CUBIERTAS RAMIFICADAS

En este curso entenderemos lo siguiente:

espacio topológico = subconjunto de R^n

función continua = función continua.

Usualmente nuestros espacios serán conexos; de hecho conectables por trayectorias (más aún, también serán localmente conectables por trayectorias cuando se necesite). Estas exigencias no son la gran cosa para el tipo de objetos que usaremos. Por ejemplo cualquier abierto de R^n conexo satisface todo esto y cualquier variedad conexa (después explicaremos qué es una variedad) también.

GRUPO FUNDAMENTAL

Escribimos $I = [0,1] \subset R$.

DEFINICIÓN. "Homotopía entre funciones"

Sean X y Y espacios topológicos; $f, g : X \to Y$ funciones continuas

$\Rightarrow$

f se llama *homotópica* a g ssi existe $H : X \times I \to Y$ continua tal que

$$H(x,0) = f(x)$$

$$H(x,1) = g(x)$$

para toda $x \in X$.

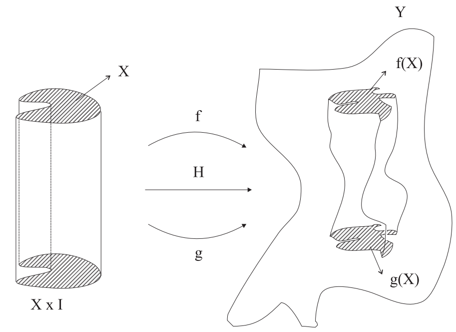
Se escribe, a veces, $f \simeq g$ y, también, $f \overset{H}{\simeq} g$.

Nótese que para $f, g, h : X \to Y$ se tiene:

$f \overset{H}{\simeq} f$ (la homotopía H se define como $H(x,t) = f(x)$).

Si $f \overset{H}{\simeq} g$, entonces $g \overset{G}{\simeq} f$ (definimos $G(x,t) = H(x, 1-t)$).

Si $f \overset{H}{\simeq} g$ y $g \overset{G}{\simeq} h$, entonces $f \overset{F}{\simeq} h$ (definimos $F(x,t) = \begin{cases} H(x,2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(x, 2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$).



Nota: Mucha gente dice que dos funciones f y g son homotópicas si f se puede "deformar continuamente" sobre g. Nosotros preferimos decir que f es homotópica a g si "hay sustancia entre" f y g (la sustancia estará "bien acomodada", por supuesto).

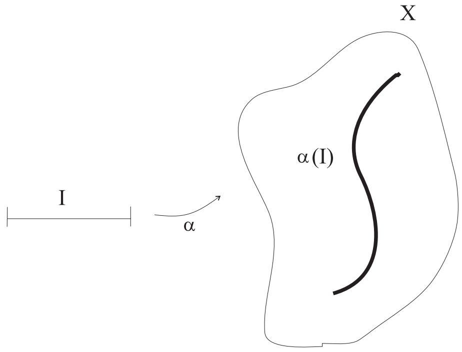
DEFINICIÓN. "Trayectoria"

Sean X espacio topológico y $\alpha : I \to X$ función

$\Rightarrow$

α se llama *trayectoria* en X ssi α es continua.

Nota: Si α es una trayectoria en X, nos gusta mucho confundir a α con su imagen $\alpha(I)$



Pero esto puede ser peligroso:

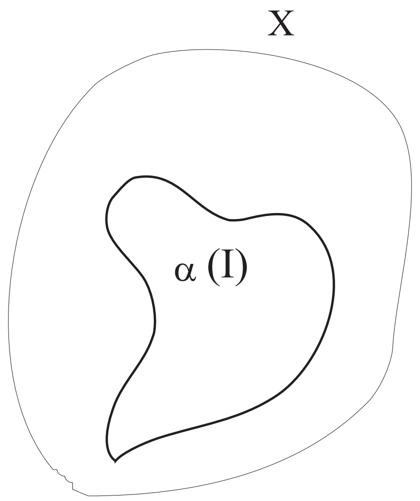
EJEMPLO. Sean $\alpha, \beta : I \to R^2$ las trayectorias en el plano dadas como $\alpha(t) = (t, 0)$ y $\beta(t) = \begin{cases} (2t, 0) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (-2t + 2, 0) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$. Entonces α y β tienen la misma imagen, $\alpha(I) = \beta(I) = [0, 1] \times \{0\}$, pero β recorre dos veces el mismo camino.

DEFINICIÓN. "Lazo basado en x_0"

Sean X espacio topológico, $x_0 \in X$ y $\alpha : I \to X$ trayectoria

$\Rightarrow$

α se llama un *lazo basado en* x_0 ssi $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$.



DEFINICIÓN. "Homotopía de lazos basados en x_0"

Sean X espacio topológico, $x_0 \in X$ y $\alpha, \beta : I \to X$ lazos basados en x_0

$\Rightarrow$

α se llama *homotópica a* β *respecto al punto base* x_0 ssi existe $H : I \times I \to X$ continua tal que

$$H(t, 0) = \alpha(t),$$

$$H(t, 1) = \beta(t),$$

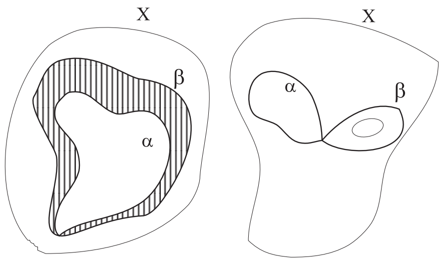
$$H(0, s) = H(1, s) = x_0$$

para todo $s, t \in I$.

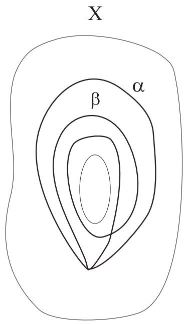
Si α es homotópica a β respecto al punto base, se escribe $\alpha \simeq \beta$ rel $\{0, 1\}$.

Se puede ver que $\simeq$ rel $\{0, 1\}$ es una relación de equivalencia entre los lazos de X basados en x_0.

EJEMPLOS.



Homotópicos No homotópicos



No homotópicos

DEFINICIÓN. "Producto de lazos"

Sean $\alpha, \beta : I \to X$ lazos basados en $x_0 \in X$

$\Rightarrow$

se define $\alpha * \beta : I \to X$ como $(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$.

El lazo $\alpha * \beta$ se llama el *producto* de α con β.

DEFINICIÓN. "Grupo fundamental"

Sean X espacio topológico y $x_0 \in X$.

Escribimos $[\alpha] = \{\beta : I \to X$ lazo basado en $x_0 : \alpha \simeq \beta$ rel $\{0,1\}\}$, la clase de equivalencia de α, para $\alpha : I \to X$ lazo basado en x_0.

Para $\alpha, \beta : I \to X$ lazos basados en x_0 definimos $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$.

Escribimos $\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha] : \alpha$ es lazo basado en $x_0\}$

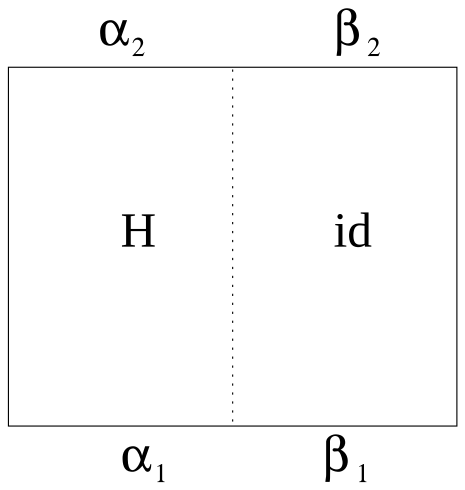
$\Rightarrow$

$(\pi_1(X, x_0), *)$ se llama el *grupo fundamental* de X basado en x_0.

Nota: Se puede ver que efectivamente $(\pi_1(X, x_0), *)$ es un grupo.

Cerradura: Si $\alpha_1 \overset{H}{\simeq} \alpha_2$ rel $\{0,1\}$ y $\beta_1 \overset{G}{\simeq} \beta_2$ rel $\{0,1\}$, entonces $\alpha_1 * \beta_1 \overset{F}{\simeq} \alpha_2 * \beta_1$ rel $\{0,1\}$, donde

$$F(t,s) = \begin{cases} H(2t,s) & \text{para } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta_1(2t-1) & \text{para } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$



Igualmente $\alpha_2 * \beta_1 \overset{U}{\simeq} \alpha_2 * \beta_2$ rel $\{0,1\}$, donde

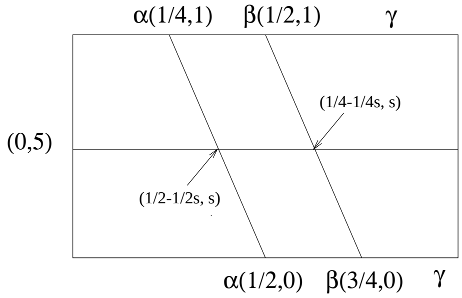
$$U(t,s) = \begin{cases} \alpha_2(2t) & \text{para } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(2t-1) & \text{para } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Así que, por transitividad, $\alpha_1 * \beta_1 \simeq \alpha_2 * \beta_2$ rel $\{0,1\}$, i.e., el producto de clases está bien definido.

Asociatividad: Si $\alpha, \beta, \gamma : I \to X$ son lazos basados en x_0, definimos $H : I \times I \to X$

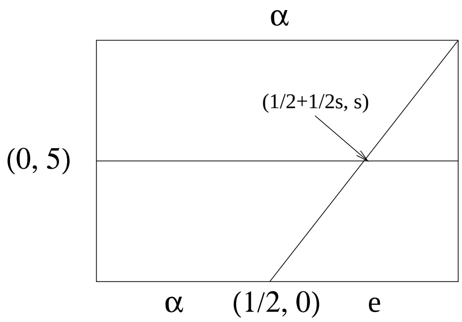
como

$$H(s,t)=\begin{cases}\alpha(\frac{2t}{2-s}) & \text{para } 0\le t\le \frac{1}{2}-\frac{1}{4}s\\ \beta(4t-s-2) & \text{para } \frac{1}{2}-\frac{1}{4}s\le t\le \frac{3}{4}-\frac{1}{4}s\\ \gamma(\frac{4t+s-3}{1+s}) & \text{para } \frac{3}{4}-\frac{1}{4}s\le t\le 1.\end{cases}$$



Neutro: Se define $e : I \to X$ como $e : t \mapsto x_0$ y $H : I \times I \to X$ como

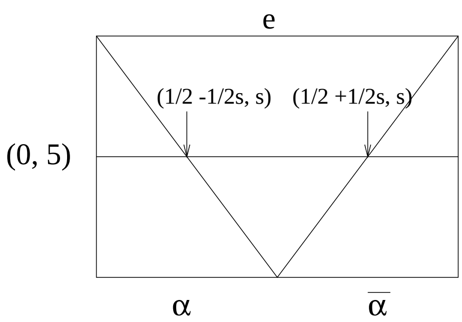
$$H(t,s)=\begin{cases}\alpha(\frac{2t}{1+s}) & \text{si } 0\le t\le \frac{1}{2}+\frac{1}{2}s\\ x_0 & \text{si } \frac{1}{2}+\frac{1}{2}s\le t\le 1\end{cases}.$$



Por lo tanto $\alpha * e \overset{H}{\simeq} \alpha$ rel $\{0,1\}$.

Inverso: Para $\alpha : I \to X$ lazo basado en x_0 se define $\bar{\alpha} : I \to X$ como $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$. Si $H : I \times I \to X$ está dada por

$$H(t,s)=\begin{cases}\alpha(\frac{2t}{1-s}) & \text{si } 0\le t\le \frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\\ x_0 & \text{si } \frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\le t\le \frac{1}{2}+\frac{1}{2}s\\ \bar{\alpha}(\frac{2t-(1+s)}{1-s}) & \text{si } \frac{1}{2}+\frac{1}{2}s\le t\le 1.\end{cases}$$



Entonces $\alpha * \bar{\alpha} \overset{H}{\simeq} e$ rel $\{0,1\}$.

Nota: Usualmente el grupo fundamental de un espacio no es conmutativo.

EJEMPLOS. 0) $\pi_1(\{*\},*) = \{[e]\}$.

2) Consideremos la circunferencia estándar $S^1 = \{x \in R^2 : |x| = 1\}$. Entonces $\pi_1(S^1,(1,0)) \cong Z$.

Se puede ver que la asociación $\varphi : \pi_1(S^1,(1,0)) \to Z$, $[e_n : I \to X] \mapsto n$, donde $e_n(t) = e^{2\pi i t n}$ es un isomorfismo de grupos.

Observación: Si $f : X \to Y$ es continua y $f(x_0) = y_0$, entonces

$$f_\# : \begin{array}{ccc} \pi_1(x,x_0) & \to & \pi_1(Y,y_0) \\ [\alpha] & \mapsto & [f \circ \alpha] \end{array}$$

es un homomorfismo de grupos.

$(f \circ (\alpha * \beta))(t) = f((\alpha * \beta)(t)) = \begin{cases} f(\alpha(2t)) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f(\beta(2t-1)) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$; y por otro lado $((f \circ \alpha) * (f \circ \beta))(t) = \begin{cases} f(\alpha(2t)) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f(\beta(2t-1)) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases})$

Proposición. $(f \circ g)_\# = f_\# \circ g_\#$ y $(id)_\# = id$.

Demostración. Pues $(f \circ g)_\#([\alpha]) = [f \circ g \circ \alpha] = f_\#([g \circ \alpha]) = f_\#(g_\#([\alpha]))$ y $id_\#([\alpha]) = [id \circ \alpha] = [\alpha]$. □

DEFINICIÓN. “Homeomorfismo”

Sea $f : X \to Y$ continua

$\Rightarrow$

f se llama *homeomorfismo* ssi f es continua, biyectiva y f^{-1} es continua.

EJEMPLOS. 1. Para $\lambda > 0$, $h : \{x \in R^n : |x| \le 1\} \to \{x \in R^n : |x| \le \lambda\}$ dada por $h(x) = \lambda \cdot x$ es un homeomorfismo.

2. Si $S^n = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ y $U_+ := \{x \in S^n : x_{n+1} \ge 0\}$ y $U_- := \{x \in S^n :$

$x_{n+1} \leq 0\}$, entonces

$$\begin{array}{ccc} h_+ : U_+ & \to & B^n \\ (x_1, \ldots x_n, x_{n+1}) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} h_- : U_- & \to & B^n \\ (x_1, \ldots x_n, x_{n+1}) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

son homeomorfismos pues

$$h_+{}^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, \sqrt{1 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2)}\ \ )$$

y

$$h_-{}^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, -\sqrt{1 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2)}\ \ ).$$

3. $f : [0, 1) \to S^1$ dada por $h(t) = e^{2\pi i t}$ es continua y biyectiva, pero no es un homeomorfismo.

Corolario. *Si f es homeomorfismo, entonces $f_\#$ es un isomorfismo de grupos.* □

Corolario. *π_1 es un invariante topológico.* □

Observación: Si $f, g : X \to Y$ y $f \simeq g$, entonces $f_\# = g_\#$.

Observación: Si $f : X \to Y$ es continua, $f(x_0) = y_0$ y existe $g : Y \to X$ continua tal que $f \circ g \simeq id_Y$ y $g \circ f \simeq id_X$, entonces $f_\#$ también es un isomorfismo de grupos. En este caso se dice que X y Y son *del mismo tipo de homotopía.*

EJEMPLOS. 1) Un espacio X se llama *contraible* ssi X es conectable por trayectorias y existe $x_0 \in X$ tal que la función identidad de X es homotópica a la función constante x_0, $id \simeq x_0$.

Nótese que si $y_0 \in X$, entonces existe una trayectoria $f : I \to X$ tal que $f(0) = x_0$ y $f(1) = y_0$ (pues X es c.p.t.). Se tiene que $H(t, s) = f(t)$ nos da una homotopía entre las constantes x_0 y y_0.

Así que si X es contraible, entonces $id_X \simeq x$ para toda $x \in X$.

Claramente un espacio contraible es del mismo tipo de homotopía que un espacio de un solo punto. Así que si X es contraible, entonces $\pi_1(X, x_0) = \{[e]\}$.

2) Como $[0,1]$ es contraible y $\pi(S^1,(1,0)) \cong Z$, por lo tanto $[0,1] \not\cong S^1$. Igualmente $[0,1) \not\cong S^1$ (ver Ej. 3 anterior).

ESPACIOS CUBRIENTES

DEFINICIÓN. "Espacio cubriente"

X y $\widetilde{X}$ espacios c.p.t. y $p : \widetilde{X} \to X$ continua

$\Rightarrow$

p se llama *espacio cubriente* ssi

1) p es suprayectiva

2) para todo $x \in X$ existe $U \subset X$ vecindad de x tal que si $\widetilde{U} \subset p^{-1}(U)$ es una componente, entonces $p|\widetilde{U} : \widetilde{U} \to U$ es un homeomorfismo.

U se llama una *vecindad fundamental* de x.

Nota: Si $p : \widetilde{X} \to X$ es un espacio cubriente, la imagen que uno debe tener presente es que si $x \in X$ y $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, entonces el espacio $\widetilde{X}$ al rededor de $\tilde{x}$ se ve igualito que el espacio X al rededor de x.

EJEMPLOS. 0). Un homeomorfismo $h : X \to X$ es un cubriente; a estos "cubrientes" se les llama *triviales*.

