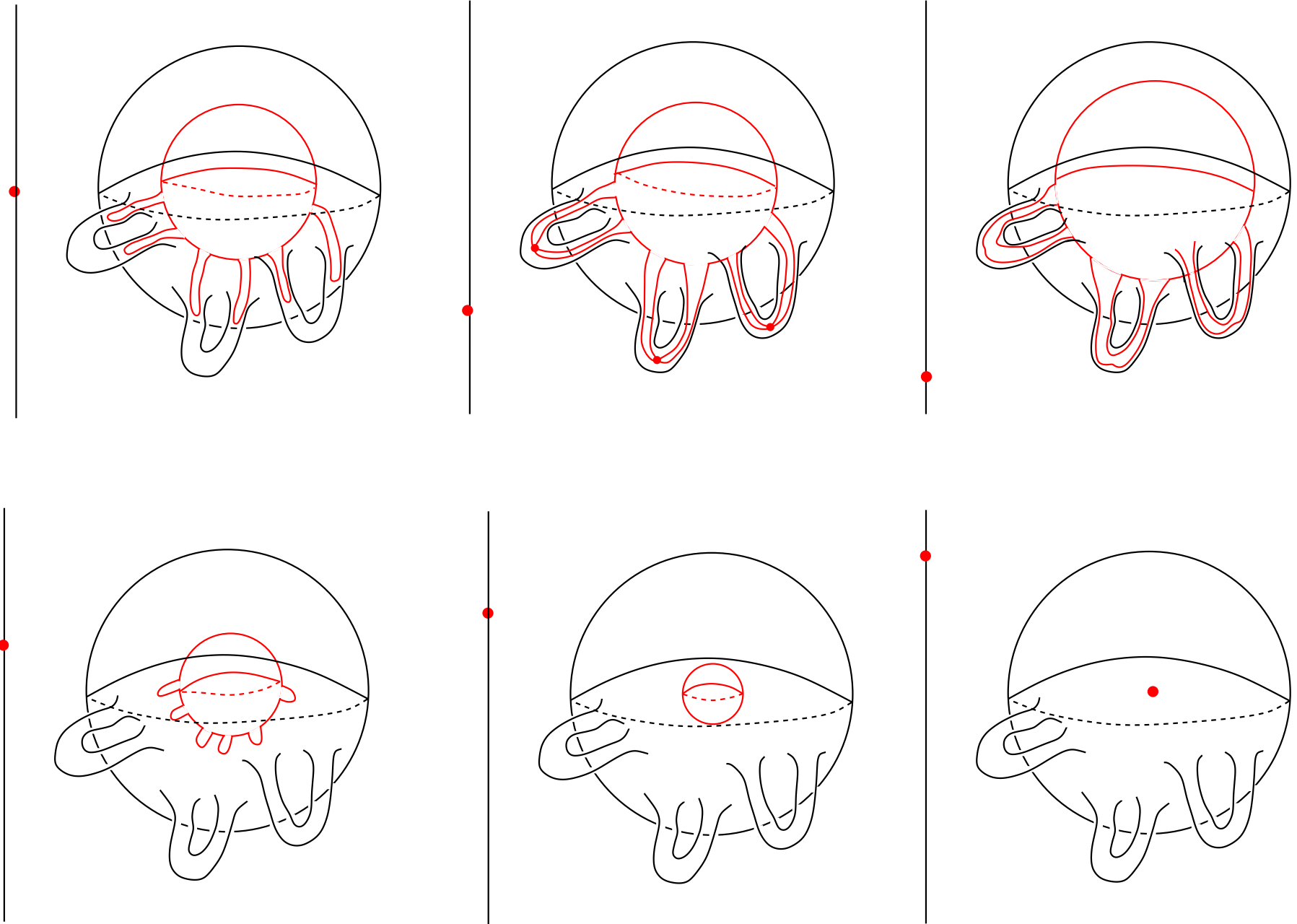
Una descomposición de Heegaard de  $M$  da lugar a una función altura

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

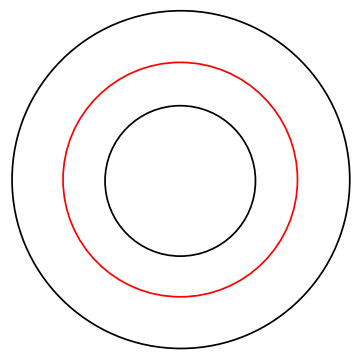
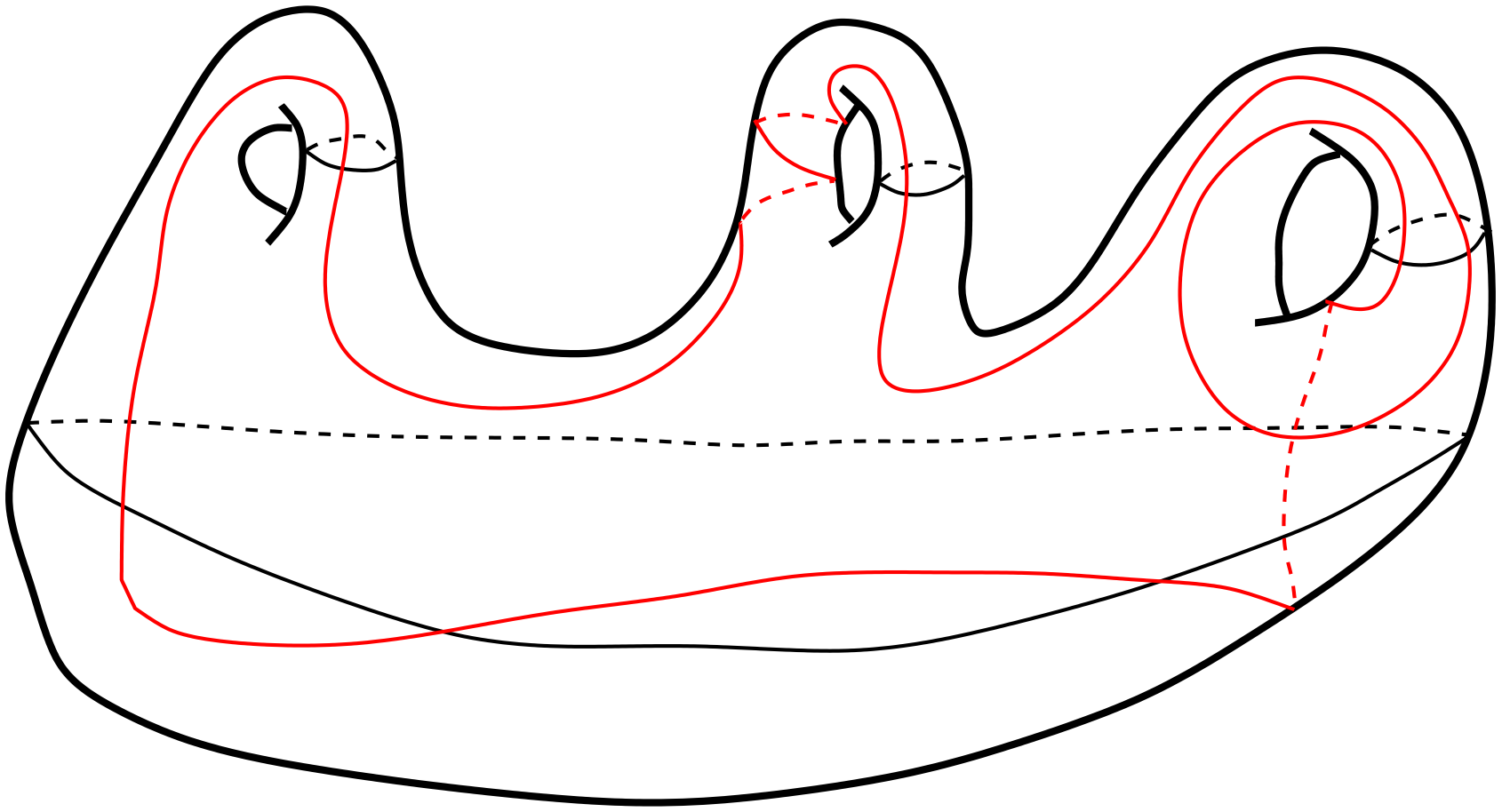




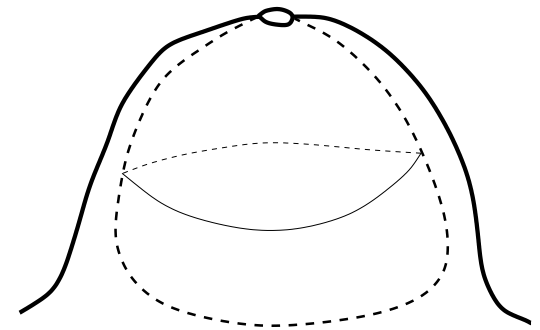
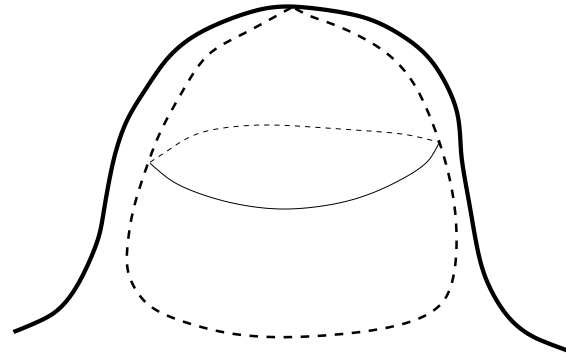
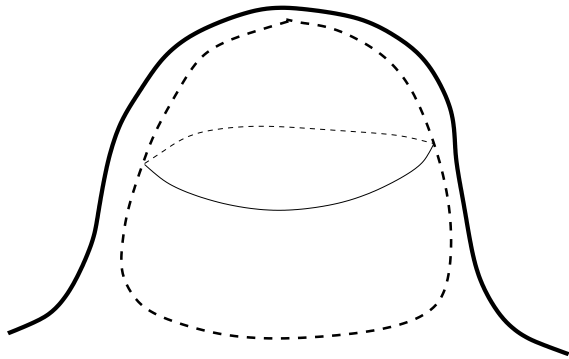
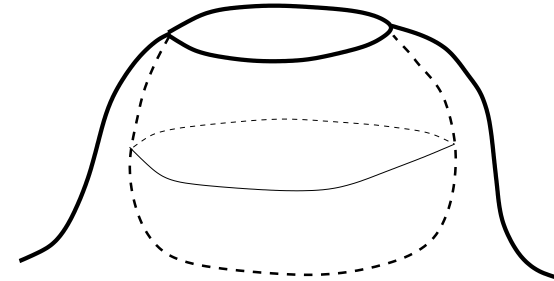
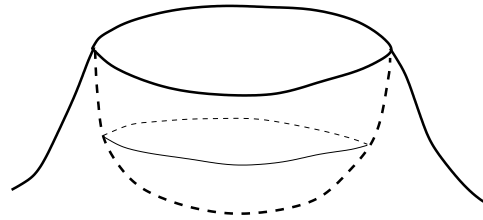
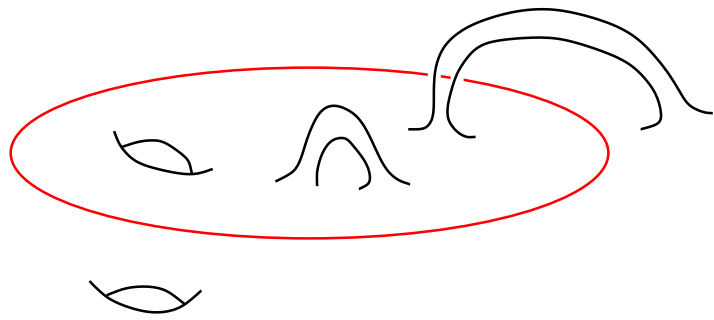
Para completar la función  $f$ , volteamos el dibujo:



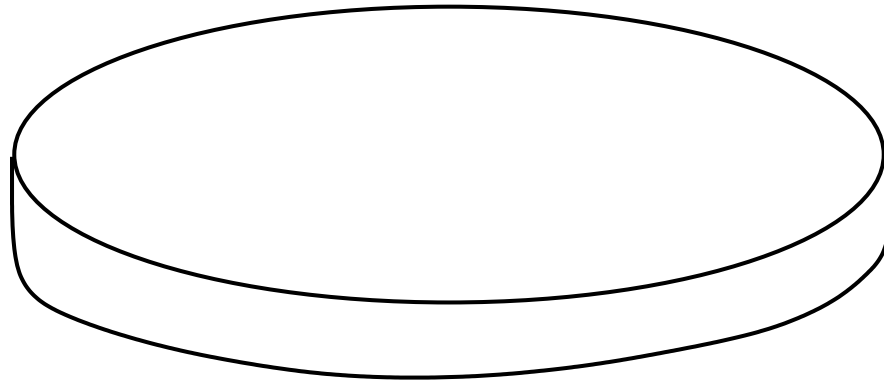
*Ahora lo que pasa...*



# Punto crítico de índice 2



Es lo mismo que pegar una 3-bola  $B = B^2 \times B^1$  a lo largo de  $\partial B^2 \times B^1$  sobre la curva roja:



(O sea, se identifica  $\partial B^2 \times B^1$  con una vecindad de la curva.)



Ahora, si tenemos una función  $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos construir una descomposición de Heegaard de  $M$ .

(Bueno, debemos suponer que  $M$  es diferenciable; pero en dimensión 3 no hay problema.

La función  $f$  debe ser *de Morse*; pero tampoco hay problema.

Realmente lo que obtenemos con ésto es una descomposición en asas de  $M$ , pero con una homotopía de  $f$ , obtenemos exactamente una descomposición de Heegaard para  $M$ .)

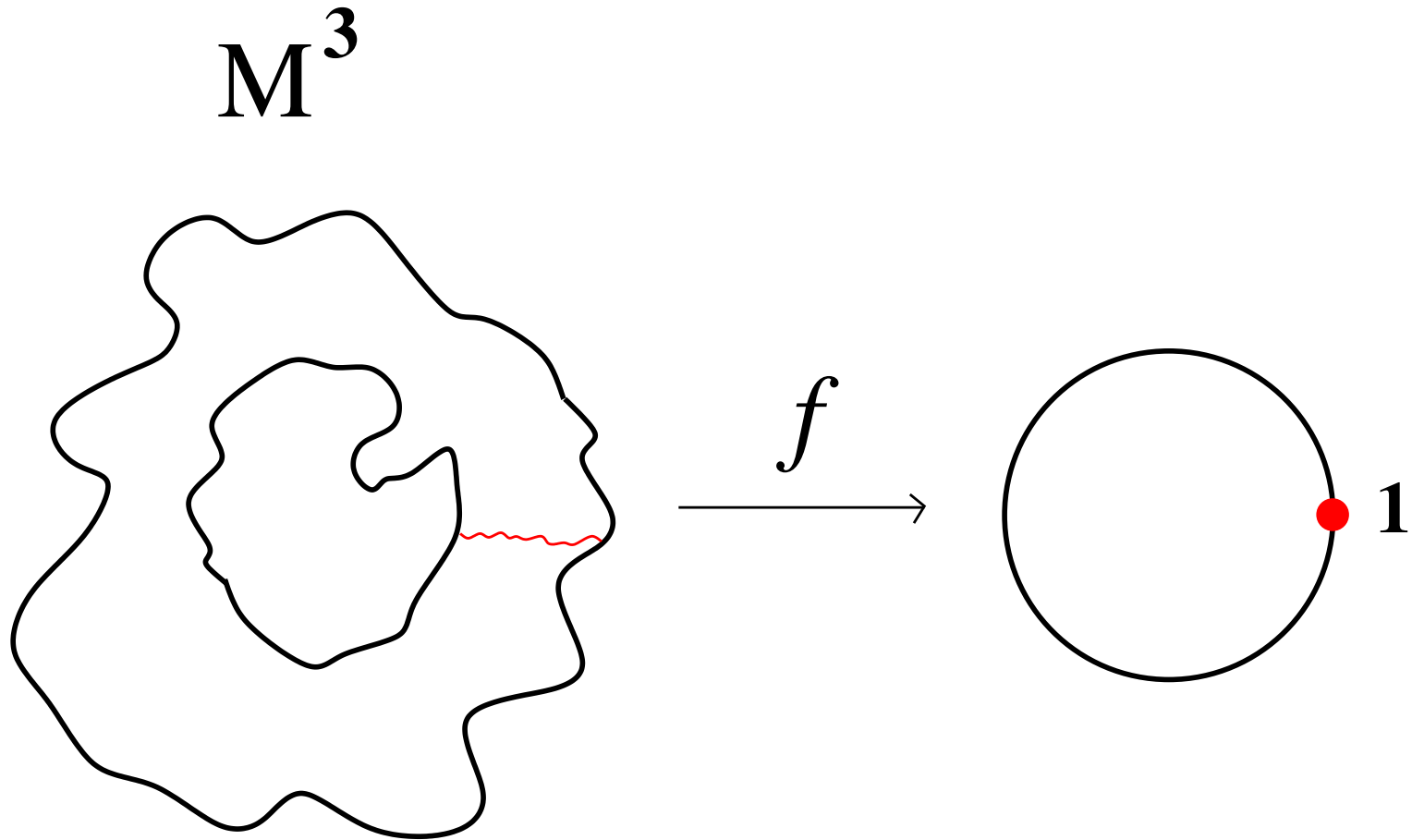
(Desc. de Hee. para  $M$ ) = ( $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  de Morse)

Preguntas interesantes:

- Dada  $M$ , ¿cuál es el género mínimo de una Desc. de Hee. de  $M$ ?
- ¿Cuántas Desc. de Hee. mínimas distintas hay para una  $M$  dada?
- Etc.

Si tenemos ahora  $f : M \rightarrow S^1$  de Morse,  
¿qué tipo de descomposición obtenemos para  $M$ ?

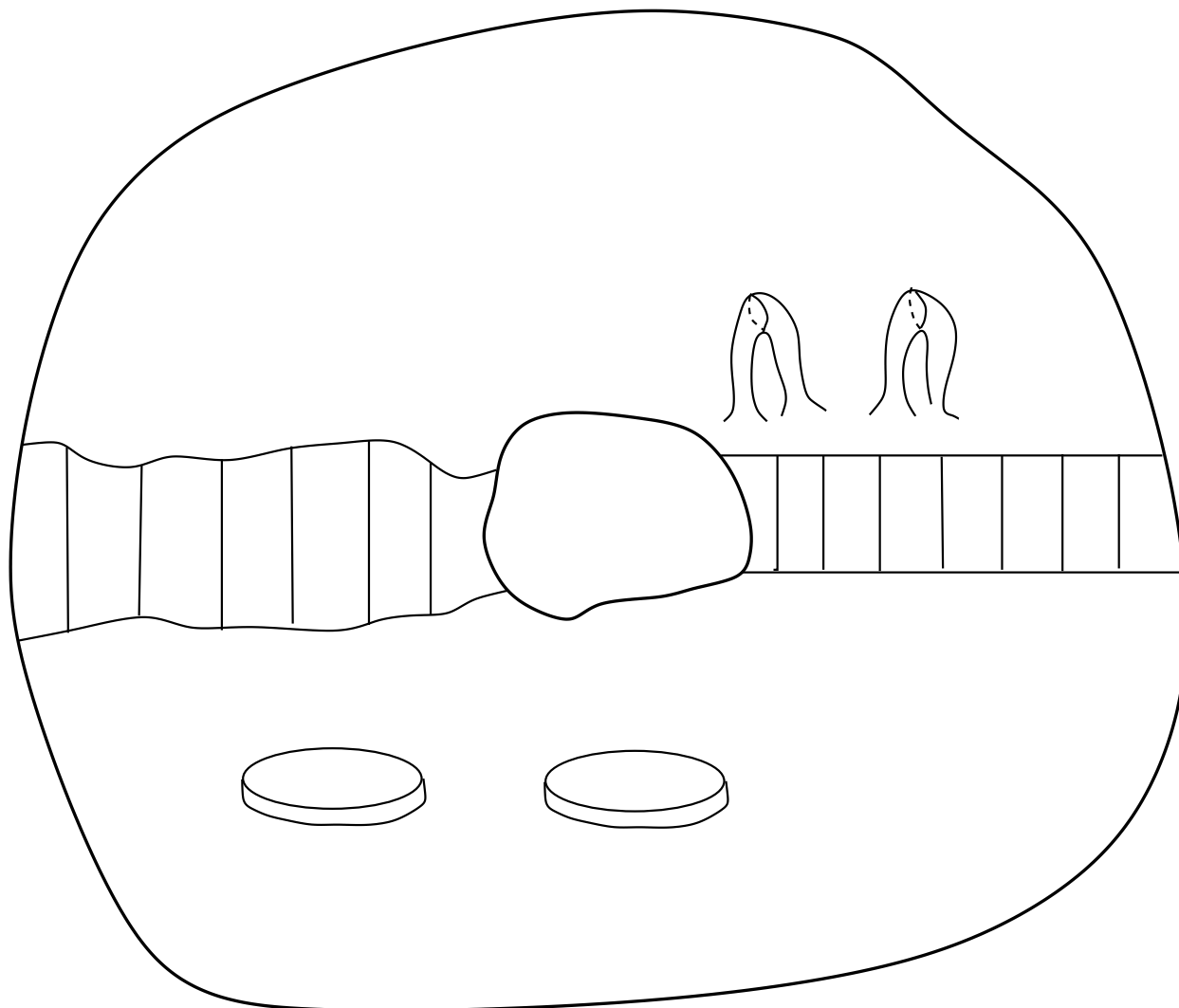
(La  $f$  no es nul-homotópica; si no, estamos en el caso anterior)



“Genéricamente” una curva de nivel es una superficie.

- Ya no hay “mínimos” (puntos críticos de índice 0).
- Ya no hay “máximos” (puntos críticos de índice 3).
- Hay puntos críticos de índice 1 (1-asas).
- Hay puntos críticos de índice 2 (2-asas).

$M^3$



Superficie "gorda"  
 $\times I$

Superficie "flaca"  
 $\times I$

**Nota:** Si  $M$  es una  $n$ -variedad,

Existe  $f : M \rightarrow S^1$  esencial

$\Leftrightarrow$

Existe  $\varphi : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$  no trivial

$\Leftrightarrow$

Existe  $\varphi : H_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$  no trivial

$\Leftrightarrow$

$H_1(M)$  es infinito

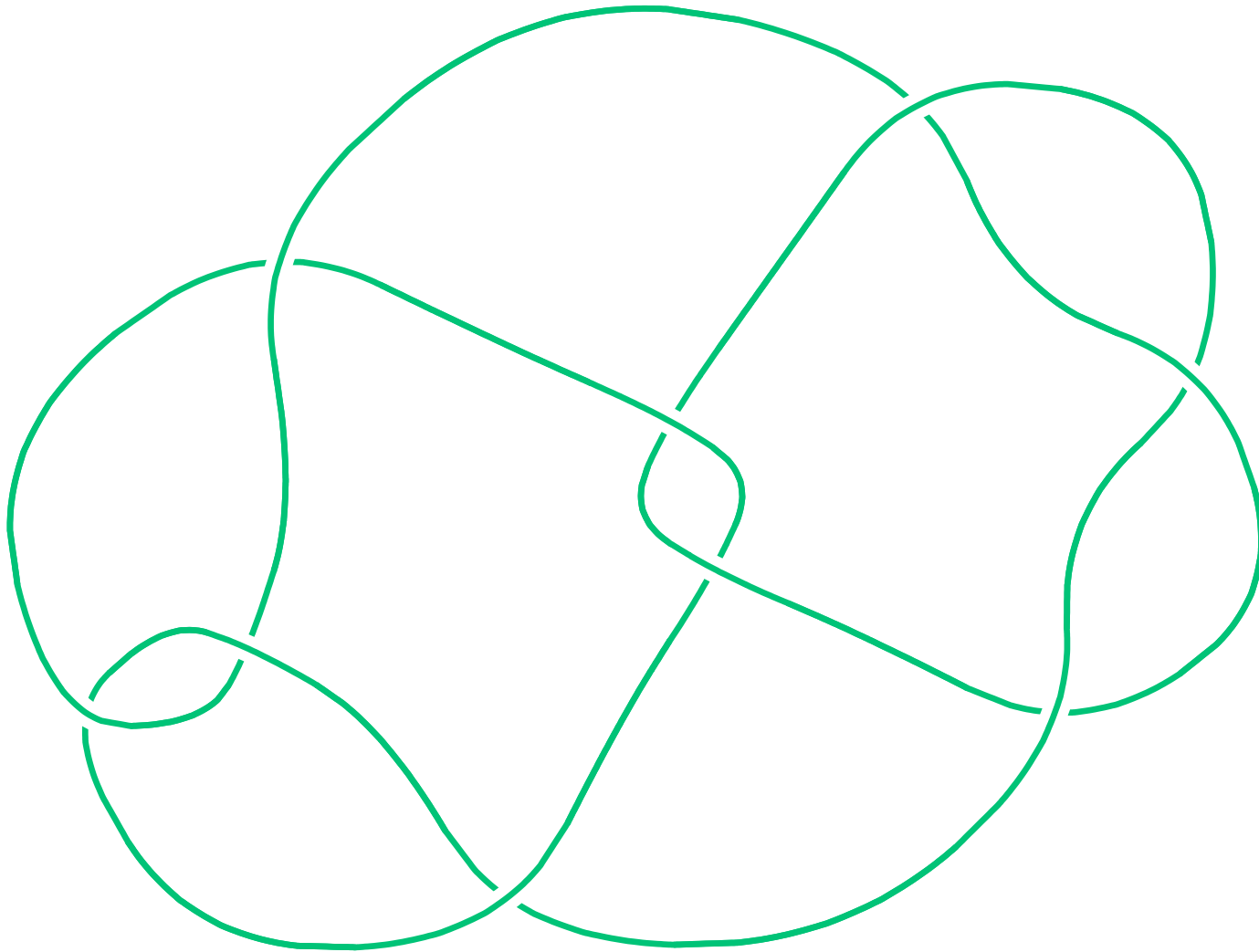
$\Leftrightarrow$

$H^1(M; \mathbb{Q}) \neq 0$

# Ejemplos

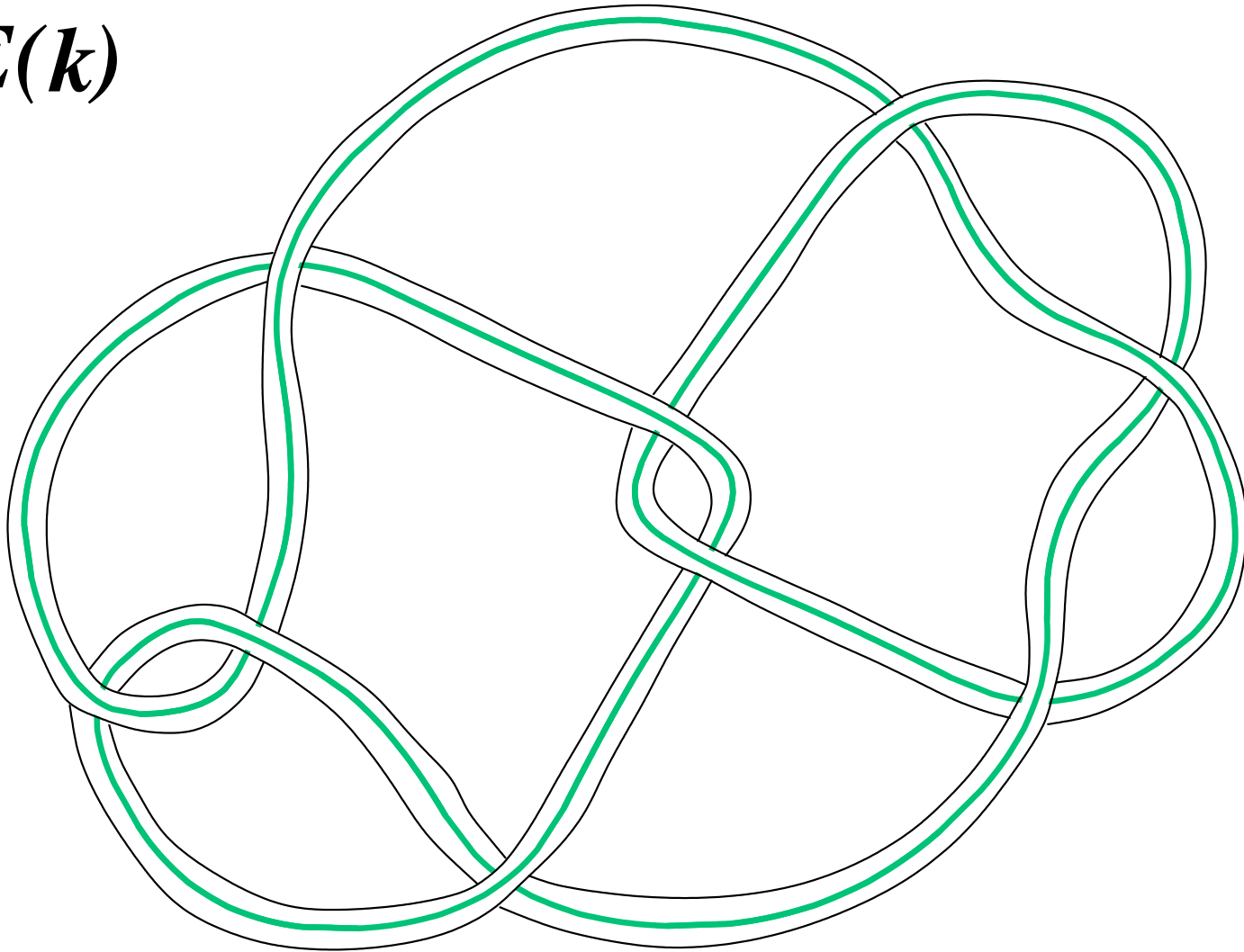


Sea  $k \subset S^3$  un nudo; o sea,  $k$  es una circunferencia encajada (diferenciable con diferencial no singular, PL, . . . ).

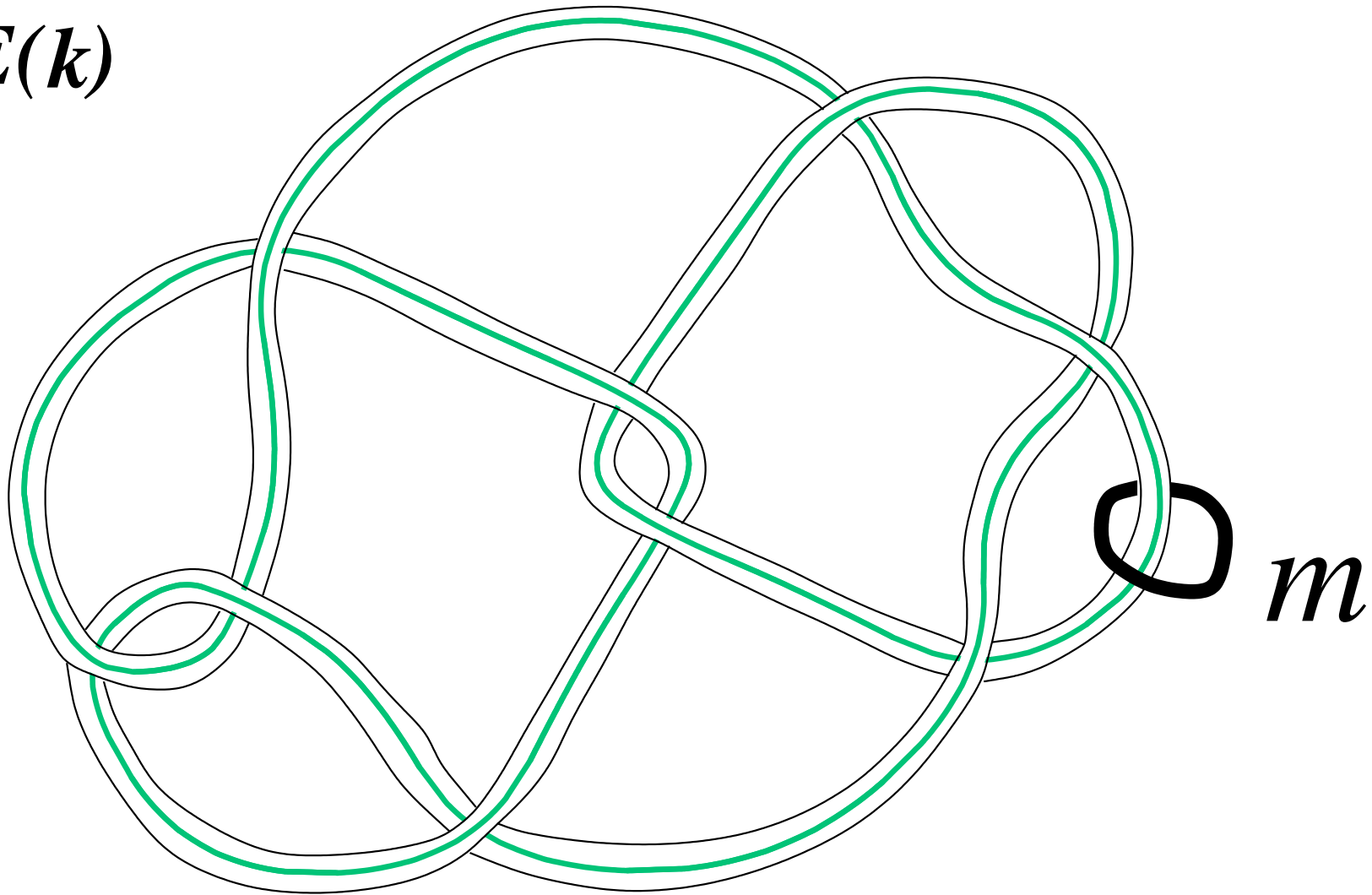


El exterior de  $k$ ,  $E(k) = \overline{S^3 - \mathcal{N}(k)}$ .

**$E(k)$**



$E(k)$



¡Entonces  $H_1(E(k)) \cong \mathbb{Z}$ !

(el generador de  $H_1(E(k))$  es un meridianito  $m$  de  $k$ )

Luego existe  $f : E(k) \rightarrow S^1$  esencial

(Se puede suponer que  $f$  es de Morse, por supuesto).

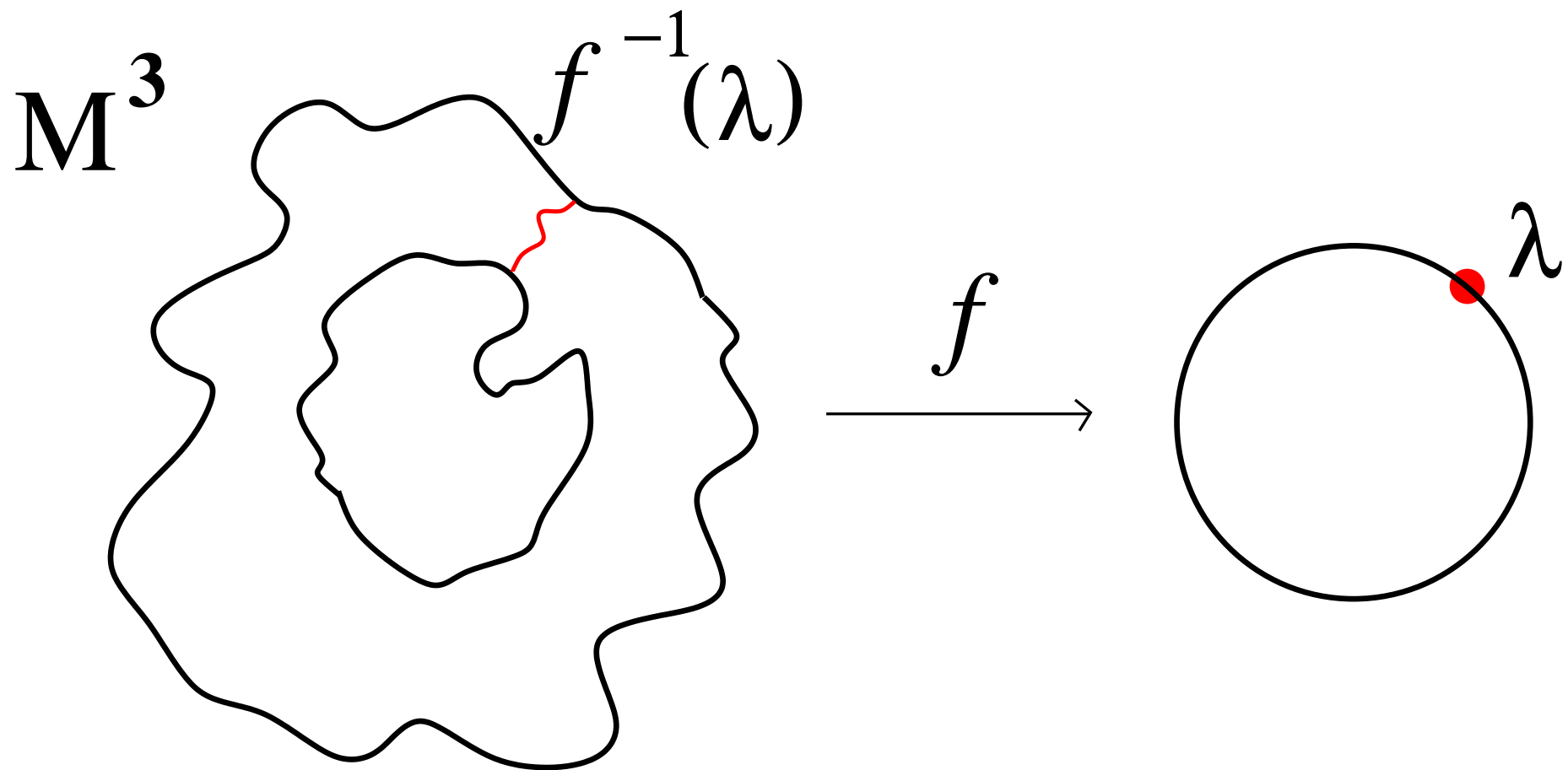
¿Cuántos puntos críticos tiene la función  $f : E(k) \rightarrow S^1$  ?

Pues, digamos, tiene un cierto número de puntos críticos de índice 1 y un número (el mismo número) de puntos críticos de índice 2.

Vamos, entonces, a encontrar 1-asas y 2-asas pegadas a. . .

Primero:

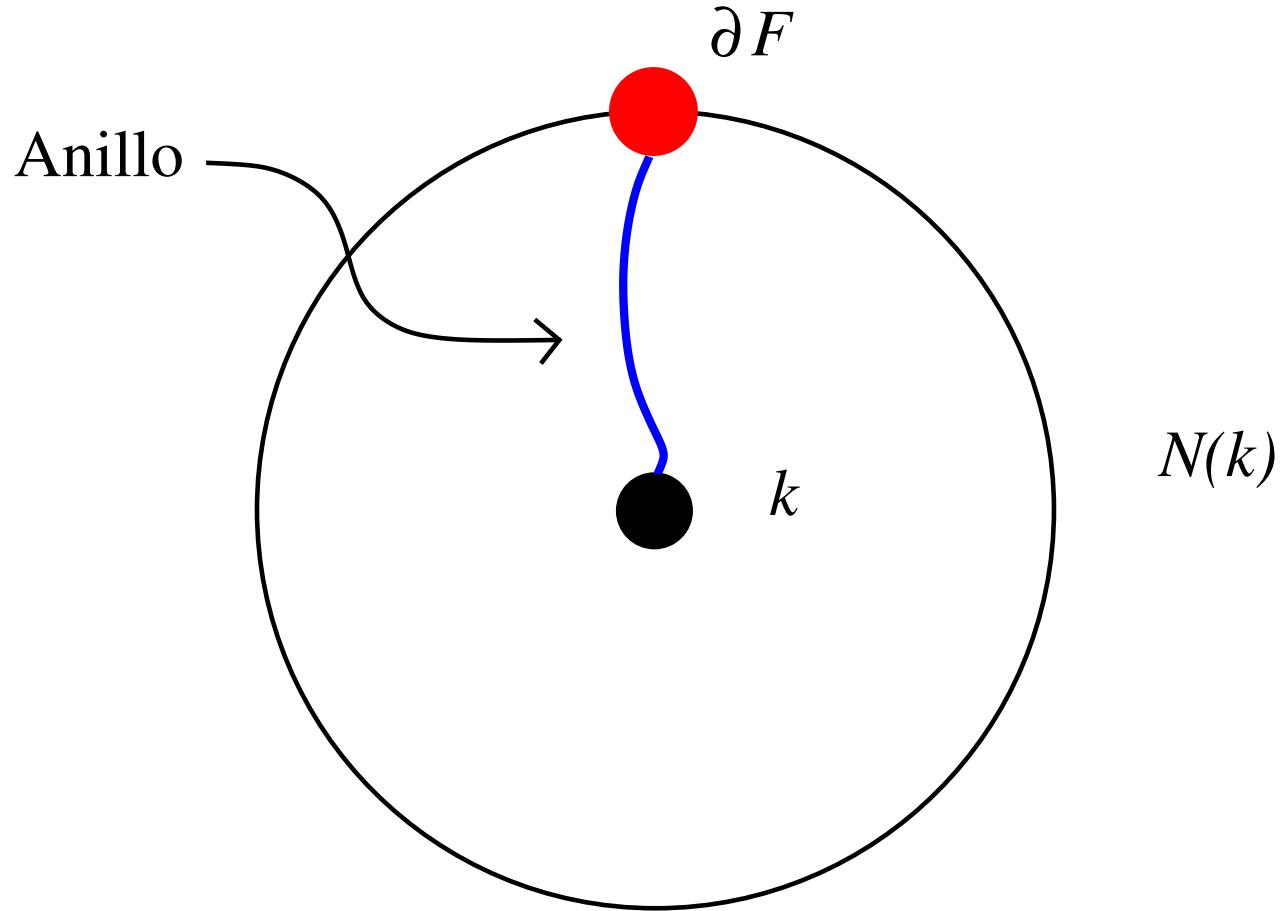
¿Como se ve una curva de nivel de  $f$  para un valor regular?



Si  $\lambda \in S^1$  es un valor regular de  $f$ , entonces  $f^{-1}(\lambda)$  es una superficie  $F$ .

Ahora  $\partial F = F \cap \partial E(k) \subset \partial E(k) = \partial \mathcal{N}(k)$ .

Dentro de  $\mathcal{N}(k)$  podemos encontrar un anillo cuyas fronteras son  $k$  y  $\partial F$ .

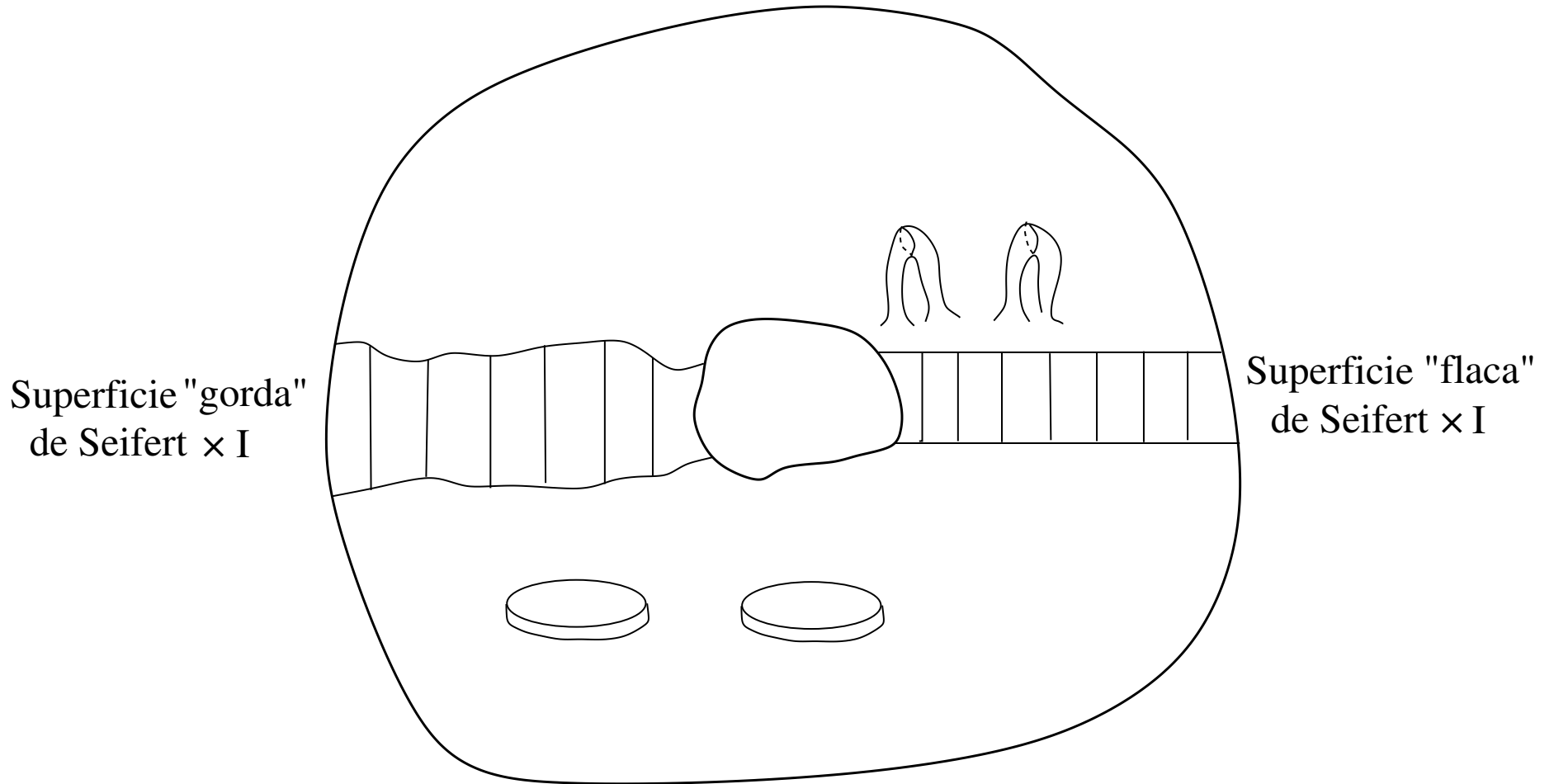


La superficie  $F'$  que es la unión de  $F$  y el anillo dentro de  $\mathcal{N}(k)$ , satisface

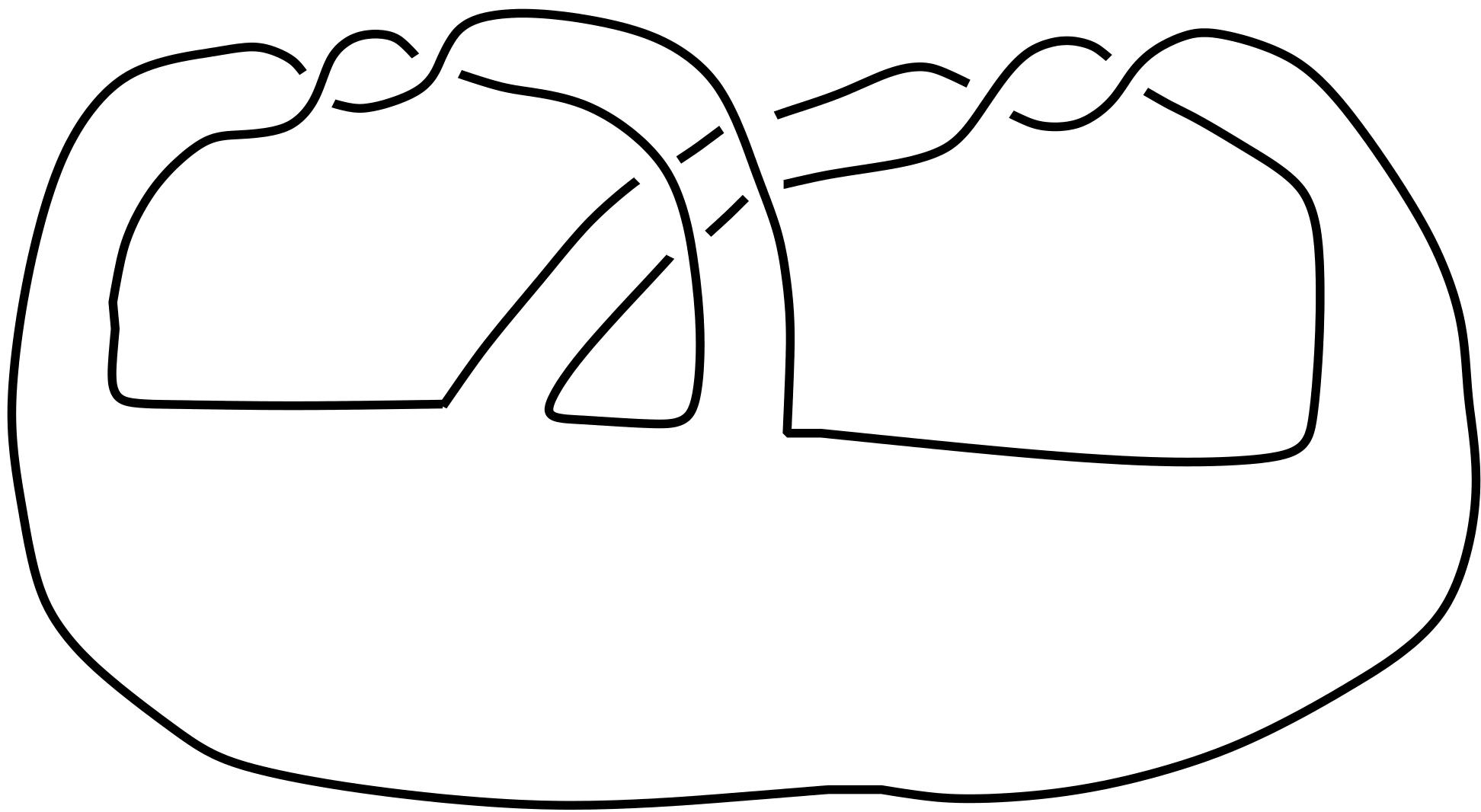
$$\partial F' = k$$

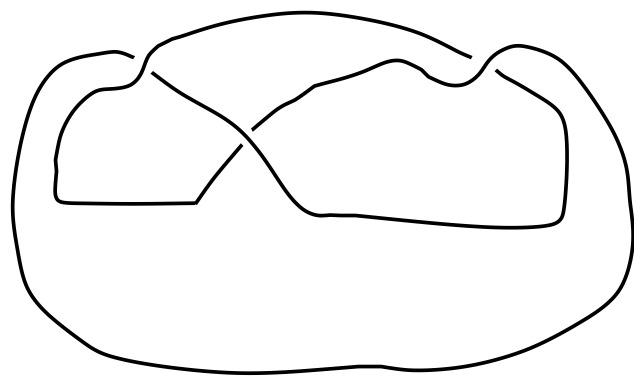
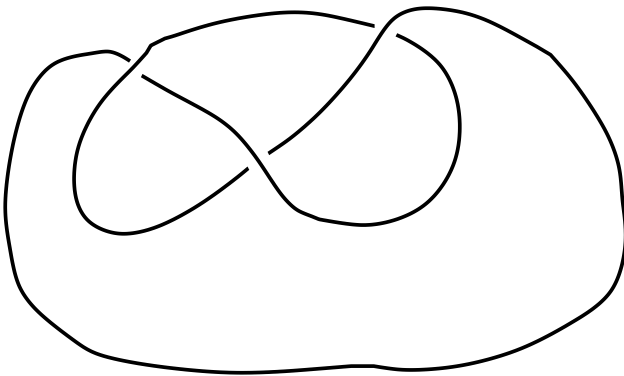
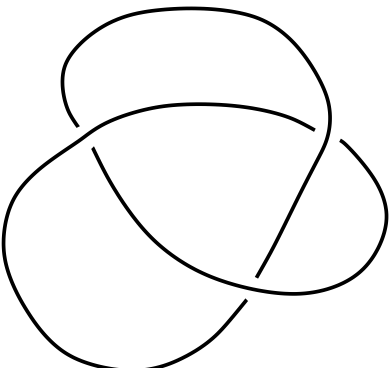
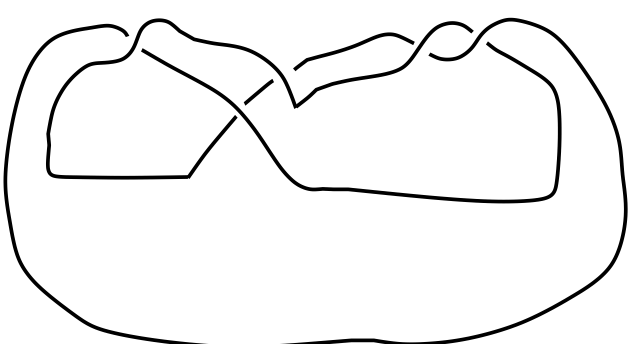
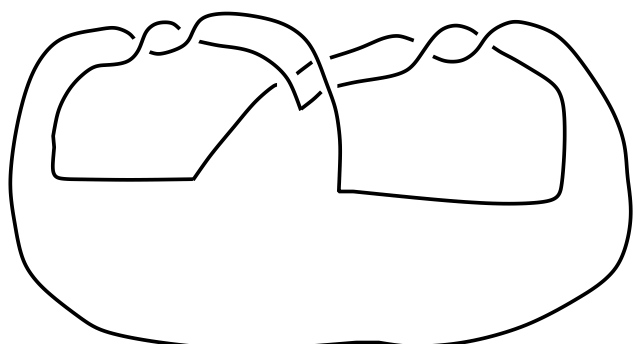
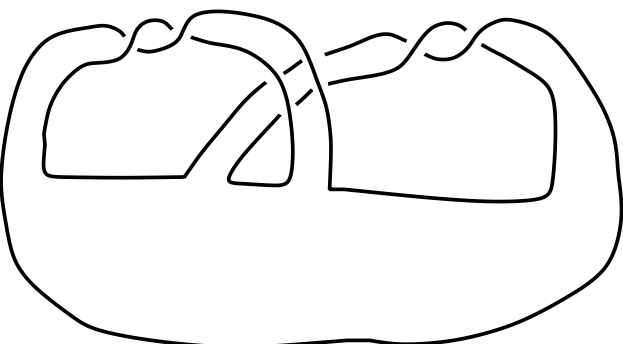
Se dice que  $F'$  es una superficie de Seifert para  $k$ .

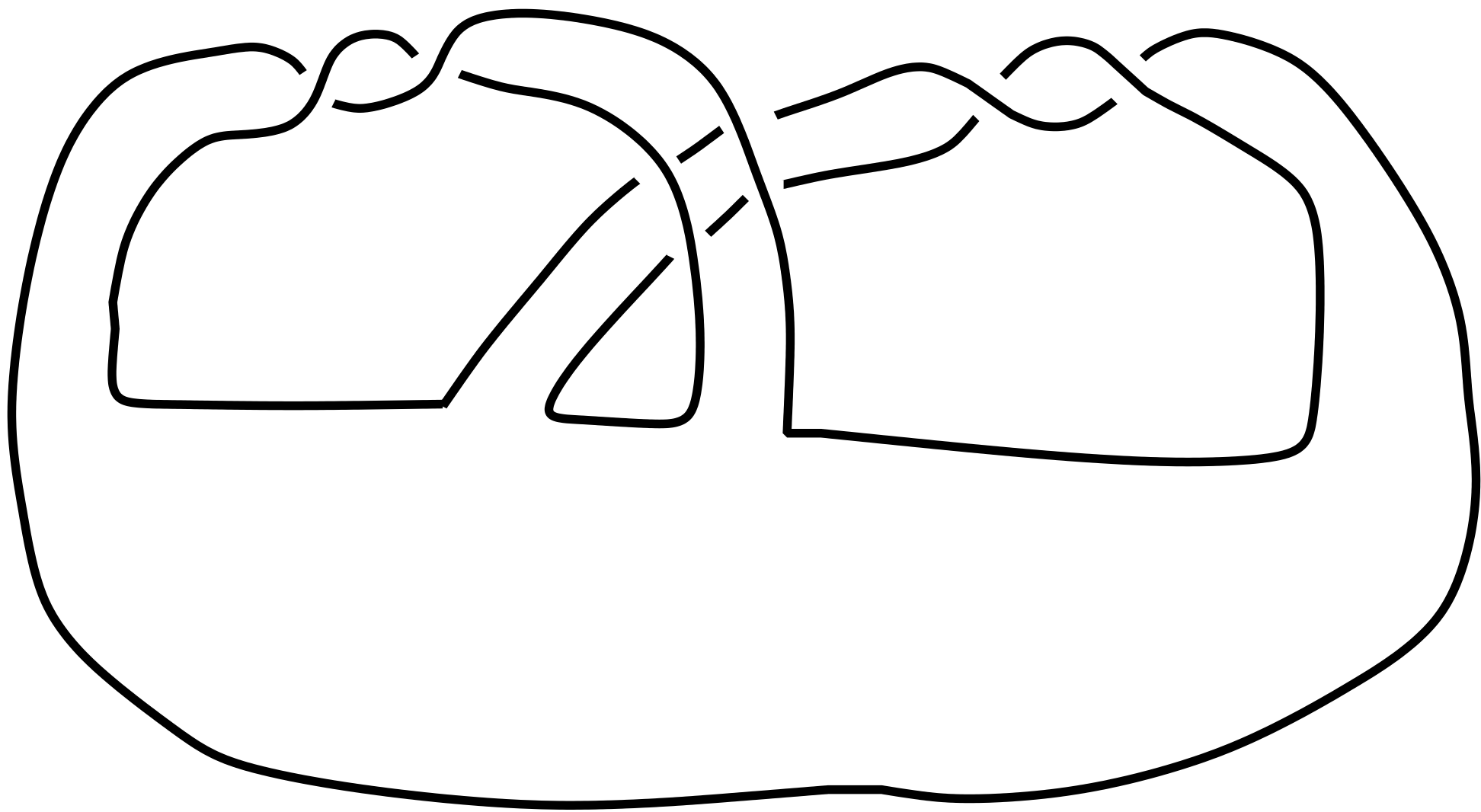
$E(k)$

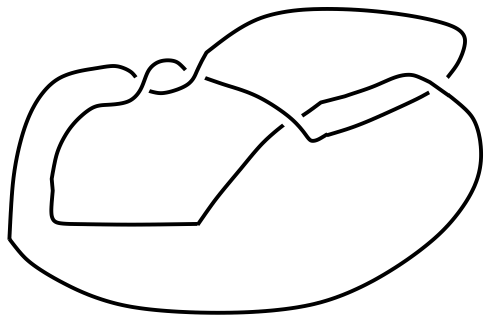
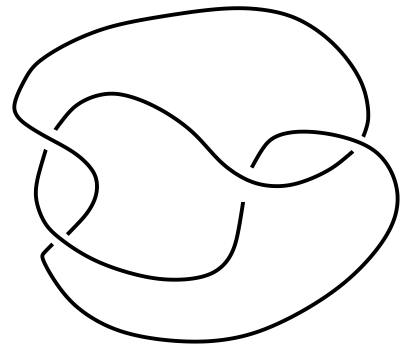
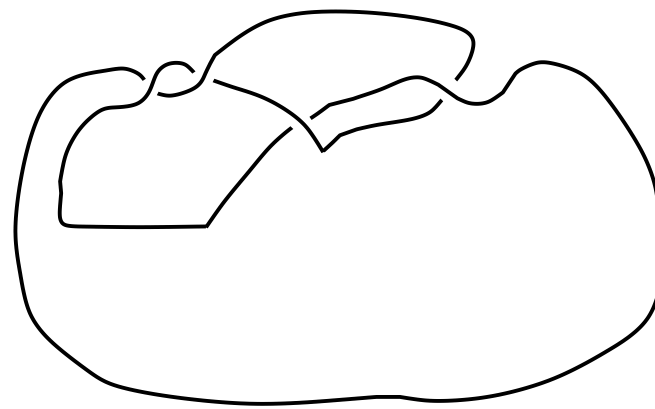
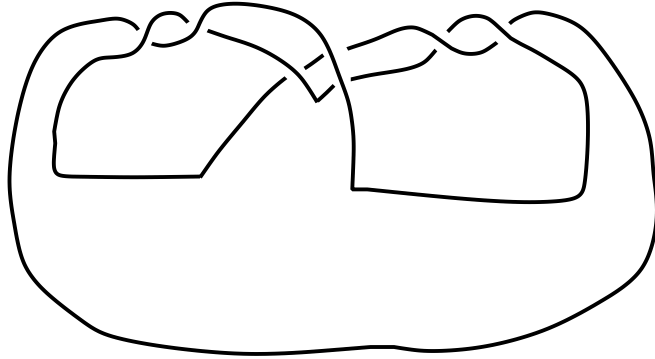
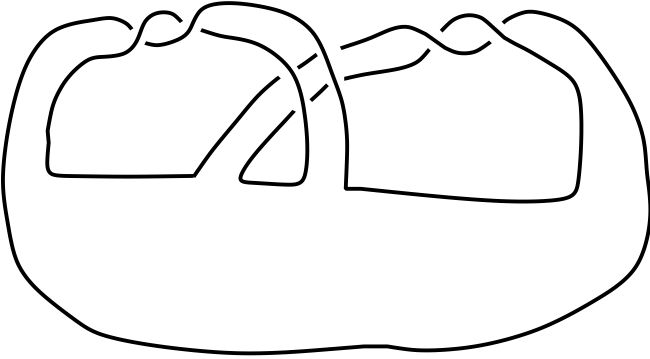












## 1er. caso

Supongamos que la función  $f : E(k) \rightarrow S^1$  no tiene puntos críticos.

Luego, si  $A \subset S^1$  es un intervalo, entonces  $f^{-1}(A) \cong F \times A$ .

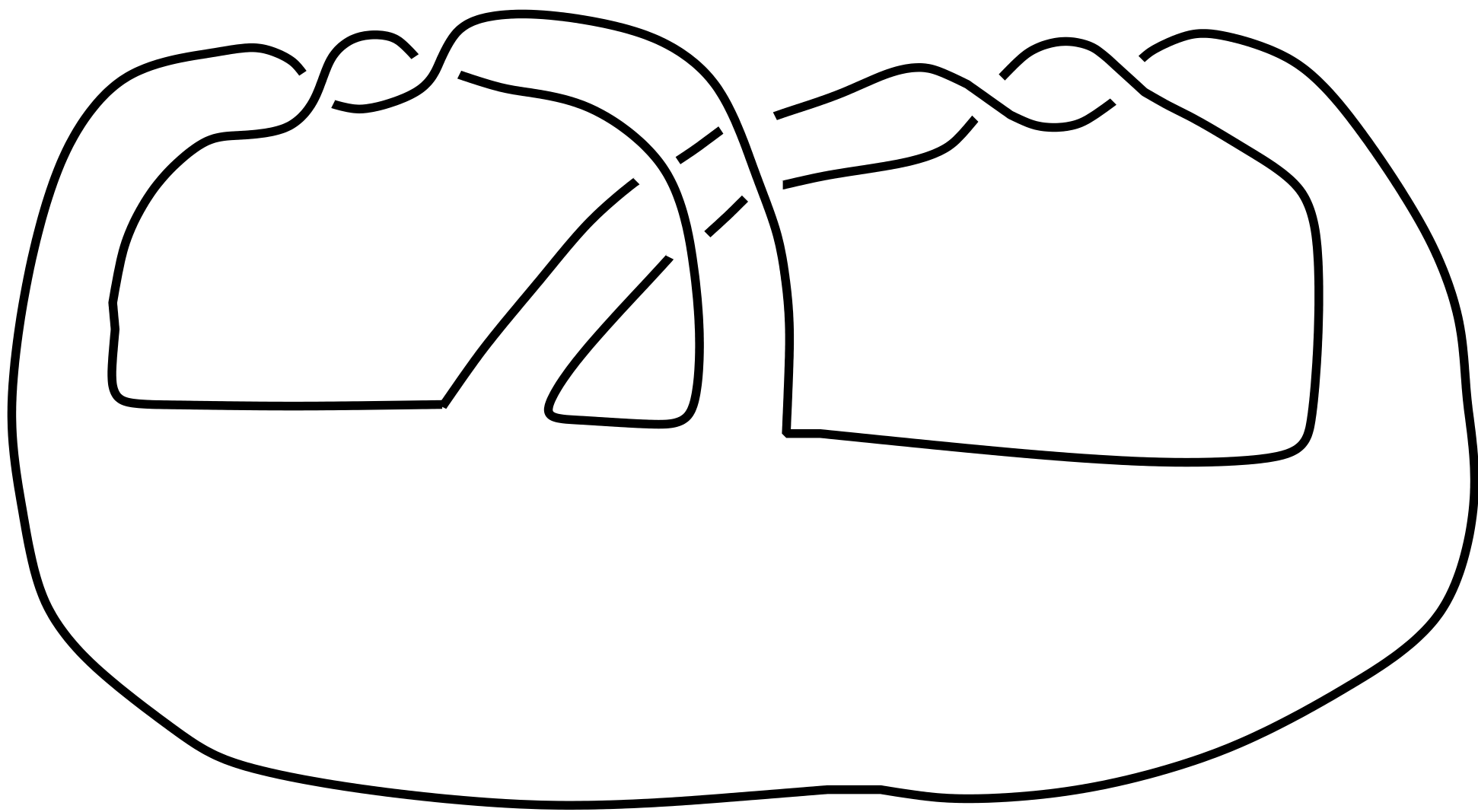
O sea,

$$E(k) \cong \frac{F \times [0, 1]}{(x, 0) \sim (h(x), 1) \text{ para } x \in F}$$

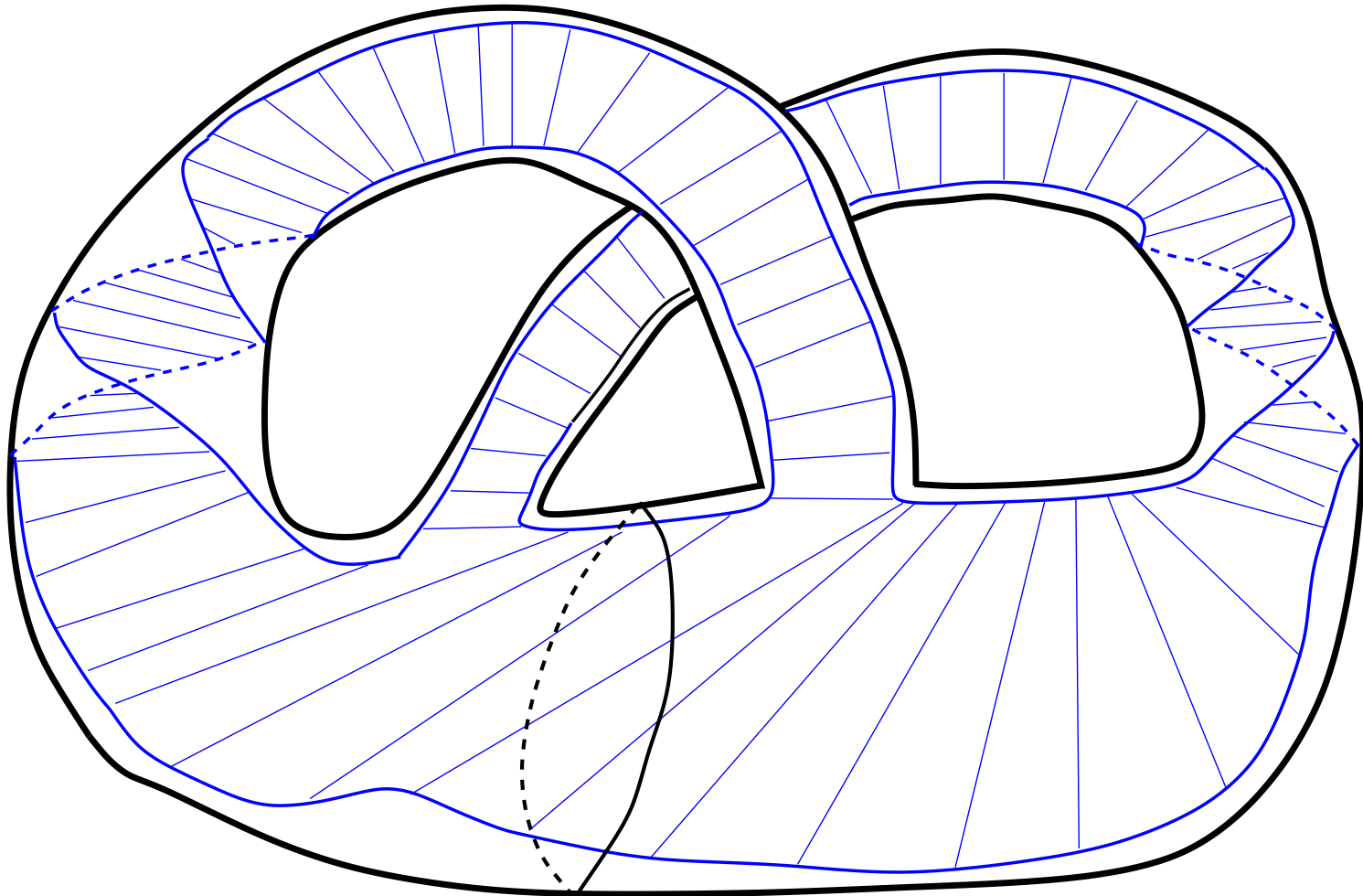
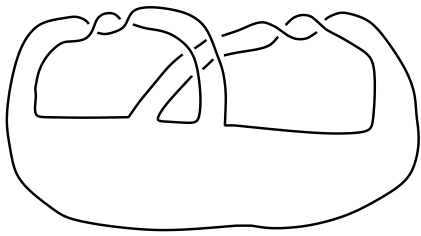
es un haz de superficies sobre  $S^1$  con fibra  $F$

( $h : F \rightarrow F$  es algún homeomorfismo).

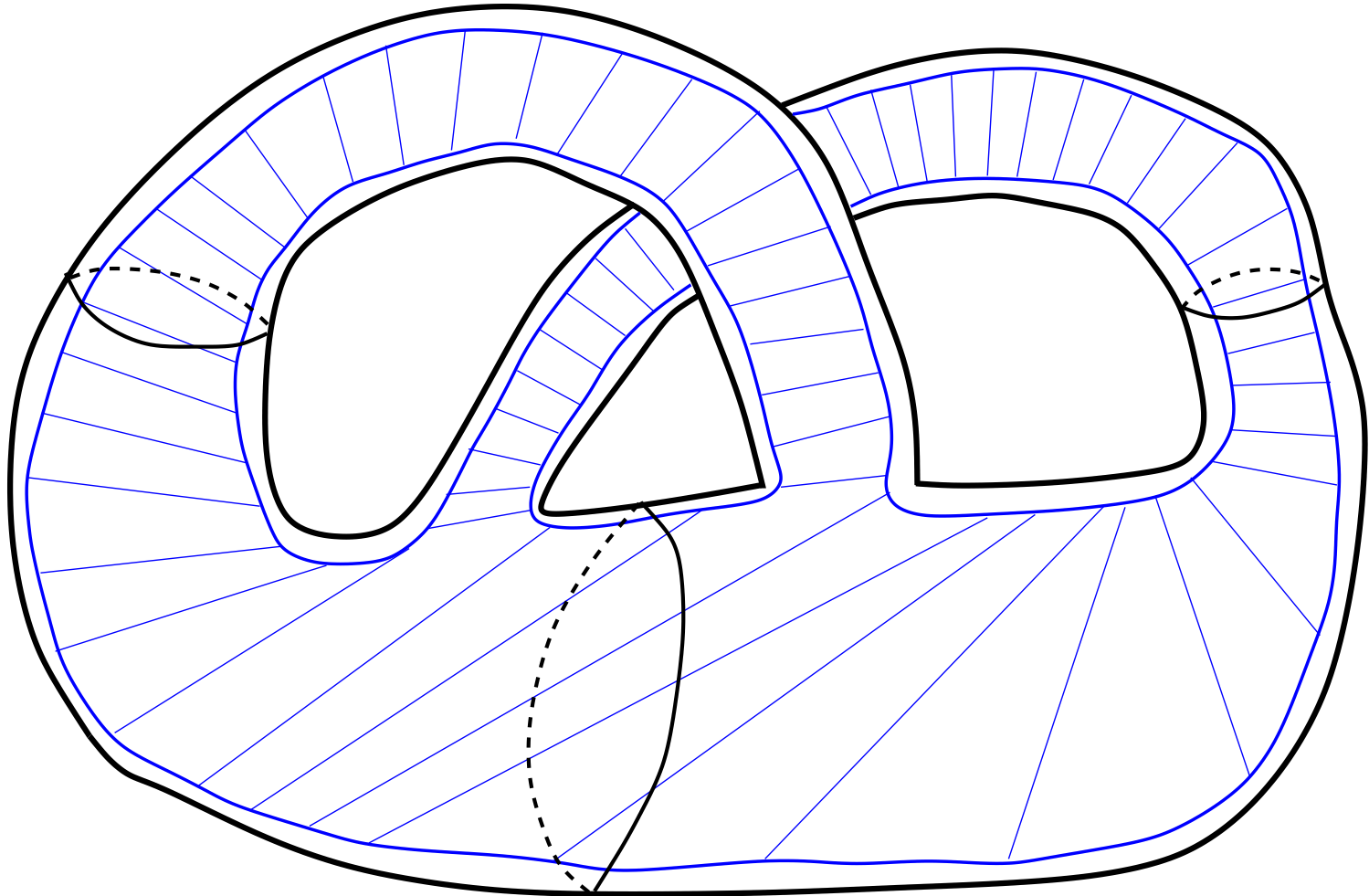
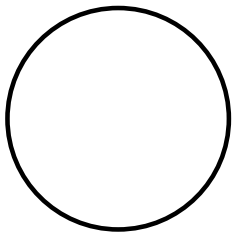
En este caso se dice que  $k$  es un *nudo fibrado*.



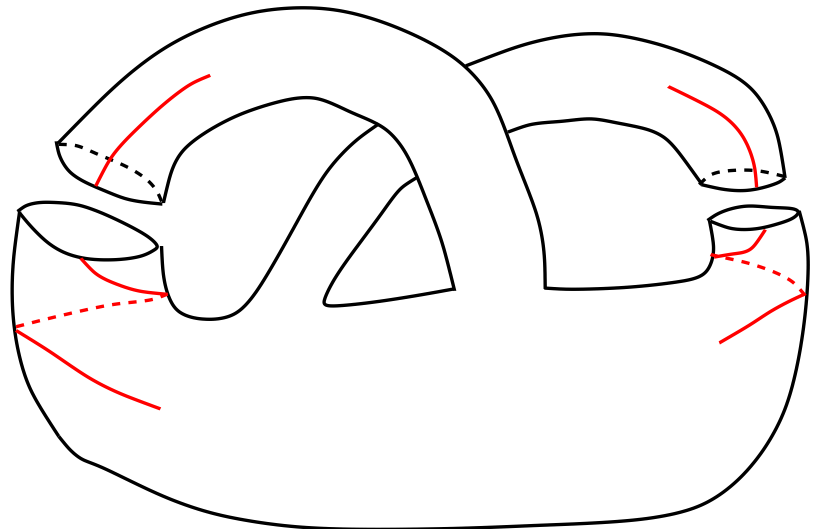
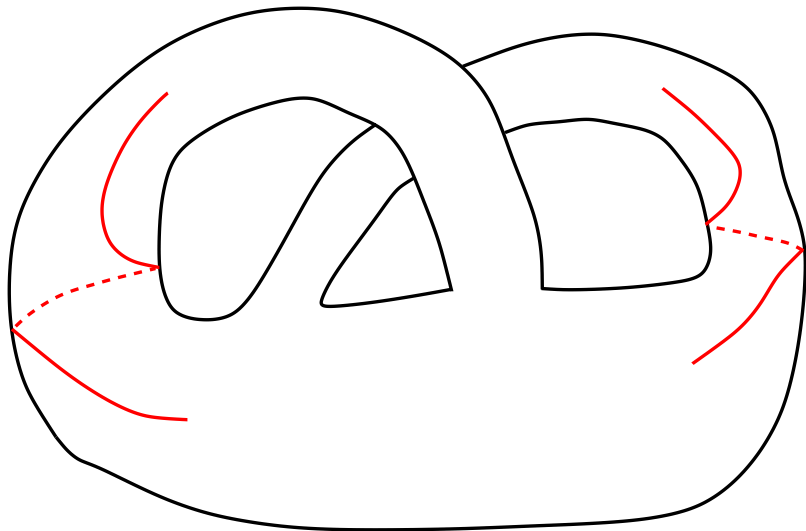
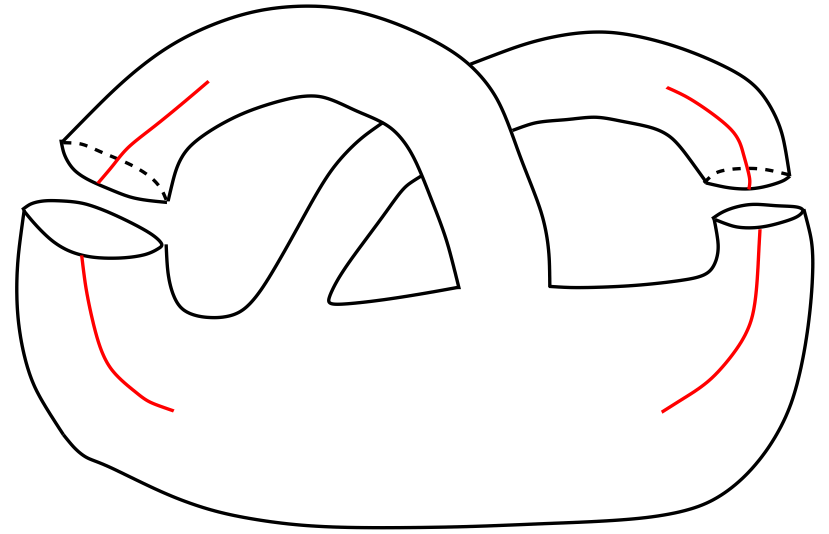
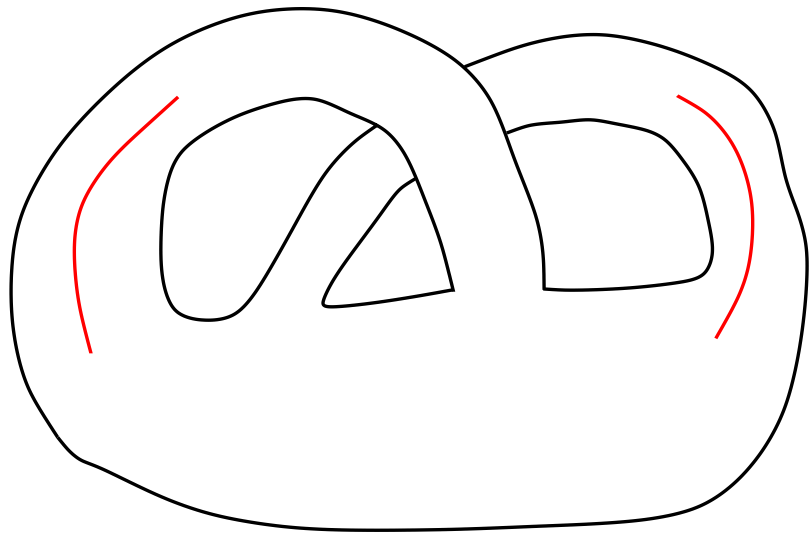
está fibrado.