1). $p : S^1 \to S^1$ dada por $p(z) = z^d$ (recuérdese que si z es un punto del plano, entonces z es un número complejo y que $z = e^{2\pi i\theta}$ para algún $\theta \in [0,1]$) es un cubriente.

2). $[0,1]$ no tiene cubrientes no triviales. ¿Por qué?

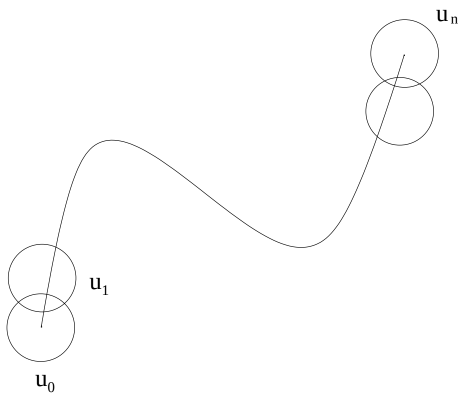
Teorema. *Si $p : \widetilde{X} \to X$ es un espacio cubriente, $x \in X$ y $\alpha : I \to X$ es una trayectoria tal que $\alpha(0) = x$, entonces para cada $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ existe una única trayectoria $\tilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$ y $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.*

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, "\tilde{\alpha}"] \arrow[r, "\alpha"'] & X \end{tikzcd}$$

Demostración. Para cada $t \in I$ tomamos $U_t \subset X$ una vecindad fundamental de $\alpha(t)$.

1er. caso: Si $\alpha(I) \subset U_0$, la vecindad fundamental de $x = \alpha(0)$, entonces definimos $\tilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$ como $\tilde{\alpha}(t) = (p|U_0)^{-1}(\alpha(t))$. Se puede porque $p|U_0$ es un homeomorfismo.

2do. caso: Si $\alpha(I) \not\subset U_0$, de todos modos $\alpha(I) \subset U_0 \cup U_{t_1} \cup \cdots \cup U_{t_n} \cup U_1$ para ciertos $t_1, \ldots, t_n \in I$, pues $\alpha(I)$ es compacto.



Escogemos $s_1 \in I$ tal que $\alpha([0, s_1]) \subset U_0$ y $\alpha(s_1) \in U_1$. Para $t \in [0, s_1]$ definimos $\tilde{\alpha}(t) = (p|U_0)^{-1}(\alpha(t))$.

Ahora escogemos $s_2 \in I$ tal que $\alpha([s_1, s_2]) \subset U_1$ y $s_2 \in U_2$. Para $t \in [s_1, s_2]$ definimos $\tilde{\alpha}(t) = (p|U_1)^{-1}(\alpha(t))$.

Etcétera.

Así que en cualesquiera de los dos casos anteriores tenemos $\tilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$ continua tal que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ y $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$.

Supongamos ahora que $\beta : I \to \widetilde{X}$ es continua, que $p \circ \beta = \alpha$ y que $\beta(0) = \tilde{x}$. Mostraremos que $\beta = \tilde{\alpha}$. Primero $\beta(0) = \tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$. Luego si $A = \{t \in [0, 1] : \beta[0, t] = \tilde{\alpha}[0, t]\}$, entonces $A \neq \emptyset$. Sea $s = supA$. Debemos mostrar que $s = 1$.

Si $s < 1$, tomamos $U \subset X$ vecindad fundamental de $\alpha(s)$. Como $\alpha^{-1}(U) \subset I$ es abierto, para $\varepsilon > 0$ muy pequeña tenemos que $\alpha(s - \varepsilon), \alpha(s + \varepsilon) \in U$. Por definición de s tenemos que $\beta(s - \varepsilon) = \tilde{\alpha}(s - \varepsilon)$ y podemos suponer que $\beta(s + \varepsilon) \neq \tilde{\alpha}(s + \varepsilon)$. Si tomamos $\widetilde{U} \subset p^{-1}(U)$ la componente tal que $\beta(s - \varepsilon) = \tilde{\alpha}(s - \varepsilon) \in \widetilde{U}$, entonces como $\alpha([s - \varepsilon, s + \varepsilon]) \subset U$, por lo tanto $\tilde{\alpha}([s - \varepsilon, s + \varepsilon]) \subset \widetilde{U}$ y $\beta([s - \varepsilon, s + \varepsilon]) \subset \widetilde{U}$, pues $\widetilde{U}$ es c.p.t.; como $p \circ \tilde{\alpha} = p \circ \beta = \alpha$, por lo tanto $(p|\widetilde{U}) \circ \tilde{\alpha} = (p|\widetilde{U}) \circ \beta$; en particular $(p|\widetilde{U})(\tilde{\alpha}(s + \varepsilon)) = (p|\widetilde{U})(\beta(s + \varepsilon))$. Como $p|\widetilde{U}$ es un homeomorfismo, se tiene que

$\tilde{\alpha}(s+\varepsilon) = \beta(s+\varepsilon)$ (pues $p|\widetilde{U}$ es inyectiva); pero esto es una contradicción, así que $s = 1$. $\square$

Notación: A $\tilde{\alpha}$ se le llama un *levantamiento* de α en el punto $\tilde{x}$.

Teorema. *Si $p : \widetilde{X} \to X$ es un espacio cubriente, $x \in X$ y $H : I^n \to X$ es una función continua tal que $H(\bar{0}) = x$, entonces para cada $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ existe una única función continua $\widetilde{H} : I^n \to \widetilde{X}$ tal que $\widetilde{H}(\bar{0}) = \tilde{x}$ y $p \circ \widetilde{H} = H$.*

Demostración. Idéntica a la anterior. $\square$

Corolario. *Si $p : \widetilde{X} \to X$ es un espacio cubriente, $x \in X$ y $\tilde{x} \in \widetilde{X}$, entonces* $\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}) \leq \pi_1(X, x)$ (El símbolo "$\leq$" quiere decir "subgrupo" en este caso).

Demostración. Sabemos que $p_\# : \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}) \to \pi_1(X, x)$ es un homomorfismo de grupos. Mostraremos que $p_\#$ es inyectiva. Sea $[\alpha] \in \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})$ y supongamos que $p_\#([\alpha]) = [e]$. Debemos mostrar que $[\alpha] = [e]$. Como $p \circ \alpha \simeq e$ rel $\{0, 1\}$, por lo tanto existe una homotopía $H : I \times I \to X$ entre $p \circ \alpha$ y e. Tomamos el levantamiento $\widetilde{H} : I \times I \to \widetilde{X}$ tal que $\widetilde{H}(\bar{0}) = \tilde{x}$. Por la unicidad de los levantamientos vemos que $\alpha \overset{\widetilde{H}}{\simeq} e$ rel $\{0, 1\}$. $\square$

Observación: Si $p : \widetilde{X} \to X$ es un espacio cubriente y $x, y \in X$, entonces $\#(p^{-1}(x)) = \#(p^{-1}(y))$.

Demostración. Sea $\alpha : I \to X$ trayectoria tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$ (hay una pues X es c.p.t.). Para cada $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ tomamos el levantamiento $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}} : I \to \widetilde{X}$ tal que $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(0) = \tilde{x}$; como $p \circ \tilde{\alpha}_{\tilde{x}} = \alpha$ y como $\alpha(1) = y$, se tiene que $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1) \in p^{-1}(y)$. Por la unicidad de los levantamientos se tiene que $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1) \neq \tilde{\alpha}_{\tilde{x}'}(1)$, si $\tilde{x} \neq \tilde{x}'$. Ahora el conjunto $\{\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1) : \tilde{x} \in p^{-1}(x)\}$ agota al conjunto $p^{-1}(y)$ lo que se puede ver tomando todos los levantamientos de la trayectoria inversa $\bar{\alpha}$. $\square$

DEFINICIÓN. "Número de hojas de un cubriente"

Si $p : \widetilde{X} \to X$ es un espacio cubriente y $x \in X$

$\Rightarrow$

se dice que p *tiene* $\#(p^{-1}(x))$ *hojas.*

p se llama un *cubriente finito* si $\#(p^{-1}(x)) < \infty$.

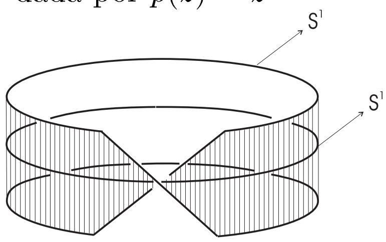
Observación. Denotamos con S_n al grupo simétrco en n símbolos. Si $p : \widetilde{X} \to X$ es un cubriente de n hojas, entonces p induce un homomorfismo de grupos $\rho_p : \pi_1(X, x) \to S_n$ como sigue:

Numeramos $p^{-1}(x) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n\}$ (n no necesariamente es finito, pero es el caso que nos va a interesar). Si $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$, debemos definir una función $\rho_p([\alpha]) : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ biyectiva. Sea $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$; tomamos el levantamiento $\tilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_i$. Se define $\rho_p([\alpha])(i) = j$, donde $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_j$. Por la unicidad de los levantamientos se ve que $\rho_p([\alpha])$ es una función biyectiva.

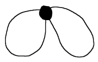
Nótese que si hubiéramos numerado $p^{-1}(x) = \{\tilde{x}_{\sigma(1)}, \tilde{x}_{\sigma(2)}, \ldots, \tilde{x}_{\sigma(n)}\}$ para $\sigma \in S_n$ y construimos $\rho' : \pi_1(X, x) \to S_n$ con esta nueva numeración, entonces para toda α, $\rho'([\alpha]) = \sigma(\rho_p([\alpha]))\sigma^{-1}$. O sea que ρ_p está bien definida salvo conjugaciones en S_n.

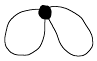
A ρ_p se le llama una *representación de $\pi_1(X, x)$ en S_n*.

EJEMPLOS. 1) $p : S^1 \to S^1$ dada por $p(z) = z^2$

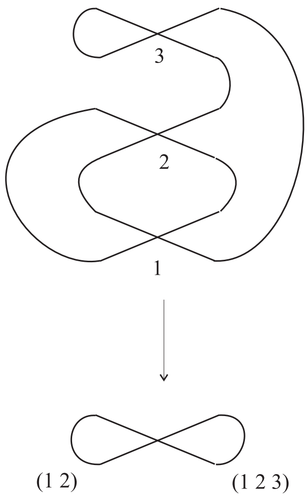


Entonces $[\alpha] \mapsto (12)$ es la representación inducida.

2) Consideremos el espacio  $\subset R^2$.

Nótese que $\pi_1($  $)$ está generado por dos lazos α y β tales que $\alpha \not\simeq \beta$ (de hecho, α y β son "muy" independientes: no tienen nada que ver uno con el otro; después precisaremos esto).

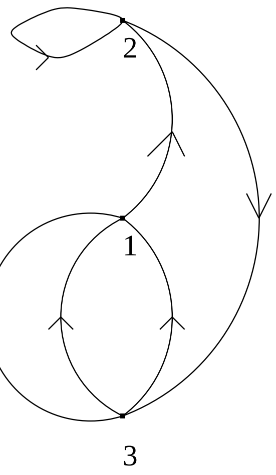
Consideremos el cubriente



Entonces

$$\begin{array}{rrl} \rho_p: & \alpha \mapsto & (12)(3) \\ & \beta \mapsto & (123). \end{array}$$

Si numeramos

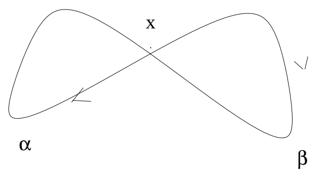


entonces

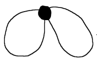
$$\begin{array}{rrl} \rho_p: & \alpha \mapsto & (13)(2) \\ & \beta \mapsto & (123). \end{array}$$

EJEMPLO.

Consideremos

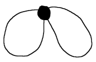


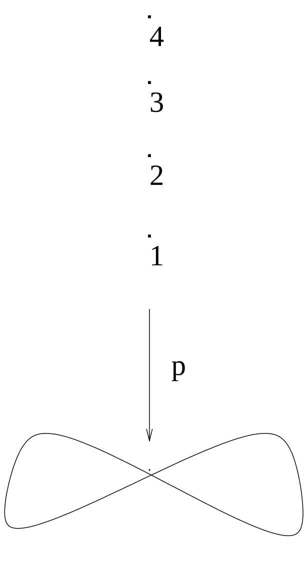
y supongamos que tenemos dada la siguiente asignación

$\rho : \quad \pi_1($$) \to S_4$

$$\begin{array}{rcl} \alpha & \mapsto & (12)(34) \\ \beta & \mapsto & (123)(4). \end{array}$$

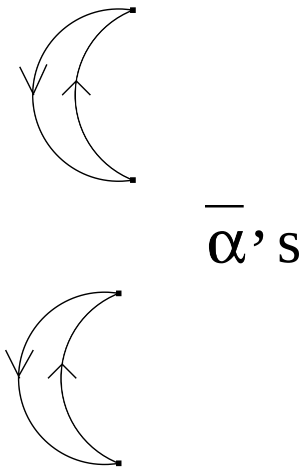
(esto define un homomorfismo; lo probaremos después)

¿Podemos construir un cubriente $p : \widetilde{X} \to$  tal que $\rho_p = \rho$? Pues p, en caso de existir, debe tener cuatro hojas. Dibujemos primero $p^{-1}(x) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4\}$

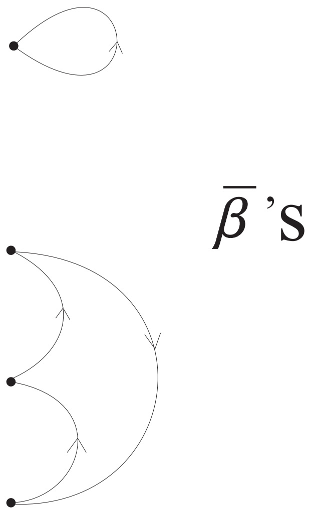


Como $[\alpha] \mapsto (12)(34)$, el levantamiento $\tilde{\alpha}_1 : I \to \widetilde{X}$ tal que $\tilde{\alpha}_1(0) = \tilde{x}_1$ debe cumplir que $\tilde{\alpha}_1(1) = \tilde{x}_2$; el levantamiento $\tilde{\alpha}_2 : I \to \widetilde{X}$ tal que $\tilde{\alpha}_2(0) = \tilde{x}_2$ debe cumplir que $\tilde{\alpha}_2(1) = \tilde{x}_1$, etc.

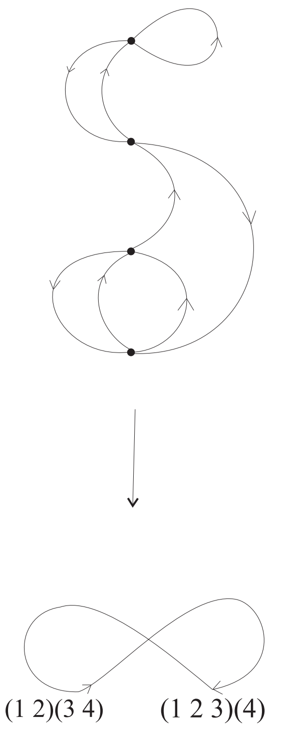
Dibujémoslos



Para los levantamientos de β se debe cumplir algo similar; dibujemos éstos



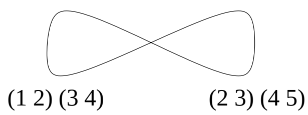
Así que



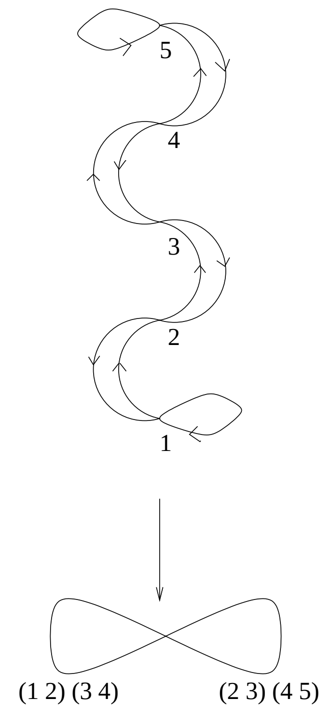
es un cubriente como se busca.

EJEMPLOS.

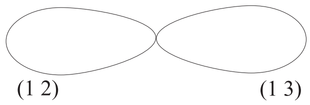
1.

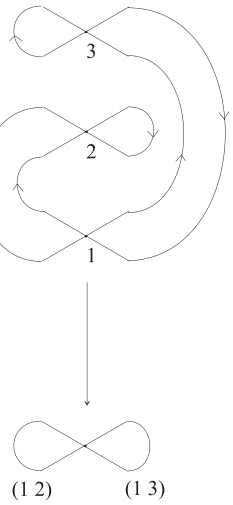


Solución:

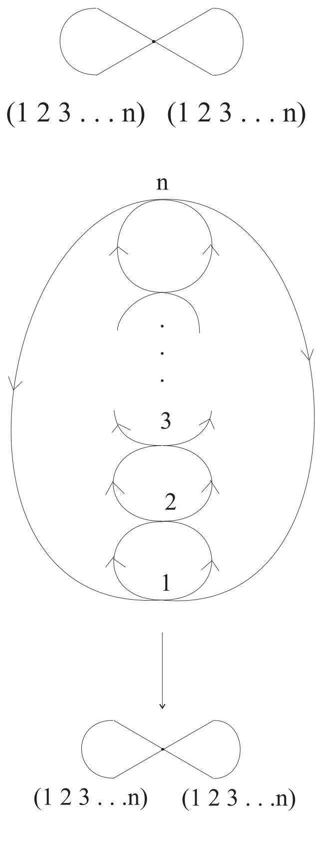


2.