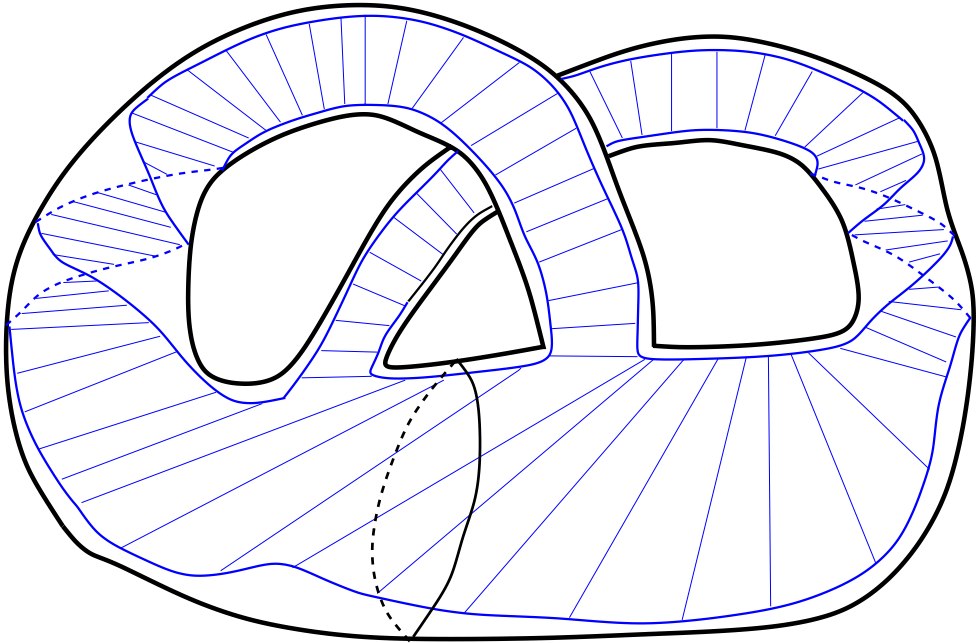
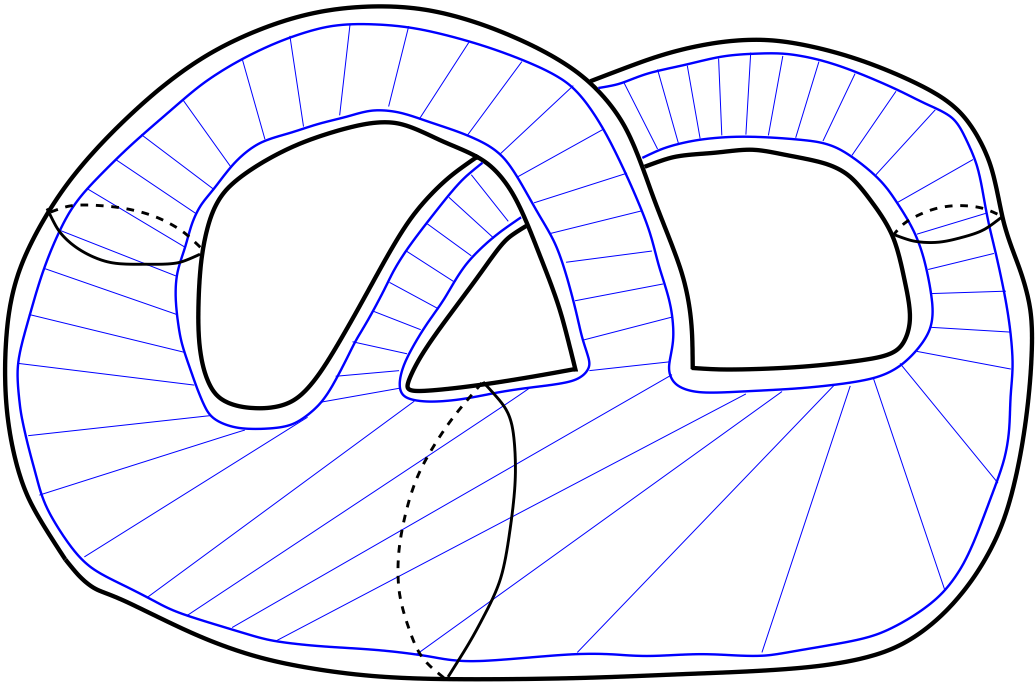
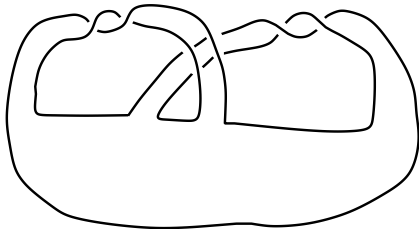
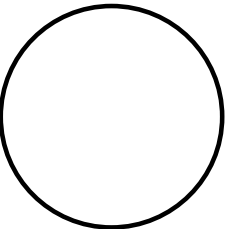


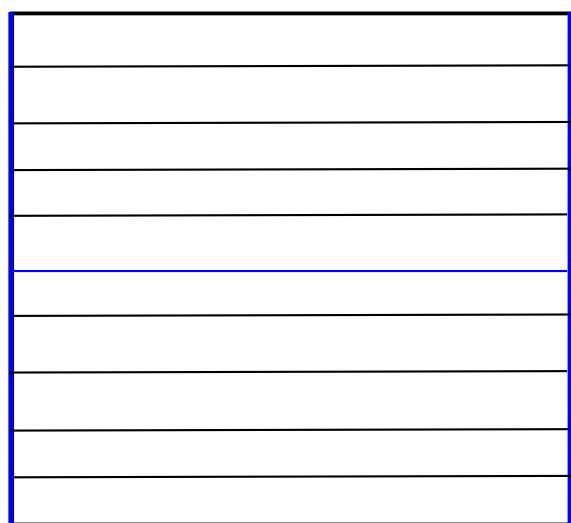
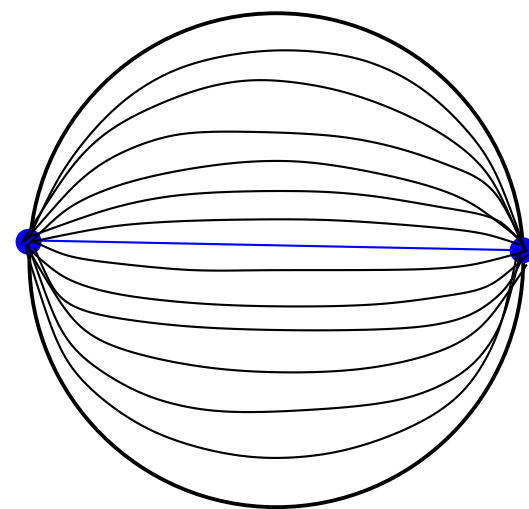
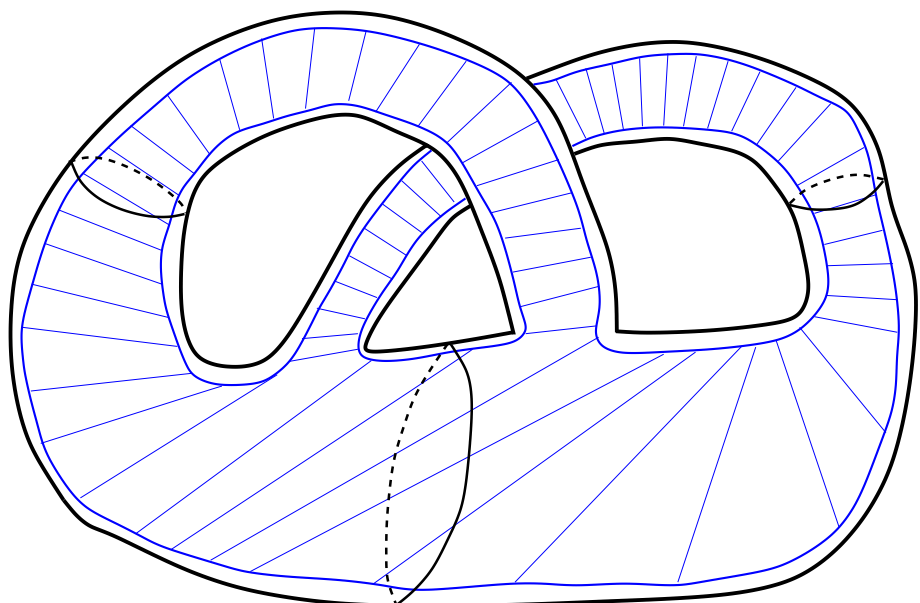
Una "vecindad" de  $F'$



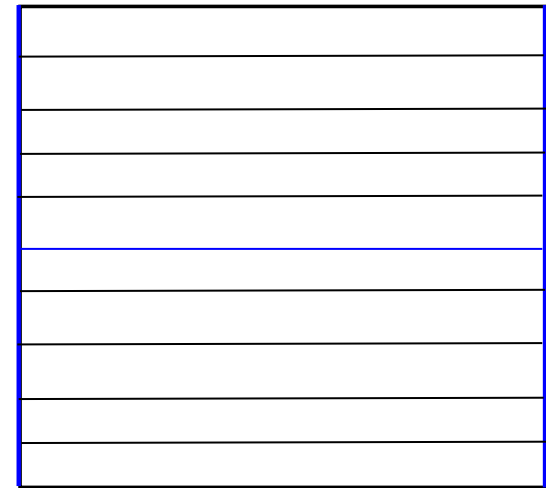
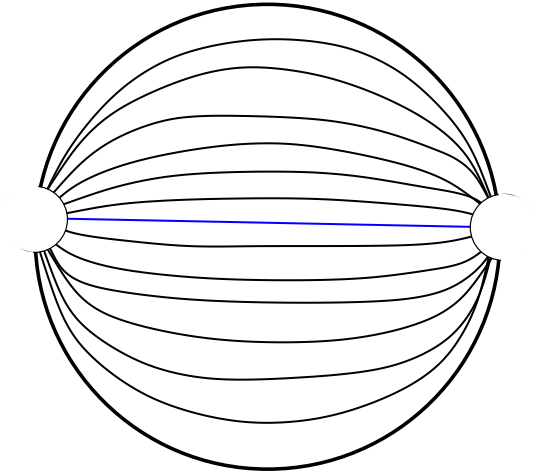
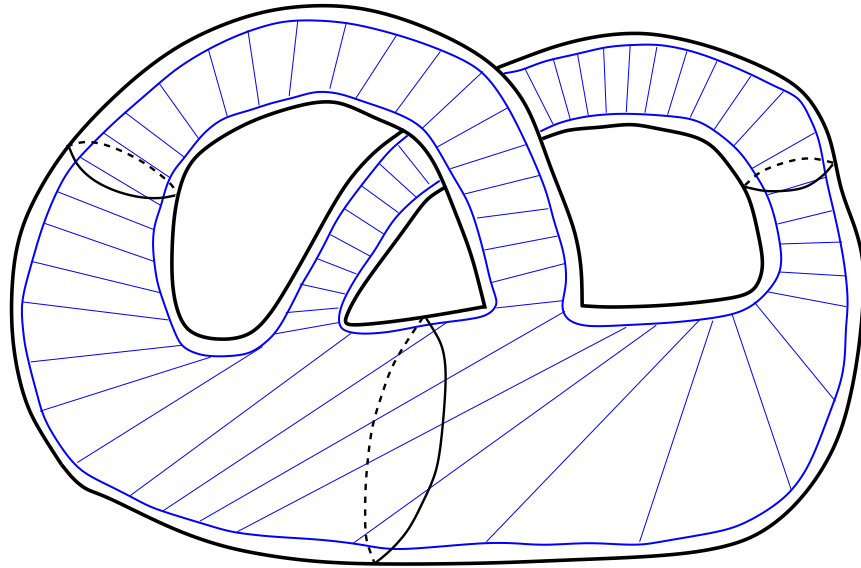


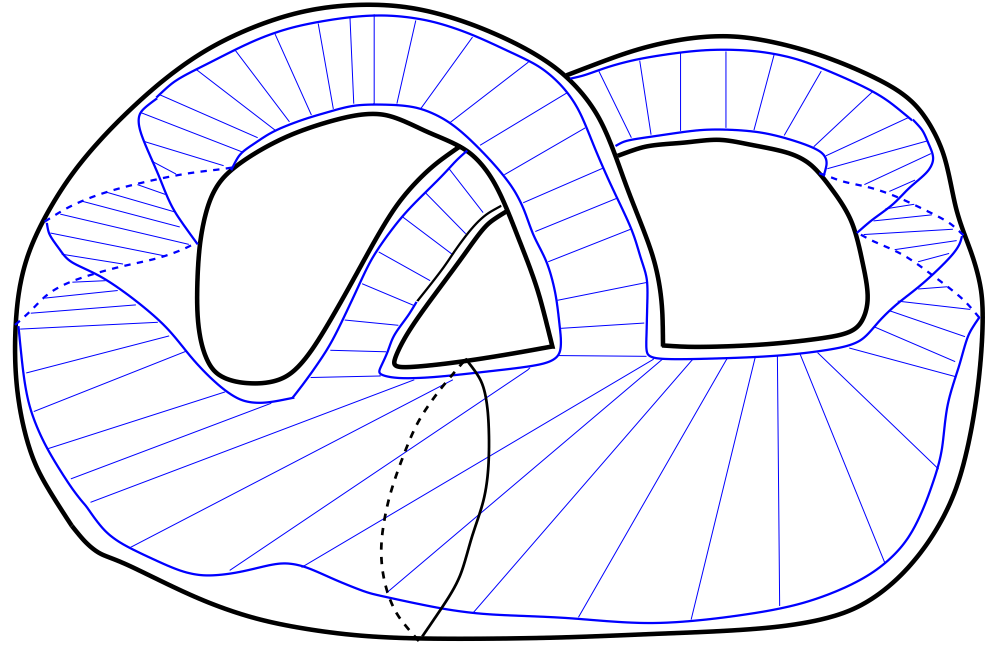
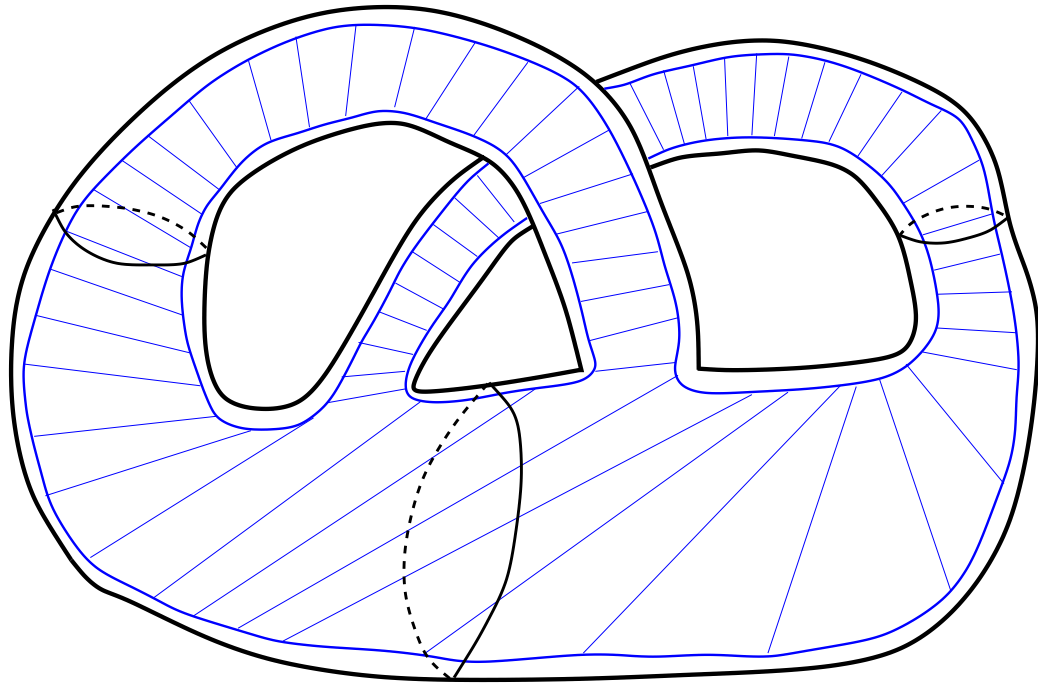




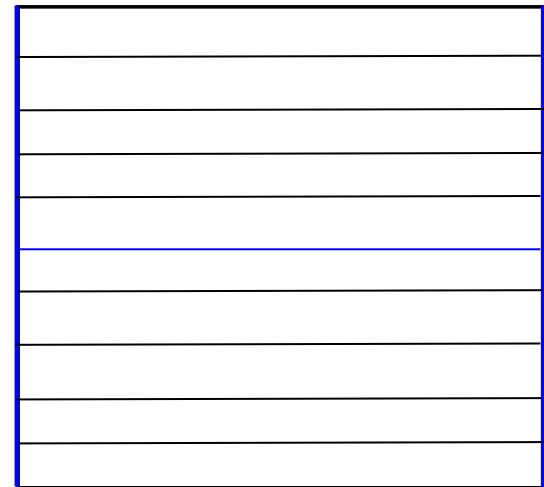
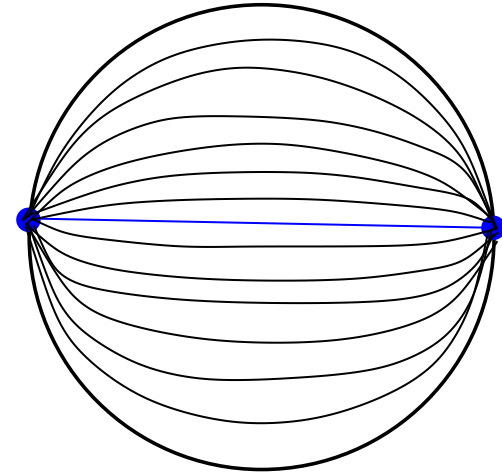
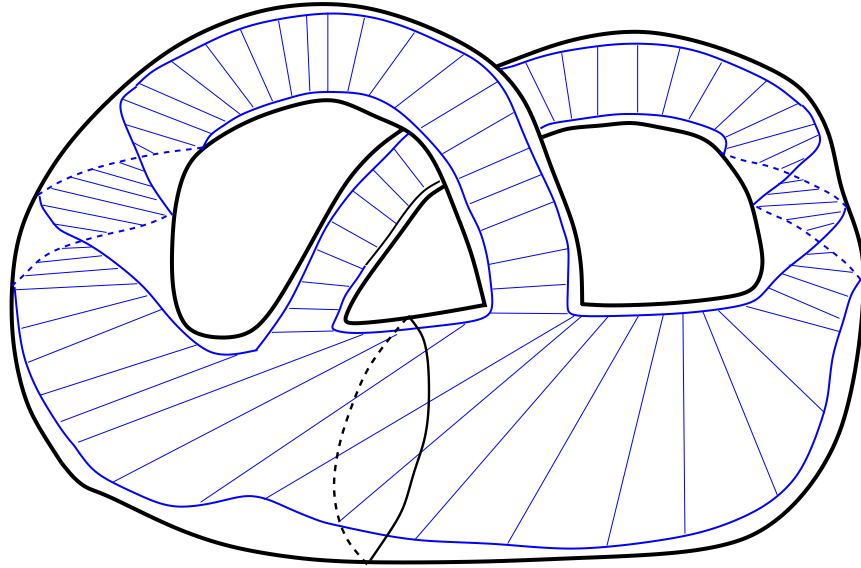


# En el exterior $E$ (nudo trivial)

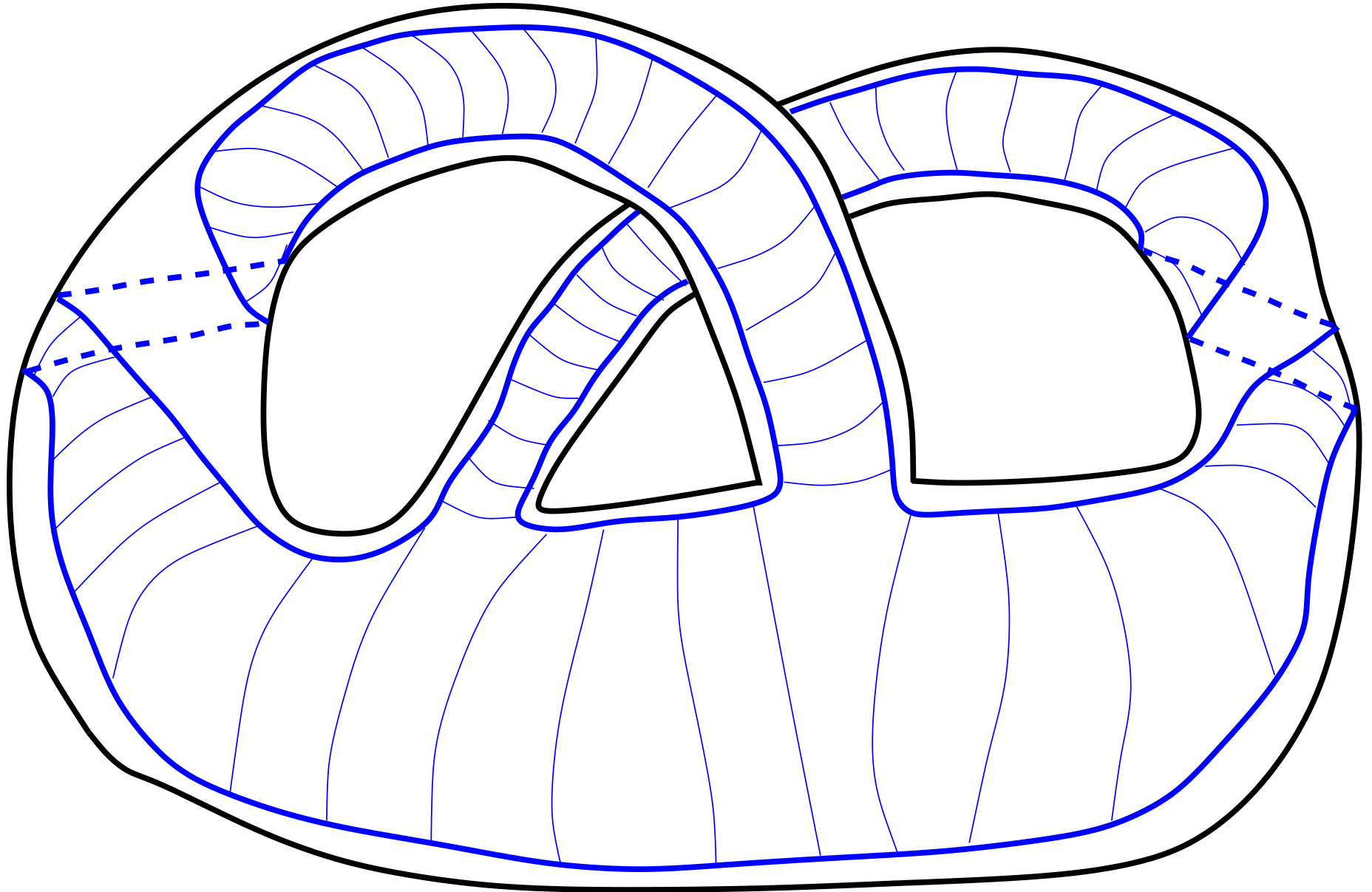




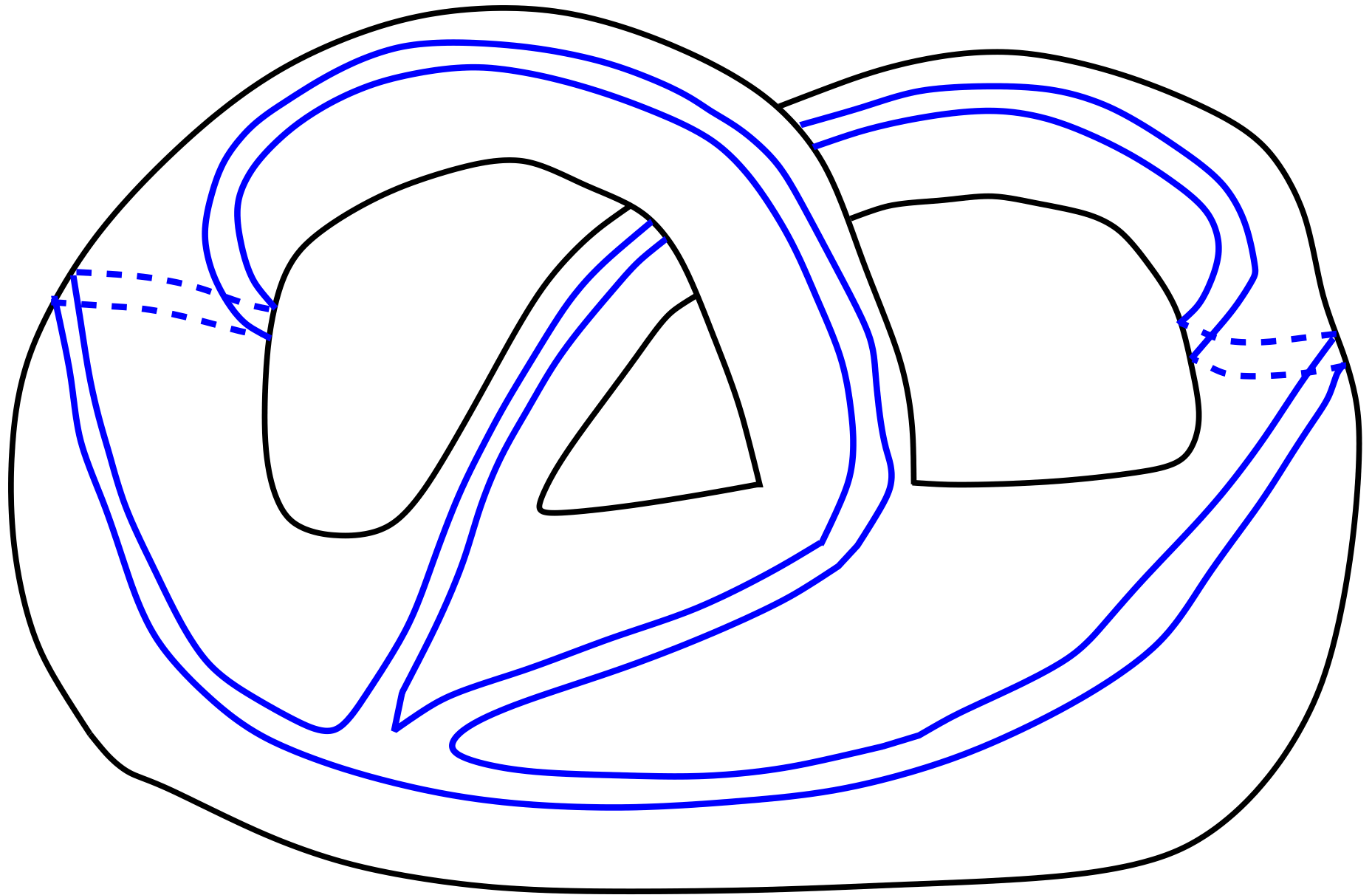
Cualquiera de las superficies de la foliación determina a ésta



En particular cualquiera de las dos superficies que viven en la frontera del cubo con asas:



(más flaquita)





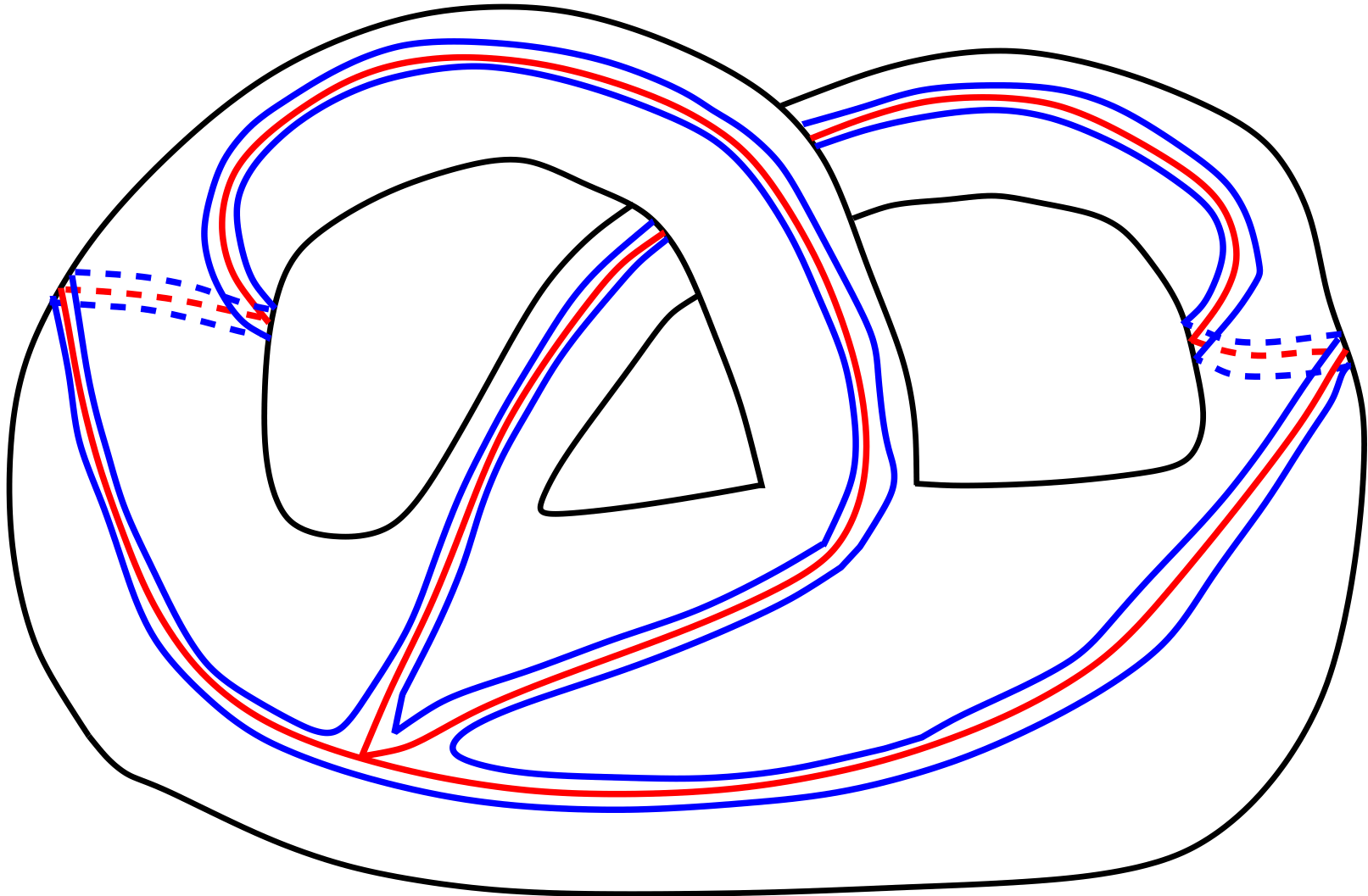
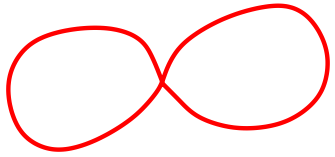
Ahora la superficie  $F$  queda determinada por una espina de  $F$  sobre la frontera del cubo con asas.

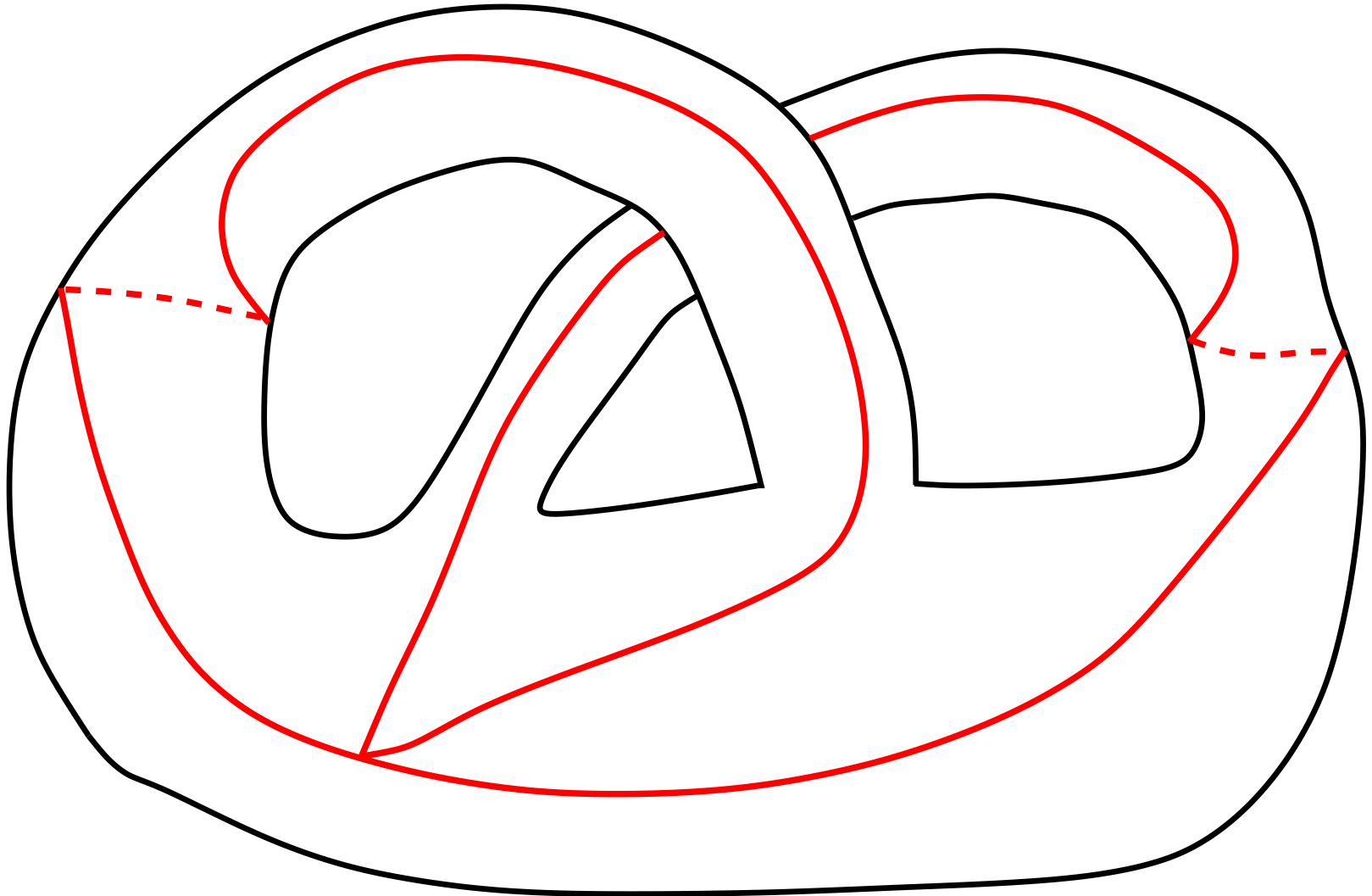
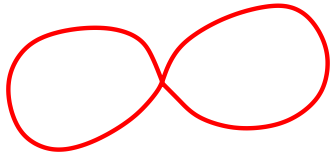


**Definición.** Sea  $X$  un espacio. Una *espin*a de  $X$  es un subespacio cerrado  $Y \subset X$  tal que  $Y$  es retracto por deformación de  $X$ .

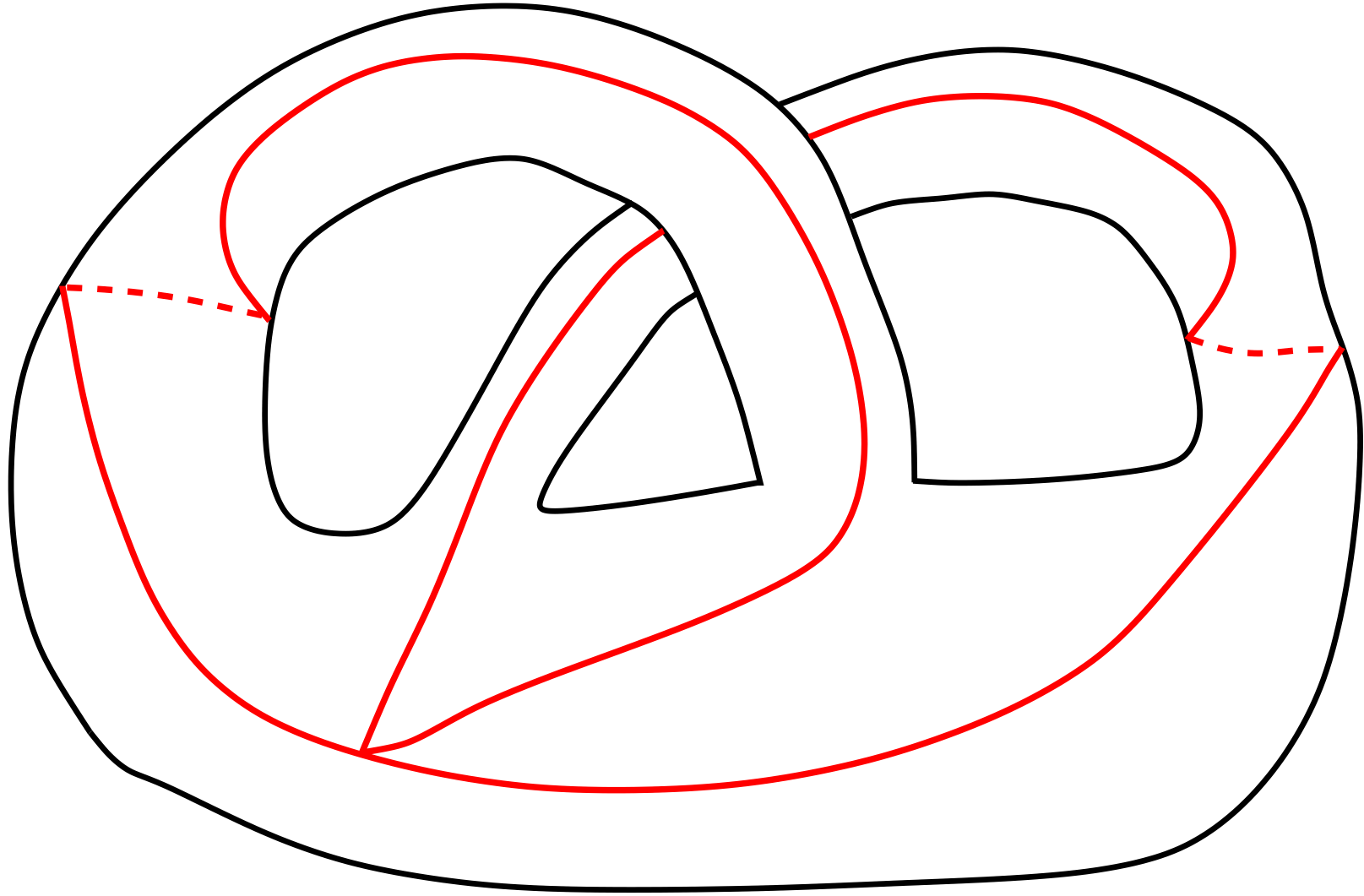
(en particular la inclusión induce un isomorfismo  $\pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$  y, frecuentemente, esto nos da una condición suficiente)

Ahora la superficie  $F$  queda determinada por una espina  $\Gamma$  de  $F$  sobre la frontera del cubo con asas.

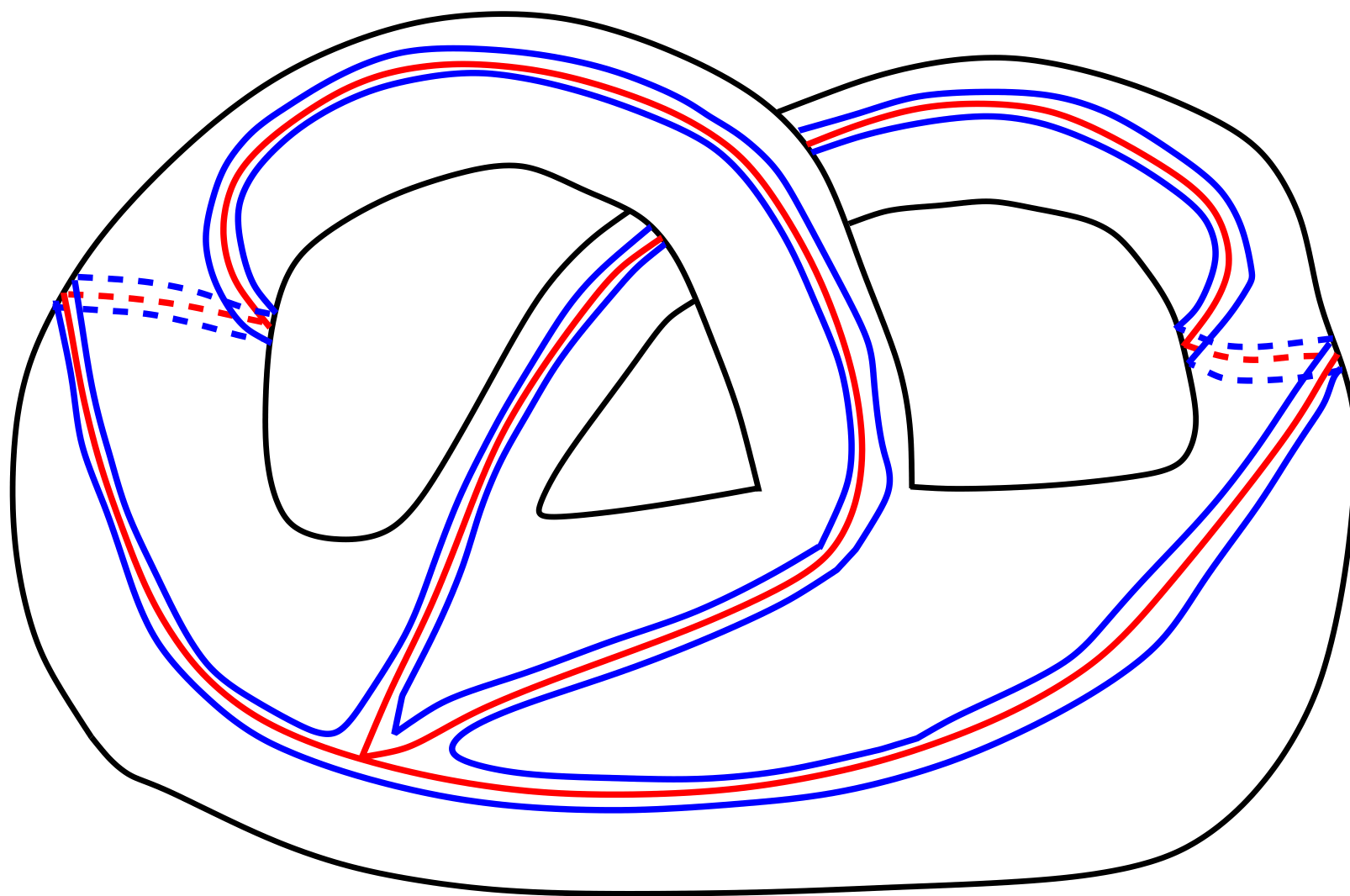




Ahora una vecindad de la gráfica  $\Gamma$  en la frontera del cubo con asas

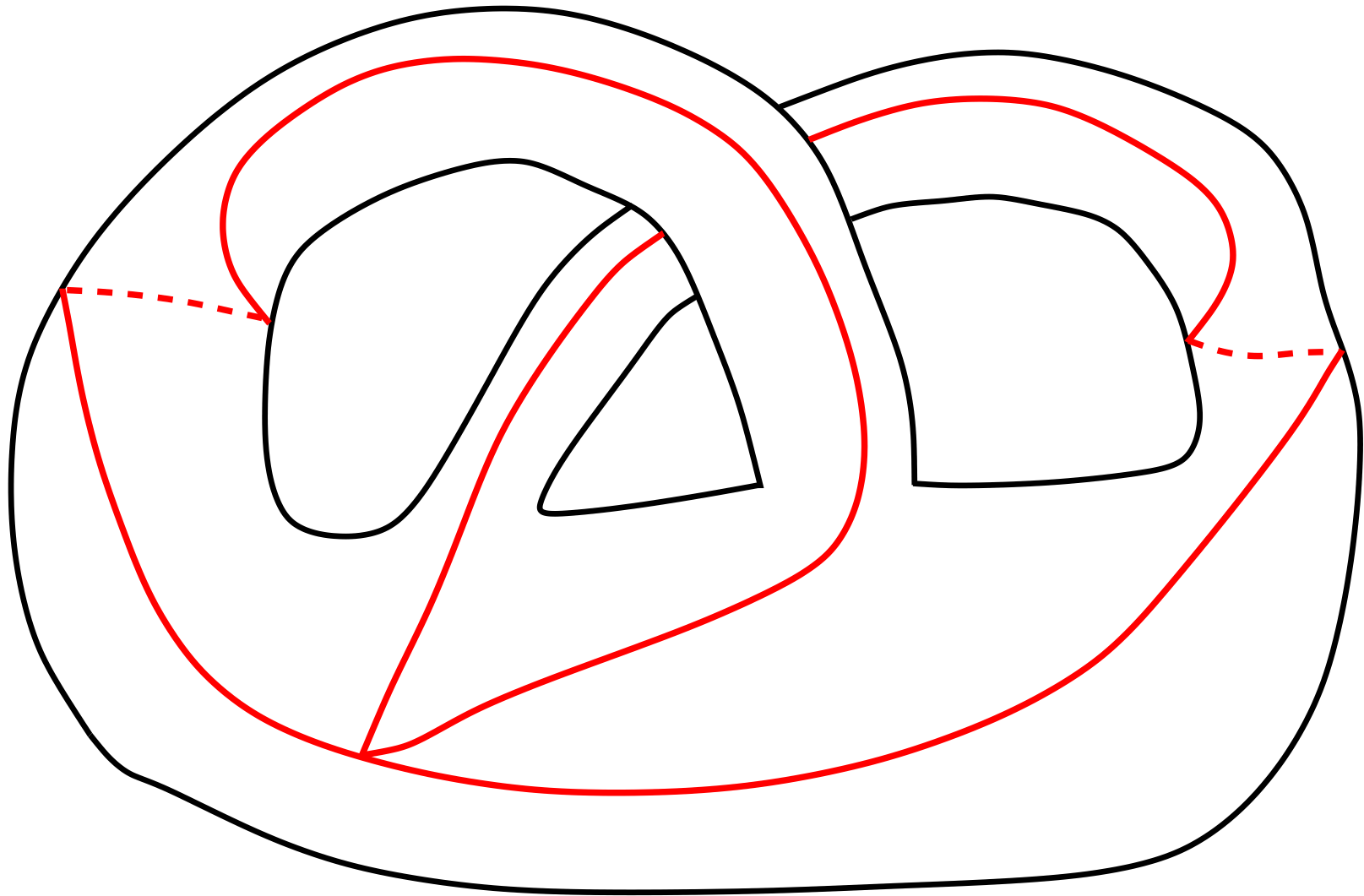


se ve como:

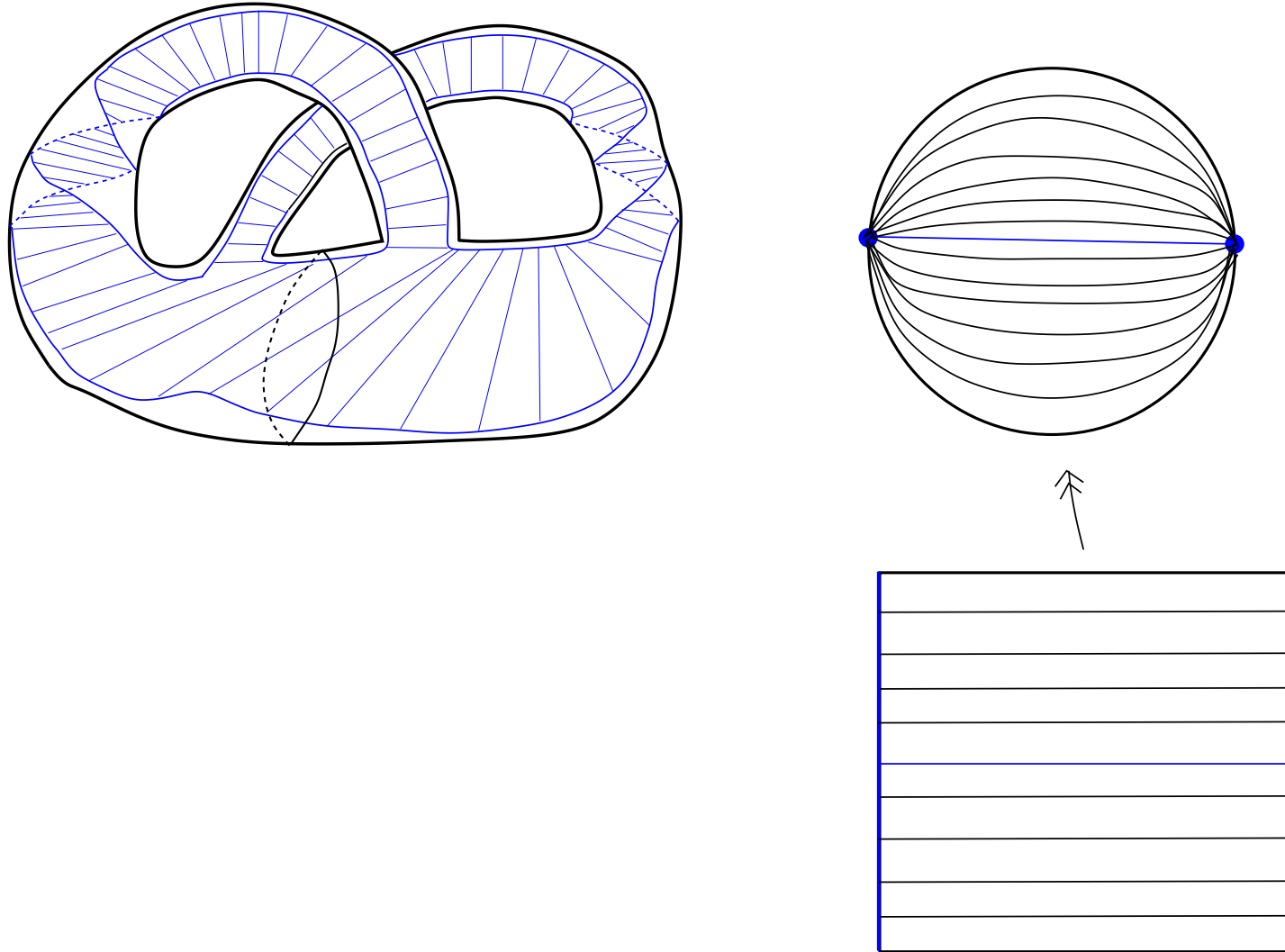


¡Recuperamos a  $F$  del encaje de  $\Gamma$  en la frontera del cubo con asas!

Nótese que, como el cubo con asas es una vecindad de  $F$ , la misma  $F$  es una espina del cubo con asas; luego la gráfica  $\Gamma$  también es una espina del cubo con asas:



**Observación.** Sean  $V$  un cubo con asas,  $\Gamma \subset \partial V$  una gráfica y  $F = \mathcal{N}(\Gamma) \cap \partial(V)$  una vecindad regular de  $\Gamma$  en  $\partial V$ . Si  $\Gamma$  es una espina de  $V$ , entonces obtenemos una estructura “producto” para  $V$  como antes, con fibra  $F$ .





**Proposición.** Sea  $V$  un cubo con  $g$  asas y  $\Gamma \subset \partial V$  una gráfica.

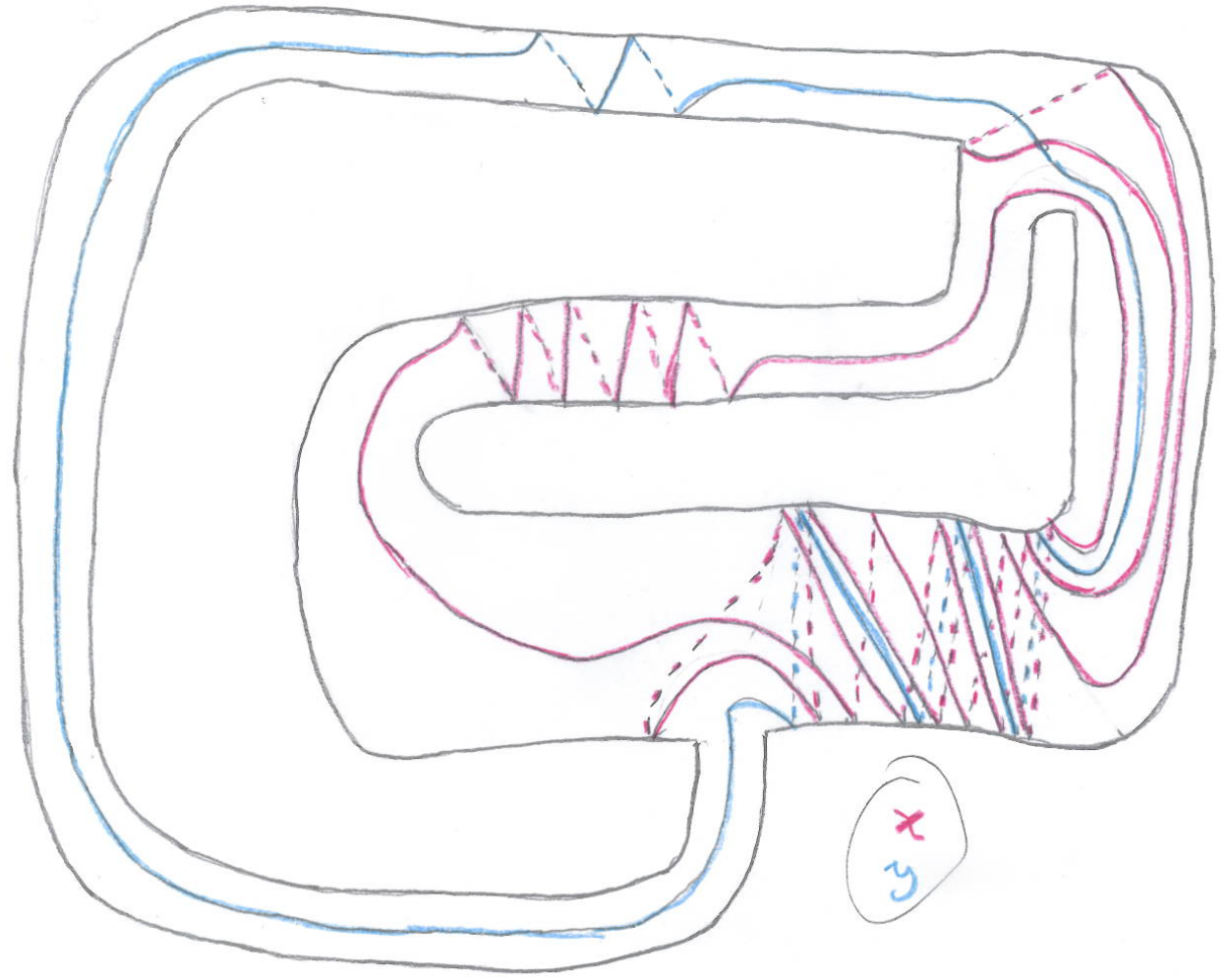
Entonces  $\Gamma$  es una espina para  $V$  si y sólo si la inclusión induce un isomorfismo  $\pi_1(\Gamma) \rightarrow \pi_1(V)$ .

(El hecho topológico detrás de esta proposición es el siguiente:

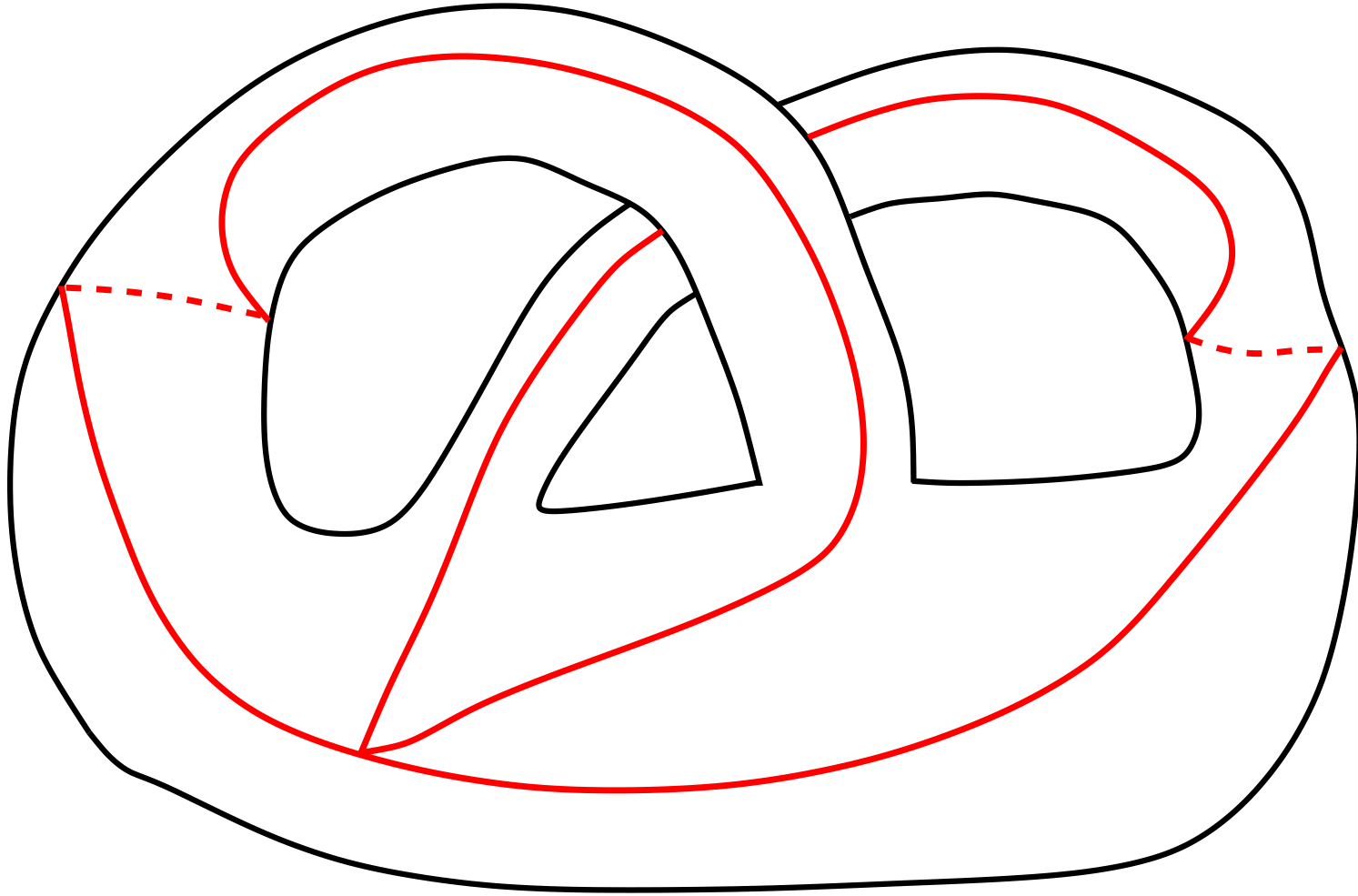
**Teorema.**  $V$  cubo con  $g$  asas,  $F = \pi_1(V)$  el grupo libre de rango  $g$ .

Si  $\varphi : F \rightarrow F$  es un isomorfismo, entonces, existe  $h : V \rightarrow V$  homeomorfismo tal que  $h_{\#} = \varphi$ . )

Tsutsu<sub>3</sub>



La espina  $\Gamma$  determina, pues, una fibración del cubo con asas:



Vamos a ver qué pasa afuera de este cubo con asas.

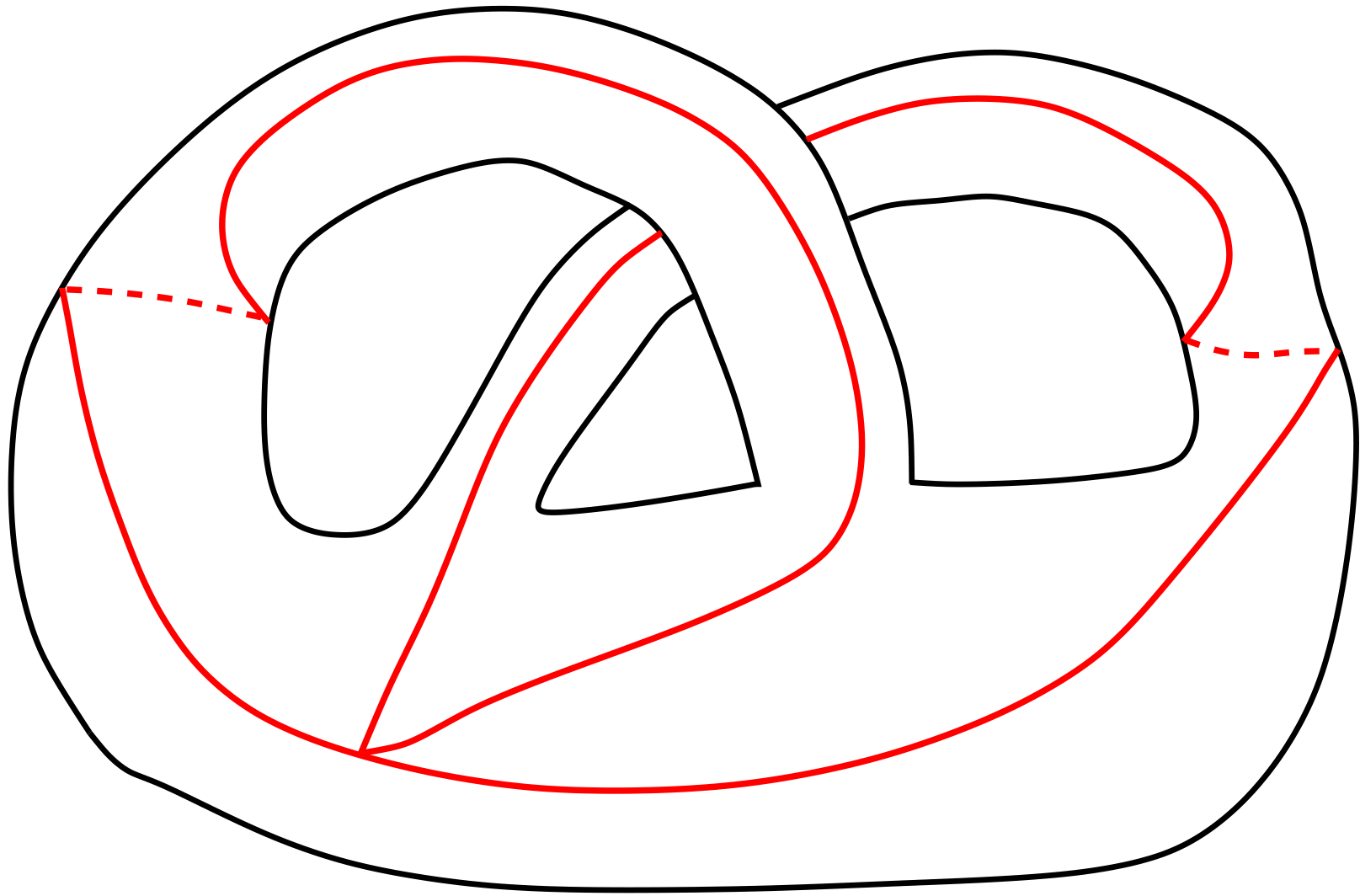
## Teorema de Alexander.

Sea  $E \subset S^3$  una 2-esfera encajada (diferenciable, PL, . . . ).

Entonces  $S^3 - E$  tiene exactamente dos componentes  $B_1$  y  $B_2$  y se cumple que

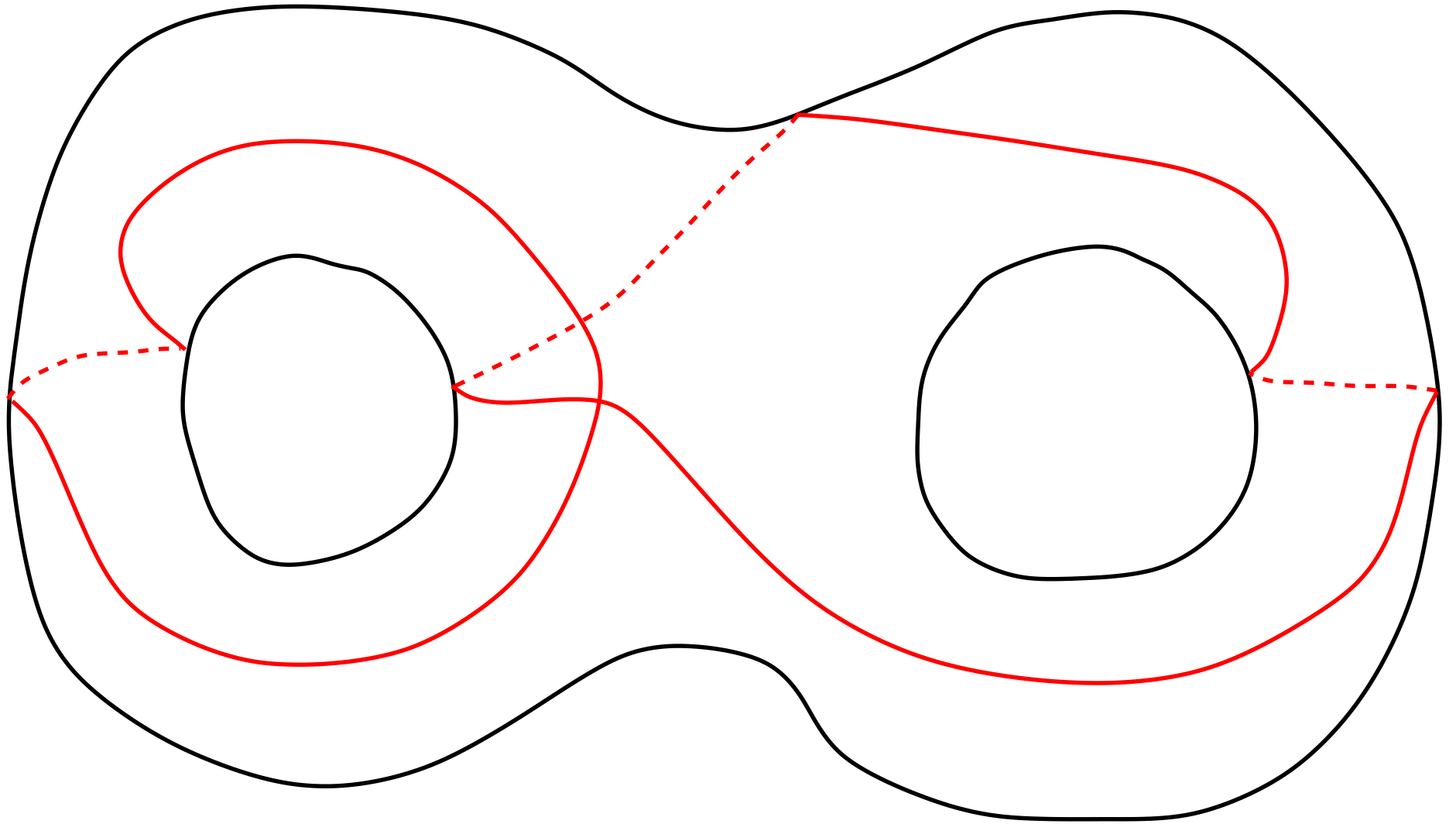
$$\overline{B_1} \cong \overline{B_2} \cong B^3.$$

Vamos a ver el exterior de

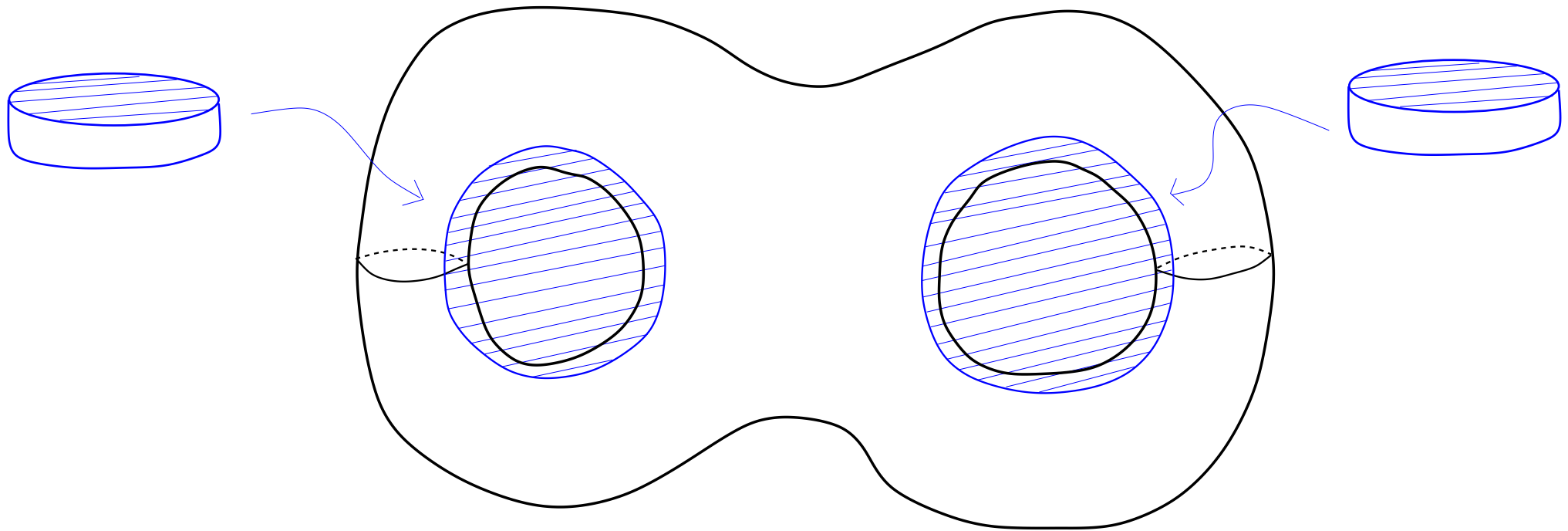


Primero “enderezamos” un poquito:

El mismo cubo con asas

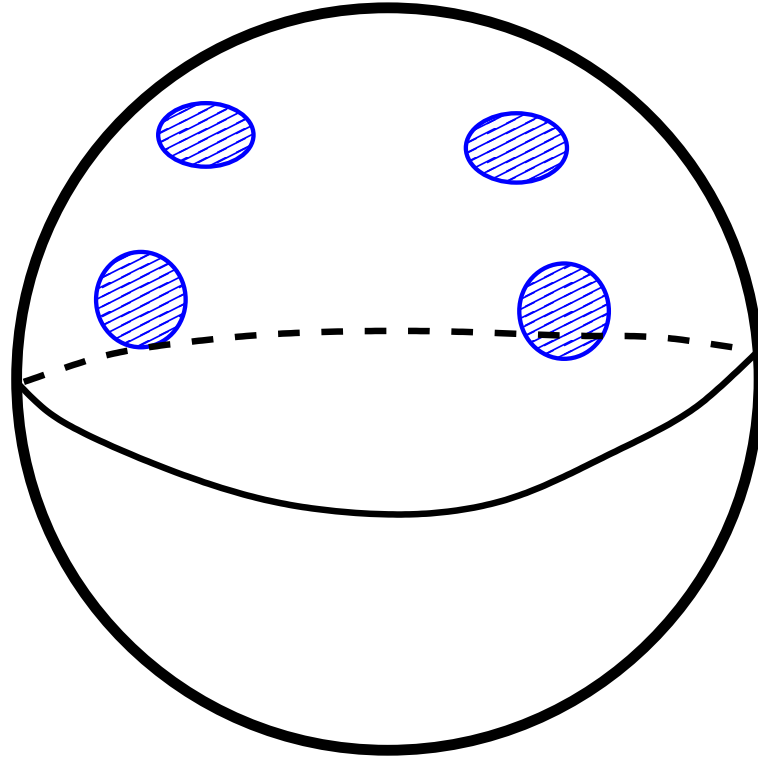


A este cubo con asas le pegamos dos “corchos” (dos 2-asas):



La frontera de este espacio:  $\partial(\text{cubo con asas} + (2\text{-asas})) \cong S^2$

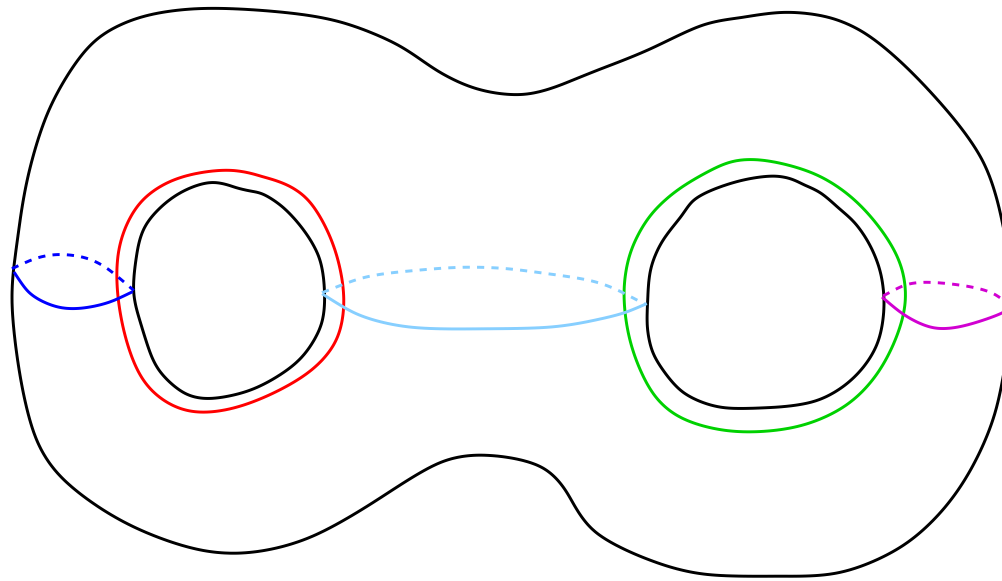
Luego el exterior:  $E(\text{cubo con asas} + \text{corchos}) \cong B^3$  (Alexander)



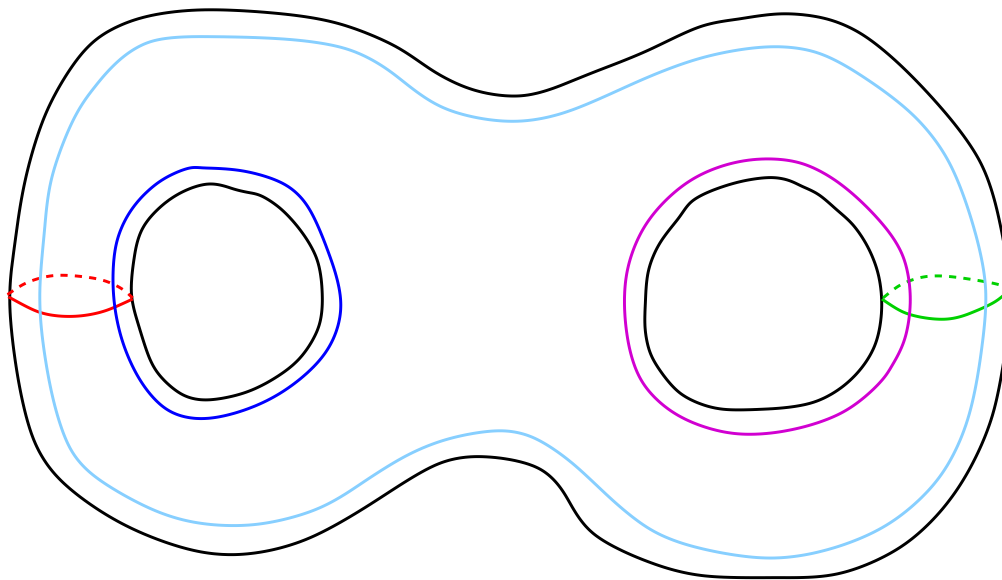
Para obtener el exterior del cubo con asas original, le tenemos que pegar a esta bola los corchos a lo largo de los disquitos que se ven en el dibujo.

Por supuesto que obtenemos de nuevo un cubo con asas.

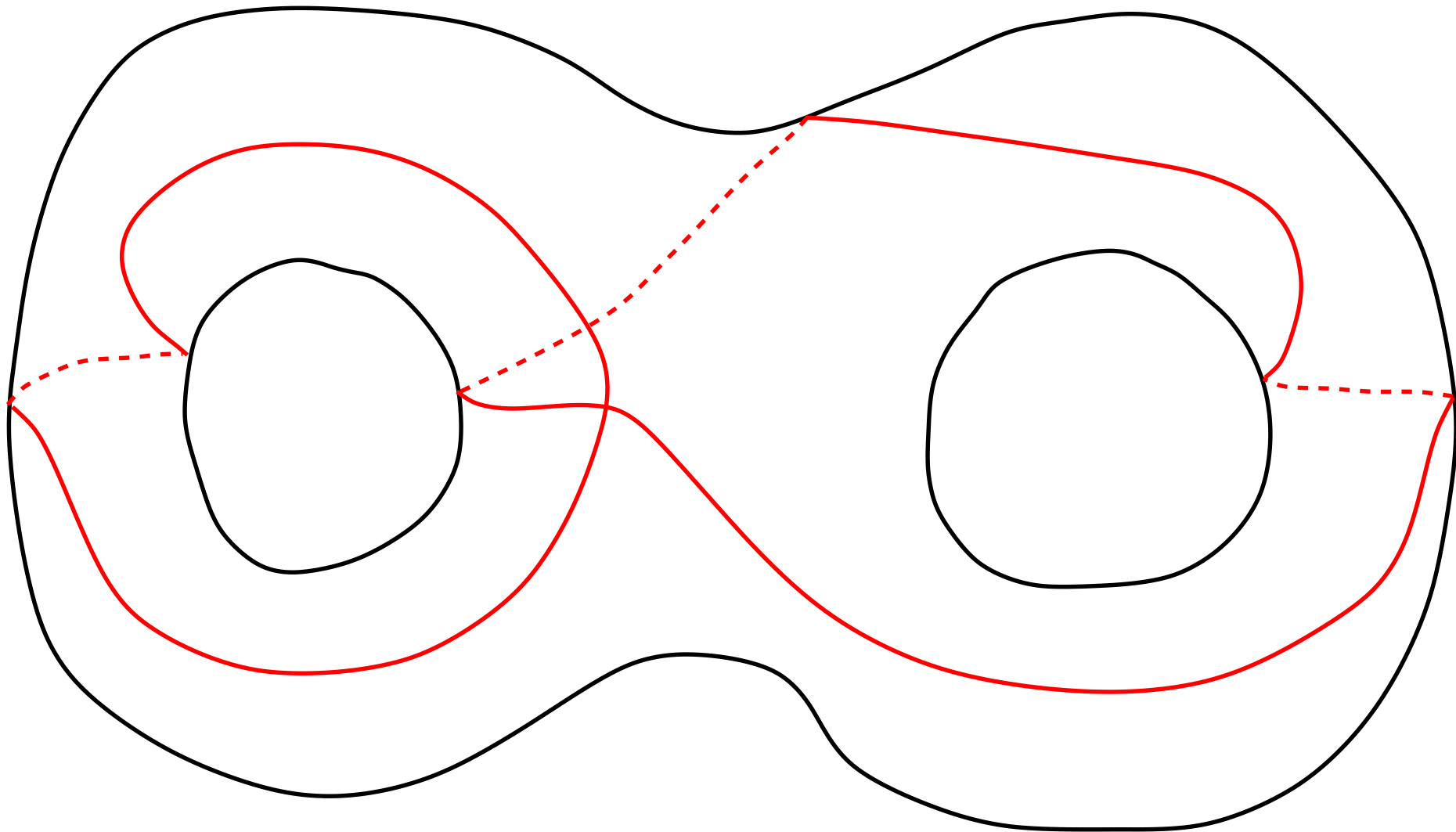




**Cubo con asas "interior"**

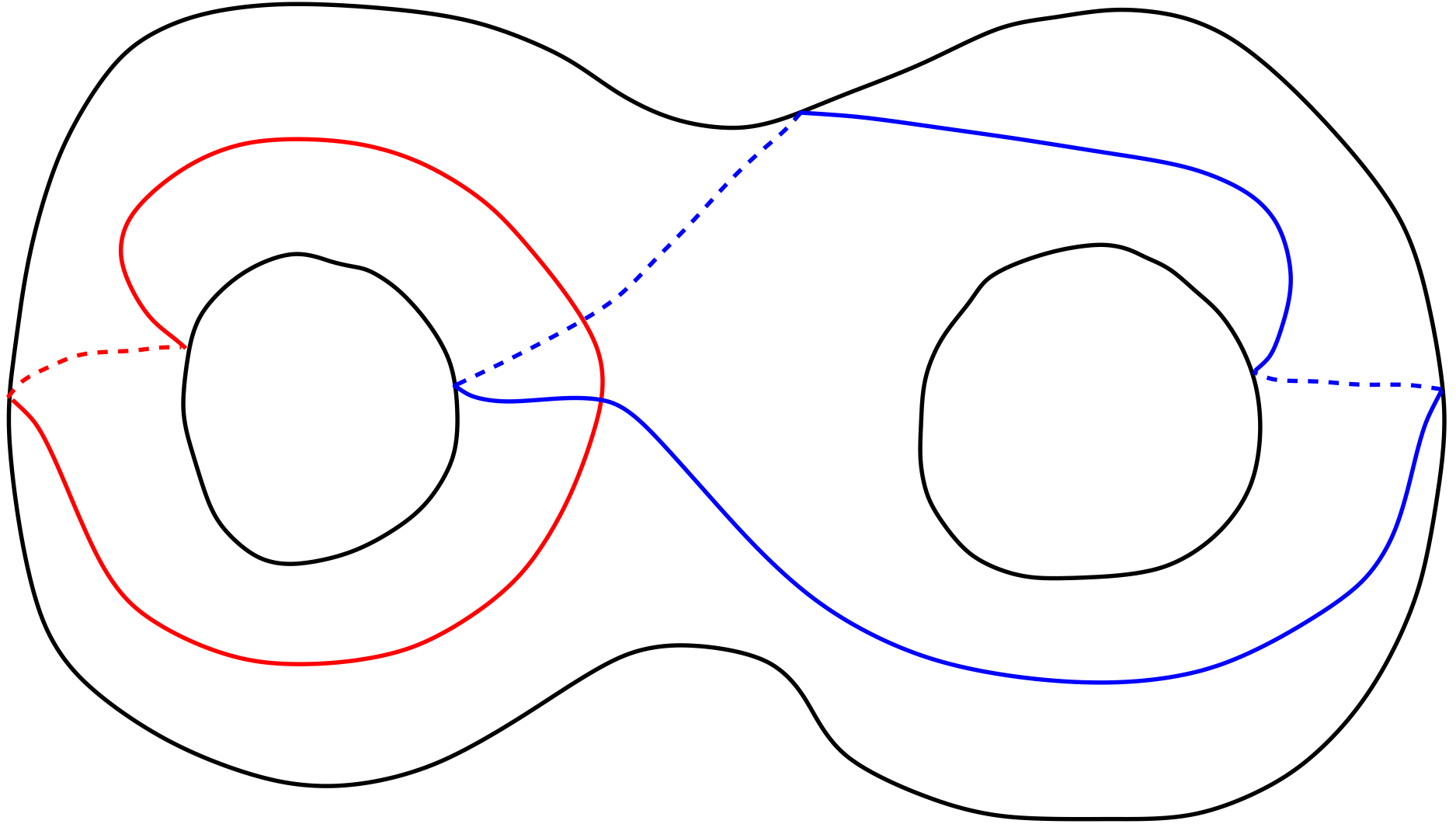


**Cubo con asas "exterior"**

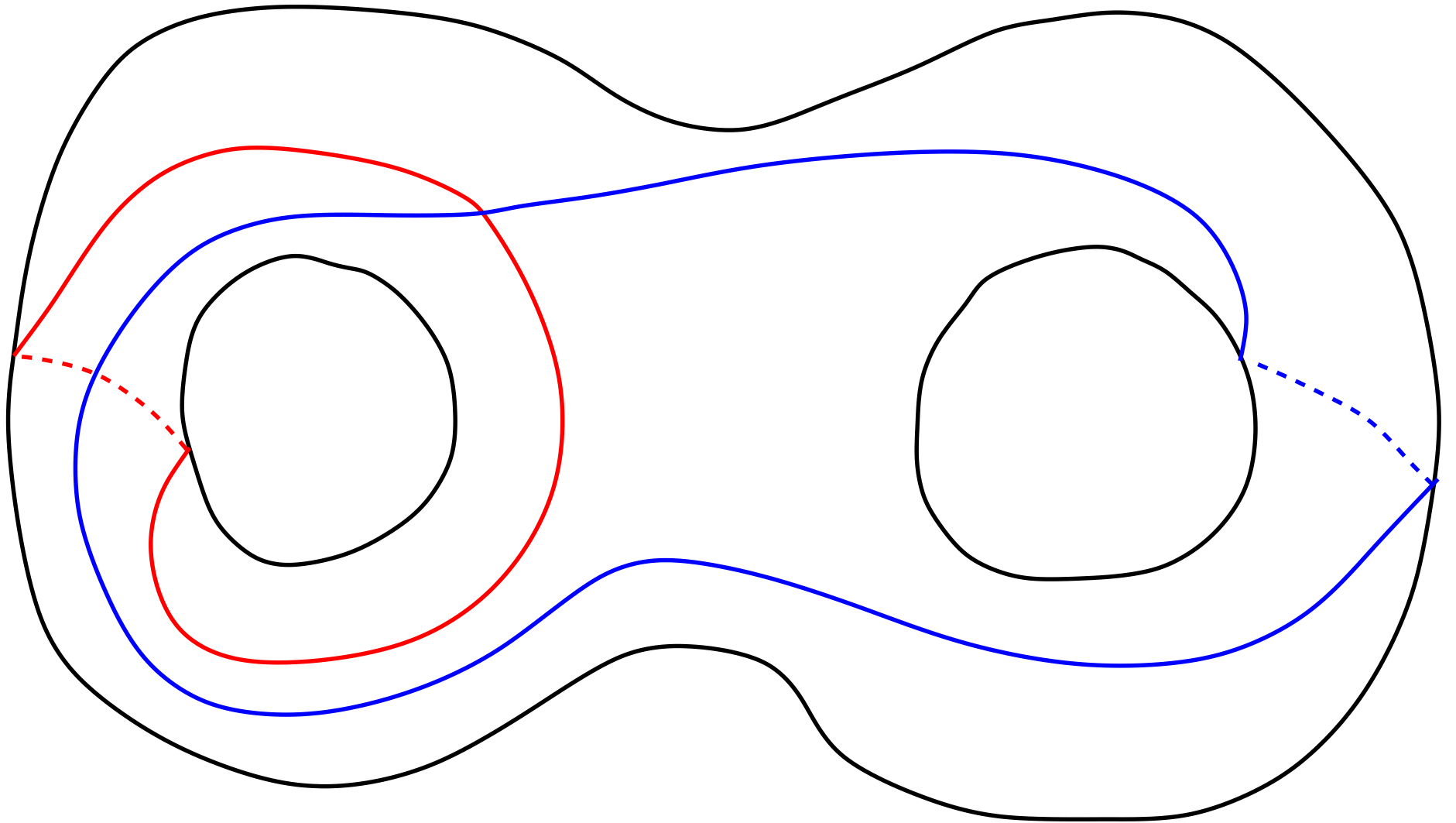


¿Cómo se ve la espina  $\Gamma$  en el cubo con asas exterior?