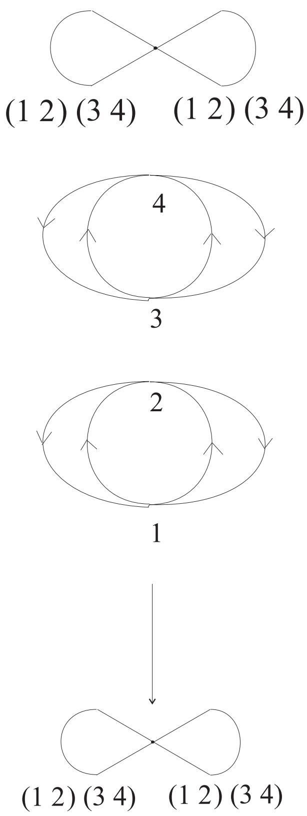




3.



4.



¡No salió conexo!

Se necesita una condición que garantice que los levantamientos conecten todas las hojas. Esta condición expresada algebraicamente diría algo como: Si G es la imagen de $\pi_1(X, x)$ (que es un subgrupo de S_n) bajo ρ, entonces para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existe $g \in G$ tal que $g(i) = j$.

Esto se expresa diciendo que la representación $\rho : \pi_1(X, x) \to S_n$ es *transitiva.*

CUBIERTAS RAMIFICADAS

DEFINICIÓN. "c–independiente"

Sea $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\} \subset R^m$

$\Rightarrow$

El conjunto $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ se llama *c–independiente* ssi $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \ldots, v_n - v_0\}$

es l.i. en R^m.

EJEMPLOS. 1) $\{v_0, v_1\}$ es c–independiente en R^m ssi $v_0 \neq v_1$.

2) $\{v_0, v_1, v_2\}$ es c-independiente en R^m ssi v_0, v_1, v_2 son los vértices de un triángulo, i.e., los puntos v_0, v_1, v_2 no son colineales.

3) $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ es c–independiente en R^m ssi v_0, v_1, v_2, v_3 son los vértices de un tetraedro, i.e., ssi los puntos v_0, v_1, v_2, v_3 no son coplanares.

DEFINICIÓN. "Simplejo"

Si $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ es c–independiente y $\sigma = \{\sum_{i=0}^n a_i v_i : \sum_{i=0}^n a_i = 1 \wedge a_i \geq 0\}$

$\Rightarrow$

σ se llama un n–*simplejo.*

Se escribe $\sigma = \langle v_0, v_1, \ldots, v_n \rangle$.

EJEMPLOS. 1) $\{v_0, v_1\}$ es c–independiente en R^m, entonces $\langle v_0, v_1 \rangle$ es el segmento de recta con extremos v_0, v_1.

2) $\{v_0, v_1, v_2\}$ es c-independiente en R^m, entonces $\langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ es el triángulo con vértices los puntos v_0, v_1, v_2.

3) $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ es c–independiente en R^m, entonces $\langle v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle$ es el tetraedro con vértices los puntos v_0, v_1, v_2, v_3.

Observación: Si $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\} \subset R^m$ es c–independiente y $X \subset \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$, entonces también X es c–independiente en R^m.

DEFINICIÓN. "Caras de un simplejo"

Si $\sigma = \langle v_0, v_1, \ldots, v_n \rangle$ es un n–simplejo en R^m, $X \subset \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$

$\Rightarrow$

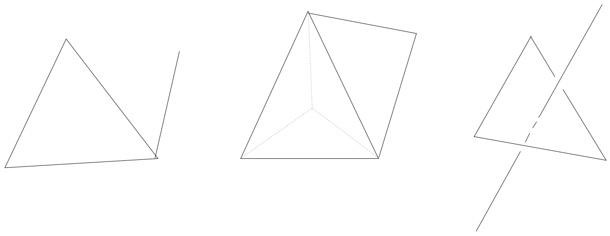
$\tau = \langle X \rangle$ se llama una cara de σ (de dimensión $\#(X) - 1$).

Nótese que en particular $\emptyset \subset \sigma$ es una "cara" de σ de dimensión -1.

DEFINICIÓN. "Poliedro"

Un *poliedro* $K \subset R^m$ es la unión de un número finito de simplejos $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$ tales que $\sigma_i \cap \sigma_j$ es una cara tanto de σ_i como de σ_j, para todo i, j. Pedimos además que si τ es cara de σ_i para alguna i, entonces $\tau = \sigma_{j_0}$ para alguna $j_0 = 1, 2, \ldots, s$.

EJEMPLOS.



El último dibujo ¿Es o no un poliedro?

DEFINICIÓN. "Característica de Euler"

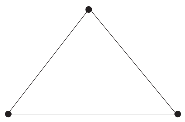
Sea K un poliedro en R^m

$\Rightarrow$

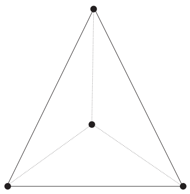
El número $\chi(K) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \cdots + (-1)^k c_k$ se llama la *característica de Euler* de K, donde c_i denota al número de i–simplejos de K.

EJEMPLOS.

2-1 =1



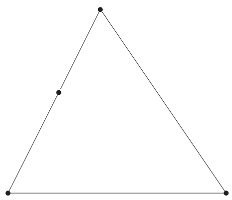
3-3+1 =1



4-6+4 = 2

Si subdividimos una arista ¿Cómo varía su característica de Euler?

4-3 = 1



4-4+1 = 1

Lo mismo sucede al subdividir triángulos, tetraedros, etc. Esto nos sugiere que la característica de Euler no depende de las subdivisones que se hagan. Aun más:

Teorema. *Si K y L son poliedros y K es homeomorfo a L, entonces $\chi(K) = \chi(L)$.* $\square$

Este teorema (que no demostramos) es un resultado muy poderoso que nos permitirá hacer muchas construcciones interesantes y en las que se "ocultará" la topología involucrada debido a las invocaciones que haremos de él.

DEFINICIÓN. "Superficie"

X espacio topológico

$\Rightarrow$

X se llama *superficie* (espacio de dimensión 2) ssi cada punto $x \in X$ tiene una vecindad $U \subset X$ tal que $U \cong B^2$.

Se pide además a una superficie que sea *conexa*, que, en este caso, se puede decir como: para todo $x, y \in S$, existe una trayectoria en S que conecta a x con y.

DEFINICIÓN. "Frontera e interior"

Si X es una superficie y $x \in X$

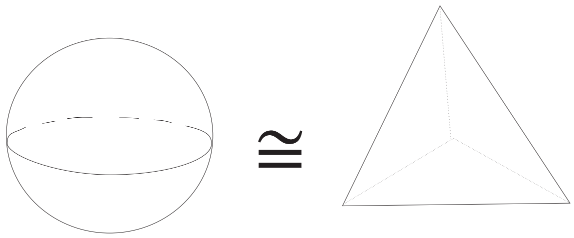
$\Rightarrow$

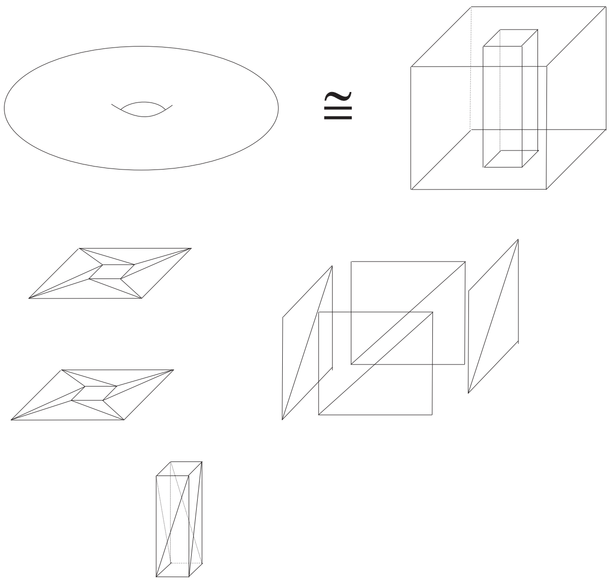
x se llama un *punto frontera* de X ssi x no tiene una vecindad $U \subset X$ tal que $U \cong (B^2)^\circ$.

Se escribe $\partial(X) = \{x \in X : x \text{ es un punto frontera de } X\}$ y $int(X) = X^\circ = X - \partial(X)$.

El famoso Teorema de Radó establece que toda superficie se puede ver como un poliedro; o sea, toda superficie es un poliedro.

EJEMPLOS.





Vemos que $\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$ y que $\chi(T_1) = 16 - 48 + 32 = 0$.

Describimos ahora una operación que nos permitirá construir muchas superficies.

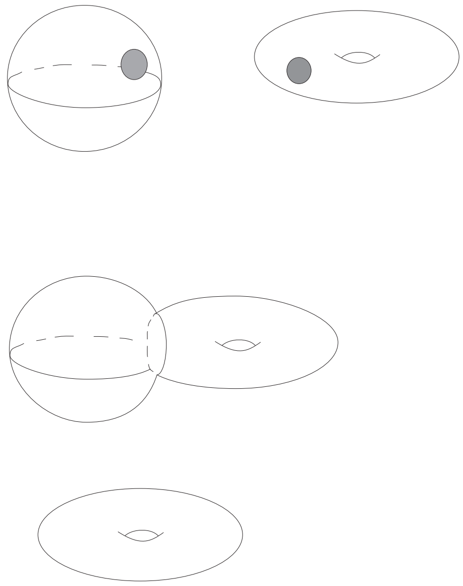
DEFINICIÓN. "Suma conexa"

Sean S_1 y S_2 superficies

$\Rightarrow$

la *suma conexa* de S_1 con S_2 es la superfice $S_1 \# S_2$ que se obtiene de quitar el interior de un disco de S_1 y el interior de un disco de S_2 e identificar las fronteras resultantes.

EJEMPLO.



Queremos calcular $\chi(T_1 \# T_1)$. Para ello nos será útil el siguiente

Lema. *Si A y B son poliedros entonces*

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$

Demostración. Denotemos con $c_i(X)$ el número de i–simplejos de X. Es claro que todos los i–simplejos de A están en $A \cup B$; igualmente todos los i–simplejos de B están en $A \cup B$. Así que el número de i–simplejos de $A \cup B$ sería $c_i(A) + c_i(B)$ si no fuera que así estamos contando dos veces los i simplejos de $A \cap B$; resulta entonces que $c_i(A \cup B) = c_i(A) + c_i(B) - c_i(A \cap B)$. Es claro entonces que $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$. $\square$

Queremos calcular $\chi(T_2)$. Como $T_2 = T_1 \# T_1 = (T_1 - (D^2)^\circ) \cup (T_1 - (D^2)^\circ)$, necesitamos calcular $\chi(T_1 - (D^2)^\circ)$ donde $(D^2)^\circ$ es el interior de un disco en T_1.

$$\chi(T_1) = \chi((T_1 - (D^2)^\circ) \cup D^2) = \chi(T1 - (D^2)^\circ) + \chi(D^2) - \chi((T_1 - (D^2)^\circ) \cap D^2)$$

Como $\chi((T_1 - (D^2)^\circ) \cap D^2) = \chi(S^1) = 0$, por lo tanto

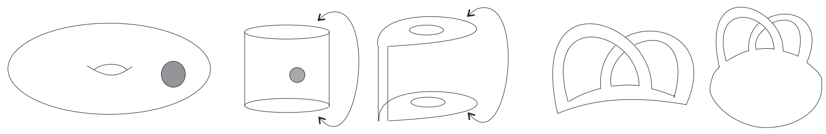
$$\chi(T_1) = \chi(T_1 - (D^2)^\circ) + \chi(D^2) = \chi(T_1 - (D^2)^\circ) + 1$$

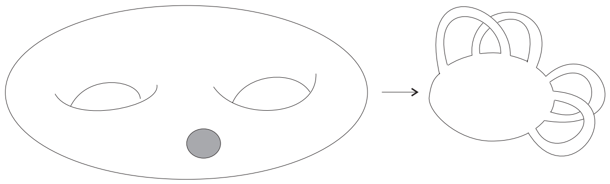
luego $\chi(T_1 - (D^2)^\circ) = \chi(T_1) - 1 = -1$.

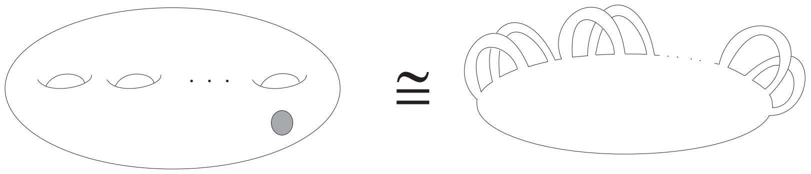
Entonces $\chi(T_2) = \chi((T_1 - (D^2)^\circ) \cup (T_1 - (D^2)^\circ)) = \chi(T_1 - (D^2)^\circ) + \chi(T_1 - (D^2)^\circ) - \chi(S^1) = -1 - 1 = -2$.

Ejercicio. Calcula $\chi(T_g)$ (donde, claro, $T_g = \underbrace{T_1 \# T_1 \# \cdots \# T_1}_{g \text{ veces}}$).

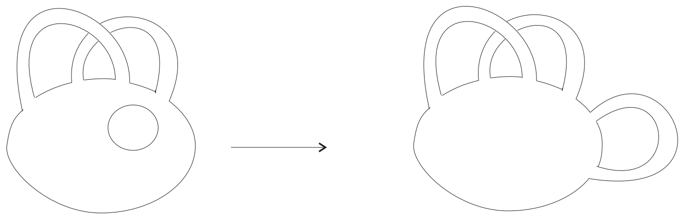
Veamos algunos ejemplos de superficies con frontera.



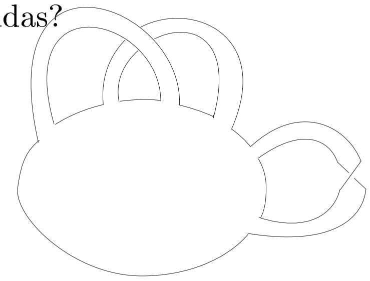




Si quitamos más de un disco a T_g seguimos obteniendo un disco con bandas:



En resumen una superficie con frontera no es más que un disco con bandas. ¿Qué pasa si las bandas están torcidas?



No orientable

Pues resulta, seguramente, una superficie no orientable.

DEFINICIÓN. "Superficie no orientable"

Una superficie S se llama *no orientable* ssi S contiene una cinta de Mőbius.

Teorema de Clasificación (Radó). *Sea S una superficie orientable y sin frontera. Entonces S es homeomorfa a S^2 o a T_g para alguna g.* $\square$

El género de una superficie orientable y sin frontera es el número de "hoyos" o "asas" que tiene. Con más precisión:

DEFINICIÓN. "Género de una superficie"

Sea S una superficie orientable y sin frontera

$\Rightarrow$

el género de S es el número

$$g(S) = \frac{2 - \chi(S)}{2}.$$

Si S tiene frontera, entonces el género de S es el género de la superficie que se obtiene de tapar cada frontera de S con un 2–disco.

EJEMPLOS. 1) $g(S^2) = \frac{2-\chi(S^2)}{2} = \frac{2-2}{2} = 0.$

2) $g(T_1) = \frac{2-\chi(T_1)}{2} = \frac{2-0}{2} = 1.$

3) $g(T_2) = \frac{2-\chi(T_1)}{2} = \frac{2-(-2)}{2} = 2.$

Se ve fácilmente (usando el Teorema de Radó) el siguiente

Teorema de Clasificación. *Sean S_1 y S_2 superficies. Entonces S_1 es homeomorfa a S_2 ssi S_1 y S_2 son ambas orientables o son ambas no orientables, $\chi(S_1) = \chi(S_2)$ y S_1 y S_2 tienen el mismo número de fronteras.* $\square$

Nota: En el teorema anterior si tanto S_1 como S_2 son orientables, basta verificar si $g(S_1) = g(S_2)$ o no.

Podemos ahora estudiar los espacios cubrientes de las superficies.