Cambiamos los colores de los pétalos de  $\Gamma$  en  $V$ :



$\Gamma$  en  $E(F)$



$x, yx$

Como el conjunto de palabras  $\{x, xy\}$  es una base del grupo  $\pi_1(E(V))$ , se sigue que la gráfica  $\Gamma$  también es una espina para el cubo con asas exterior.

O sea,  $\Gamma$  produce una estructura “producto” en el cubo con asas exterior y, por lo tanto, el nudo con el que comenzamos está fibrado.

**Teorema.** Sean  $k \subset S^3$  un nudo y  $F$  una superficie de Seifert para  $k$ .  
Escribimos  $V = \mathcal{N}(F)$  y  $W = E(V)$ .

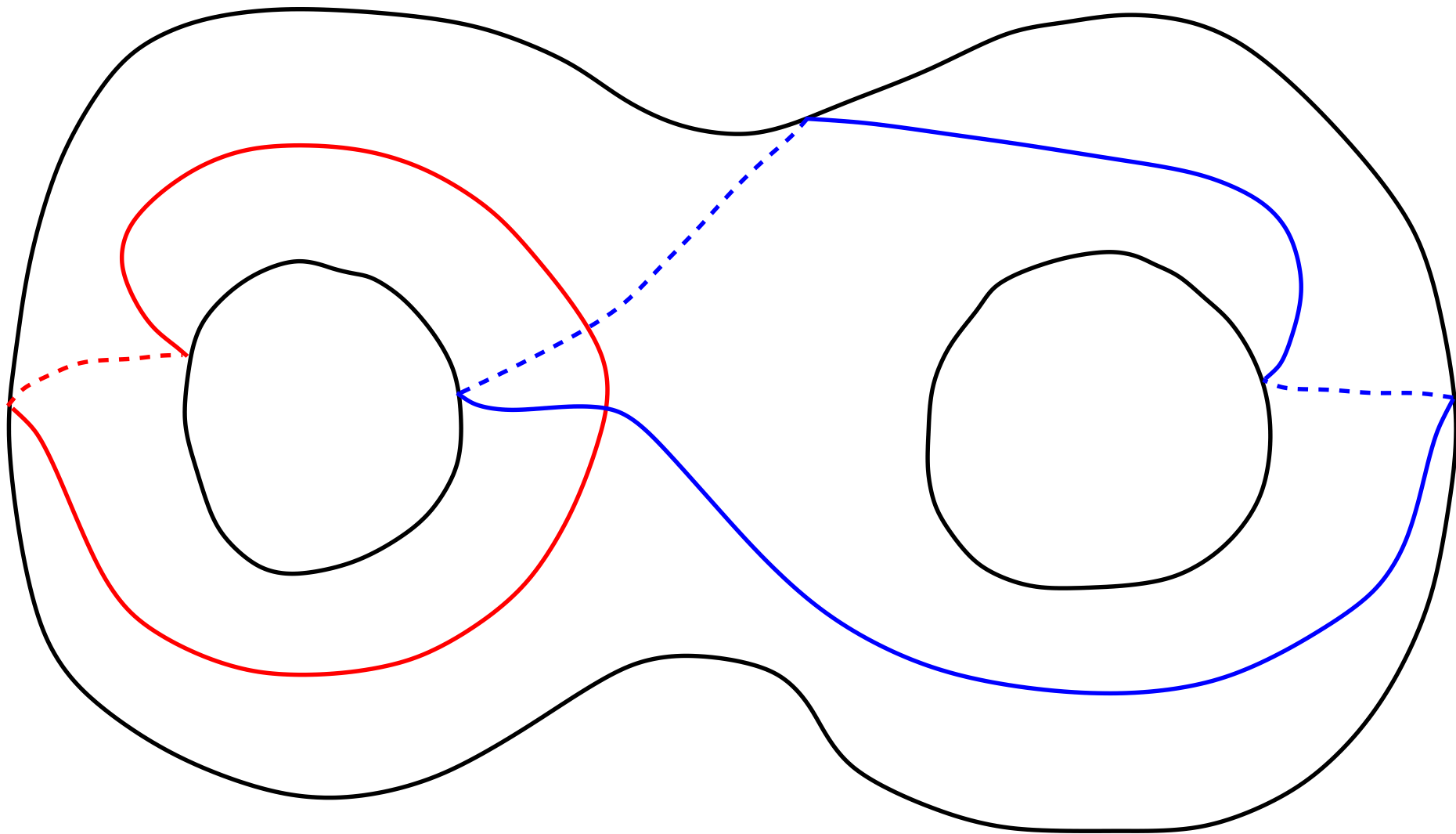
Si existe una gráfica  $\Gamma$  que es una espina para  $F$  tal que  $\Gamma$  es espina tanto de  $V$  como de  $W$ , entonces  $k$  está fibrado.

## Sólo Álgebra:

**Proposición.** Sea  $V$  un cubo con  $g$  asas y  $\Gamma \subset \partial V$  una gráfica. Entonces  $\Gamma$  es una espina para  $V$  si y sólo si la inclusión induce un isomorfismo  $\pi_1(\Gamma) \rightarrow \pi_1(V)$ .

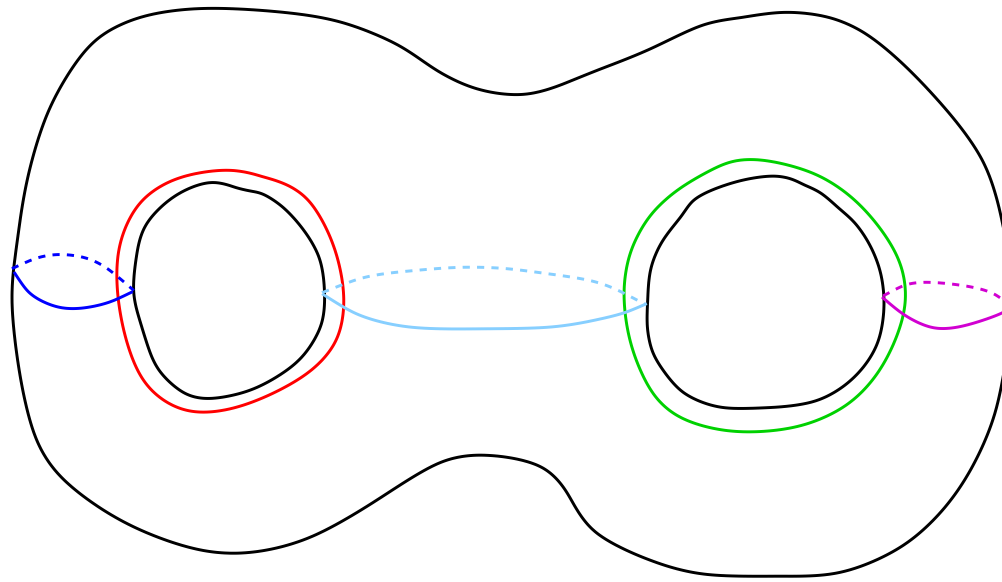
(sólo tenemos que revisar condiciones algebraicas)

**En**  $\mathcal{N}(F)$

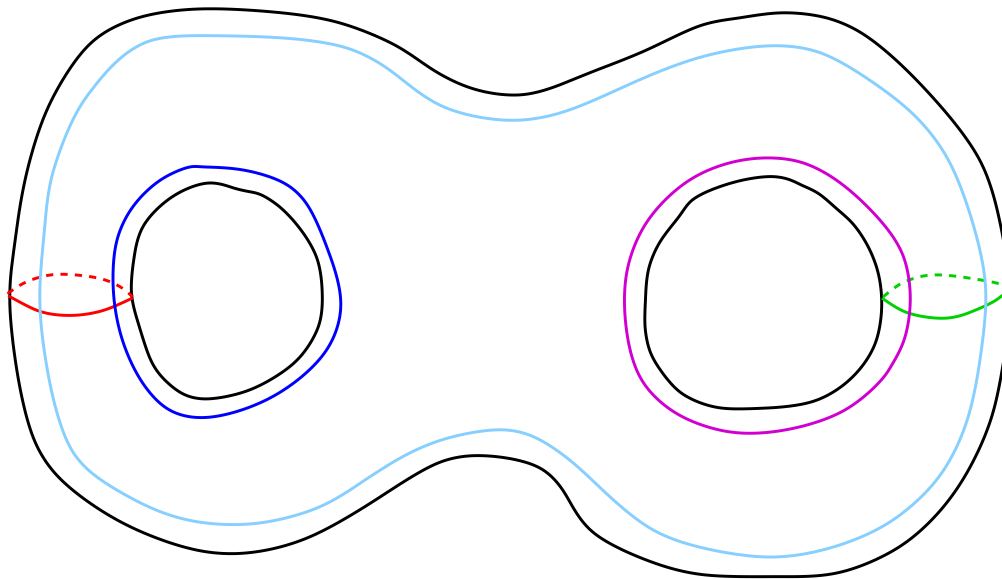


$x, yx$



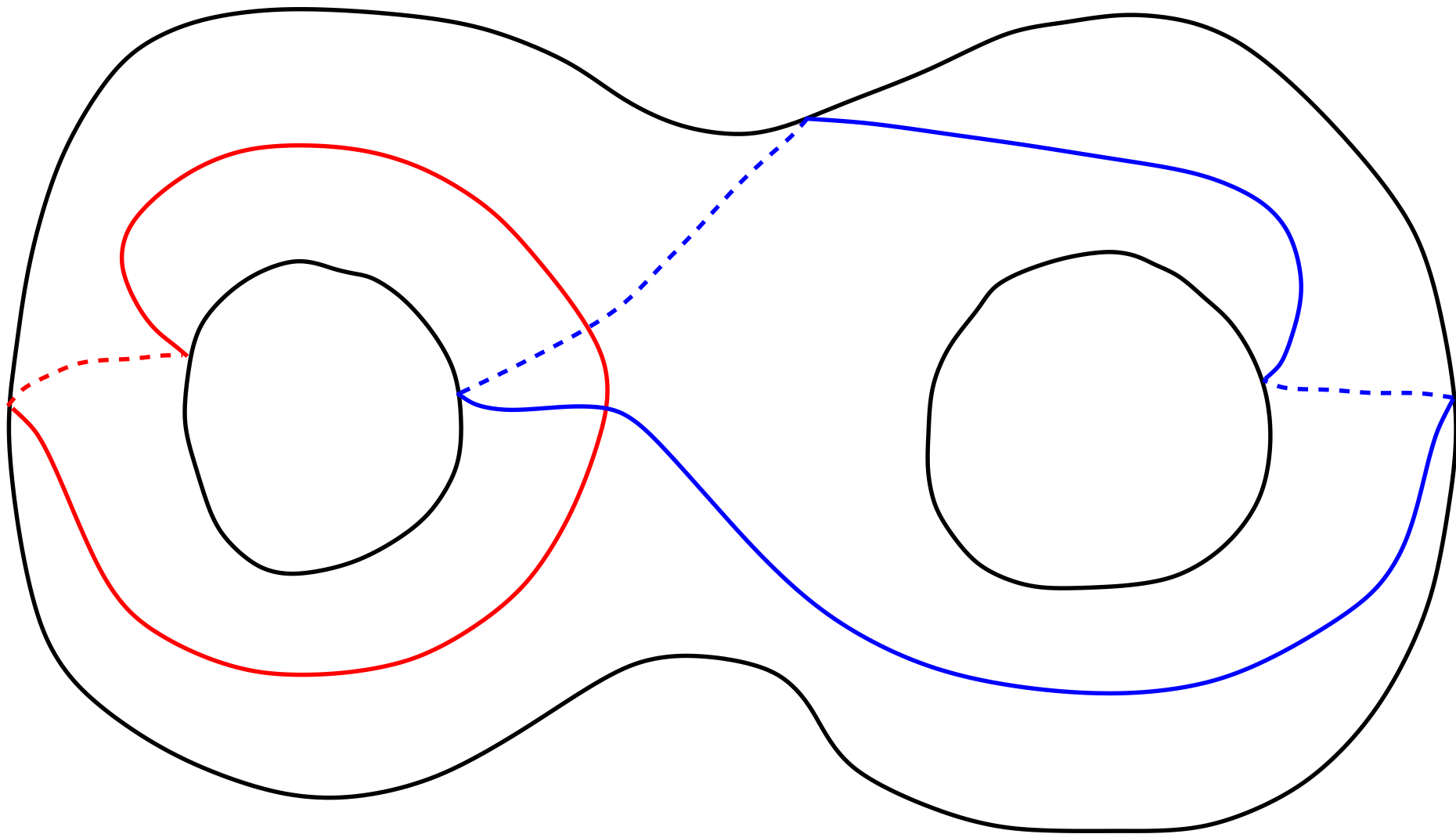


**Cubo con asas "interior"**



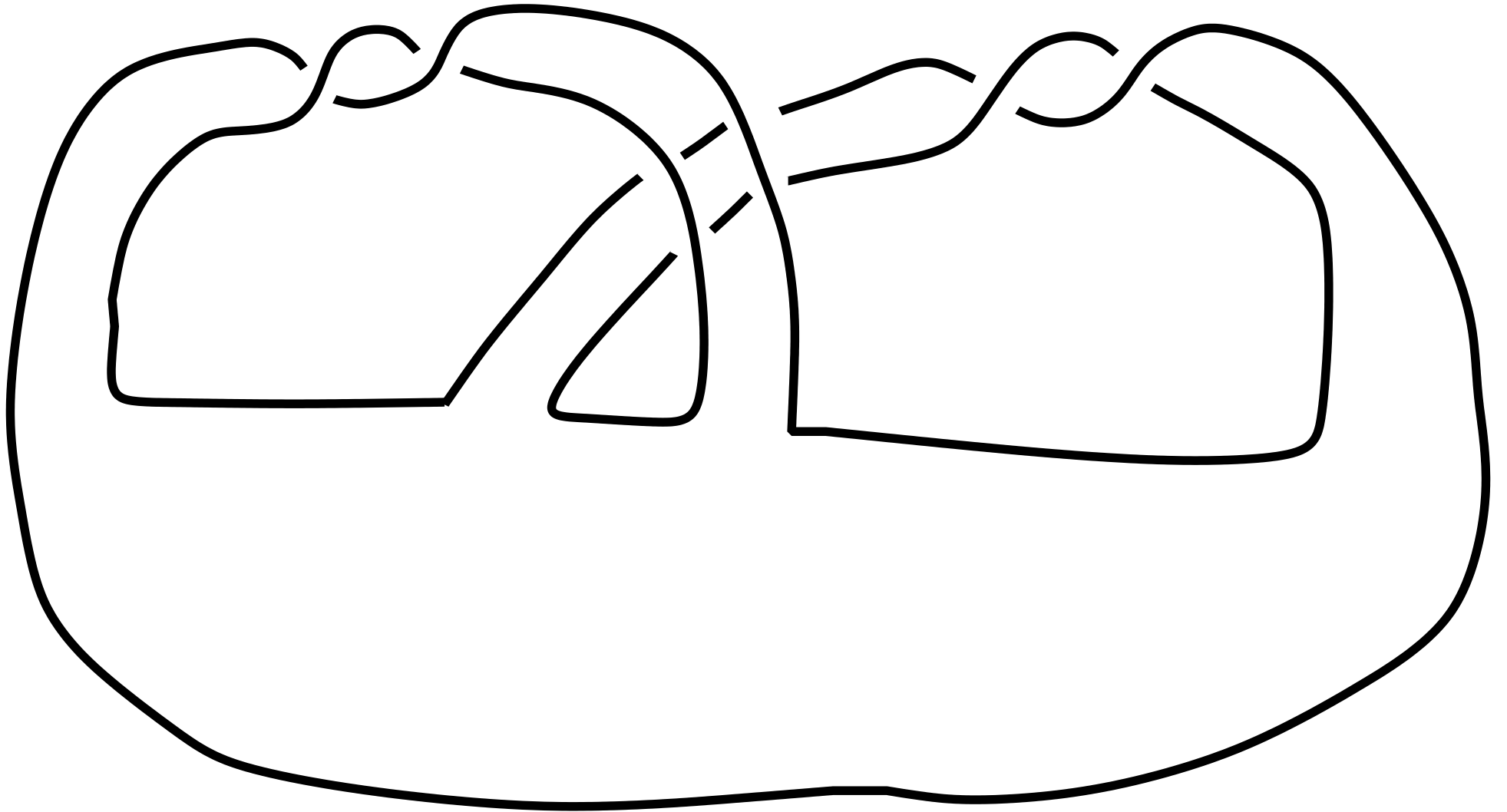
**Cubo con asas "exterior"**

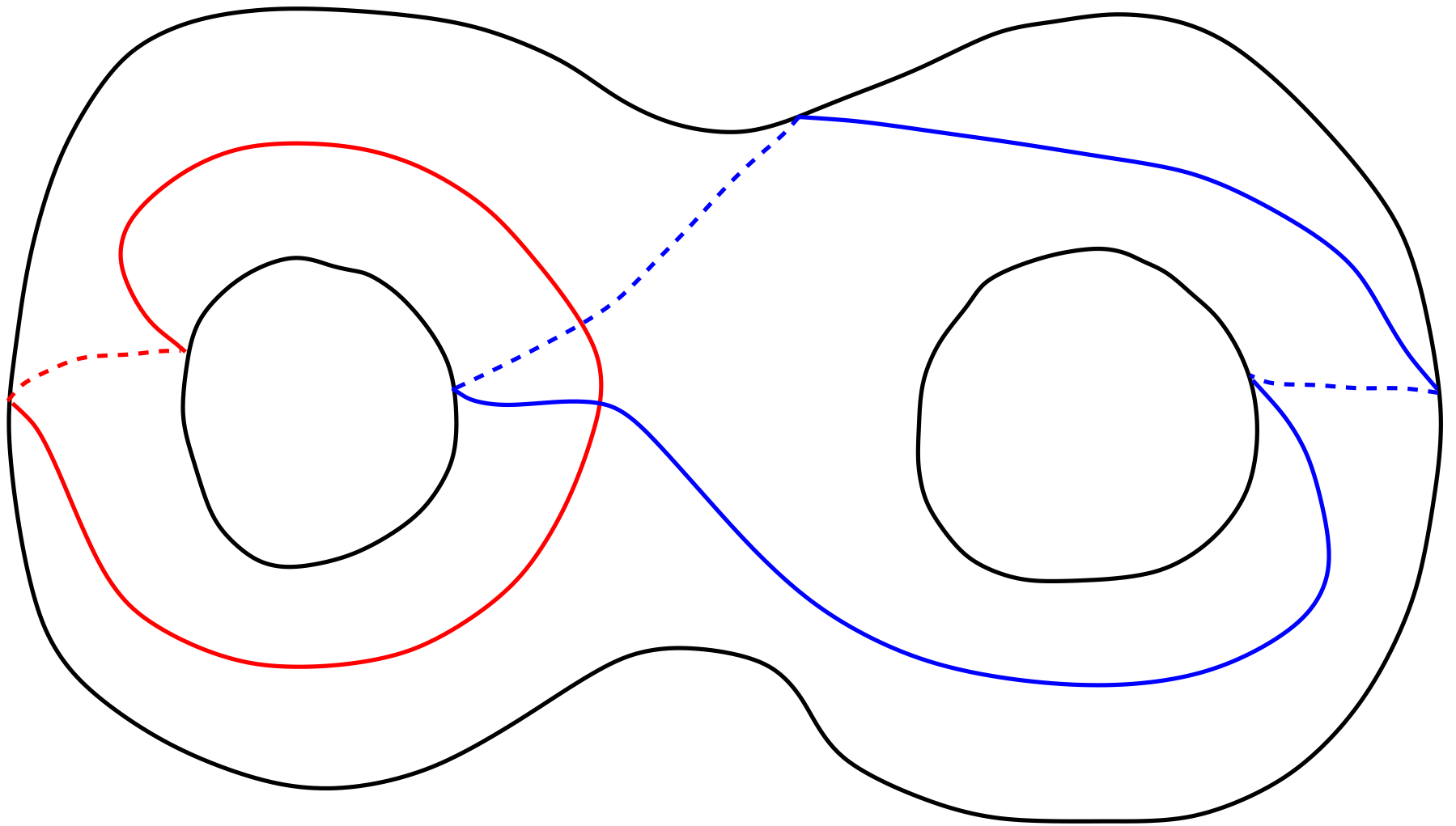
**En**  $\mathcal{N}(F)$



*x*, *yx*

el trébol



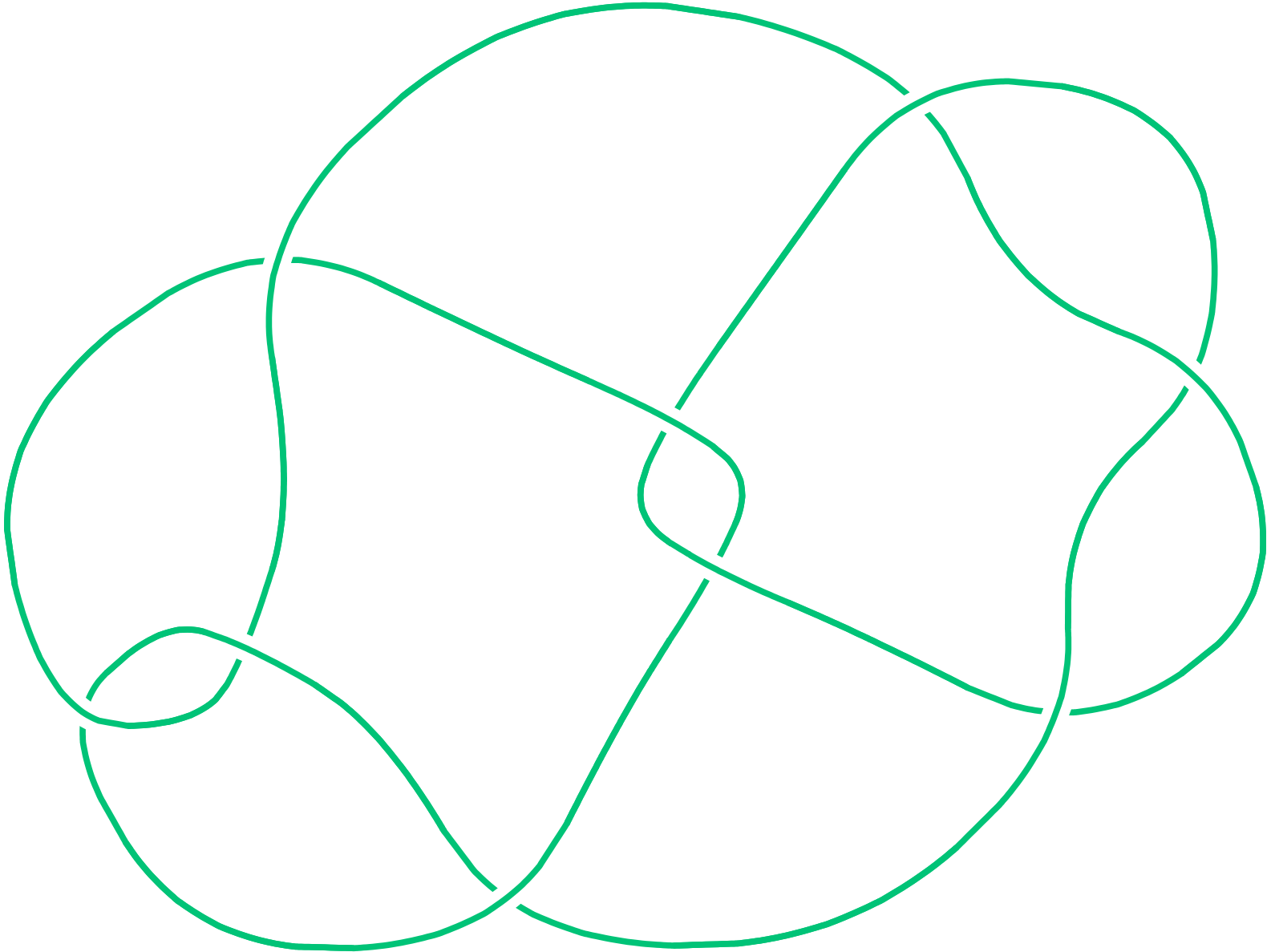


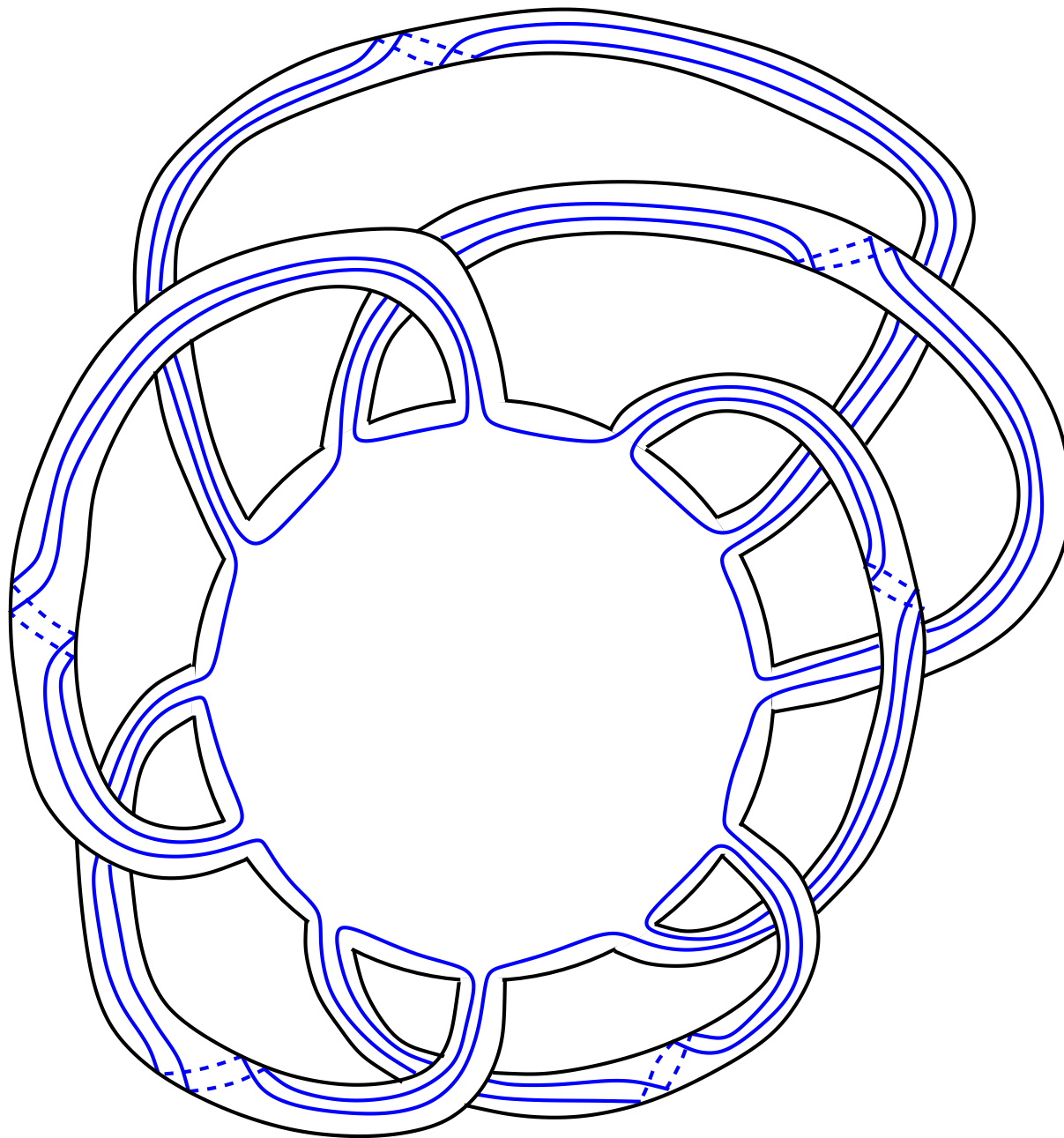
$x$

$x\bar{y}$

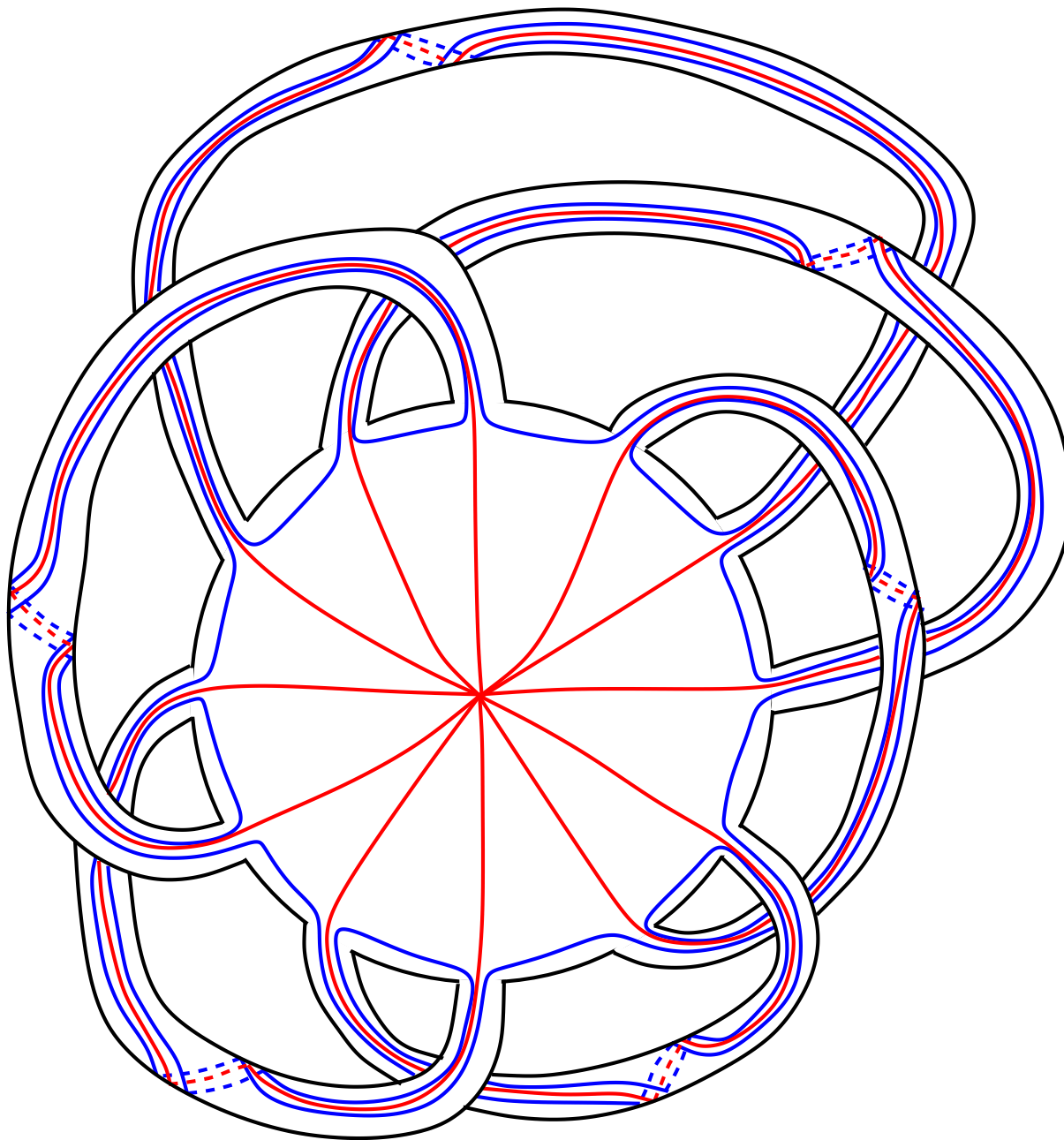
¡El Trébol también está fibrado!