Teorema. *Si $p : \widetilde{M} \to M$ es un espacio cubriente finito entre superficies y M es orientable, entonces $\widetilde{M}$ también es orientable.*

Para demostrar este teorema nos apoyaremos en el siguiente

Lema Técnico. *$p : \widetilde{M} \to M$ es un espacio cubriente de n hojas entre superficies, entonces $\chi(\widetilde{M}) = n\chi(M)$.*

Demostración. Cada vértice de M está cubierto por n vértices de $\widetilde{M}$ (lo vimos como consecuencia del Teorema de Levantamientos de Trayectorias). Cada arista de M está cubierta por exactamente n aristas de $\widetilde{M}$ (Levantamiento de Trayectorias). Y cada triángulo de M está cubierto por exactamente n triángulos de $\widetilde{M}$ (Levantamiento de Homotopías). Se sigue el resultado. $\square$

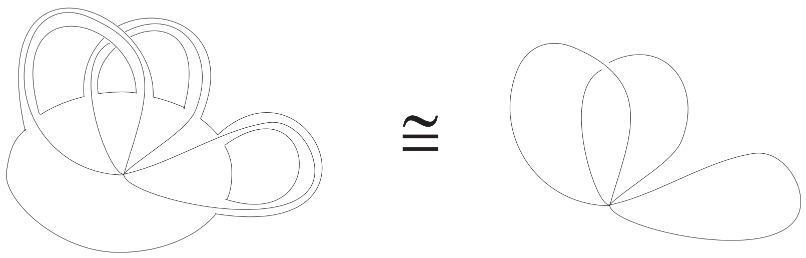
Corolario Técnico. *Si $M\H{o}$ es la cinta de Mőbius y $p : M\H{o} \to F$ es un espacio cubriente finito, entonces $F \cong M\H{o}$.*

Demostración. Como $\partial(M\H{o})$ es conexo, por lo tanto $\partial(F) = p(\partial(M\H{o}))$ es conexo y como $0 = \chi(M\H{o}) = n\chi(F)$ se sigue que $F \cong M\H{o}$, pues no hay otra superficie con estas propiedades. $\square$

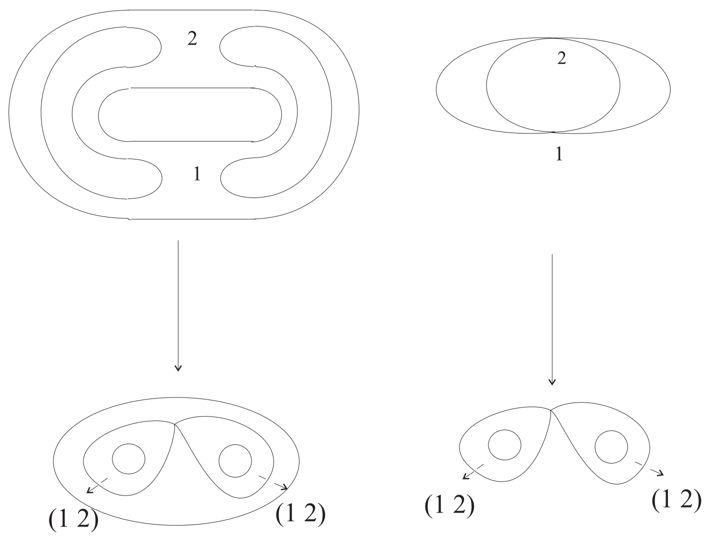
Demostración del teorema. Si $\widetilde{M}$ fuera no orientable, entonces $\widetilde{M}$ contendría una cinta de Mőbius $M\H{o} \subset \widetilde{M}$. Claramente $p|M\H{o} : M\H{o} \to F \subset M$ es un espacio cubriente finito. Así que M contendría a la cinta de Mőbius F. Por lo tanto M sería no orientable. $\square$

EJEMPLOS.

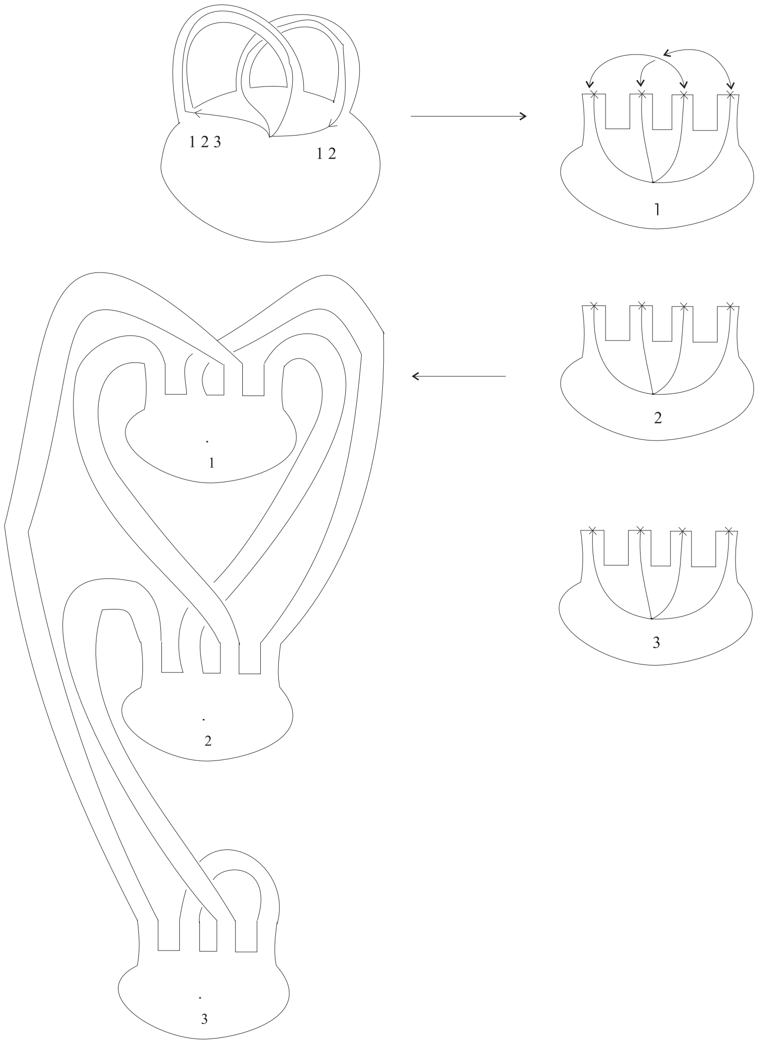
Nótese que una superficie con hoyos es del mismo tipo de homotopía que una cuña de circunferencias



Para fines prácticos lo que esto quiere decir es que la superficie se puede obtener de la cuña de circunferencias engordando un poquito ésta última (o bien la cuña se obtiene de "apachurrar" a la superficie sobre ella. Ejercicio: verifica que la inclusión de la cuña en la superficie tiene una inversa homotópica) Resulta que, si calculamos un cubriente de una cuña, sólo tenemos que engordar el resultado para obtener un cubriente de una superficie con hoyos.



Esto se puede visualizar también de la siguiente manera: Hacemos la construcción del cubriente de la cuña como sabemos hacerlo, pero arrastramos todo el tiempo la sustancia de la superficie al rededor de la cuña teniendo cuidado de pegar las piezas de la misma manera que están pegadas en la superficie.



DEFINICIÓN. "Cubierta ramificada"

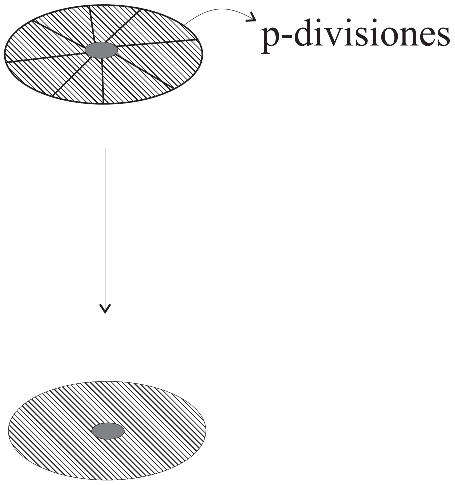
Sean F y G superficies y $p : F \to G$ función continua y suprayectiva tal que $p^{-1}(\partial(G)) = \partial(F)$.

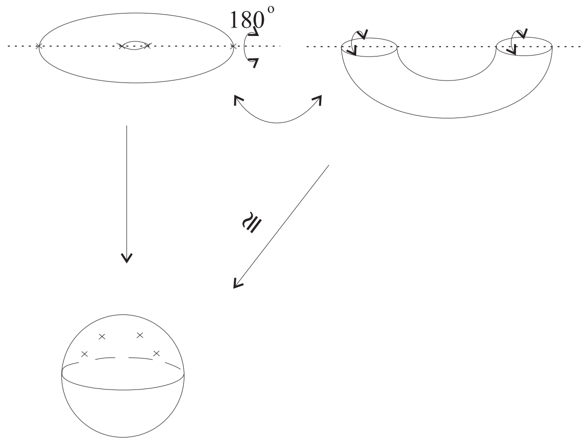
$\Rightarrow$

p se llama *cubierta ramificada* ssi existe un conjunto finito $B \subset G$ tal que la restricción $p| : F - p^{-1}(B) \to G - B$ es un cubriente finito.

El conjunto B se llama la *ramificación* de p y se escribe a veces $B = B_p$. Se dice que p tiene n *hojas* si el cubriente asociado $p|$ tiene n hojas.

EJEMPLOS.





Resulta que una cubierta ramificada determina un espacio cubriente ¿Será verdad que si comenzamos con un cubriente entre superficies $p: M \to N$, podemos obtener (completar) $\bar{p}: \bar{M} \to \bar{N}$?

La respuesta es sí. Basta observar que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{p} & S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^2 & & D^2 \end{array}$$

donde p es un cubriente finito, se puede completar con una cubierta $P: D^2 \to D^2$ ramificada en un punto (es decir, $P|S^1 = p$). La función P está dada por el Truco de Alexander (ver más adelante):

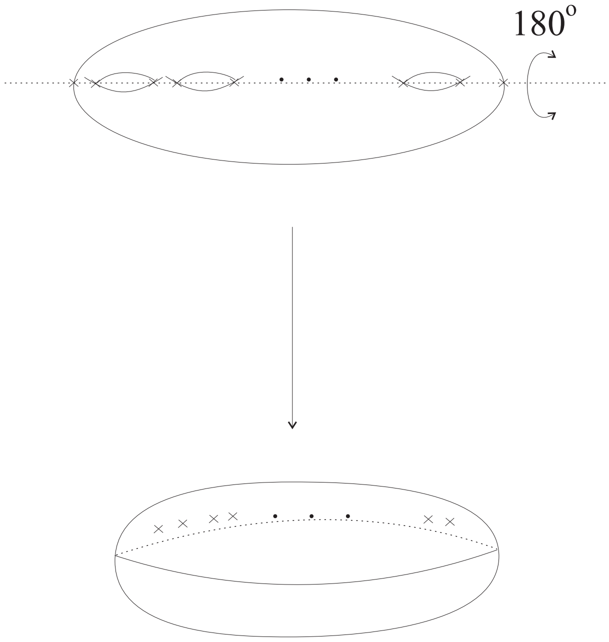
$$P(x) = \begin{cases} |x|p(\frac{x}{|x|}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Luego si $p: M \to N$ es un cubriente entre superficies con frontera, podemos extender p a una cubierta ramificada $\bar{p}: \bar{M} \to \bar{N}$, donde $\bar{N}$ ($\bar{M}$) es la superficie sin frontera que se obtiene de N (de M) de tapar algunas fronteras de N (las fronteras correspondientes de M bajo p) con discos y $\bar{p}|M = p$ y $\bar{p}$ se define en cada disco como la extensión de Alexander de antes.

(Debe notarse que esta extensión de cubrientes es "única" en el sentido de que dos extensiones de un cubriente entre superficies con frontera a las superficies que se obtienen de tapar algunas fronteras con discos son equivalentes como cubiertas ramificadas. Pero no nos preocuparemos ni siquiera de definir "equivalencia de cubiertas ramificadas".)

Ahora sea $p : \widetilde{M} \to M$ una cubierta ramificada. ¿Existirá alguna relación entre las características de Euler de $\widetilde{M}$ y M? Esta pregunta es más o menos razonable pues vimos que hay una relación muy estrecha entre cubrientes y cubiertas ramificadas; y para los cubrientes obtuvimos una relación muy bonita entre las características de Euler del dominio y del codominio. Pero

EJEMPLO.



¡Todas las superficies orientables son cubiertas ramificadas de dos hojas de la esfera! Así que una relación entre las características de Euler, si existe, debe ser muy, muy tenue.

Por otra parte se puede demostrar que no hay ninguna cubierta ramificada de la esfera sobre el toro T_1, por ejemplo. Puesto que la característica de Euler está muy íntimamente ligada con el tipo de homeomorfismo de las superficies (ver Teorema de Clasificación), deberíamos esperar que ésta nos indique de alguna manera cuándo sí puede haber cubiertas ramificadas y cuándo no. Es decir, sí que debe haber alguna relación entre las características de Euler en una cubierta ramificada.

Vamos a calcular. Sea, pues, $p : \widetilde{M} \to M$ una cubierta ramificada de n hojas. Tenemos una representación $\omega : \pi_1(M - B_p) \to S_n$ dada por el cubriente asociado $p| : \widetilde{M} - p^{-1}(B_p) \to M - B_p$. Si $B_p = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, tomamos $D_i \subset N$ una vecindad muy pequeña de x_i tal que D_i es un disco para cada i (D_i debe ser tan pequeño que $D_i \cap B_p = \{x_i\}$ y $D_i \cap D_j = \emptyset$ si $i \neq j$). Se puede ver que $\pi_1(M - \bigcup D_i) \cong \pi_1(M - B_p)$ (la inclusión $M - B_p \hookrightarrow M - \bigcup D_i$ es una equivalencia homotópica y nos será más cómodo hacer nuestro análisis con el espacio $M - \bigcup D_i$) y $p| : \widetilde{M} - p^{-1}(\bigcup D_i) \to M - \bigcup D_i$ sigue siendo un espacio cubriente.

Cada $\omega([\partial(D_i)]) \in S_n$, por ser una permutación, tiene una descomposición en ciclos ajenos $\omega([\partial D_i]) = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m$ donde permitimos e incluimos también sus ciclos triviales (uno por cada punto fijo de $\omega([\partial(D_i)])$; por ejemplo (1 2 4 6)=(1 2 4 6)(3)(5)(7)$\in S_7$). Notemos que si $\omega([\partial D_i]) = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m \in S_n$ donde cada σ_j es un ciclo de longitud $\lambda(\sigma_j)$, entonces $\#(p^{-1}(x_i)) = |w([\partial(D_i)])| = m$ y que $n = \lambda(\sigma_1) + \lambda(\sigma_2) + \cdots + \lambda(\sigma_m)$.

Supongamos que $p^{-1}(D_i) = D_{i,1} \sqcup D_{i,2} \sqcup \cdots \sqcup D_{i,m_i}$, la unión ajena de m_i discos, y llamemos $\widetilde{M}_o = \overline{\widetilde{M} - p^{-1}(\bigcup D_i)}$ y $M_o = \overline{M - \bigcup D_i}$; escribamos $m_i = |\omega([\partial(D_i)])|$ y supongamos que $\omega([\partial(D_i)]) = \sigma_1^{(i)} \sigma_2^{(i)} \cdots \sigma_{m_i}^{(i)} \in S_n$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\chi(\widetilde{M}) &= \chi(\widetilde{M}_o \cup \bigcup D_i) \\
&= \chi(\widetilde{M}_o) + \chi(\bigcup D_i) \\
&= \chi(\widetilde{M}_o) + \sum_{i=1}^{k} m_i && (\text{ recordemos que } m_i = |\omega([\partial(D_i)])|) \\
&= n\chi(M_o) + \sum_{i=1}^{k} m_i && (\text{pues } \widetilde{M}_o \text{ es cubriente de } M_o) \\
&= n(\chi(M) - k) + \sum_{i=1}^{k} m_i && (\chi(M) = \chi(M_o \cup \bigcup D_i) = \chi(M_o) + k) \\
&= n\chi(M) - nk + \sum_{i=1}^{k} m_i \\
&= n\chi(M) - (\underbrace{n + \cdots + n}_{k \text{ veces}}) + \sum_{i=1}^{k} m_i \\
&= n\chi(M) - \left(\sum_{j=1}^{m_1} \lambda(\sigma_j^{(1)}) + \cdots + \sum_{j=1}^{m_k} \lambda(\sigma_j^{(k)}) \right) + \sum_{i=1}^{k} m_i \\
&= n\chi(M) - \left(\sum_{j=1}^{m_1} (\lambda(\sigma_j^{(1)}) - 1) + \cdots + \sum_{j=1}^{m_k} (\lambda(\sigma_j^{(k)}) - 1) \right).
\end{aligned}
$$

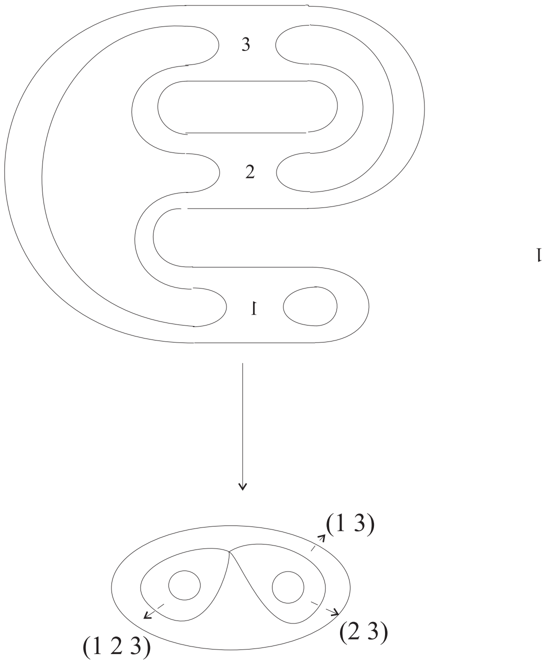
En resumen

Teorema (Fórmula de Riemann–Hurwitz). *Sea* $p : \widetilde{M} \to M$ *una cubierta ramificada entre superficies de* n *hojas con representación asociada* $\omega : \pi_1(M - B_p) \to S_n$*. Sea* $d_i \in \pi_1(M - B_p)$ *la clase de una pequeña circunferencia alrededor de* x_i *donde* $B_p = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *y supongamos que* $\omega(d_i)$ *tiene la descomposición en ciclos ajenos* $\omega(d_i) = \sigma_1^{(i)}\sigma_2^{(i)} \cdots \sigma_{m_i}^{(i)}$*. Entonces*

$$\chi(\widetilde{M}) = n\chi(M) - \left(\sum_{j=1}^{m_1} (\lambda(\sigma_j^{(1)}) - 1) + \cdots + \sum_{j=1}^{m_k} (\lambda(\sigma_j^{(k)}) - 1) \right).$$

□

EJEMPLO.



$\chi(F) = 3\chi(S^2) - ((2-1) + (2-1) + (3-1)) = 3 \times 2 - 4 = 2$ Así que $F \cong S^2$.

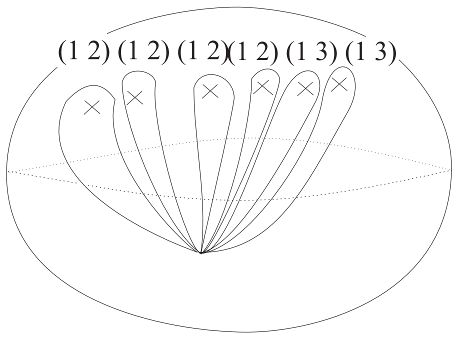
Estudiemos ahora un tipo especial de cubiertas.

DEFINICIÓN. “Cubierta simple”

Una cubierta ramificada $p : \widetilde{M} \to M$ de n hojas se llama *simple* ssi $\#(p^{-1}(x)) \geq n-1$ para todo $x \in M$.

Observación: Si $p : \widetilde{M} \to M$ es una cubierta ramificada simple de n hojas entre superficies, entonces $x \in B_p$ si y sólo si $\#(p^{-1}(x)) = n-1$. Si $\#(p^{-1}(x)) = n-1$, entonces forzosamente un lazo alrededor de x se levanta a $n-2$ lazos y dos trayectorias no cerradas que juntas forman un lazo; es decir, a cada lazo al rededor de un punto de ramificación le corresponde una trasposición (2–ciclo) en S_n. Esto es simpleza, ¿no?

EJEMPLO.



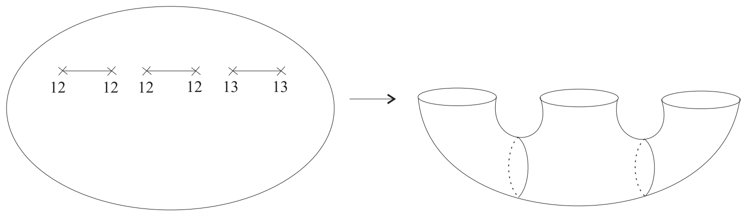
$\chi(F) = 3\chi(S^2) - 6(2-1) = 6 - 6 = 0$, así que $F \cong T_1$.

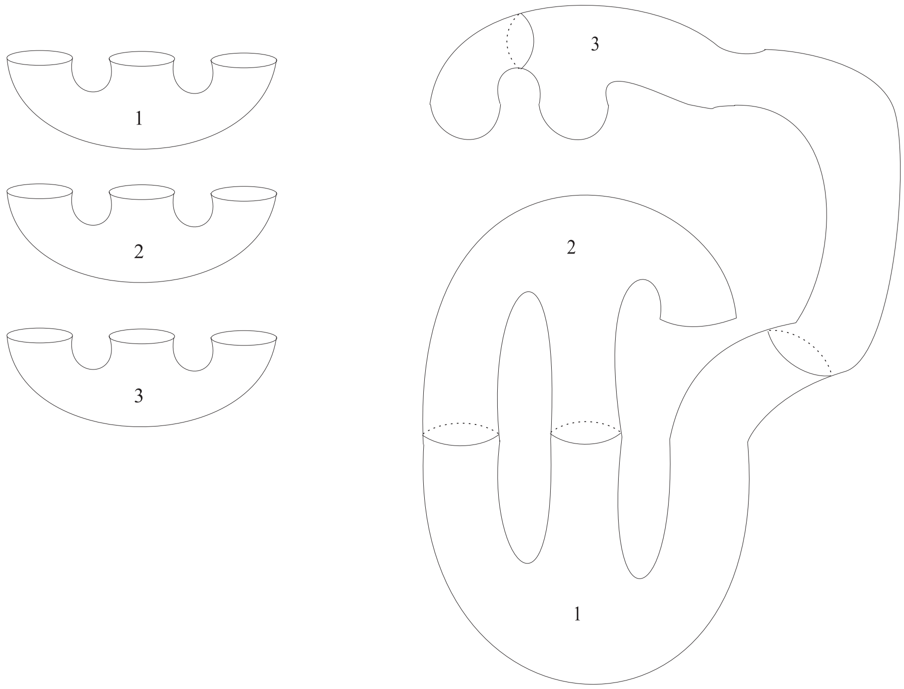
Observación: En general Si $p : \widetilde{M} \to M$ es una cubierta ramificada simple de n hojas con k puntos de ramificación, la Fórmula de Riemann–Hurwitz toma la siguiente <u>simple</u> forma:

$$\chi(\widetilde{M}) = n\chi(M) - k.$$

EJEMPLO (Continuación del ejemplo anterior).

La cubierta del dibujo anterior se puede construir de la siguiente manera





Tenemos la interesantísima conclusión: Toda superficie cerrada y orientable es una cubierta simple triple de S^2 (aunque ya sabíamos que toda superficie es cubierta *doble* de S^2).

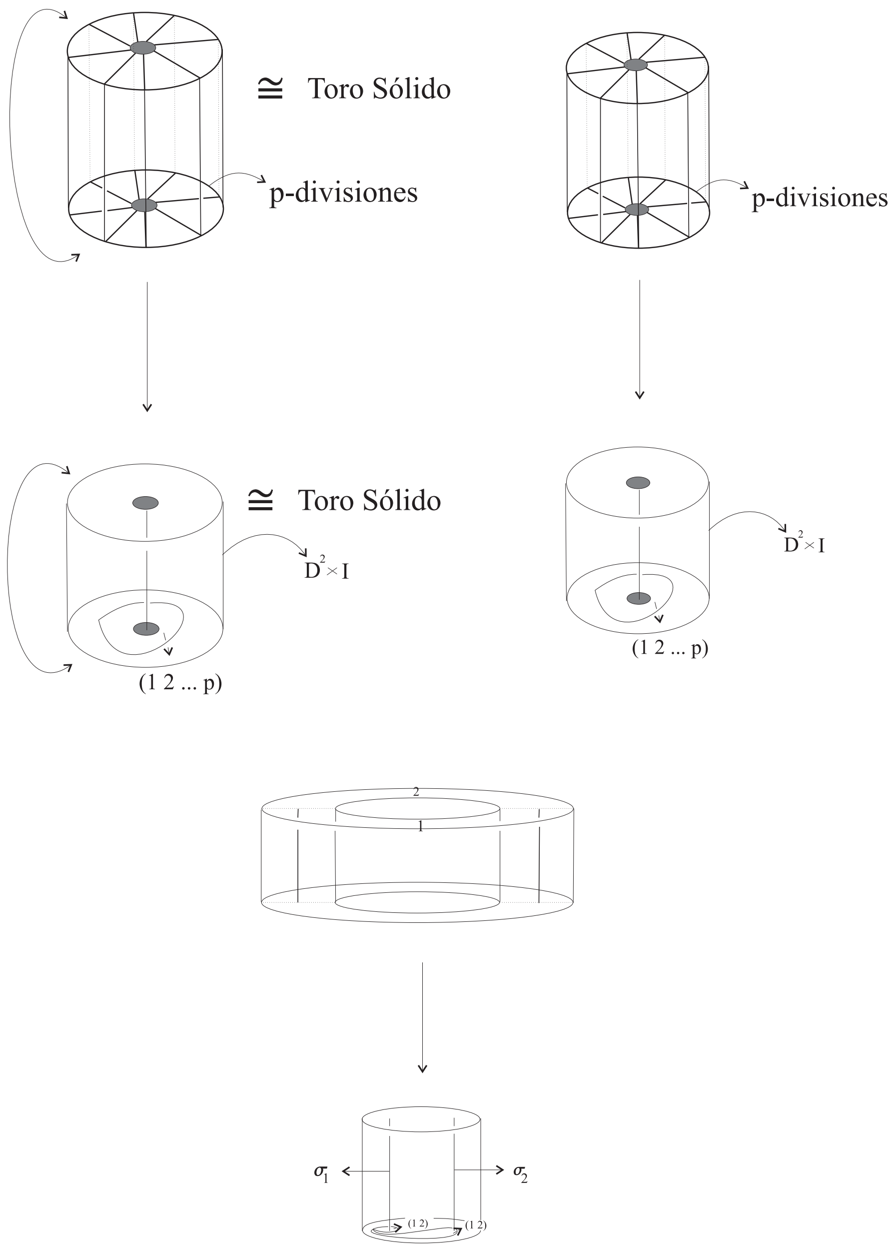
SÓLIDOS

Vamos a estudiar ahora una construcción muy interesante. Si F es una superficie, entonces $F \times I$ es un sólido de dimensión tres ($F \times I$ es la superficie F "engordada" a tres dimensiones).

Si $p : \widetilde{M} \to M$ es una cubierta ramificada, se tiene de manera automática una función continua y suprayectiva $p \times (id) : \widetilde{M} \times I \to M \times I$ dada por $(p \times (id))(x, t) = (p(x), t)$. Notemos primero que $(p \times (id))^{-1}(B_p \times I) = (p^{-1}(B_p)) \times I$; luego, claramente, $(p \times (id))| : (\widetilde{M} \times I) - ((p \times (id))^{-1}(B_p \times I)) = (\widetilde{M} \times I) - ((p^{-1}(B_p)) \times I) \to (M \times I) - (B_p \times I)$ es un espacio cubriente (el conjunto $U \times I$ funciona como una vecindad fundamental del punto (x, t), si U es una vecindad fundamental de x).

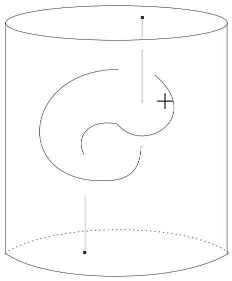
Así que $p \times (id) : \widetilde{M} \times I \to M \times I$ debe ser una cubierta ramificada, pero no hemos definido esto para dimensión tres, lo que no nos impedirá estudiar estos objetos:

EJEMPLOS.

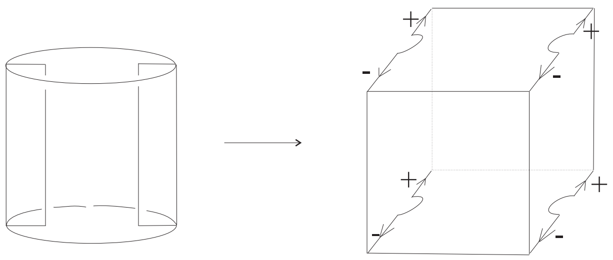


Se ve que ahora la ramificación tiene dimensión uno: $B_{p\times I} = B_p \times I$. Esto, por una parte, es una mala noticia, pues ya no tiene sentido una posible "fórmula de Riemann–Hurwitz" para dimensión tres; sin embargo nos dice que el estudio en dimensión tres es mucho más rico, pues los objetos de dimensión uno en un objeto de dimensión tres pueden estar colocados de muchas maneras, a diferencia de los puntos en los objetos de dimensión dos que se colocan únicamente "donde caen".

EJEMPLO.

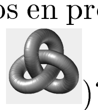


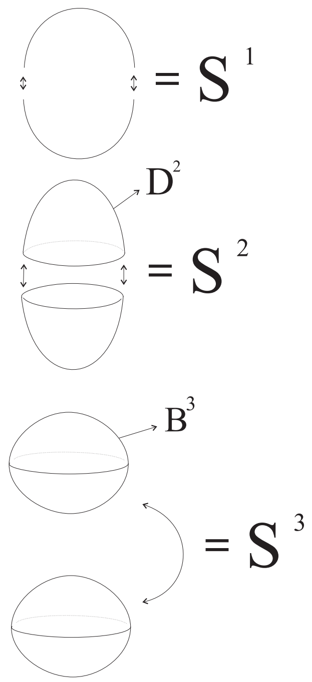
Para construir una cubierta de $D^2 \times I$ de n hojas con ramificación en dos arcos $\alpha_1 = \{x_1\} \times I$ y $\alpha_2 = \{x_2\} \times I$ cortamos a $D^2 \times I$ a lo largo de los discos siguientes:



tomamos n copias del resultado e identificamos de tal manera que la cara "+" de una copia se pegue con la cara "$-$" de la copia adecuada; esto estará indicado por la representación en permutaciones original $(\pi_1(D^2 - \{x_1, x_2\}) \to S_n)$.

Para estudiar las cubiertas ramificadas de sólidos regresaremos, entonces, a estudiar las representaciones de los grupos fundamentales en el grupo simétrico S_n.

Estamos en problemas: ¿Cómo describimos un grupo? Por ejemplo ¿Quién puede ser $\pi_1(S^3 -$ )? donde $S^3 = \{x \in R^4 : |x| = 1\}$.



ÁLGEBRA

Necesitamos entender qué es un grupo.

EJEMPLO. Sea G un grupo de seis elementos. Se sabe (Teorema de Cauchy) que existen $a, b \in G - \{1\}$ tales que $\langle a, b\rangle = G$, $a^3 = 1$ y $b^2 = 1$.

¿Quién es G? Pues G tiene los siguientes elementos: $1, a, a^2, b, ab, a^2b \in G$ y éstos son distintos (por ejemplo, $a \neq a^2$, de lo contrario $a = 1$; $a \neq b$, pues $o(a) = 3$ y $o(b) = 2$; $a \neq ab$, de lo contrario $b = 1$; $a \neq a^2b$, de lo contrario $ab = 1$ y $a = b^{-1}$, pero $o(a) = 3$ y $o(b^{-1}) = 2$. etc.).

Así que $G = \{1, a, a^2, b, ab, a^2b\}$. ¿Con esto ya sabemos quién es G? No; por ejemplo, $ba \in G$ pues G es grupo; así que ¿quién es ba?

1er. caso: ¿$ba = 1$? No; de lo contrario $a = b^{-1}$, pero $o(a) = 3$ y $o(b^{-1}) = 2$.

2do. caso: ¿$ba = a$? No; de lo contrario $b = 1$.

3er. caso: ¿$ba = a^2$? No; de lo contrario $a = b$ y $o(a) = 3$ y $o(b) = 2$.

4to. caso: ¿$ba = b$? No; de lo contrario $a = 1$.

5to. caso: ¿$ba = ab$? Podría ser: G es conmutativo con seis elementos. Nótese que en este caso cualquier palabra $a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \cdots a^{\alpha_n} b^{\beta_n}$ se puede escribir de la forma $a^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} b^{\beta_1 + \cdots + \beta_n}$; o sea, recuperamos la tabla de multiplicar de G.

6to. caso: ¿$ba = a^2 b$? También podría ser. En este caso la palabra $a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \cdots a^{\alpha_n} b^{\beta_n}$ se puede también escribir como $a^u b^v$ para ciertos $u, v \in Z$ (Ejercicio. En general si $ba = a^i b$, entonces $b^\beta a^\alpha = a^{\alpha i^\beta} b^\beta$). De nuevo recuperamos todo el grupo.

Podríamos escribir entonces

$$G = \langle a, b : a^3 = 1, b^2 = 1, ba = ab \rangle$$

o bien

$$G = \langle a, b : a^3 = 1, b^2 = 1, ba = a^2 b \rangle$$

Pregunta de matemáticos: En la notación anterior sabemos lo que son a y b: son elementos de G y lo generan como grupo. Pero ¿qué es, por ejemplo, "$a^3 = 1$"?

Como debe ser un objeto matemático, debe ser o bien un conjunto, o bien una función; pero no califica como ninguno de los dos.

Vayamos con calma.

EJEMPLOS.

1) ¿Qué puede ser $G = \langle a : - \rangle$? Pues $G = \{\ldots, a^{-2}, a^{-1}, 1, a, a^2, \ldots\}$ y $a^m a^n = a^{m+n}$; es decir, $G \cong Z$.

2) ¿Qué puede ser $G = \langle a, b : - \rangle$? Escribamos los elementos de G por orden de "longitud" (pensemos también que $a < b < a^{-1} < b^{-1}$):

1

a, b, a^{-1}, b^{-1}

$a^2, ab, \cancel{aa^{-1}}, ab^{-1}, ba, b^2, ba^{-1}, \cancel{bb^{-1}}, \cancel{a^{-1}a}, a^{-1}b, a^{-2}, a^{-1}b^{-1}, b^{-1}a, \cancel{b^{-1}b}, b^{-1}a^{-1}, b^{-2}, a^3, a^2b, \cancel{a^2a^{-1}}, a^2b^{-1}, aba, ab^2, aba^{-1}, \cancel{abb^{-1}}, \cancel{aa^{-1}a}, \cancel{aa^{-1}b}, \cancel{aa^{-2}}, \cancel{aa^{-1}b^{-1}}, ab^{-1}a, \cancel{ab^{-1}b}, ab^{-1}a^{-1}, ab^{-2}, ba^2, bab, \cancel{baa^{-1}}, bab^{-1}, b^2a, b^3, b^2a^{-1}, \cancel{b^2b^{-1}}, \cancel{ba^{-1}a}, ba^{-1}b, ba^{-2},$

$ba^{-1}b^{-1}, b\cancel{b^{-1}}a, b\cancel{b^{-1}}b, b\cancel{b^{-1}}a^{-1}, b\cancel{b^{-2}}, a\cancel{a^{-1}}a^2, a\cancel{a^{-1}}ab, a\cancel{a^{-1}}aa^{-1}, a\cancel{a^{-1}}ab^{-1},\ a^{-1}ba,\ a^{-1}b^2,$ $a^{-1}ba^{-1}, a\cancel{a^{-1}}bb^{-1}, a\cancel{a^{-2}}a,\ a^{-2}b,\ a^{-3},\ a^{-2}b^{-1},\ a^{-1}b^{-1}a, a\cancel{a^{-1}}b^{-1}b,\ a^{-1}b^{-1}a^{-1},\ a^{-1}b^{-2},$ $b^{-1}a^2,\ b^{-1}ab, b\cancel{b^{-1}}aa^{-1},\ b^{-1}ab^{-1}, b\cancel{b^{-1}}ba, b\cancel{b^{-1}}b^2, b\cancel{b^{-1}}ba^{-1}, b\cancel{b^{-1}}bb^{-1}, b\cancel{b^{-1}}a^{-1}a,\ b^{-1}a^{-1}b,$ $b^{-1}a^{-2},\ b^{-1}a^{-1}b^{-1},\ b^{-2}a, b\cancel{b^{-2}}b,\ b^{-2}a^{-1},\ b^{-3}$

$\vdots$

Y todos estos elementos son distintos.