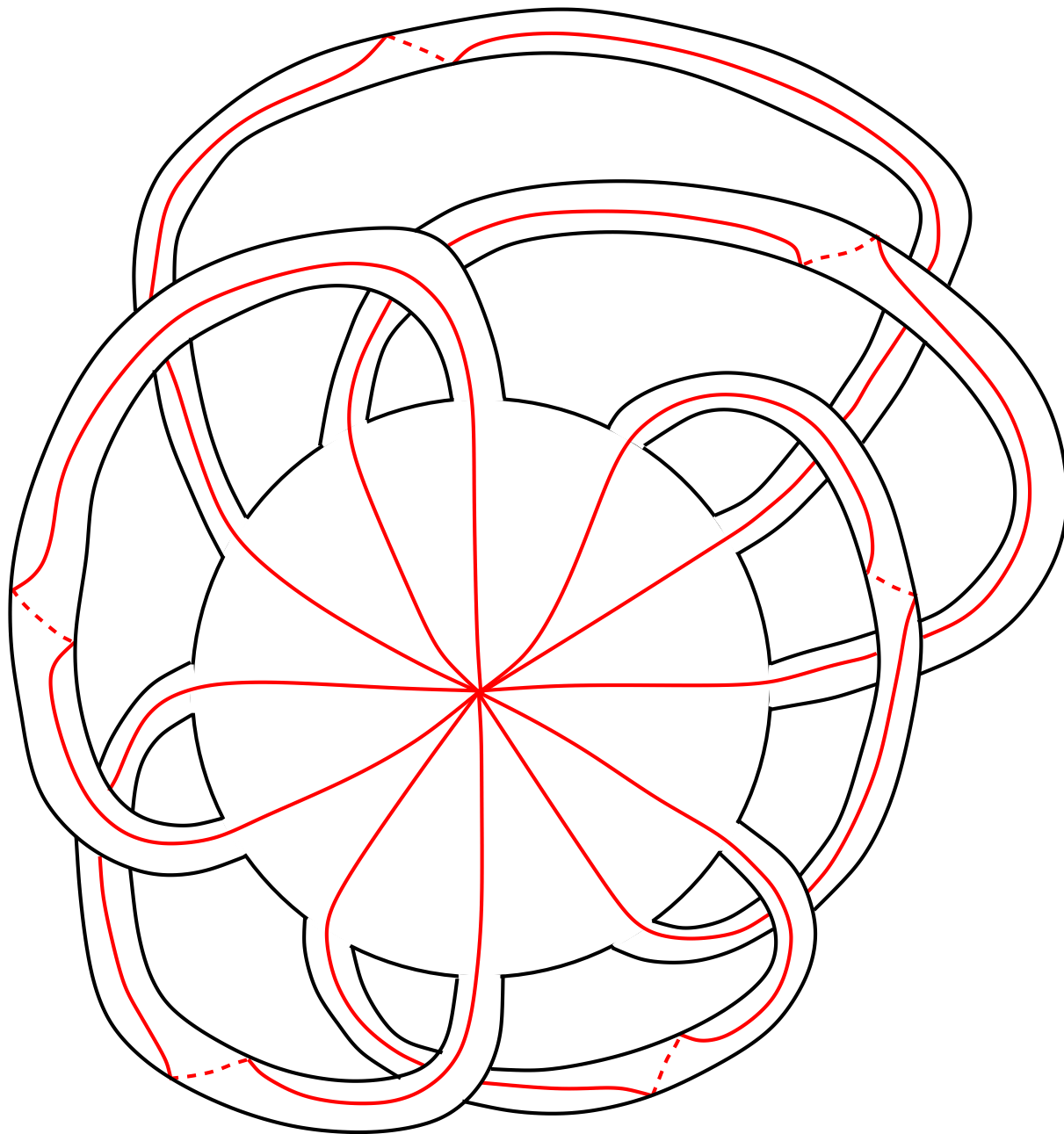
9<sub>36</sub>





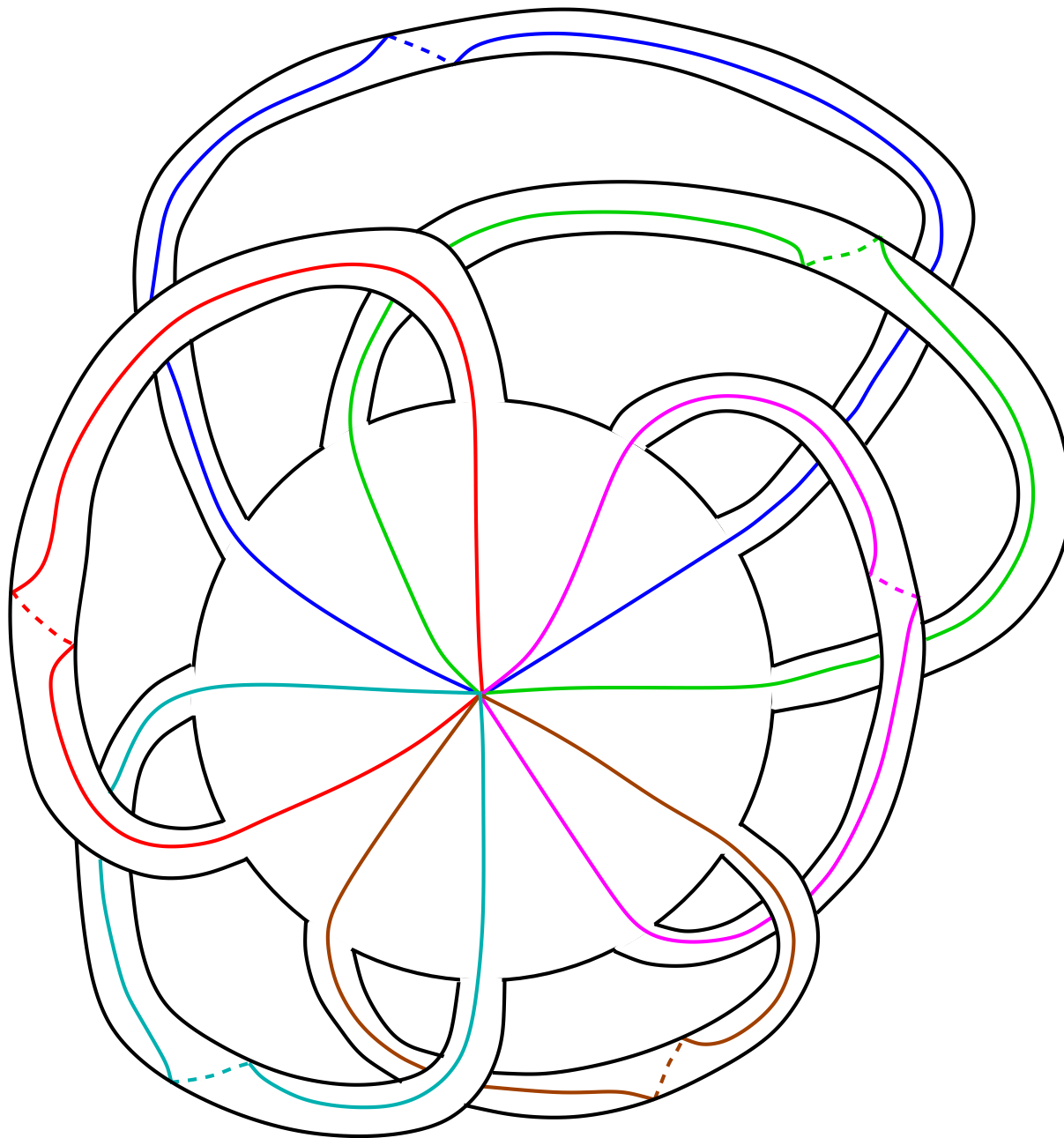
9<sub>36</sub>



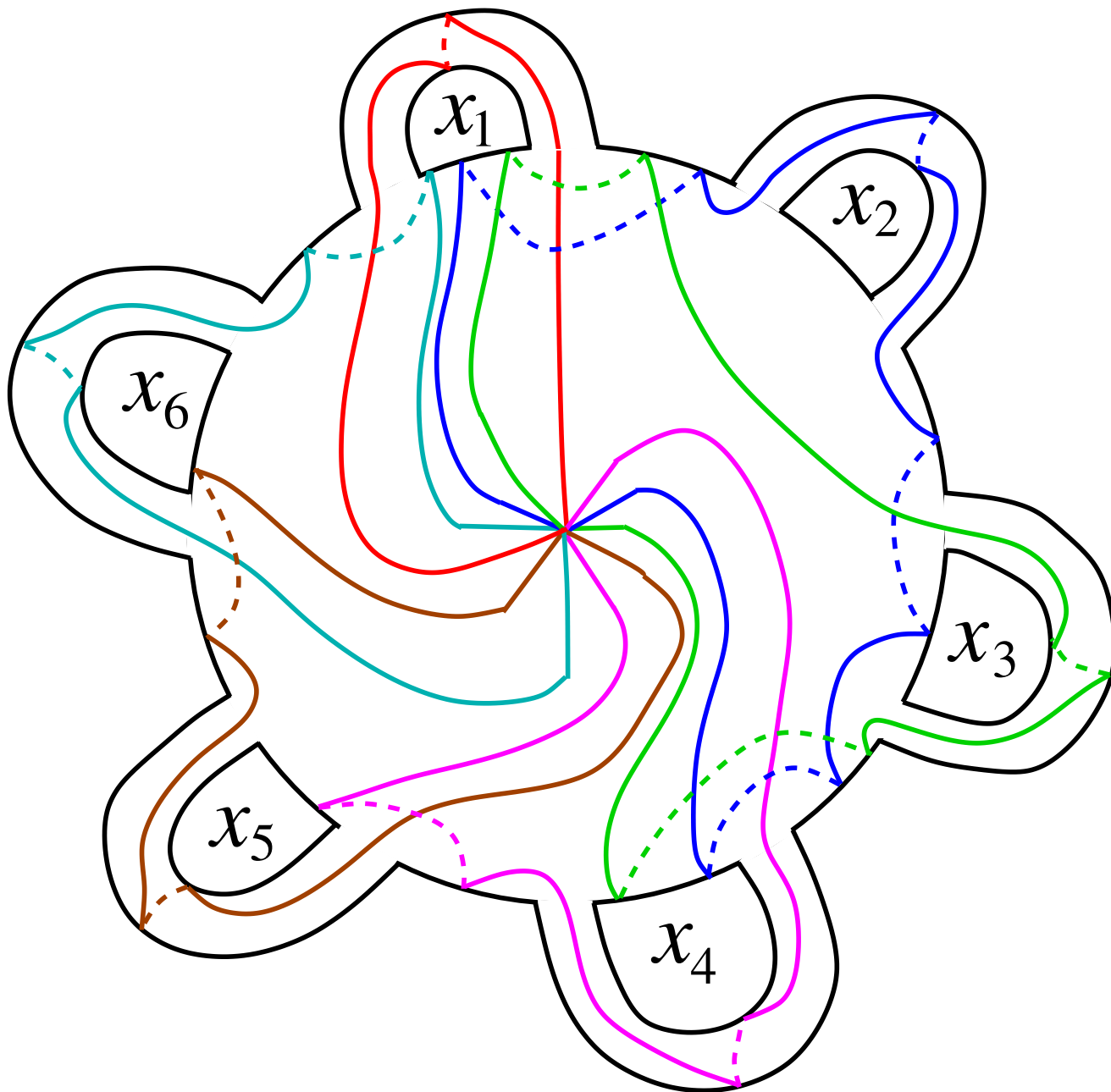




9<sub>36</sub>



9<sub>36</sub>



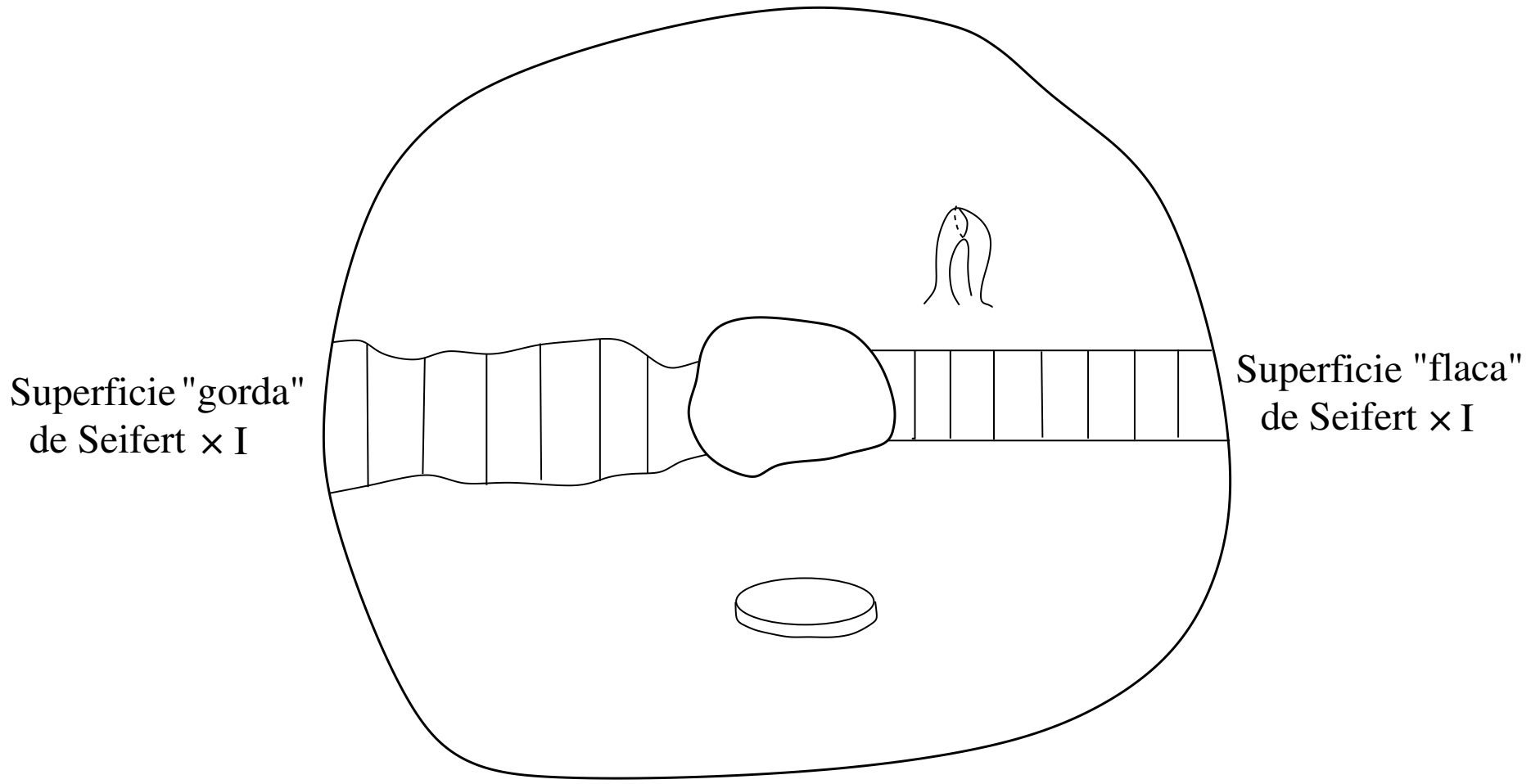
- $x_1$
- $\bar{x}_4 x_3 x_1$
- $\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$
- $\bar{x}_1 x_6$
- $\bar{x}_6 x_5$
- $\bar{x}_5 x_4$

El nudo 9<sub>36</sub> está fibrado

## 2do. caso

Supongamos que la función  $f : E(k) \rightarrow S^1$  tiene exactamente dos puntos críticos: uno de índice 1 y uno de índice 2.

$E(k)$

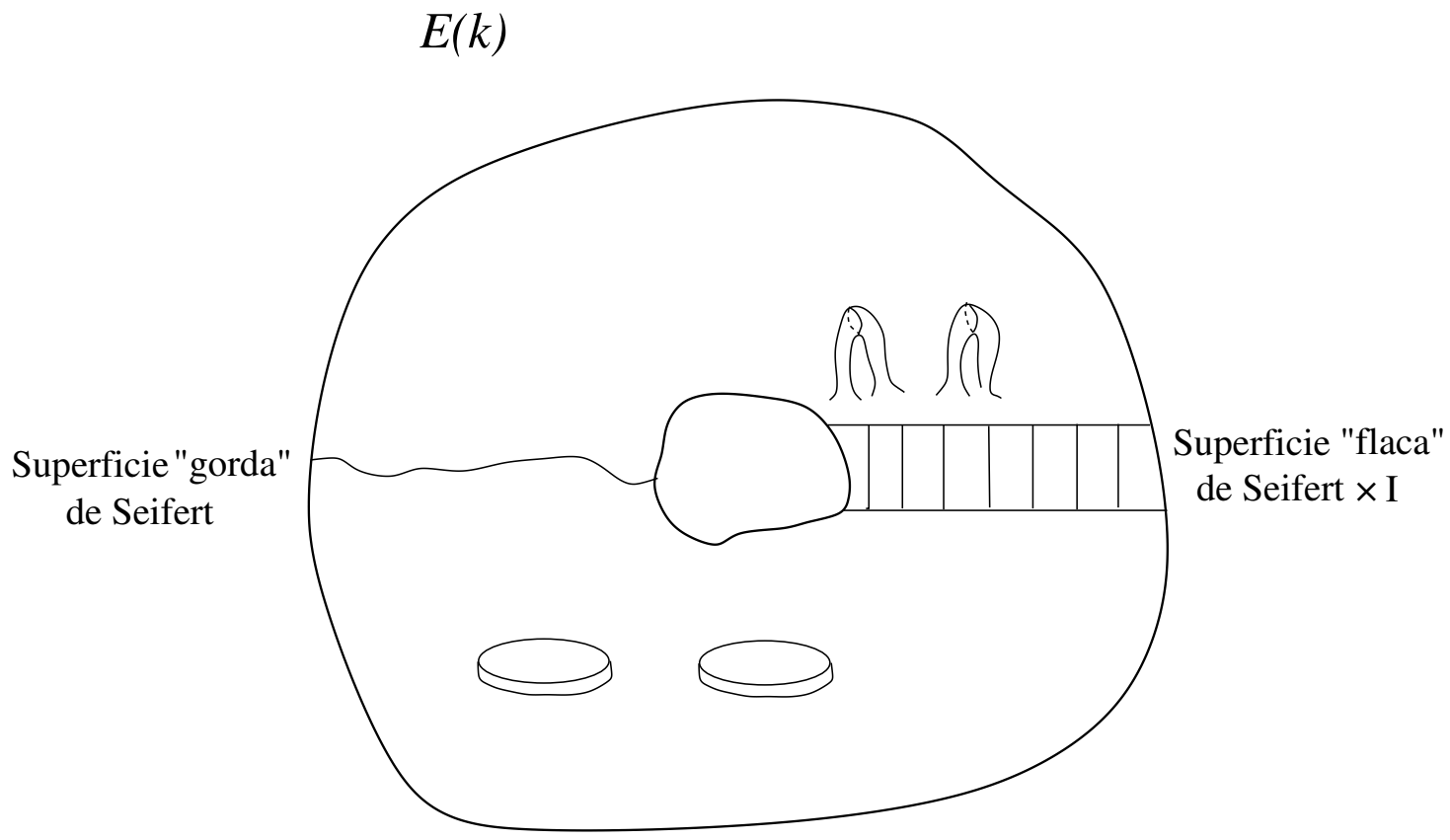


**Definición.** Sea  $k \subset S^3$  y  $F$  una superficie de Seifert para  $k$ .

Una *descomposición circular de  $k$  basada en  $F$* , es una descomposición

$$E(k) = (F \times [\frac{1}{2}, 1]) \cup U \cup D \cup (F \times [0, \frac{1}{2}])$$

donde  $U$  es un conjunto de 1-asas pegadas a lo largo de  $F \times \{1\}$  y  $D$  es un conjunto de 2-asas pegadas del mismo lado (Forzosamente  $\#(U) = \#(D)$ ).



Para describir una descomposición circular del nudo  $k$  basada en  $F$  podemos hacer dos cosas:

1) Comenzamos con una vecindad de  $F$ , le añadimos un número de 1-asas de un solo lado y le añadimos el mismo número de 2-asas del mismo lado.

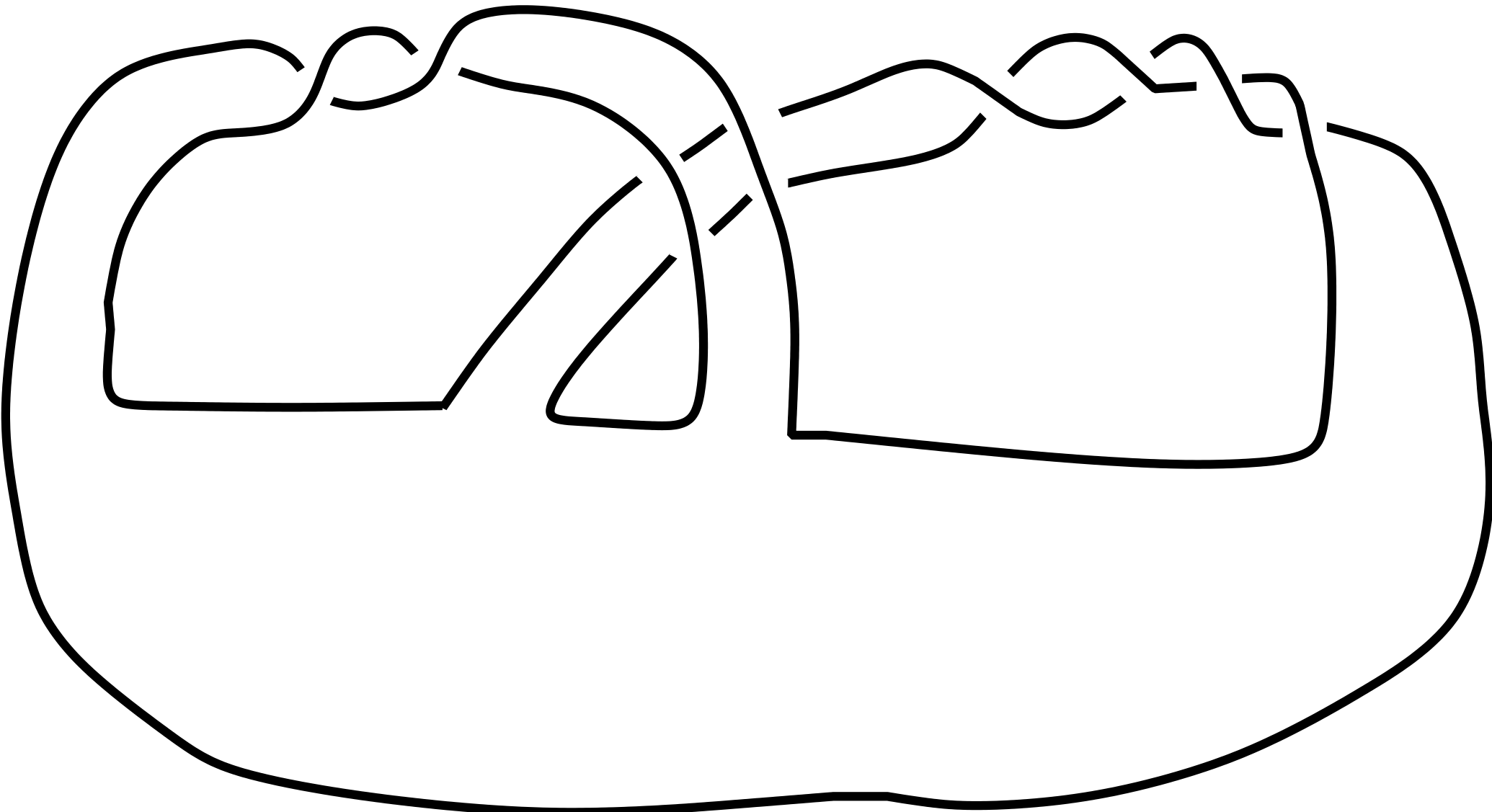
El complemento de la unión anterior es una vecindad regular de  $F$ .

$$E(k) = (F \times [\frac{1}{2}, 1]) \cup U \cup D \cup (F \times [0, \frac{1}{2}])$$

2) Tomamos el exterior  $E(F)$  y le retiramos un cierto número de 2-asas y el mismo número de 1-asas.

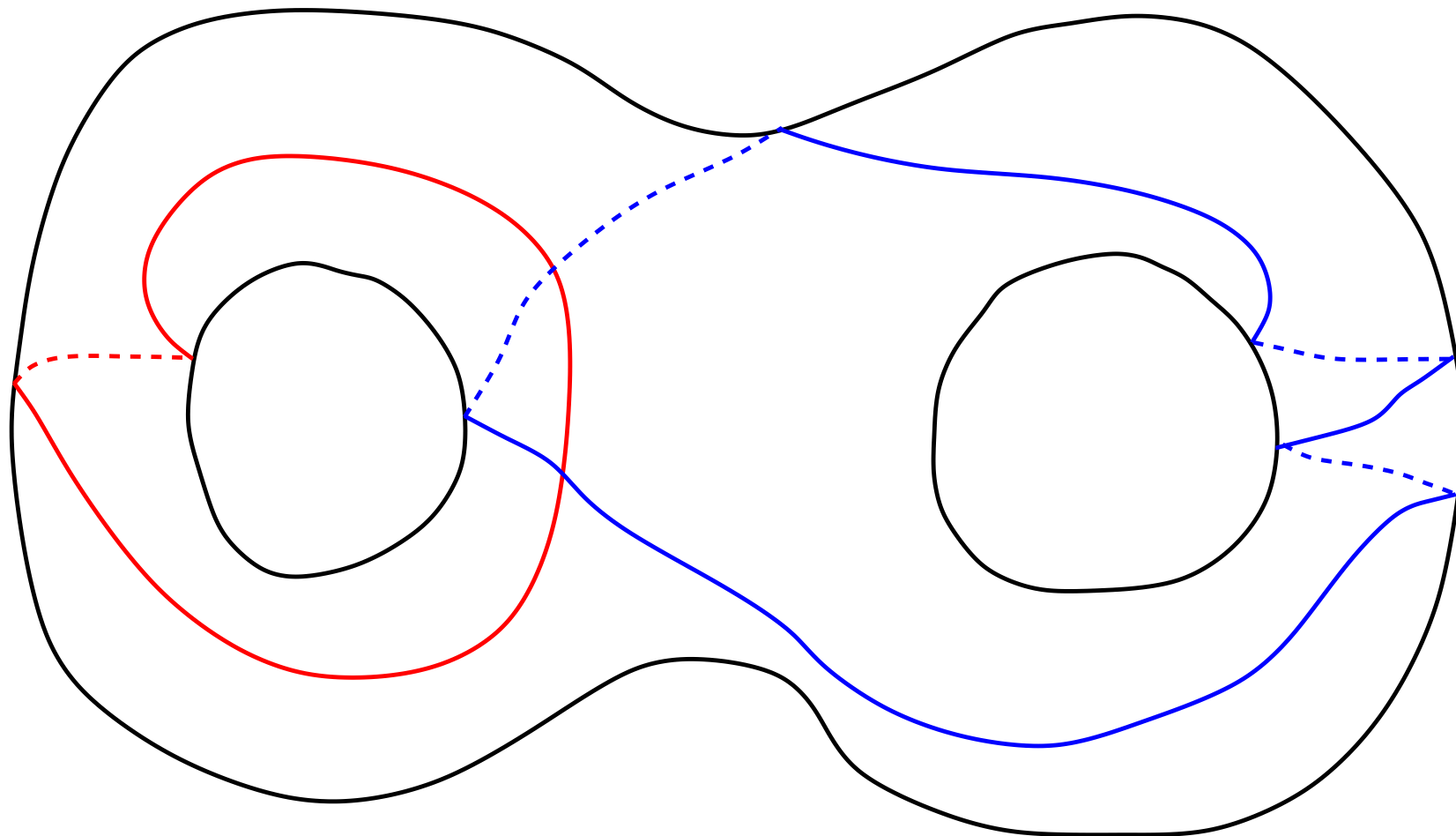
El espacio resultante es una vecindad regular de  $F$ .

$$E(k) = (F \times [\frac{1}{2}, 1]) \cup U \cup D \cup (F \times [0, \frac{1}{2}])$$





$5_2$



$x$

$xy^2$

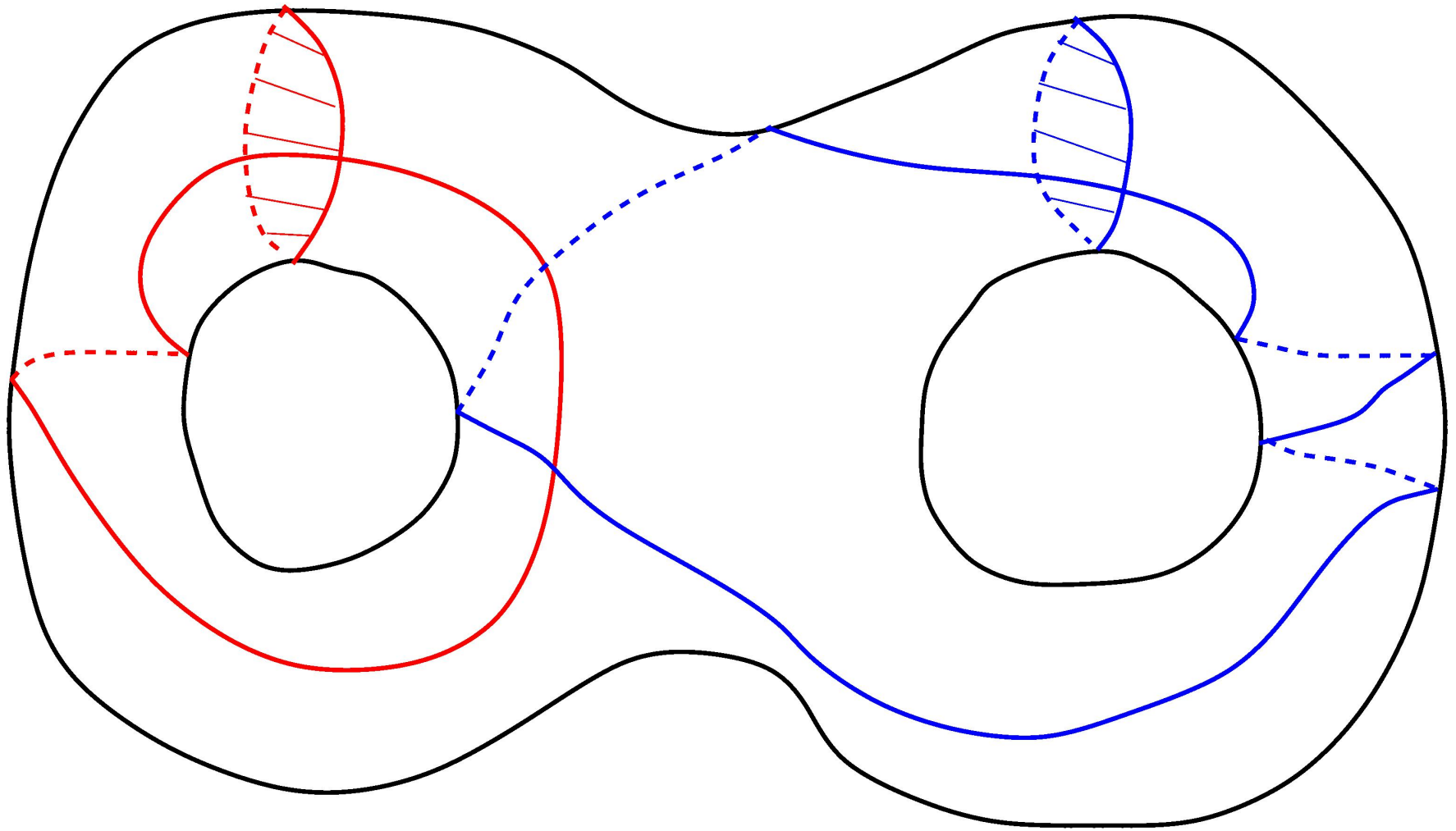
El conjunto  $\{x, xy^2\}$  no es una base del grupo libre de rango dos.

## Proposición.

Sea  $V$  un cubo con  $g$  asas y  $\Gamma \subset \partial V$  una gráfica, donde  $\Gamma \cong \bigvee_{i=1}^g S^1$  es una cuña de 1-esferas.

Entonces  $\Gamma$  es una espina para  $V$  si y sólo si existe un sistema de discos  $D_1, D_2, \dots, D_g$  para  $V$  (o sea, discos que definen las asas de  $V$ ) tal que el disco  $D_i$  toca a un y sólo un pétalo de  $\Gamma$  en exactamente un punto,  $i = 1, \dots, g$ .

5<sub>2</sub>



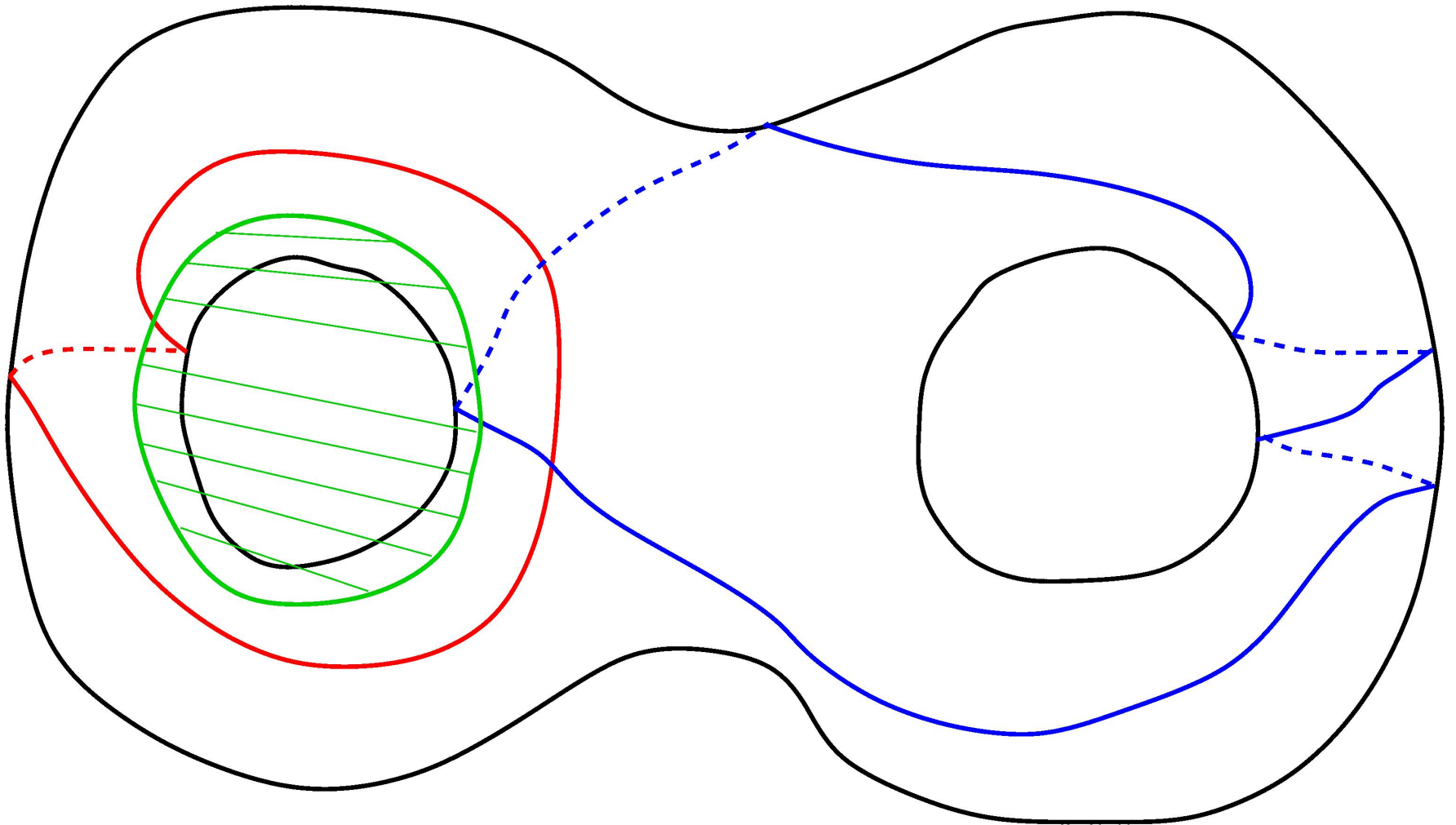
$x$

$xy^2$

**Definición.** Sea  $F$  un grupo libre,  $w \in F$ . Entonces  $w$  se llama un *elemento primitivo* de  $F$  si existe alguna base  $B$  de  $F$  tal que  $w \in B$ .

**Proposición.** Sea  $V$  un cubo con asas y  $\alpha \subset V$  una curva simple cerrada. Entonces  $\alpha$  representa un elemento primitivo de  $\pi_1(V)$  si y sólo si existe un 2-disco  $D \subset V$  propiamente encajado tal que  $\alpha$  corta transversalmente a  $D$  en exactamente un punto.

5<sub>2</sub>



$x$

$xy^2$

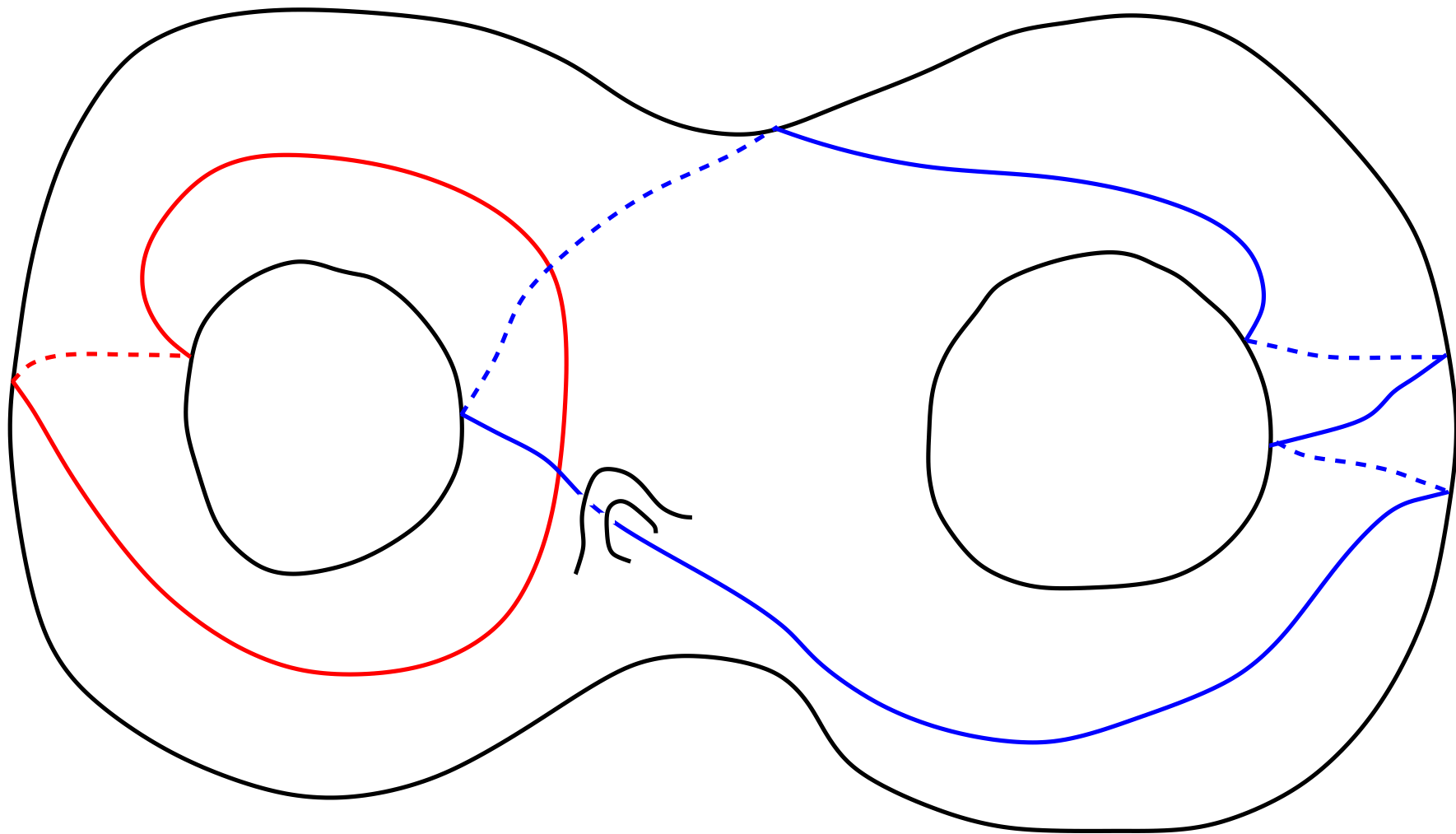
$5_2$

El nudo  $5_2$  no está fibrado, pero admite una descomposición circular con una sola 1-asa.

(El polinomio de Alexander es  $\Delta(5_2) = 2 - 3t + 2t^2$ , por eso  $5_2$  no está fibrado)

# Descomposición circular para $5_2$

5<sub>2</sub>



$x$

$xy^2$

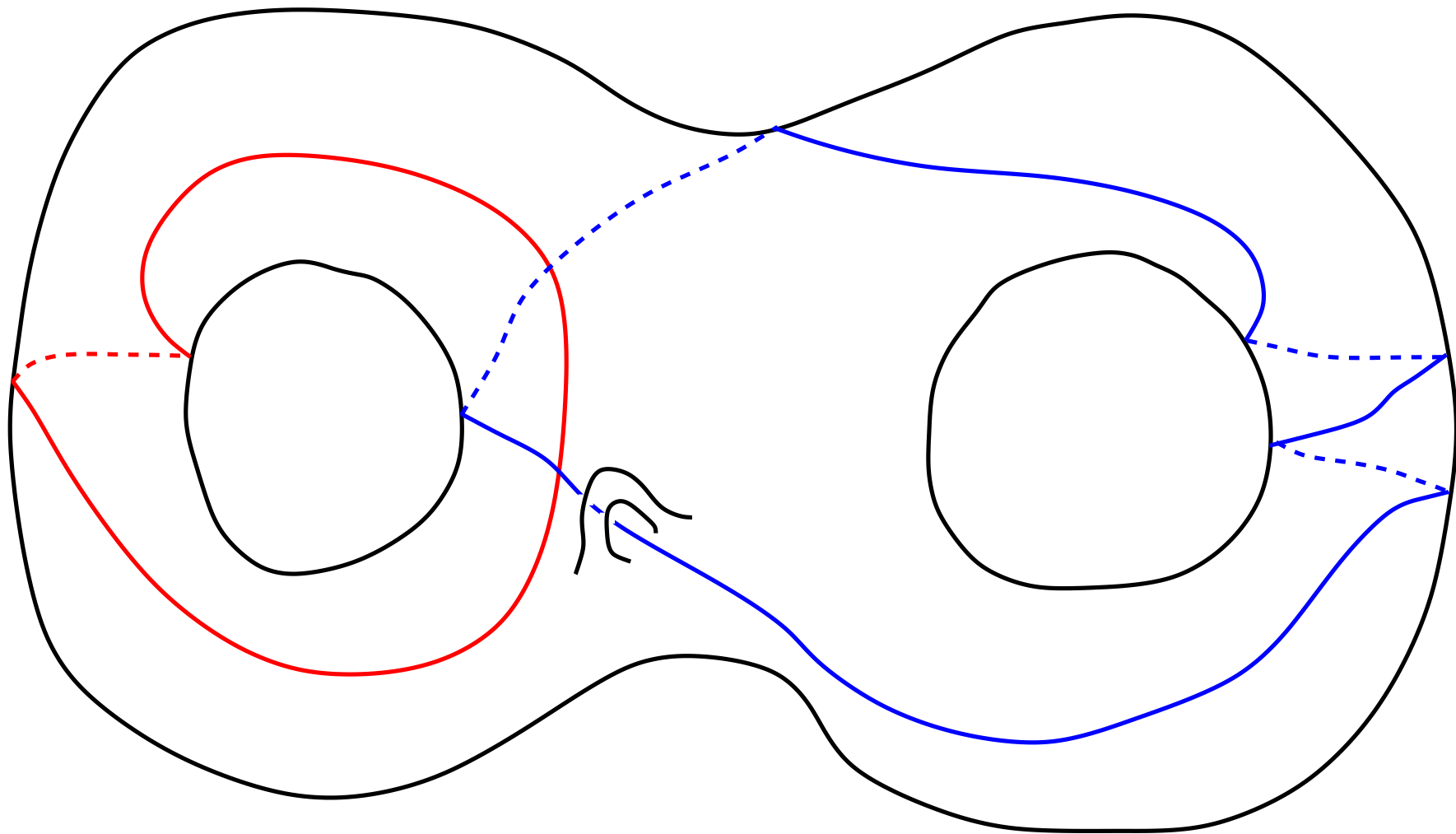


1) Comenzamos con una vecindad de  $F$ , le añadimos un número de 1-asas de un solo lado y le añadimos el mismo número de 2-asas del mismo lado.