3) ¿Qué puede ser $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n : -\rangle$?

Observación: En estos grupos cada elemento se escribe de manera única (después de reducir las trivialidades) en términos de los generadores.

DEFINICIÓN. "Palabra reducida"

Una *palabra* en las letras $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es una m-ada $(a_{i_1}^{\varepsilon_1}, a_{i_2}^{\varepsilon_2}, \ldots, a_{i_m}^{\varepsilon_m})$ donde $\varepsilon_i \in Z$; se escribe $(a_{i_1}^{\varepsilon_1}, a_{i_2}^{\varepsilon_2}, \ldots, a_{i_m}^{\varepsilon_m}) = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots a_{i_m}^{\varepsilon_m}$.

Si $w = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots a_{i_m}^{\varepsilon_m}$ y $i_j = i_{j+1}$ y $\varepsilon_j = -\varepsilon_{j+1}$, entonces se dice que la palabra $v = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots a_{i_{j-1}}^{\varepsilon_{j-1}} a_{i_{j+2}}^{\varepsilon_{j+2}} \cdots a_{i_m}^{\varepsilon_m}$ se obtiene de w mediante una *reducción elemental de tipo I.*

Si $w = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots a_{i_m}^{\varepsilon_m}$ y $\varepsilon_j = 0$, entonces se dice que la palabra que se obtiene de borrar la letra i_j-ésima, $v = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots a_{i_{j-1}}^{\varepsilon_{j-1}} a_{i_{j+1}}^{\varepsilon_{j+1}} \cdots a_{i_m}^{\varepsilon_m}$, se obtiene de w mediante una *reducción elemental de tipo II.*

La palabra w se llama *reducida* si no se pueden obtener palabras de w mediante reducciones elementales.

DEFINICIÓN. "Grupo libre"

Sea X conjunto y F un grupo tal que $X \subset F$

$\Rightarrow$

F se llama *libre con base* X ssi todo elemento de F se puede escribir como palabra reducida en las letras de X de manera única.

Así que los grupos del ejemplo anterior son libres.

Observación: Supongamos que F es libre con base X. Sea G un grupo y $f : X \to G$ una función. Se tiene entonces un homomorfismo de grupos $\varphi : F \to G$ dado como $\varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots a_{i_m}^{\varepsilon_m}) = \varphi(a_{i_1})^{\varepsilon_1} \varphi(a_{i_2})^{\varepsilon_2} \cdots \varphi(a_{i_m})^{\varepsilon_m}$, donde $a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots a_{i_m}^{\varepsilon_m} \in F$ está escrito como palabra reducida.

Nótese que φ es el único homomorfismo tal que $\varphi|X = f$.

Nota: Si F es el grupo libre con base X, se escribe $F = F(X)$.

EJEMPLO. 1) $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n : - \rangle$ es el grupo libre con base $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

2) ¿Qué puede ser $G = \langle a, a^3 = 1 \rangle$? Pues $G = \{1, a, a^2\}$, $aa = 1$, $aa^2 = 1 = a^2 a$, $a^2 a^2 = a$. Si $g = a^n, h = a^m \in F(a) = (F(\{a\}))$, entonces $g = h$ en G ssi $a^n = a^{n+3k}$ en $F(a)$ para alguna $k \in Z$; es decir, si $gh^{-1} = a^{3k}$, o sea, si $gh^{-1} \in \langle a^3 \rangle \leq F(a)$.

Es decir, si H es el subgrupo de $F(a)$ generado por a^3, $H = \langle a^3 \rangle$, entonces $g = h$ en G ssi $H \cdot g = H \cdot h$ en $F(a)/H$. O sea que G debe ser $F(a)/H$.

3) ¿Qué puede ser $G = \langle a, b : a^3 = 1, b^2 = 1, ba = a^2 b \rangle$? Pues podemos construir el subgrupo $H \langle a^3, b^2, ab(a^2 b)^{-1} \rangle \leq F(a)$ y debería suceder que $G = F(a,b)/H$; pero, ¡Horror! $F(a,b)/H$ no es grupo pues H no es un subgrupo normal de $F(a,b)$ (por ejemplo, $ba^3 b^{-1} \notin H$).

Tomemos $K =$ el subgrupo normal de $F(a,b)$ más chico que contiene a $H = \bigcap \{L : L$ es subgrupo normal de $F(a,b)$ y $H \subset L\}$.

Resulta que efectivamente $G \cong F(a,b)/K$, pues G es grupo, G está generado por a y b (por las clases Ka y Kb) y en G no se cumplen más relaciones que $a^3 = 1$, $b^2 = 1$ y $ba(a^2 b)^{-1}$ que se traduce a que K es el subgrupo normal de $F(a,b)$ más chico que contiene a a^3, b^2 y $ba(a^2 b)^{-1}$.

Notación: Si H es subgrupo de G, escribimos $H^N = \bigcap \{L : L \triangleleft G \wedge H \subset L\}$.

DEFINICIÓN.

$$\langle x_1, \ldots, x_n : r_1 = 1, \ldots, r_m = 1 \rangle = \frac{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle}{\langle r_1, \ldots, r_m \rangle^N}$$

Si $G \cong \langle x_1, \ldots, x_n : r_1 = 1, \ldots, r_m = 1 \rangle$, se dice que $\langle x_1, \ldots, x_n : r_1 = 1, \ldots, r_m = 1 \rangle$ es una *presentación* de G con *generadores* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y *relaciones* $\{r_1 = 1, \ldots, r_m = 1\}$.

Teorema. *Sea G grupo. Entonces existe un grupo libre F y un epimorfismo $\varphi : F \to G$.*

Demostración. Sea X un conjunto de generadores de G y tomamos $\varphi : F(X) \to G$ el homomorfismo que extiende a la inclusión $i : X \hookrightarrow G$. □

Corolario. *Todo grupo tiene una presentación.*

Demostración. Si G es un grupo, por el teorema anterior se tiene $\varphi : F(X) \to G$ epimorfismo donde $F(X)$ es libre con base X. Si escribimos $K = ker(\varphi)$, entonces $G \cong F(X)/K$. Si $\{r_\alpha\}$ es un conjunto de generadores de K como subgrupo normal de $F(X)$, entonces $G \cong \langle X : \{r_\alpha = 1\}\rangle$. □

MOVIDAS DE TIETZE

EJEMPLO. Si $G \cong \langle x, y : y^6 = 1, x^2 = 1, xy = 1\rangle$, entonces "se ve" que $G \cong \langle x : x^2 = 1\rangle$, pues como $xy = 1$, se sigue que $y = x^{-1}$; es decir, y es un generador redundante; y como $x^2 = 1$, por lo tanto $x^{-2} = 1$ y $(x^{-2})^3 = 1$, así que $y^6 = x^{-6} = 1$. Por lo tanto $y^6 = 1$ es una relación redundante.

DEFINICIÓN. "Movidas de Tietze"

Vamos a definir isomorfismos especiales entre presentaciones de grupos.

I. Si $s \in \langle r_1, r_2, \ldots, r_m\rangle^N$, entonces $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n : r_1 = 1, r_2 = 1, \ldots, r_m = 1\rangle \xrightarrow{I} \langle x_1, x_2, \ldots, x_n : r_1 = 1, r_2 = 1, \ldots, r_m = 1, s = 1\rangle$ dado por $I(x_i) = x_i$ es un isomorfismo.

I′. Si $s \in \langle r_1, r_2, \ldots, r_m\rangle^N$, entonces $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n : r_1 = 1, r_2 = 1, \ldots, r_m = 1, s = 1\rangle \xrightarrow{I'} \langle x_1, x_2, \ldots, x_n : r_1 = 1, r_2 = 1, \ldots, r_m = 1\rangle$ dado por $I'(x_i) = x_i$ es un isomorfismo.

II. Si $y \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $\xi \in F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ entonces $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n : r_1 = 1, r_2 = 1, \ldots, r_m = 1\rangle \xrightarrow{II} \langle x_1, x_2, \ldots, x_n, y : r_1 = 1, r_2 = 1, \ldots, r_m = 1, y = \xi\rangle$ dado por $II(x_i) = x_i$ es un isomorfismo.

II′. Si $y \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $\xi \in F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ entonces $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, y : r_1 = 1, r_2 = 1, \ldots, r_m = 1, y = \xi\rangle \xrightarrow{II'} \langle x_1, x_2, \ldots, x_n : r_1 = 1, r_2 = 1, \ldots, r_m = 1\rangle$ dado por $II'(x_i) = x_i$ y $II'(y) = \xi$ es un isomorfismo.

Los isomorfismos I, I', II y II' se llaman las *movidas de Tietze.*

Teorema de Tietze. *Si $G \cong \langle x_1, x_2, \ldots, x_n : r_1 = 1, r_2 = 1, \ldots, r_m = 1\rangle$ y $G \cong \langle y_1, y_2, \ldots, y_p : s_1 = 1, s_2 = 1, \ldots, s_q = 1\rangle$, entonces $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n : r_1 = 1, r_2 = 1, \ldots, r_m = 1\rangle$ se puede llevar a $\langle y_1, y_2, \ldots, y_p : s_1 = 1, s_2 = 1, \ldots, s_q = 1\rangle$ mediante una sucesión finita de movidas de Tietze.*

EJEMPLOS.

1)

$$\begin{aligned}
\langle x, y : y^6 = 1, x^2 = 1, xy = 1\rangle &\xrightarrow{I} \langle x, y : y^6 = 1, x^2 = 1, xy = 1, y = x^{-1}\rangle \\
&\xrightarrow{I'} \langle x, y : y^6 = 1, x^2 = 1, y = x^{-1}\rangle \\
&\xrightarrow{I} \langle x, y : y^6 = 1, x^2 = 1, y = x^{-1}, (x^{-1})^6 = 1\rangle \\
&\xrightarrow{I'} \langle x, y : x^2 = 1, y = x^{-1}, x^{-6} = 1\rangle \\
&\xrightarrow{II'} \langle x : x^2 = 1, x^{-6} = 1\rangle \\
&\xrightarrow{I'} \langle x : x^2 = 1\rangle
\end{aligned}$$

2) $\langle x, y : xyx = yxy\rangle \cong \langle a, b : a^3 = 1, b^2 = 1\rangle$.

Notemos que $(xyx)^2 = xyxxyx = xyxyxy = (xy)^3$.

$\langle x, y : xyx = yxy\rangle \xrightarrow{II} \langle x, y, a : xyx = yxy, a = xy\rangle \xrightarrow{II} \langle x, y, a, b : xyx = yxy, a = xy, b = xyx\rangle$

Ahora $ba^1 = yxy(xy)^{-1} = y$ y $a(ba^{-1})^{-1} = a^2b^{-1} = xyy^{-1} = x$.

$\xrightarrow{I} \langle x, y, a, b : xyx = yxy, a = xy, b = xyx, y = ba^{-1}\rangle$
$\xrightarrow{I} \langle x, y, a, b : xyx = yxy, a = xy, b = xyx, y = ba^{-1}, x = a^2b^{-1}\rangle$

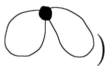
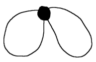
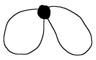
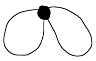
Sustituimos x y y en las relaciones $xyx = yxy$, $a = xy$ y $b = xyx$

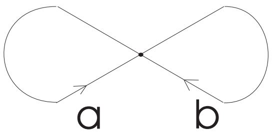
$\xrightarrow{I} \langle x, y, a, b : xyx = yxy, a = xy, b = xyx, y = ba^{-1}, x = a^2b^{-1},$
$(a^2b^{-1})(ba^{-1})(a^2b^{-1}) = (ba^{-1})(a^2b^{-1})(ba^{-1})\rangle$
$= \langle x, y, a, b : xyx = yxy, a = xy, b = xyx, y = ba^{-1}, x = a^2b^{-1}, a^3b^{-1} = b\rangle$
$\xrightarrow{I'} \langle x, y, a, b : a = xy, b = xyx, y = ba^{-1}, x = a^2b^{-1}, a^3b^{-1} = b\rangle$
$\xrightarrow{I} \langle x, y, a, b : a = xy, b = xyx, y = ba^{-1}, x = a^2b^{-1}, a^3b^{-1} = b, a = (a^2b^1)(ba^{-1})\rangle$
$= \langle x, y, a, b : a = xy, b = xyx, y = ba^{-1}, x = a^2b^{-1}, a^3b^{-1} = b, a = a\rangle$
$\xrightarrow{I'} \langle x, y, a, b : b = xyx, y = ba^{-1}, x = a^2b^{-1}, a^3b^{-1} = b, a = a\rangle$
$\xrightarrow{I} \langle x, y, a, b : b = xyx, y = ba^{-1}, x = a^2b^{-1}, a^3b^{-1} = b, a = a, b = (ba^{-1})(a^2b^{-1})(ba^{-1})\rangle$

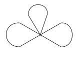
$= \langle x, y, a, b : b = xyx, y = ba^{-1}, x = a^2b^{-1}, a^3b^{-1} = b, a = a, b = b\rangle$
$\xrightarrow{I'} \langle x, y, a, b : y = ba^{-1}, x = a^2b^{-1}, a^3b^{-1} = b, a = a, b = b\rangle$
$\xrightarrow{II'} \langle x, a, b : x = a^2b^{-1}, a^3b^{-1} = b, a = a, b = b\rangle$
$\xrightarrow{II'} \langle a, b : a^3b^{-1} = b, a = a, b = b\rangle$
$\xrightarrow{I'} \langle a, b : a^3b^{-1} = b, a = a\rangle$
$\xrightarrow{I'} \langle a, b : a^3b^{-1} = b\rangle$
$\xrightarrow{I} \langle a, b : a^3b^{-1} = b, a^3 = b^2\rangle$
$\xrightarrow{I} \langle a, b : a^3 = b^2\rangle.$

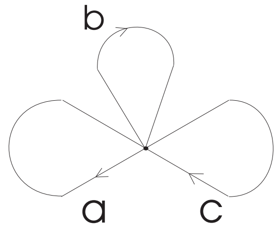
Vamos ahora a describir los grupos fundamentales de algunos espacios topológicos. Demostrar que efectivamente los grupos son lo que se afirma se puede hacer sin mucha dificultad (en muchos casos se puede hacer, por ejemplo, usando el Teorema de Seifert–Van Kampen).

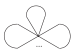
EJEMPLOS. 1) $\pi_1(S^1) \cong \langle a : -\rangle$ donde a está representado por el lazo $\alpha : I \to S^1$ dado por $\alpha(t) = e^{2\pi it}$.

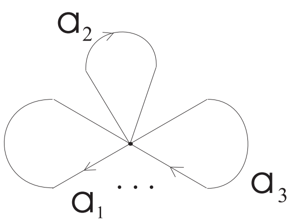
2)$\pi_1($$) \cong \langle a, b : -\rangle$.  se puede ver como $\frac{S^1 \sqcup S^1}{1_1 \sim 1_2}$ y entonces a está representado por $\alpha : I \to$  donde $\alpha(t) = (e^{2\pi it}, 1)$ y b está representado por $\beta : I \to$  donde $\beta(t) = (e^{2\pi it}, 2)$.

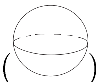


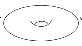
3) $\pi_1($$) \cong \langle a, b, c : -\rangle$ donde

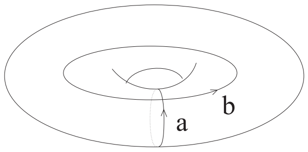


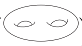
4) $\pi_1($$) \cong \langle a_1, a_2, \ldots : - \rangle$ donde

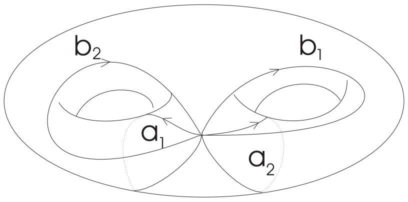


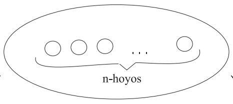
5) $\pi_1($$) \cong \langle - : - \rangle$.

6) $\pi_1($$) \cong \langle a, b : ab = ba \rangle$ donde

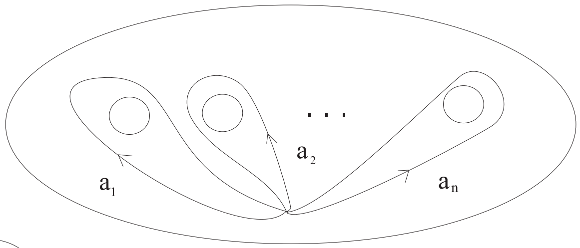


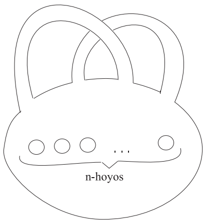
7) $\pi_1($$) \cong \langle a_1, b_1, a_2, b_2 : a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \rangle$ donde



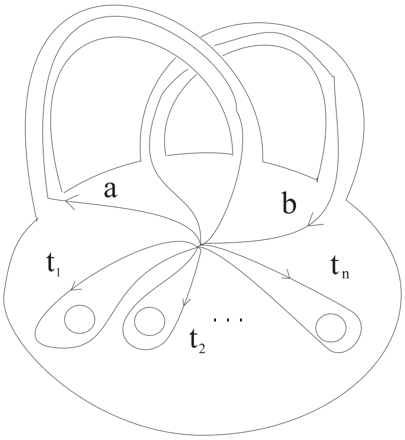
8) $\pi_1($ 

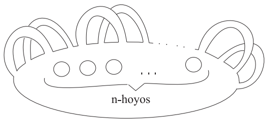
$) \cong \langle a_1, a_2, \ldots, a_n : - \rangle$ donde



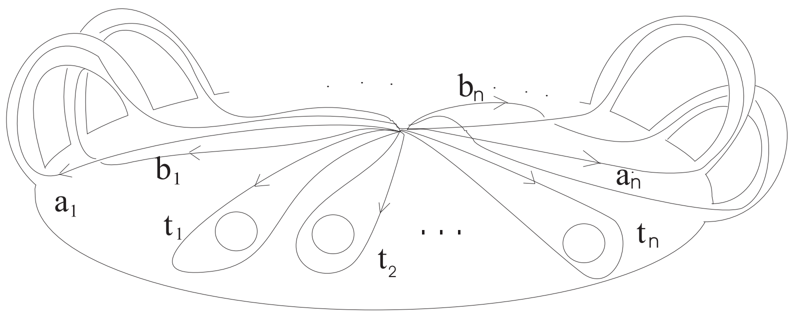
9) $\pi_1($ 

$) \cong \langle a, b, t_1, t_2 \ldots, t_n : - \rangle$ donde



10) $\pi_1($ 

$) \cong \langle a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m, t_1, t_2 \ldots, t_n : - \rangle$ donde

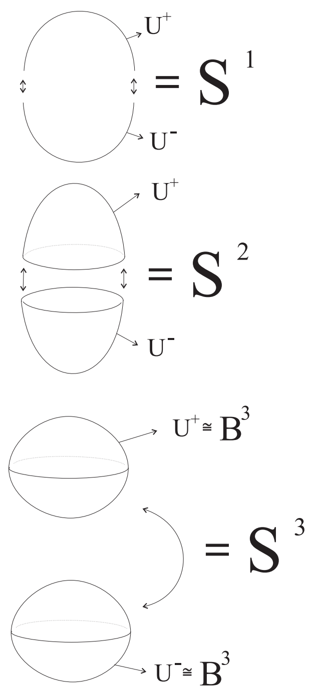


ESFERAS Y NUDOS

DEFINICIÓN. "n–esfera"

La n–*esfera* es $S^n = \{x \in R^{n+1} : |x| = 1\}$.

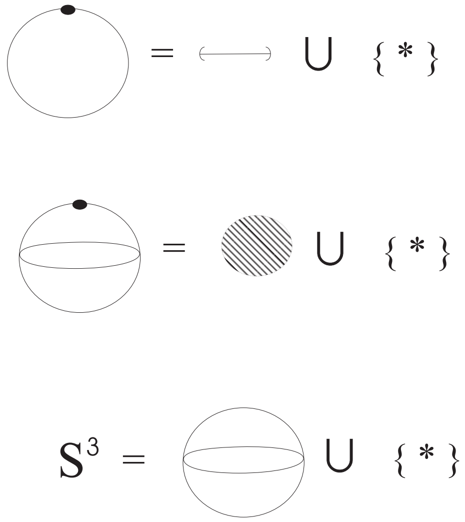
Vimos que S^n es unión de dos n–bolas $U_+ = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} \geq 0\}$ y $U_- = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} \leq 0\}$



De hecho

$$S^n = \frac{B_1^n \sqcup B_2^n}{(x,1) \sim (x,2) \text{ para } x \in \partial B^n} = B_1^n \cup_{id} B_2^n.$$

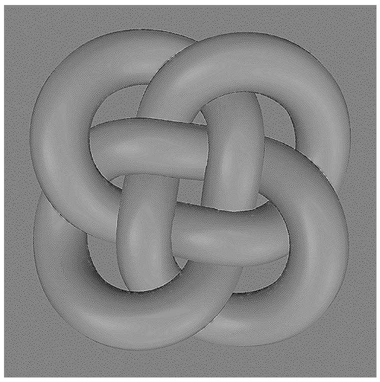
También se puede ver a S^n como $R^n \cup \{$ un punto $\}$, por ejemplo, proyección estereográfica : $S^n - \{(0,\ldots,0,1)\} \to R^n$ es un homeomorfismo.

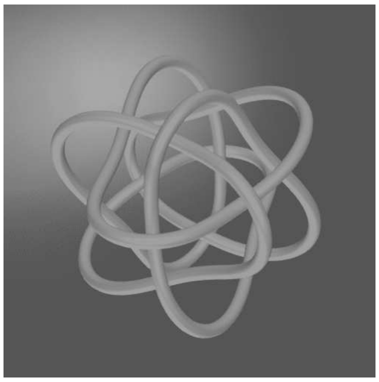


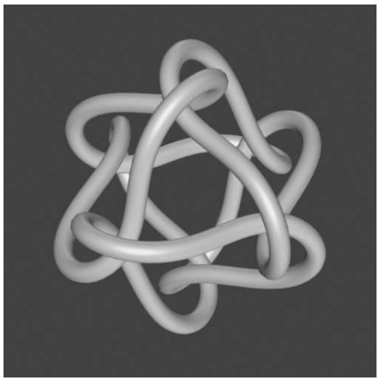
1a. DEFINICIÓN. "Nudo"

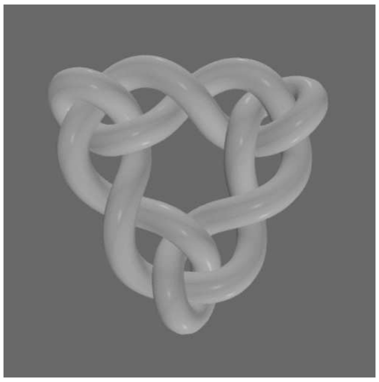
Un *nudo* es una pareja (S^3, k) donde k es una circunferencia en S^3.

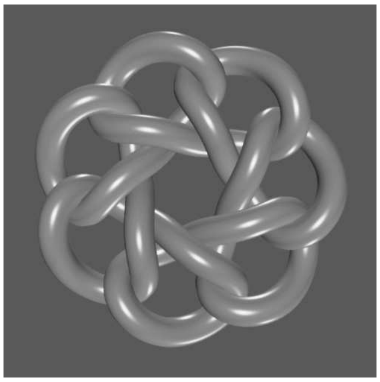
EJEMPLOS.

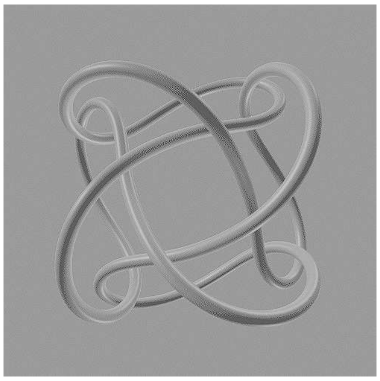



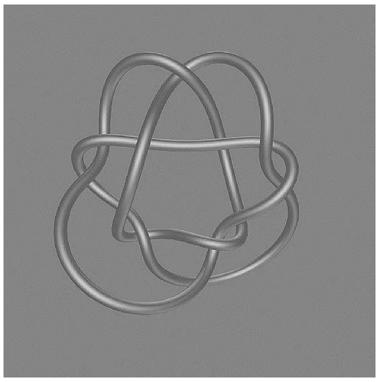
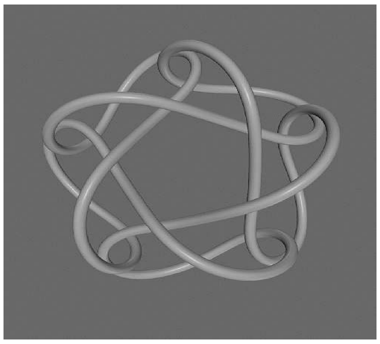
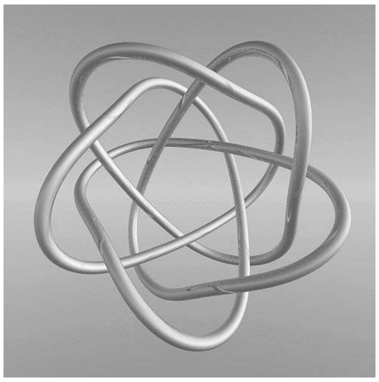


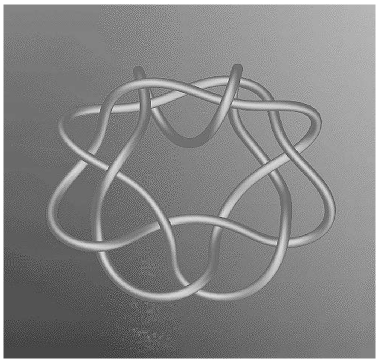
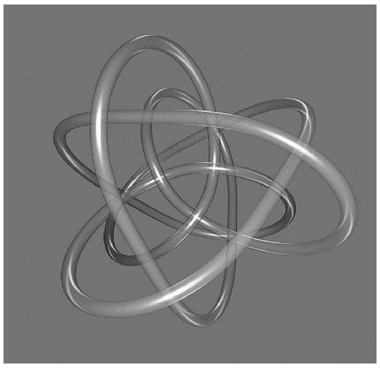


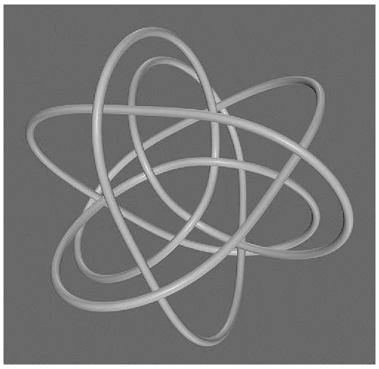


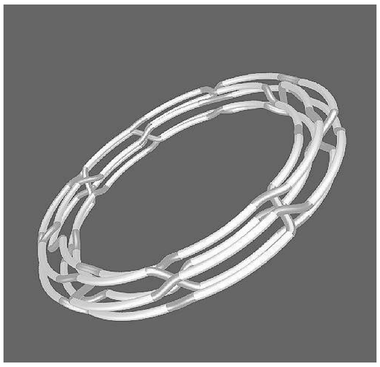


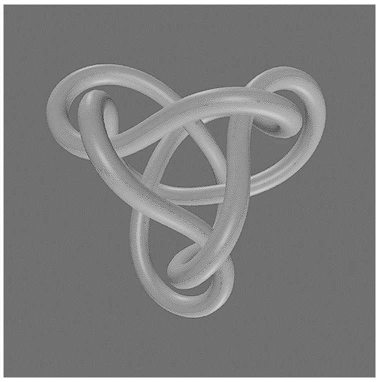


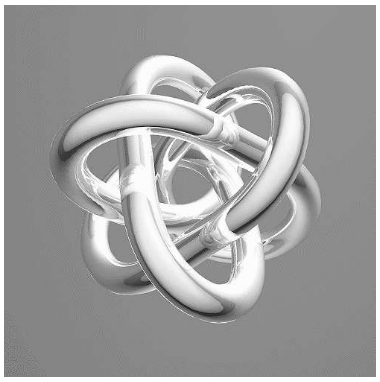




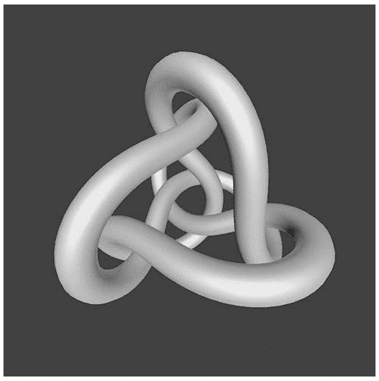



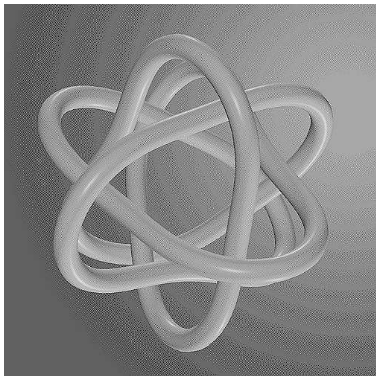




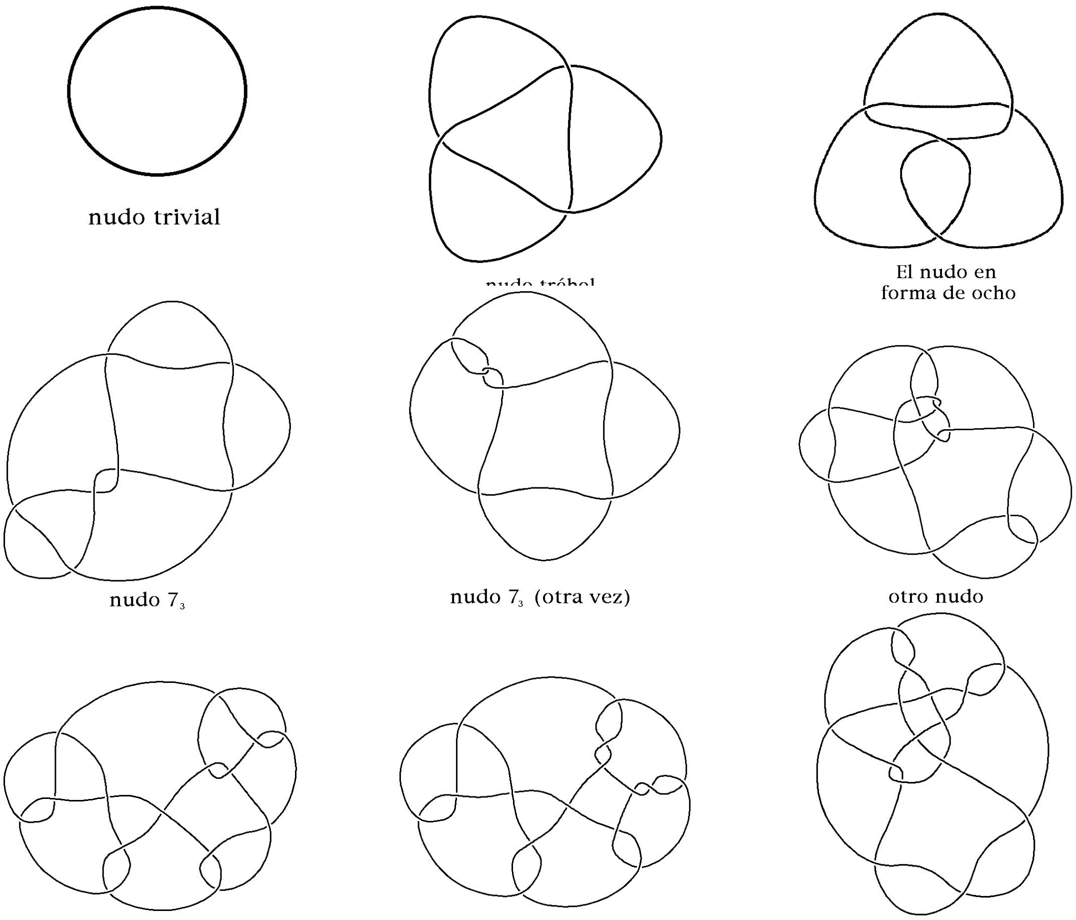








Por supuesto que por cuestiones prácticas se hacen dibujos de nudos menos realistas:



Dos nudos (S^3, k_1) y (S^3, k_2) se dicen *equivalentes* si hay un homeomorfismo $h : S^3 \to S^3$ tal que $h(k_1) = k_2$ (la definición usual pide que el homeomorfismo h conserve la orientación de S^3, pero nosotros no sabemos que quiere decir eso).

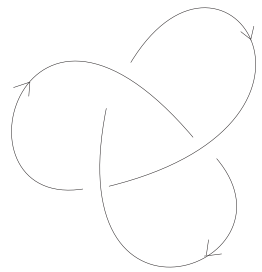
Nótese que en este caso $h| : S^3 - k_1 \to S^3 - k_2$ también es un homeomorfismo, o sea que si dos nudos (S^3, k_1) y (S^3, k_2) son equivalentes, entonces los grupos $\pi_1(S^3 - k_1)$ y $\pi_1(S^3 - k_2)$ son isomorfos (con el isomorfismo $h_{|}\# : \pi_1(S^3 - k_1) \to \pi_1(S^3 - k_2)$).