El complemento de la unión anterior es una vecindad regular de  $F$ .

$$E(k) = (F \times [\frac{1}{2}, 1]) \cup U \cup D \cup (F \times [0, \frac{1}{2}])$$

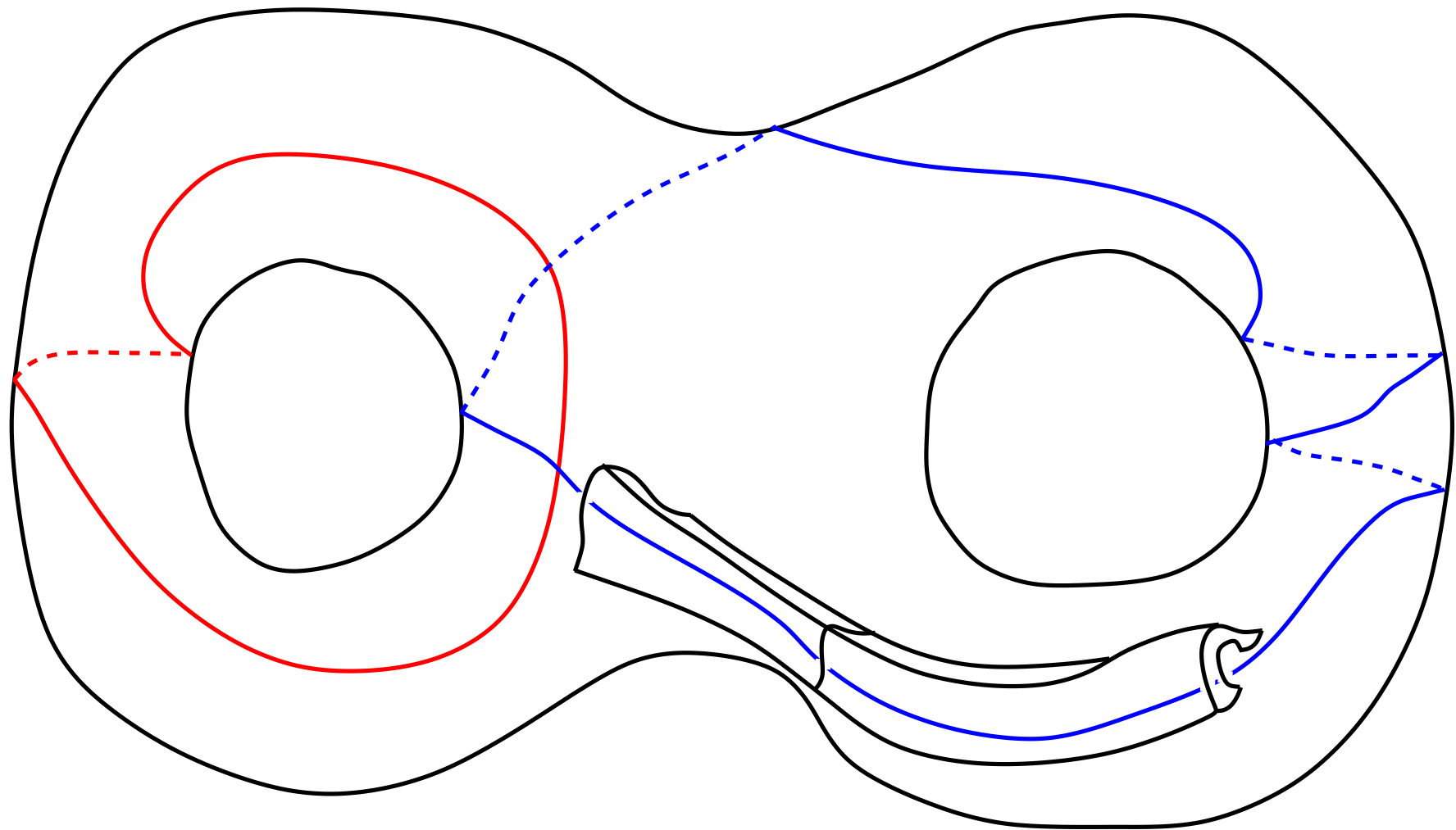
5<sub>2</sub>



$x$

$xy^2$

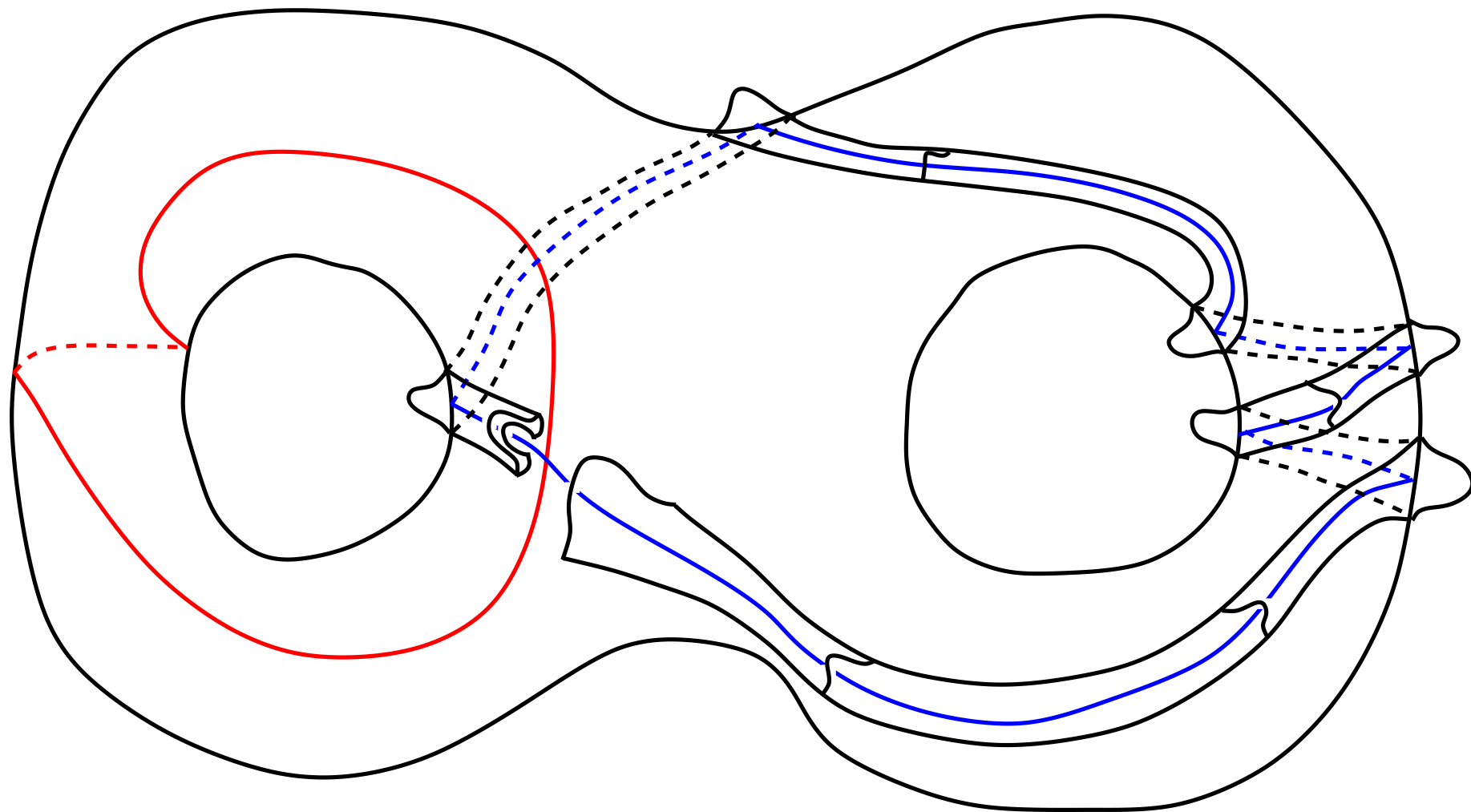
5<sub>2</sub>



$x$

$xy^2$

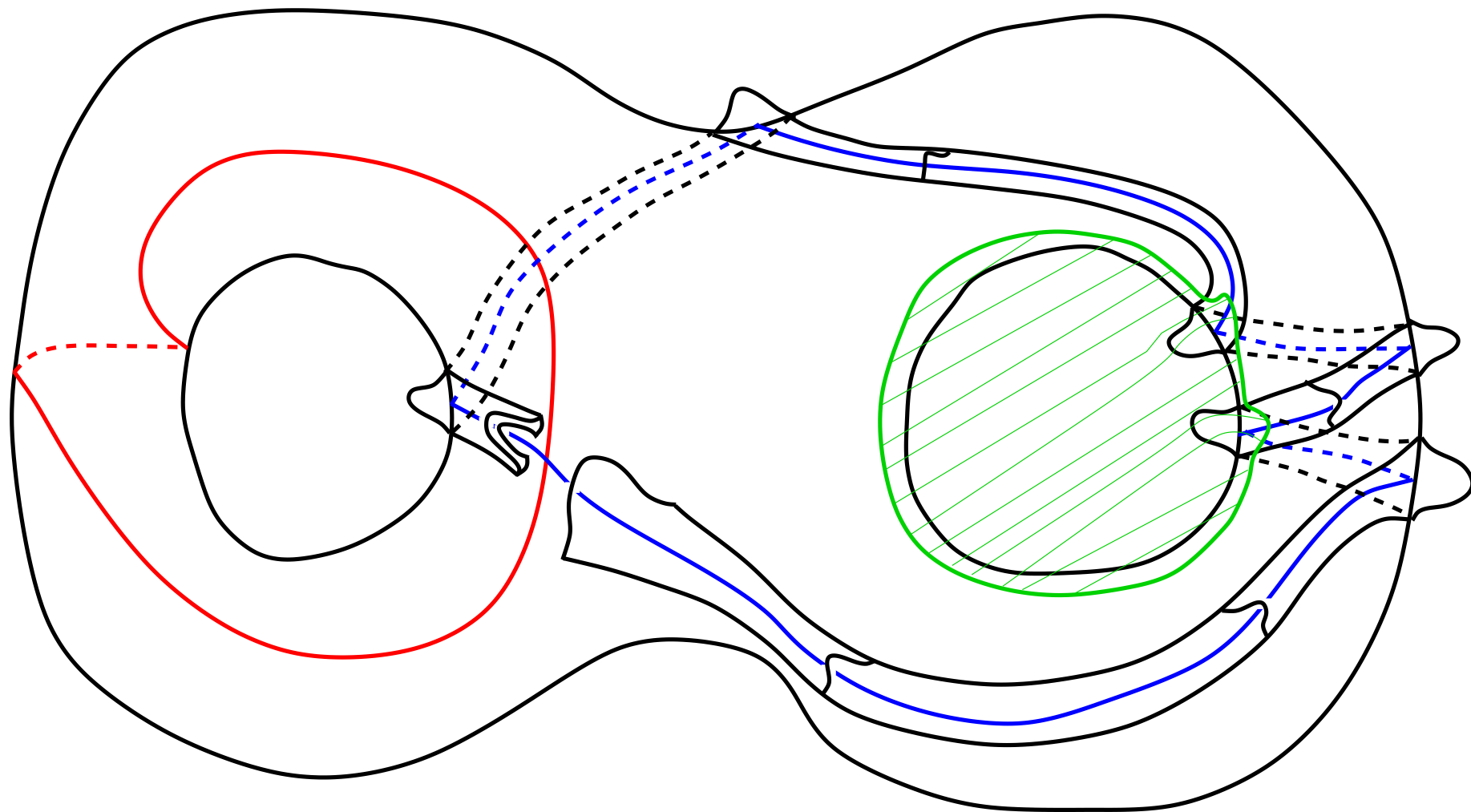
5<sub>2</sub>



$x$

$xy^2$

5<sub>2</sub>



$x$

$xy^2$

**Definición.** Sea  $F$  un grupo libre,  $w_1, \dots, w_n \in F$ . Entonces  $w_1, \dots, w_n$  se llaman *elementos primitivos asociados* de  $F$  si existe alguna base  $B$  de  $F$  tal que  $w_1, \dots, w_n \in B$ .

**Proposición.** Sea  $V$  un cubo con asas y  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \subset V$  curvas simples cerradas. Entonces  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  representan elementos primitivos asociados de  $\pi_1(V)$  si y sólo si existe un sistema de 2-discos  $D_1, \dots, D_n \subset V$  propiamente encajados tales que  $\alpha_i$  corta transversalmente a  $D_i$  en exactamente un punto y  $\alpha_i \cap D_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

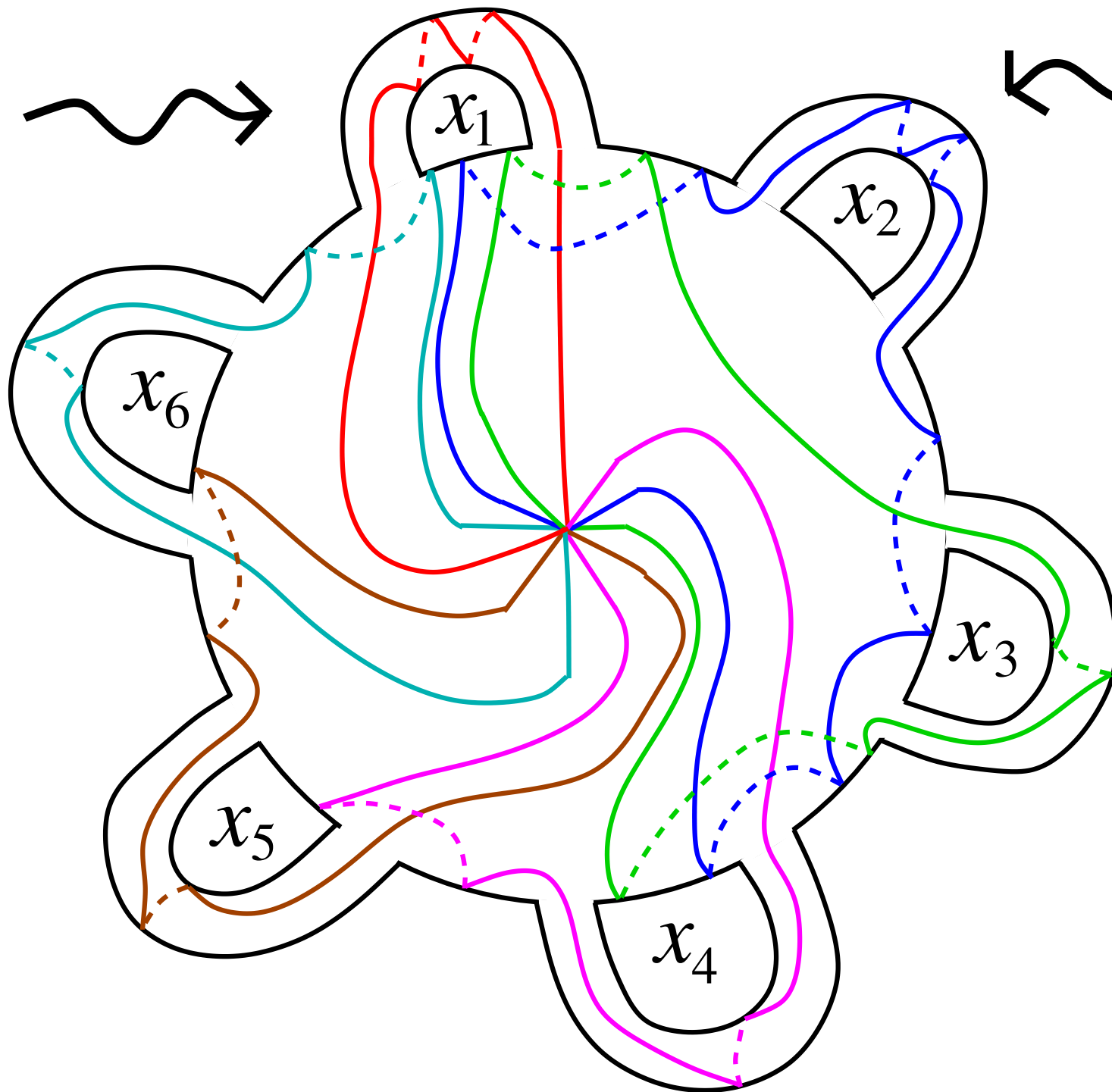
**Teorema.** Sean  $k \subset S^3$  un nudo,  $F$  una superficie de Seifert para  $k$  de género  $g$ . Supongamos que  $E(F)$  es un cubo con  $2g$  asas.

Si existe una espina  $\Gamma \cong \vee_1^{2g} S^1$  tal que  $2g - 1$  pétalos de  $\Gamma$  son elementos primitivos asociados, entonces  $k$  admite una descomposición circular basada en  $F$  con una sola 1-asa.

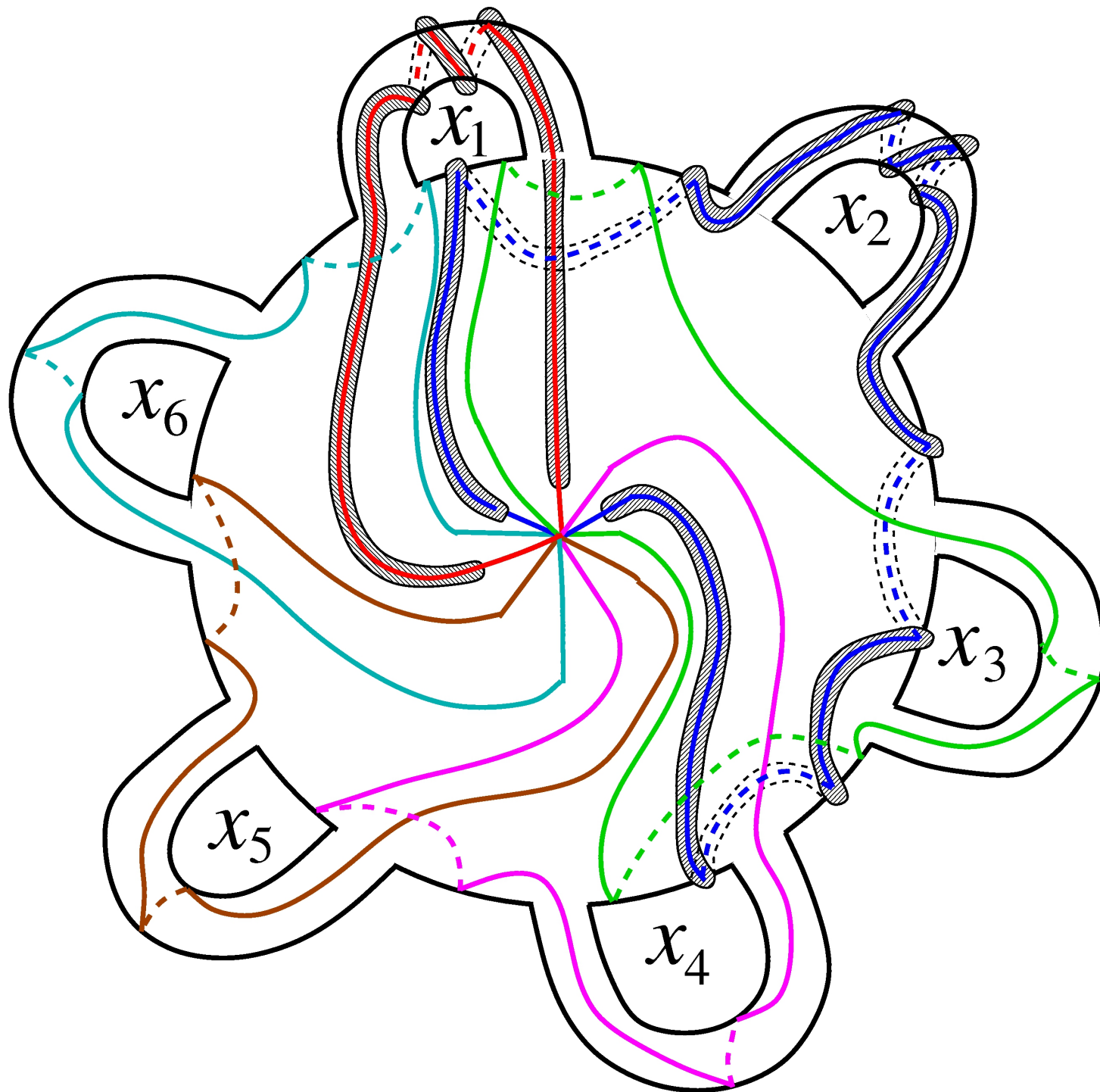
**Teorema.** Sea  $k \subset S^3$  un nudo,  $F$  una superficie de Seifert para  $k$  de género  $g$ . Supongamos que  $E(F)$  es un cubo con  $2g$  asas.

Si existe una espina  $\Gamma \cong \vee_1^{2g} S^1$  tal que  $\ell$  pétalos de  $\Gamma$  son elementos primitivos asociados en  $\pi_1(E(F))$ , entonces  $k$  admite una descomposición circular basada en  $F$  con  $2g - \ell$  1-asas.





- $x_1^2$
- $\bar{x}_4 x_3 x_1$
- $\bar{x}_1 x_2^2 x_3 x_4$
- $\bar{x}_1 x_6$
- $\bar{x}_6 x_5$
- $\bar{x}_5 x_4$



$$x_1^2$$

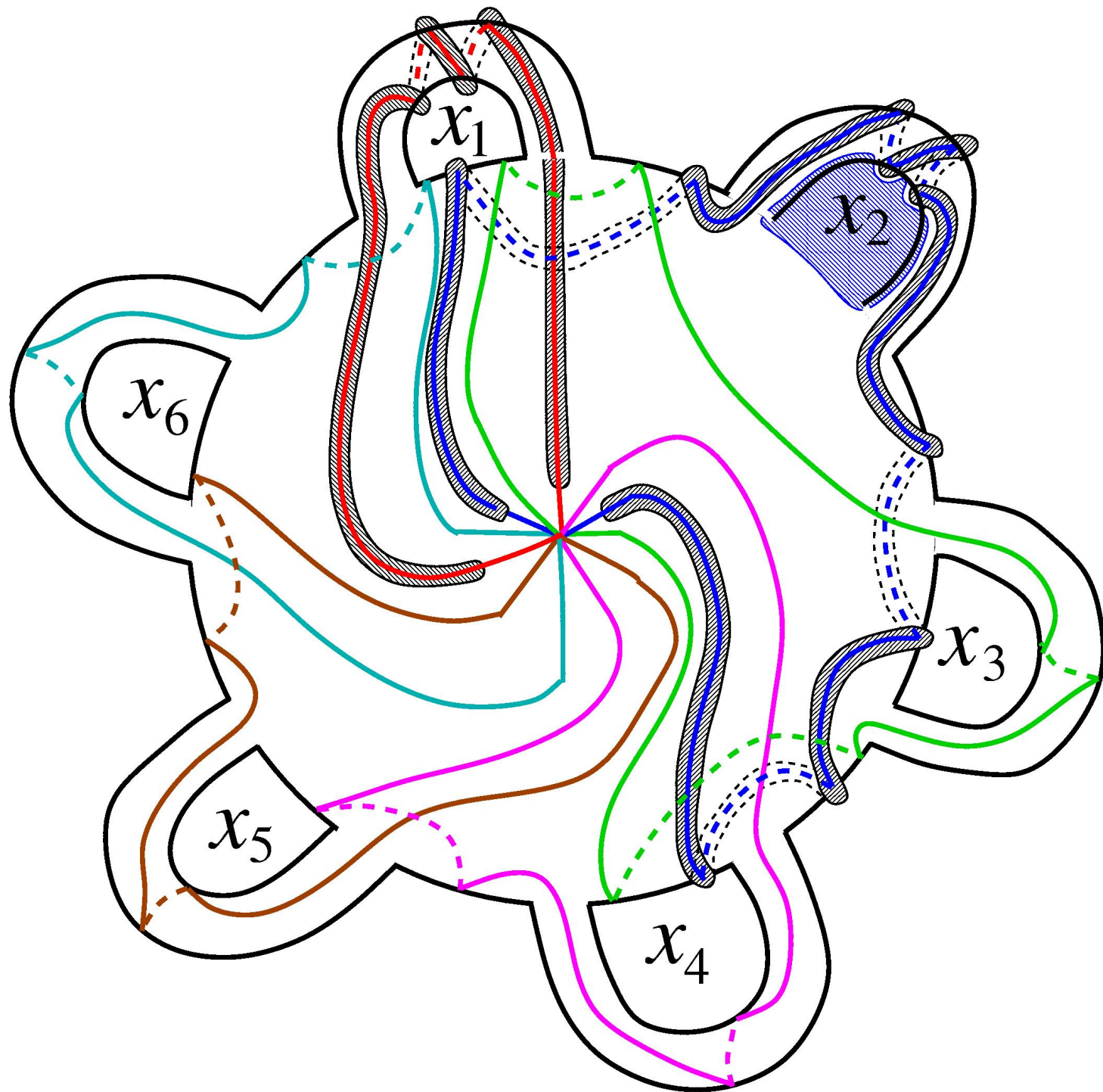
$$\bar{x}_4 x_3 x_1$$

$$\bar{x}_1 x_2^2 x_3 x_4$$

$$\bar{x}_1 x_6$$

$$\bar{x}_6 x_5$$

$$\bar{x}_5 x_4$$



$$x_1^2$$

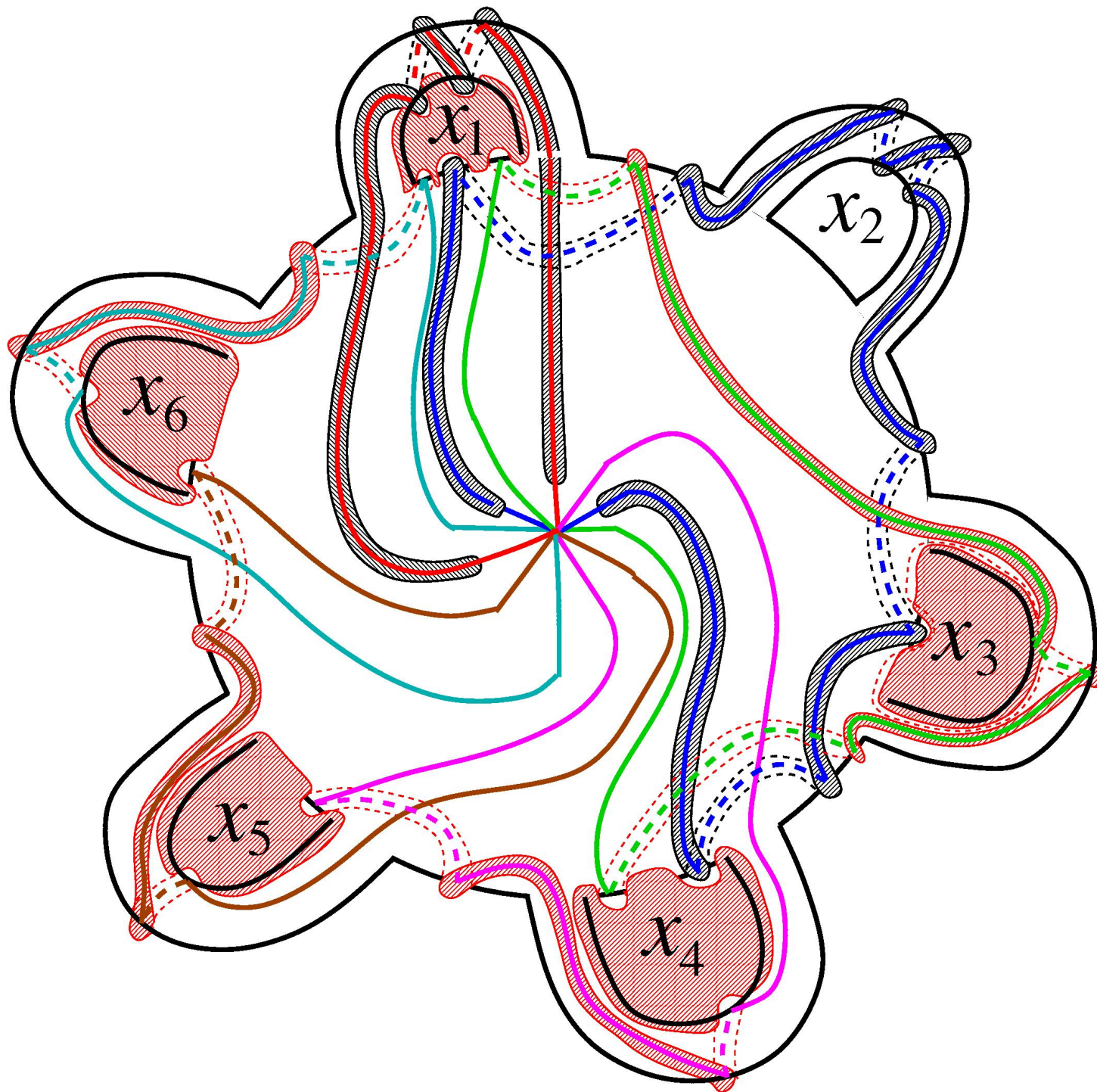
$$\bar{x}_4 x_3 x_1$$

$$\bar{x}_1 x_2^2 x_3 x_4$$

$$\bar{x}_1 x_6$$

$$\bar{x}_6 x_5$$

$$\bar{x}_5 x_4$$



$$x_1^2$$

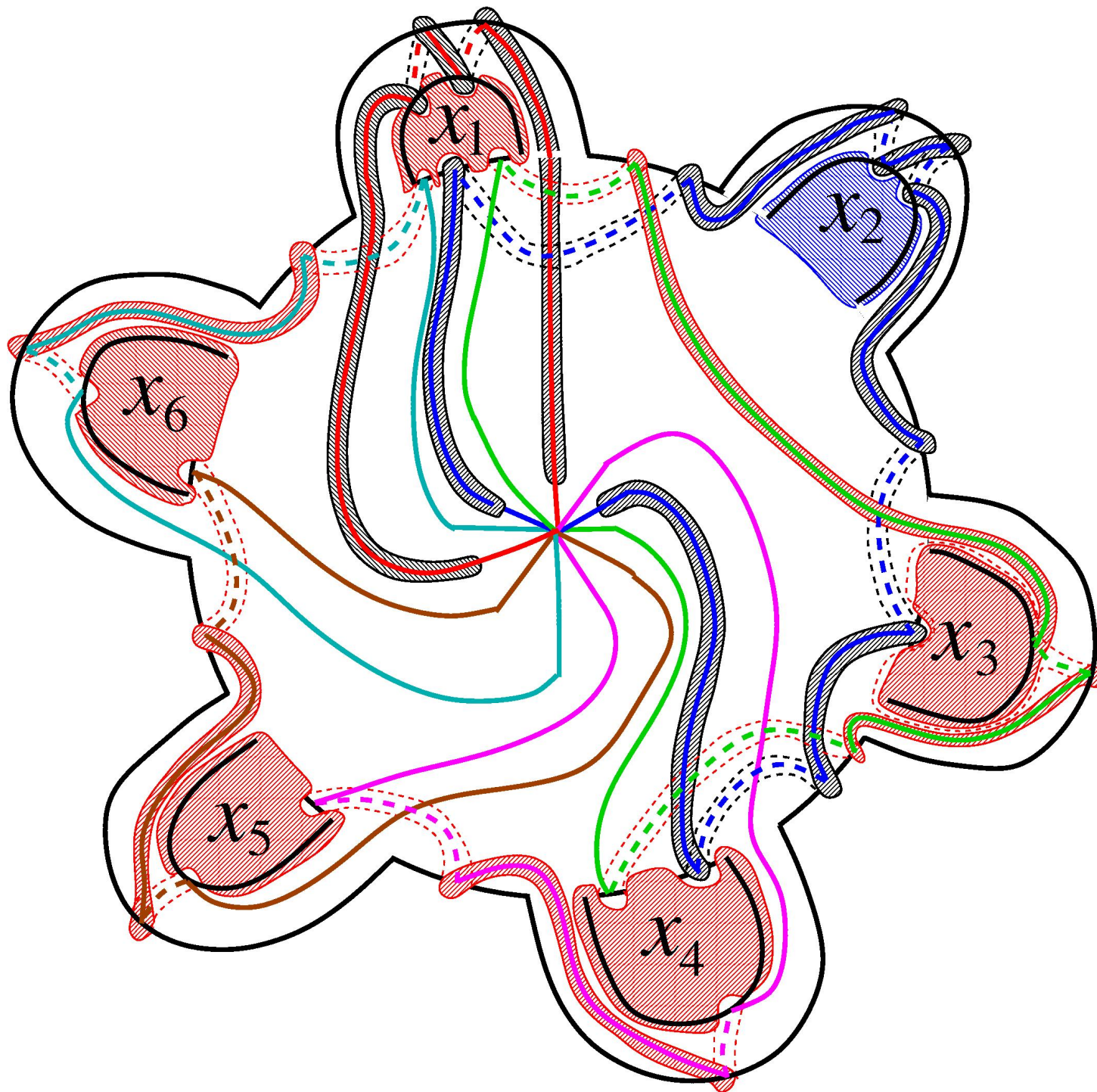
$$\bar{x}_4 x_3 x_1$$

$$\bar{x}_1 x_2^2 x_3 x_4$$

$$\bar{x}_1 x_6$$

$$\bar{x}_6 x_5$$

$$\bar{x}_5 x_4$$



$$x_1^2$$

$$\bar{x}_4 x_3 x_1$$

$$\bar{x}_1 x_2^2 x_3 x_4$$

$$\bar{x}_1 x_6$$

$$\bar{x}_6 x_5$$

$$\bar{x}_5 x_4$$

**Teorema.** Sea  $k \subset S^3$  un nudo,  $F$  una superficie de Seifert para  $k$  de género  $g$ . Supongamos que  $E(F)$  es un cubo con  $2g$  asas.

Si existe una espina  $\Gamma \cong \vee_1^{2g} S^1$  tal que  $\ell$  pétalos de  $\Gamma$  son elementos primitivos asociados en  $\pi_1(E(F))$ , entonces  $k$  admite una descomposición circular basada en  $F$  con  $2g - \ell$  1-asas.

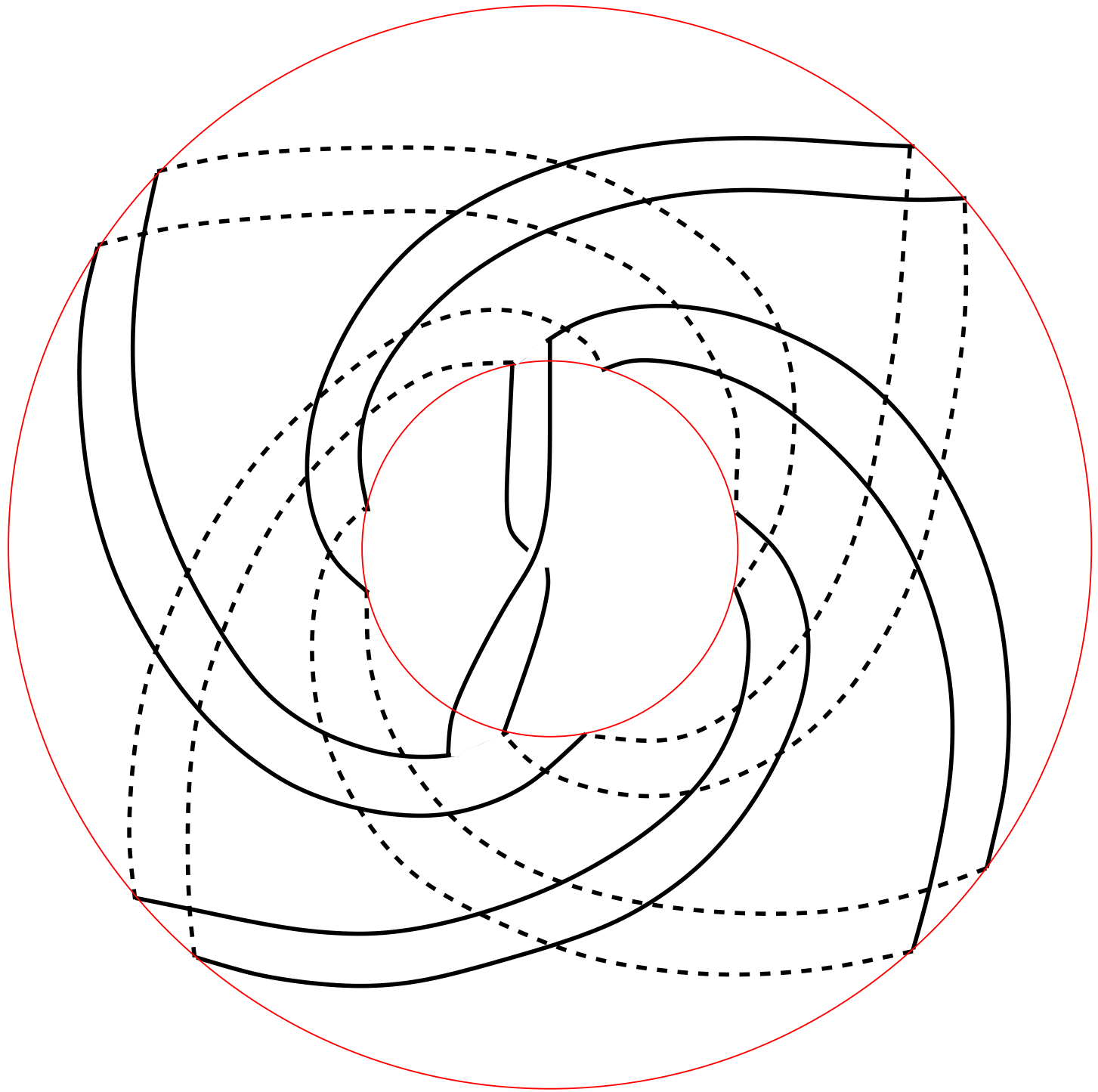
**Corolario.** Sea  $k \subset S^3$  un nudo,  $F$  una superficie de Seifert para  $k$  de género  $g$ . Supongamos que  $E(F)$  es un cubo con  $2g$  asas.

Entonces  $k$  admite una descomposición circular basada en  $F$  con  $2g$  1-asas.

**“Supongamos que  $E(F)$  es un cubo con  $2g$  asas”**

Es una hipótesis importante:





**Definición.** Sean  $k \subset S^3$  un nudo y  $F$  una superficie de Seifert para  $k$  de género  $g$ . Entonces  $F$  se llama *libre de género  $g$*  si el exterior  $E(F)$  es un cubo con  $g$  asas.

**Definición.** Sea  $k \subset S^3$  un nudo. El *género* de  $k$  es el número

$$g(k) = \min\{\text{género}(F) : F \text{ es superficie de Seifert para } k\}.$$

**Definición.** Sea  $k \subset S^3$  un nudo. Entonces  $k$  se llama *de género libre  $g$*  si existe  $F$  superficie de Seifert para  $k$  que es libre de género  $g$  y  $F$  realiza el género de  $k$ .

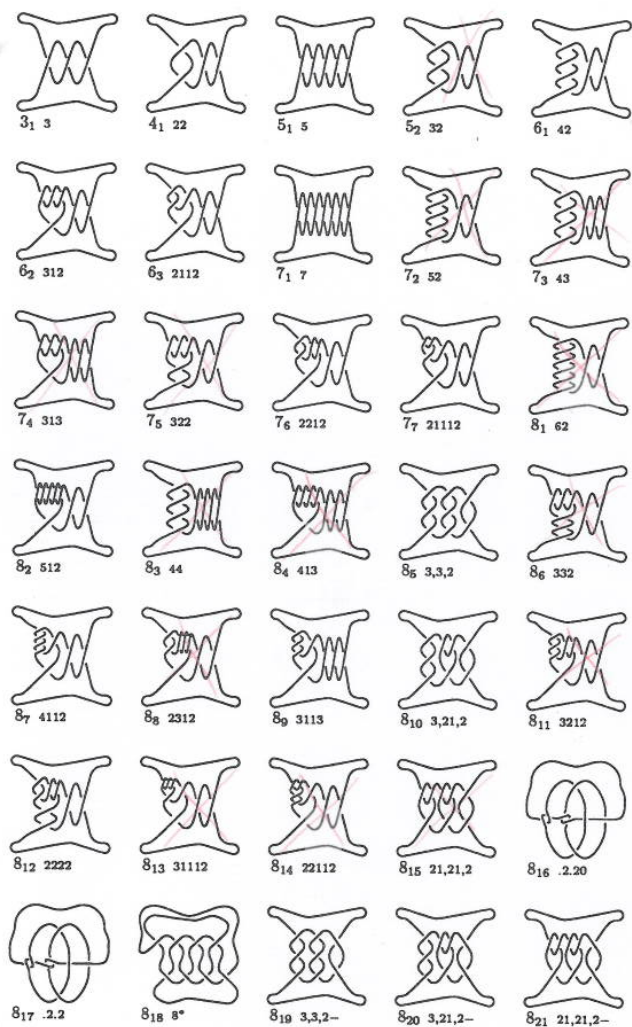
**Teorema.** Sea  $k \subset S^3$  un nudo de género libre  $g$  y sea  $F$  una superficie libre para  $k$  de género  $g$ .

Si existe una espina  $\Gamma \cong \vee_1^{2g} S^1$  tal que  $\ell$  pétalos de  $\Gamma$  son elementos primitivos asociados en  $\pi_1(E(F))$ , entonces  $k$  admite una descomposición circular basada en  $F$  con  $2g - \ell$  1-asas.

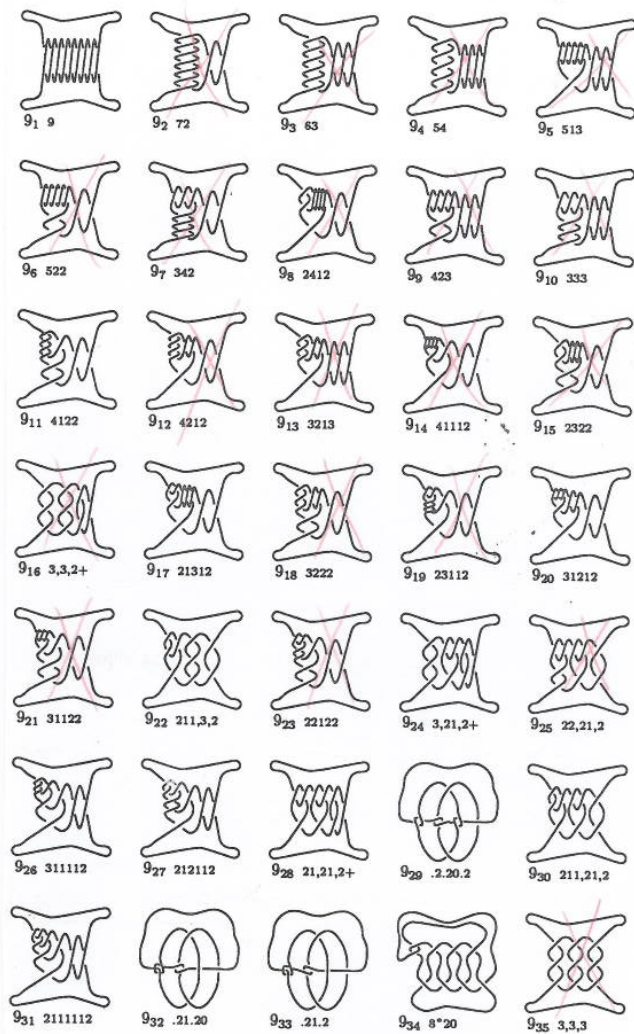
# Censo de nudos hasta diez cruces

F.1 KNOT DIAGRAM

F.1 knot diagram


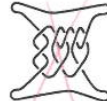





























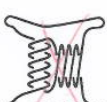
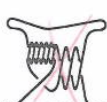








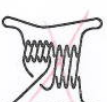

















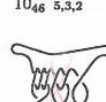









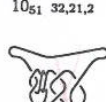


APPENDIX F TABLES OF DATA







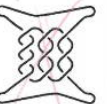
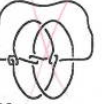
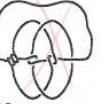
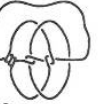
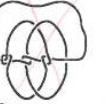
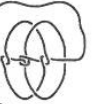




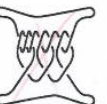
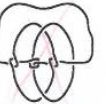
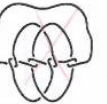
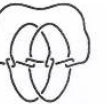

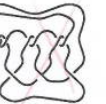




















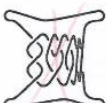
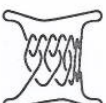


















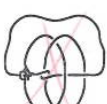









F.1 KNOT DIAGRAM

APPENDIX F TABLES OF DATA

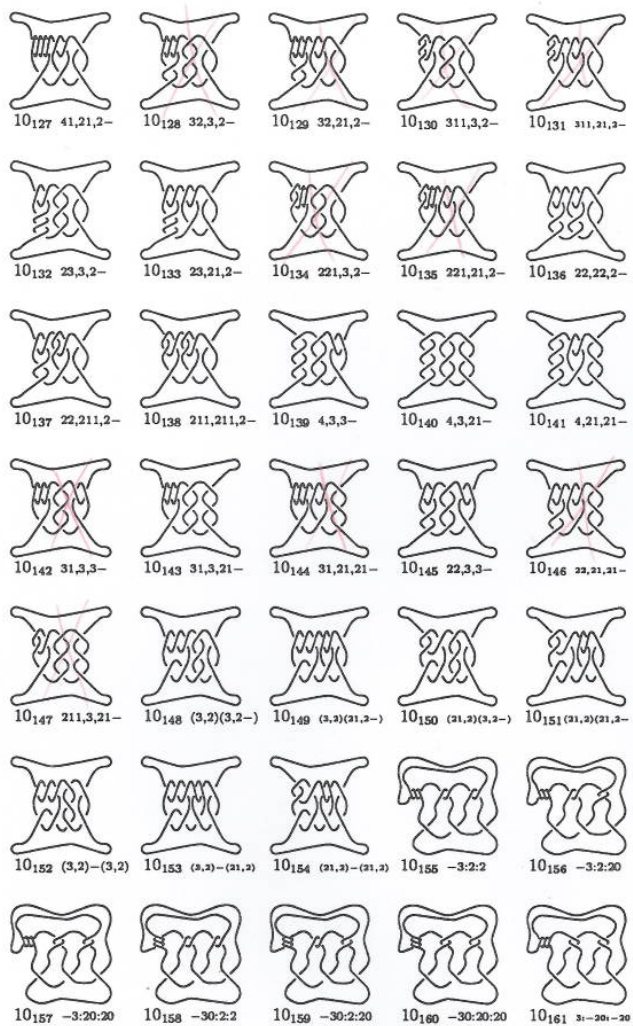
 936 22,3,2	 937 3,21,21	 938 .2.2.2	 939 2:2:20	 940 9*	 1022 3313	 1023 33112	 1024 3232	 1025 32212	 1026 32113
 941 20:20:20	 942 22,3,2-	 943 211,3,2-	 944 22,21,2-	 945 211,21,2-	 1027 321112	 1028 31312	 1029 31222	 1030 312112	 1031 31132
 946 3,3,21-	 947 8*-20	 948 21,21,21-	 949 -20:-20:-20	 101 82	 1032 311122	 1033 311113	 1034 2512	 1035 2422	 1036 24112
 102 712	 103 64	 104 613	 105 6112	 106 532	 1037 2332	 1038 23122	 1039 22312	 1040 222112	 1041 221212
 107 5212	 108 514	 109 5113	 1010 51112	 1011 433	 1042 2211112	 1043 212212	 1044 2121112	 1045 21111112	 1046 5,3,2
 1012 4312	 1013 4222	 1014 42112	 1015 4132	 1016 4123	 1047 5,21,2	 1048 41,3,2	 1049 41,21,2	 1050 32,3,2	 1051 32,21,2
 1017 4114	 1018 41122	 1019 41113	 1020 352	 1021 3412	 1052 311,3,2	 1053 311,21,2	 1054 23,3,2	 1055 23,21,2	 1056 221,3,2

F.1 KNOT DIAGRAM

APPENDIX F TABLES OF DATA

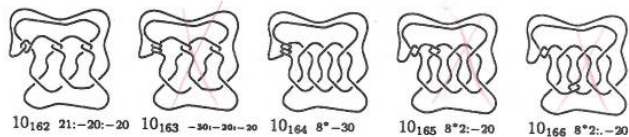
									
10 <sub>57</sub> 221,21,2	10 <sub>58</sub> 22,22,2	10 <sub>59</sub> 22,211,2	10 <sub>60</sub> 211,211,2	10 <sub>61</sub> 4,3,3	10 <sub>92</sub> .21.2.20	10 <sub>93</sub> .3.20.2	10 <sub>94</sub> .30.2.2	10 <sub>95</sub> .210.2.2	10 <sub>96</sub> .2.21.2
									
10 <sub>62</sub> 4,3,21	10 <sub>63</sub> 4,21,21	10 <sub>64</sub> 31,3,3	10 <sub>65</sub> 31,3,21	10 <sub>66</sub> 31,21,21	10 <sub>97</sub> .2.210.2	10 <sub>98</sub> .2.2.2.20	10 <sub>99</sub> .2.2.20.20	10 <sub>100</sub> 3:2:2	10 <sub>101</sub> 21:2:2
									
10 <sub>67</sub> 22,3,21	10 <sub>68</sub> 211,3,3	10 <sub>69</sub> 211,21,21	10 <sub>70</sub> 22,3,2+	10 <sub>71</sub> 22,21,2+	10 <sub>102</sub> 3:2:20	10 <sub>103</sub> 30:2:2	10 <sub>104</sub> 3:20:20	10 <sub>105</sub> 21:20:20	10 <sub>106</sub> 30:2:20
									
10 <sub>72</sub> 211,3,2+	10 <sub>73</sub> 211,21,2+	10 <sub>74</sub> 3,3,21+	10 <sub>75</sub> 21,21,21+	10 <sub>76</sub> 3,3,2++	10 <sub>107</sub> 210:2:20	10 <sub>108</sub> 30:20:20	10 <sub>109</sub> 2.2.2.2	10 <sub>110</sub> 2.2.2.20	10 <sub>111</sub> 2.2.20.2
									
10 <sub>77</sub> 3,21,2++	10 <sub>78</sub> 21,21,2++	10 <sub>79</sub> (3,2)(3,2)	10 <sub>80</sub> (3,2)(21,2)	10 <sub>81</sub> (21,2)(21,2)	10 <sub>112</sub> 8*3	10 <sub>113</sub> 8*21	10 <sub>114</sub> 8*30	10 <sub>115</sub> 8*20:20	10 <sub>116</sub> 8*2:2
									
10 <sub>82</sub> 4.2	10 <sub>83</sub> .31.2	10 <sub>84</sub> .22.2	10 <sub>85</sub> .4.20	10 <sub>86</sub> .31.20	10 <sub>117</sub> 8*2:20	10 <sub>118</sub> 8*2:2	10 <sub>119</sub> 8*2:20	10 <sub>120</sub> 8*20:20	10 <sub>121</sub> 9*20
									
10 <sub>87</sub> .22.20	10 <sub>88</sub> .21.21	10 <sub>89</sub> .21.210	10 <sub>90</sub> .3.2.2	10 <sub>91</sub> .3.2.20	10 <sub>122</sub> 9*.20	10 <sub>123</sub> 10*	10 <sub>124</sub> 5,3,2-	10 <sub>125</sub> 5,21,2-	10 <sub>126</sub> 41,3,2-

F.1 KNOT DIAGRAM



26<sup>2</sup>

APPENDIX F TABLES OF DATA



120 si'  
 130 no  


---

 250 total



# Nudos fibrados

F.1 KNOT DIAGRAM







































































F.1 knot diagram

APPENDIX F TABLES OF DATA

			<del></del>			<del></del>	<del></del>	<del></del>	<del></del>
			<del></del>	<del></del>	<del></del>	<del></del>	<del></del>	<del></del>	<del></del>
<del></del>	<del></del>			<del></del>		<del></del>	<del></del>	<del></del>	<del></del>
	<del></del>	<del></del>		<del></del>	<del></del>		<del></del>		
	<del></del>			<del></del>	<del></del>		<del></del>		<del></del>
	<del></del>	<del></del>	<del></del>						
									<del></del>








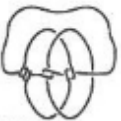

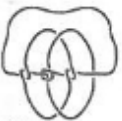












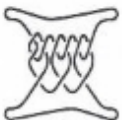


















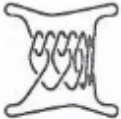







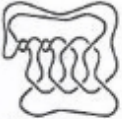
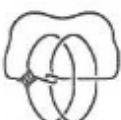







































F.1 KNOT DIAGRAM

APPENDIX F TABLES OF DATA

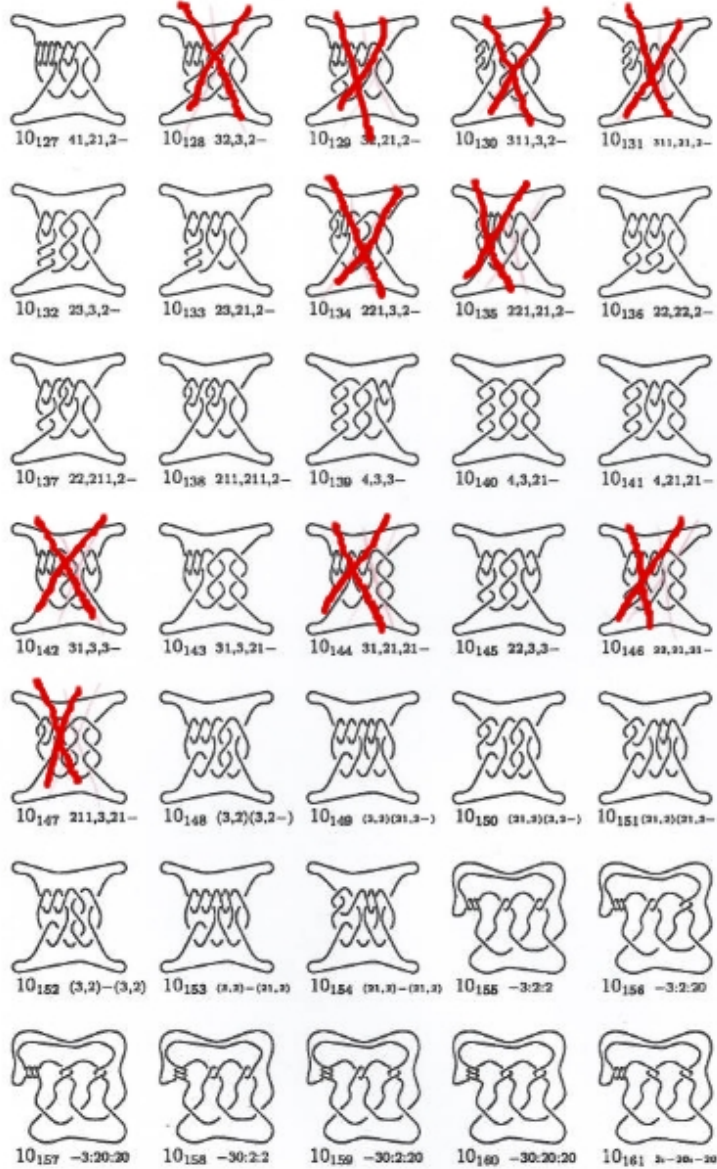
 936 22,3,2	<del></del> 937 3,21,21	<del></del> 938 2,2,2	<del></del> 939 2:2:20	 940 9*	<del></del> 1022 3313	<del></del> 1023 33112	<del></del> 1024 3232	<del></del> 1025 32212	<del></del> 1026 3213
<del></del> 941 20:20:20	 942 22,3,2-	 943 211,3,2-	 944 22,21,2-	 945 211,21,2-	<del></del> 1027 321112	<del></del> 1028 31312	 1029 31222	<del></del> 1030 312112	<del></del> 1031 31132
<del></del> 946 3,3,21-	 947 5*-20	 948 21,21,21-	<del></del> 949 20:-:-:-20	<del></del> 101 82	<del></del> 1032 311122	<del></del> 1033 311113	 1034 2512	<del></del> 1035 2422	<del></del> 1036 24112
 102 712	<del></del> 103 64	<del></del> 104 613	 105 6112	<del></del> 106 532	<del></del> 1037 2332	<del></del> 1038 23122	<del></del> 1039 22312	<del></del> 1040 222112	 1041 221212
<del></del> 107 5212	<del></del> 108 514	 109 5113	<del></del> 1010 51112	<del></del> 1011 433	 1042 2211112	 1043 212212	 1044 2121112	 1045 21111112	 1046 5,3,2
<del></del> 1012 4312	<del></del> 1013 4222	<del></del> 1014 42112	<del></del> 1015 413	<del></del> 1016 412	 1047 5,21,2	 1048 41,3,2	<del></del> 1049 41,21,2	<del></del> 1050 32,3,2	<del></del> 1051 32,21,2
 1017 4114	<del></del> 1018 41122	<del></del> 1019 41113	<del></del> 1020 352	<del></del> 1021 3412	<del></del> 1052 311,3,2	<del></del> 1053 311,21,2	<del></del> 1054 23,3,2	<del></del> 1055 23,21,2	<del></del> 1056 221,3,2

F.1 KNOT DIAGRAM

APPENDIX F TABLES OF DATA

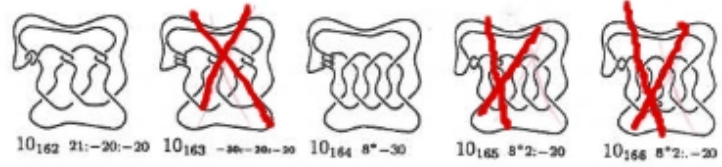
<del></del> 10 <sub>57</sub> 221,21,2	<del></del> 10 <sub>58</sub> 22,22,2			<del></del> 10 <sub>61</sub> 4,3,3	<del></del> 10 <sub>62</sub> .21,2,20	<del></del> 10 <sub>63</sub> 3,30,2		<del></del> 10 <sub>65</sub> .210,2,2	
	<del></del> 10 <sub>63</sub> 4,21,21		<del></del> 10 <sub>65</sub> 31,3,21	<del></del> 10 <sub>66</sub> 31,21,21	<del></del> 10 <sub>67</sub> .2,210,2	<del></del> 10 <sub>68</sub> 2,2,2,20			<del></del> 10 <sub>71</sub> 21,2,2
<del></del> 10 <sub>67</sub> 22,3,21	<del></del> 10 <sub>68</sub> 211,3,3				<del></del> 10 <sub>72</sub> 3,2,20	<del></del> 10 <sub>73</sub> 30,2,2			
<del></del> 10 <sub>72</sub> 211,3,2+		<del></del> 10 <sub>74</sub> 3,3,21+		<del></del> 10 <sub>76</sub> 3,3,2++		<del></del> 10 <sub>78</sub> 210,2,20	<del></del> 10 <sub>79</sub> 30,30,20		
<del></del> 10 <sub>77</sub> 3,21,2++			<del></del> 10 <sub>80</sub> (3,2)(21,2)			<del></del> 10 <sub>83</sub> 8*21	<del></del> 10 <sub>84</sub> 8*30		
	<del></del> 10 <sub>83</sub> 31,2	<del></del> 10 <sub>84</sub> .22,2		<del></del> 10 <sub>86</sub> 31,20			<del></del> 10 <sub>89</sub> 8*2,20	<del></del> 10 <sub>90</sub> 8*20,20	<del></del> 10 <sub>91</sub> 9*20
	<del></del> 10 <sub>83</sub> 31,2	<del></del> 10 <sub>84</sub> .22,2		<del></del> 10 <sub>86</sub> 31,20			<del></del> 10 <sub>89</sub> 8*2,20	<del></del> 10 <sub>90</sub> 8*20,20	<del></del> 10 <sub>91</sub> 9*20
<del></del> 10 <sub>87</sub> .22,20			<del></del> 10 <sub>90</sub> 3,2,2		<del></del> 10 <sub>92</sub> 9*,20				
			<del></del> 10 <sub>90</sub> 3,2,2		<del></del> 10 <sub>92</sub> 9*,20				

F.1 KNOT DIAGRAM



262  
26:

APPENDIX F TABLES OF DATA



120 si'  
130 no  

---

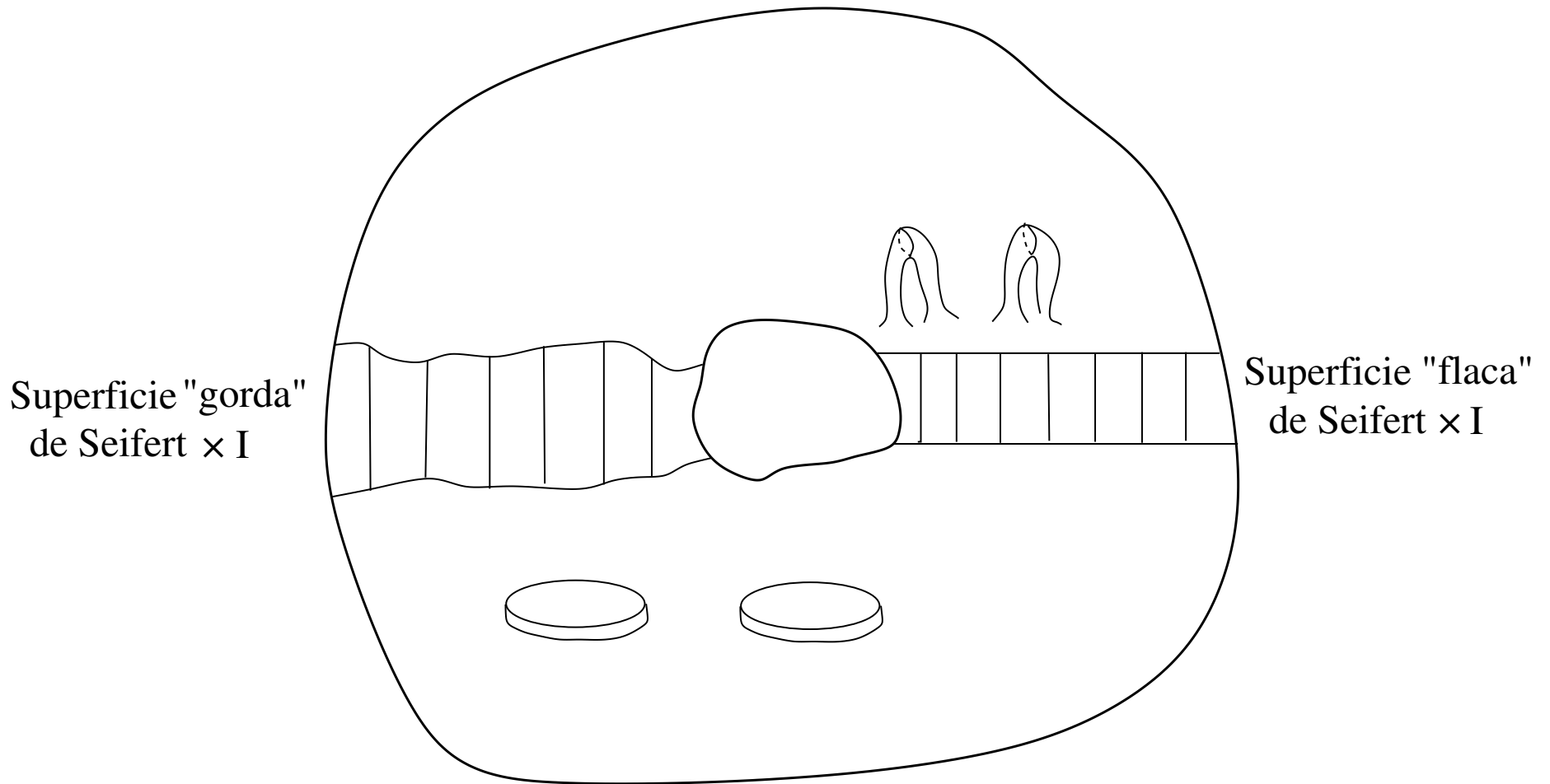
250 total

**Teorema** (H. Goda). Los nudos de hasta diez cruces que no están fibrados, admiten una descomposición circular con una sola 1-asa basada en una superficie de Seifert de género mínimo.

### 3er. caso

Supongamos que la función  $f : E(k) \rightarrow S^1$  tiene exactamente cuatro puntos críticos: dos de índice 1 y dos de índice 2.

$E(k)$

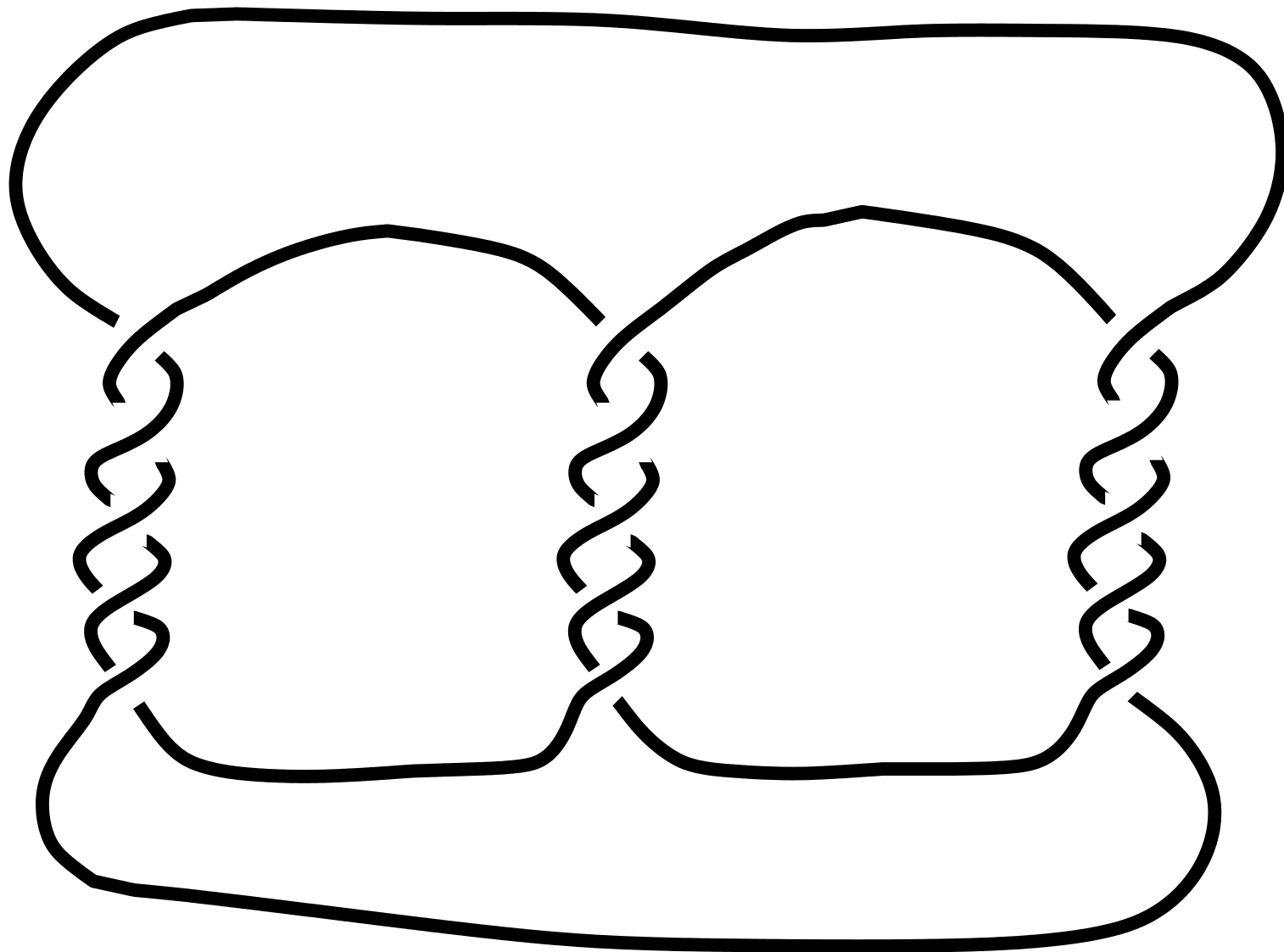


# Lo que sabemos.

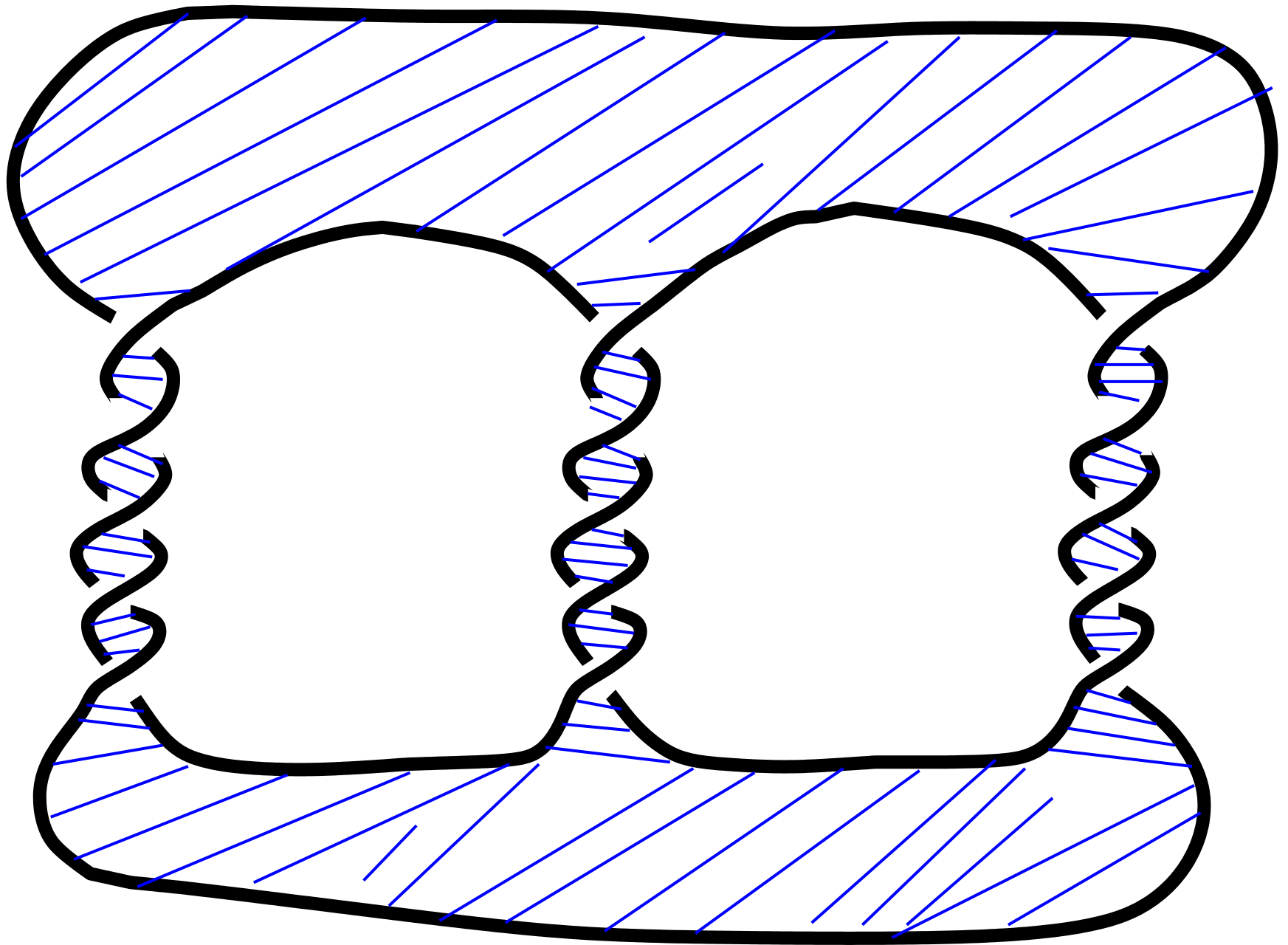
- Si  $k$  es un enlace (un nudo de más de una componente), entonces es posible encontrar invariantes topológico-algebraicos “fáciles” de  $E(k)$  que a veces detectan si cualquier descomposición circular de  $k$  basada en una superficie de género mínimo necesita más de una 1-asa.
- Si  $k$  no tiene género libre, también es posible encontrar invariantes topológico-algebraicos (ya no tan fáciles) que a veces detectan si cualquier descomposición circular de  $k$  basada en una superficie de género mínimo necesita más de una 1-asa (propiedades específicas del grupo fundamental del exterior de una superficie de Seifert dada).
- Si  $k$  tiene género libre mayor o igual a 2, es concebible que pueda haber invariantes topológico-algebraicos calculables que a veces detecten si cualquier descomposición circular de  $k$  basada en una superficie de género mínimo necesita más de una 1-asa.



**Los nudos de género libre 1 son interesantes.**



El nudo pretzel  $p(5,5,5)$



## **Teorema** (Teragaito).

Sea  $k$  el nudo pretzel  $p(r, s, t)$  con  $r, s$  y  $t$  enteros impares y  $|r|, |s|, |t| \geq 3$ .

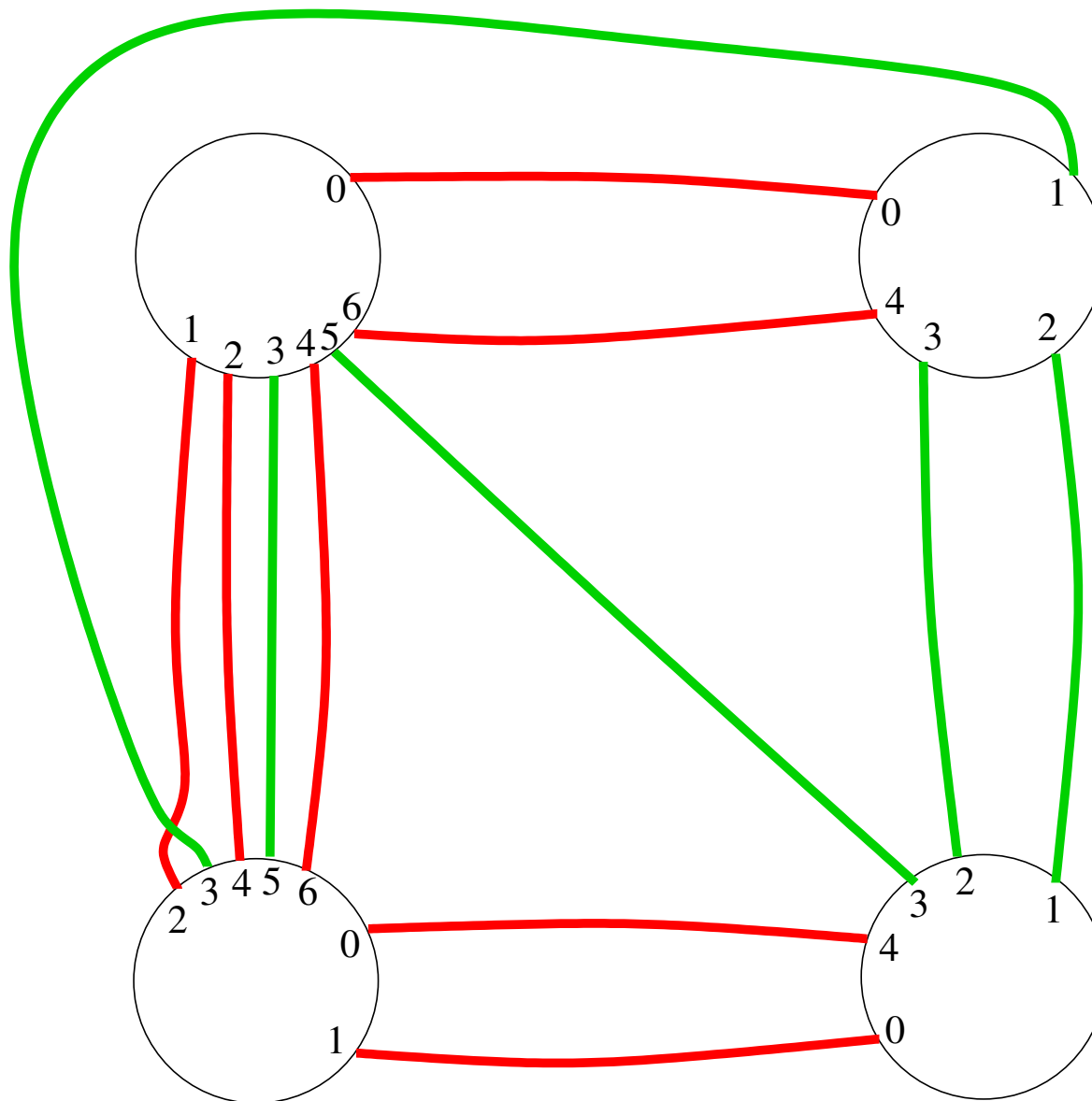
Entonces  $k$  tiene una única superficie de Seifert de género 1 (que es libre).

## **Teorema.**

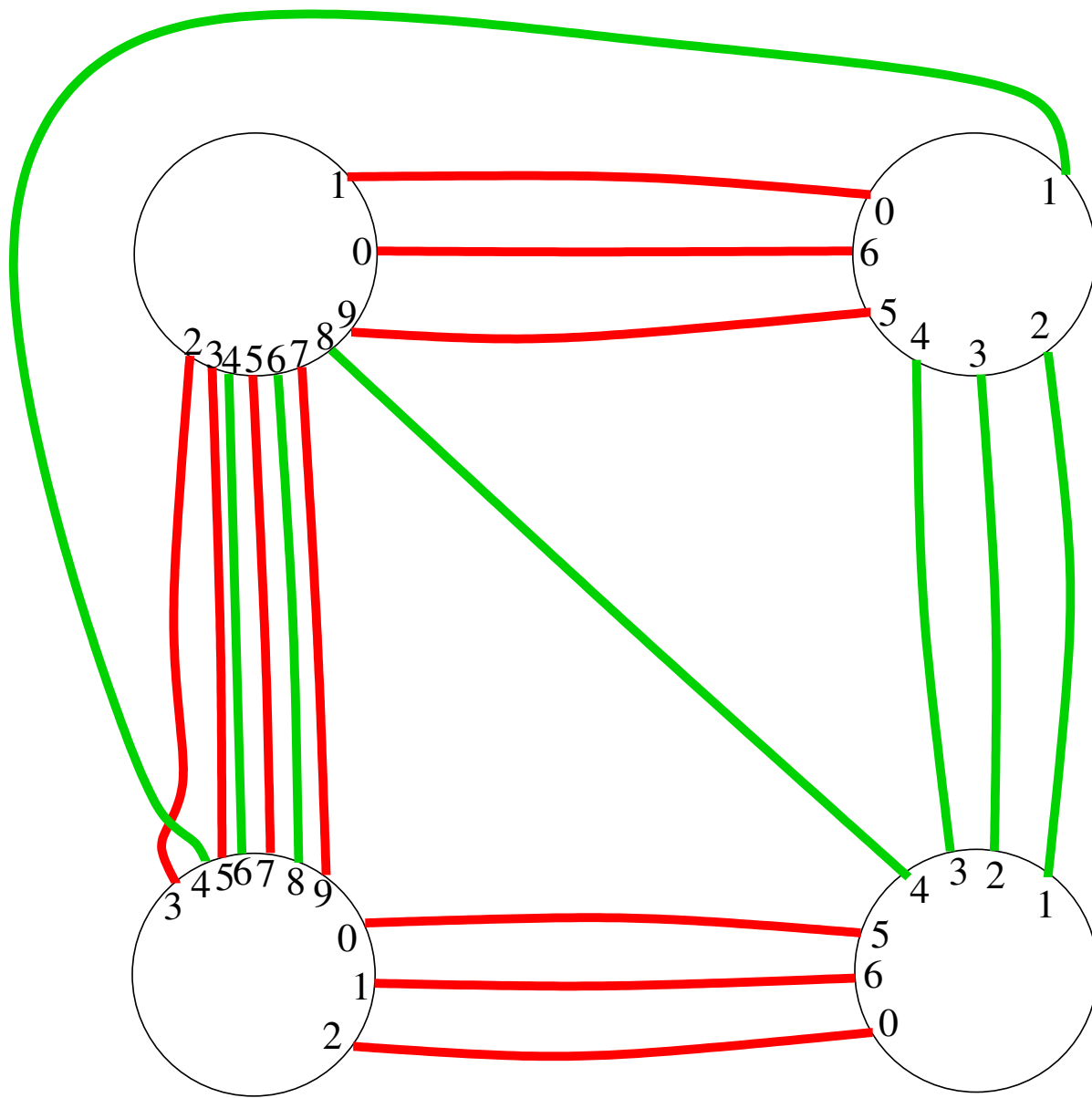
Sea  $k$  el nudo pretzel  $p(r, s, t)$  con  $r, s$  y  $t$  enteros impares y  $|r|, |s|, |t| \geq 5$ .

Entonces cualquier descomposición circular de  $k$  basada en su superficie de género 1 necesita dos 1-asas.

(i.e.,  $E(k)$  no se puede descomponer circularmente con una sola 1-asa)



$p(5,5,5)$



$p(7,7,7)$

2) Tomamos el exterior  $E(F)$  y le retiramos un cierto número de 2-asas y el mismo número de 1-asas.

El espacio resultante es una vecindad regular de  $F$ .

$$E(k) = (F \times [\frac{1}{2}, 1]) \cup U \cup D \cup (F \times [0, \frac{1}{2}])$$

**El estudio de las descomposiciones circulares de nudos se puede hacer mucho más sutil:**

De manera natural surgen las nociones de “nudo fibrado”, “nudo casi-fibrado”, “nudo casi-casi-fibrado”, etc.

La búsqueda de ejemplos y las demostraciones de sus propiedades se vuelven considerablemente más difíciles y fascinantes.