Nuestro objetivo será estudiar cubiertas ramificadas de espacios de dimensión tres. La ramificación en una cubierta de un espacio de dimensión tres va a ser (siempre en nuestros ejemplos) un subconjunto de dimensión uno. Para comenzar estudiaremos cubiertas ramificadas de la 3–esfera ramificadas a lo largo de un nudo. Recordemos que en dimensión tres no tiene sentido hablar de una fórmula como la de Riemann–Hurwitz; sin embargo sabemos que una cubierta de S^3 ramificada a lo largo de un nudo $k \subset S^3$ está determinada por un homomorfismo de grupos $\rho : \pi_1(S^3 - k) \to S_n$.

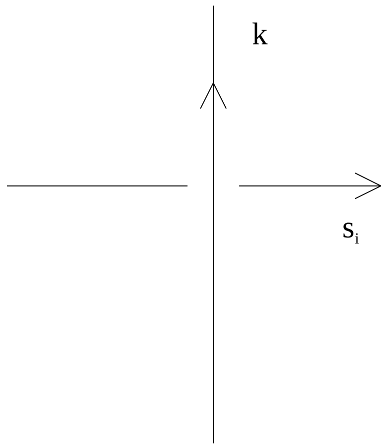
Debemos comenzar entonces por entender qué es el grupo $\pi_1(S^3 - k)$. Vamos a describir una receta para calcular grupos de este estilo; de nuevo, aunque las demostraciones de los hechos siguientes no son muy complicadas, no las estudiaremos.

ALGORITMO DE WIRTINGER (Grupo fundamental de $S^3 - k$)

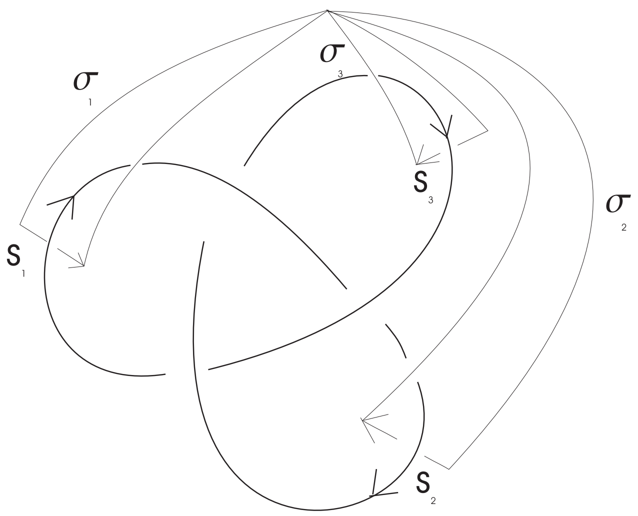
Al dibujar un nudo $k \subset S^3$, lo que tenemos es un dibujo de n arcos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en el plano. Si orientamos a k (o sea, indicamos una dirección en la que se recorre k), entonces cada arco de k recibe una flechita que indica una dirección.



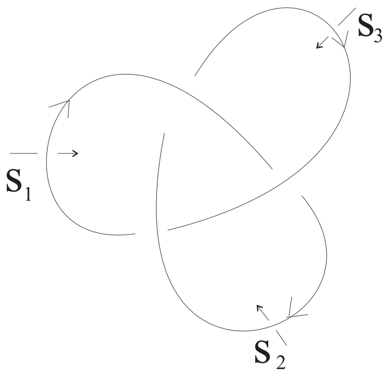
Bajo de cada arco orientado a_i trazamos un segmento de recta s_i dirigido de izquierda a derecha:



Tomamos como punto base de $S^3 - k$ algún punto del espacio, por ejemplo, el ojo izquierdo del lector, y construimos un lazo σ_i que está formado por un arco del ojo izquierdo a la cola de s_i, seguido de s_i y seguido de un arco de la punta de s_i al ojo izquierdo. Cada uno de los lazos σ_i se llam un *meridiano* de k.

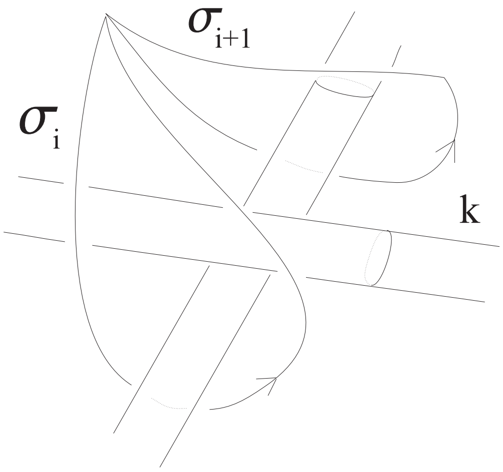


El dibujo completo anterior está extremadamente complicado; así que usualmente sólo se indican las flechitas s_i y mentalmente se completan los dibujos de los meridianos σ_i.

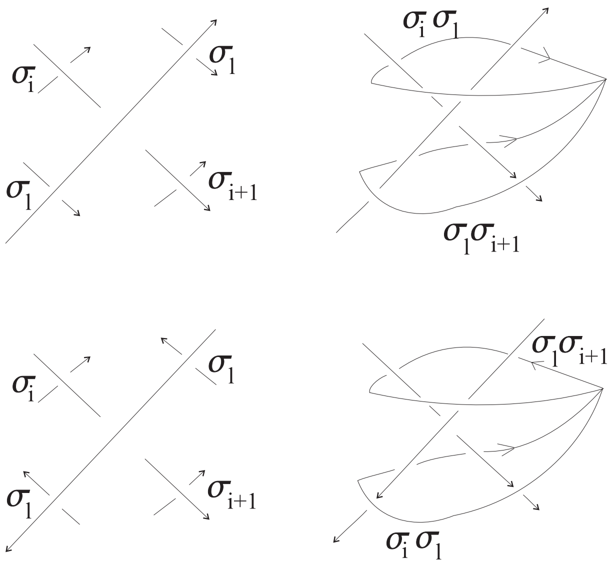


S

Más o menos se ve que $\sigma_i \not\simeq \sigma_j$ rel $\{0, 1\}$ si $i \neq j$.



También se ve que se cumple que o bien $\sigma_i\sigma_\ell \simeq \sigma_\ell\sigma_{i+1}$ rel $\{0,1\}$, o bien $\sigma_\ell\sigma_i \simeq \sigma_{i+1}\sigma_\ell$ rel $\{0,1\}$ según como haya quedado el dibujo



O sea que en el grupo $\pi_1(S^3-k)$ se cumple que $[\sigma_\ell^\varepsilon\sigma_i\sigma_\ell^{-\varepsilon}]=[\sigma_{i+1}]$ en el "cruce" i–ésimo de k, donde $\varepsilon=\pm1$ según como esté el dibujo.

Teorema de Wirtinger. *Sea k un nudo en S^3. Entonces*

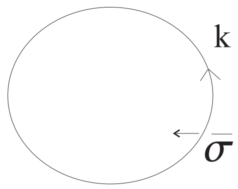
$\pi_1(S^3-k)\cong$

$\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n : \sigma_{\ell_1}^{\varepsilon_1}\sigma_1\sigma_{\ell_1}^{-\varepsilon_1} = \sigma_2, \sigma_{\ell_2}^{\varepsilon_2}\sigma_2\sigma_{\ell_2}^{-\varepsilon_1} = \sigma_3, \dots, \sigma_{\ell_n}^{\varepsilon_n}\sigma_n\sigma_{\ell_n}^{-\varepsilon_n} = \sigma_1\rangle$ (o sea, se puede borrar una relación).

Además para cada $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ se cumple

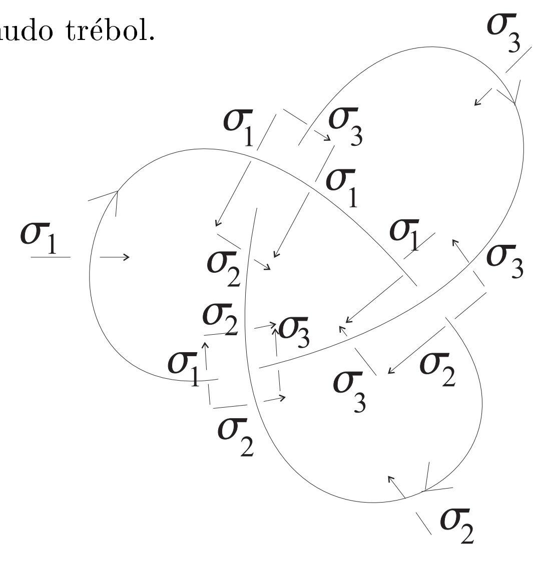
$$\langle\{\sigma_{\ell_i}^{\varepsilon_i}\sigma_i\sigma_{\ell_i}^{-\varepsilon_i}\sigma_{i+1}^{-1}\}\rangle^N = \langle\{\sigma_{\ell_i}^{\varepsilon_i}\sigma_i\sigma_{\ell_i}^{-\varepsilon_i}\sigma_{i+1}^{-1}\} - \{\sigma_{\ell_{i_0}}^{\varepsilon_{i_0}}\sigma_{i_0}\sigma_{\ell_{i_0}}^{-\varepsilon_{i_0}}\sigma_{i_0+1}^{-1}\}\rangle^N.$$

EJEMPLOS. 1)



$\pi_1(S^3 - k) \cong \langle \sigma : - \rangle$.

2) Sea k el nudo trébol.

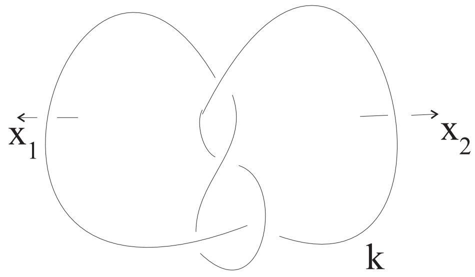


$$\begin{aligned}
\pi_1(S^3 - k) &\cong \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 : \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1} = \sigma_3, \sigma_3\sigma_1\sigma_3^{-1} = \sigma_2, \sigma_2\sigma_3\sigma_2^{-1} = \sigma_1, \rangle \\
&\cong \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 : \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1} = \sigma_3, \sigma_3\sigma_1\sigma_3^{-1} = \sigma_2\rangle \\
&\cong \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 : (\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1})\sigma_1(\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1})^{-1} = \sigma_2\rangle \\
&\cong \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 : \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} = \sigma_2\rangle \\
&\cong \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 : \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} = \sigma_2\rangle
\end{aligned}$$

$$\cong \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 : \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \rangle$$
$$\cong \langle a, b : a^3 = 1, b^2 = 1 \rangle.$$

Se puede probar que $\pi_1(S^3 - k) \cong \langle a, b : a^3 = 1, b^2 = 1 \rangle \not\cong Z$, así que k no es el nudo del Ejemplo (1).

3)Sea k el nudo figura ocho



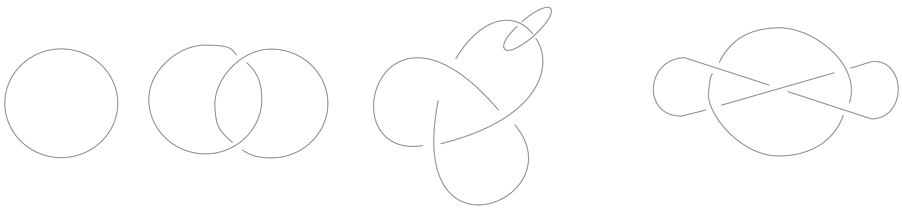
Entonces

$$\pi_1(S^3 - k) \cong \langle x_1, x_2 : x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1} \rangle.$$

2a. DEFINICIÓN. "Nudo"

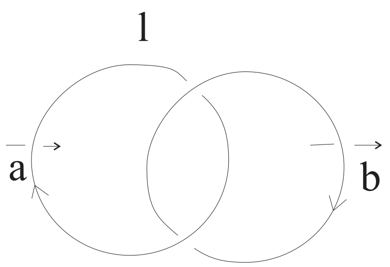
Un *nudo de μ componentes* (o *enlace de μ componentes*) es una pareja (S^3, ℓ) donde ℓ es la unión ajena de μ circunferencias en S^3.

EJEMPLOS.



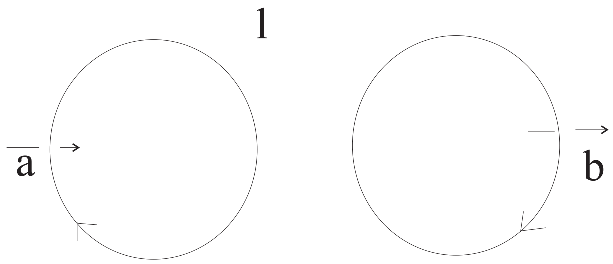
Nota: Se vale el Teorema de Wirtinger para enlaces: sólo hay que orientar cada componente del enlace (arbitrariamente) y se sigue la misma receta.

EJEMPLOS. 1) Para el enlace



$\pi_1(S^3 - \ell) \cong \langle a, b : ab = ba \rangle$.

2) Para el enlace



$\pi_1(S^3 - \ell) \cong \langle a, b : - \rangle$.

Inevitablemente tendremos que estudiar las cubiertas ramificadas entre espacios de dimensión tres más generales que la 3–esfera. Veamos que son estos conceptos.

DEFINICIÓN. "3–variedad"

X espacio topológico

$\Rightarrow$

X se llama *3–variedad* (espacio de dimensión 3) ssi cada punto $x \in X$ tiene una vecindad $U \subset X$ tal que $U \cong B^3$.

DEFINICIÓN. "Frontera e interior"

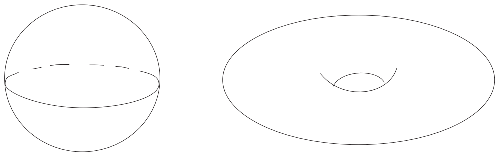
Si X es una 3–variedad y $x \in X$

$\Rightarrow$

x se llama un *punto frontera* de X ssi x no tiene una vecindad $U \subset X$ tal que $U \cong (B^3)^\circ$.

Se escribe $\partial(X) = \{x \in X : x$ es un punto frontera de $X\}$ y $int(X) = X^\circ = X - \partial(X)$.

EJEMPLOS.



S^3

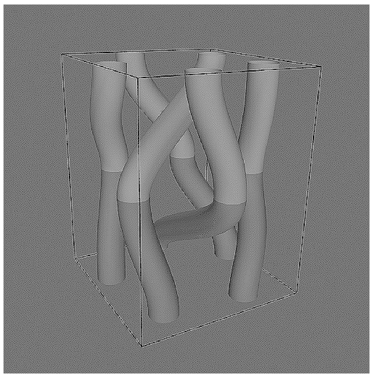
DEFINICIÓN. "Arco propiamente encajado"

X una 3–variedad y $\alpha \subset X$ un arco

$\Rightarrow$

α se llama *propiamente encajado en* X ssi los extremos de α están en $\partial(X)$ y el interior de α está en $int(X)$.

EJEMPLO.



3a. DEFINICIÓN. "Nudo"

Sea X una 3–variedad. Un *enlace* en X es una pareja (X, ℓ) donde ℓ es la unión ajena de un número finito de circunferencias en $int(X)$ y un número finito de arcos propiamente encajados en X

DEFINICIÓN. "Cubierta ramificada"

Sean X, Y 3–variedades, $p : X \to Y$ continua, suprayectiva y tal que $p^{-1}(\partial(Y)) = \partial(X)$

$\Rightarrow$

p se llama *cubierta ramificada* ssi existe un enlace $\ell \subset Y$ tal que $p| : X - p^{-1}(\ell) \to Y - \ell$ es un espacio cubriente finito.

El enlace ℓ se llama la *ramificación* de p y se escribe a veces $\ell = B_p$.

EJEMPLO. Si $p : M^3 \to S^3$ es una cubierta ramificada, como S^3 no tiene frontera, por lo tanto M tampoco tiene frontera y p tiene ramificación en un enlace de S^3 según la 2a. definición de nudo; o sea B_p es unión ajena de circunferencias de S^3.

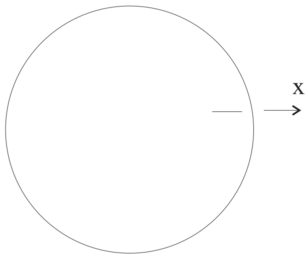
NOTA: De nuevo una cubierta ramificada $p : M^3 \to S^3$ de n hojas determina y está determinada por un homomorfismo de grupos $\rho : \pi_1(S^3 - B_p) \to S_n$.

(Por supuesto que para una cubierta ramificada $p : M^3 \to N^3$ entre variedades arbitrarias de dimensión tres también se tiene la representación de la cubierta $\rho : \pi_1(N^3 - B_p) \to S_n$ que guarda toda la información relevante de la cubierta p.)

CUBIERTAS DE SÓLIDOS

Vamos a ver ejemplos de cubiertas de S^3 que ramifican sobre nudos o enlaces.

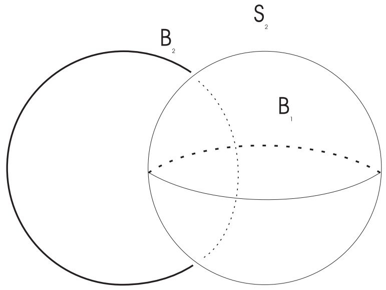
EJEMPLO 1. El ejemplo más sencillo es S^3 con ramificación en el nudo trivial

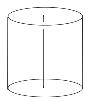


σ

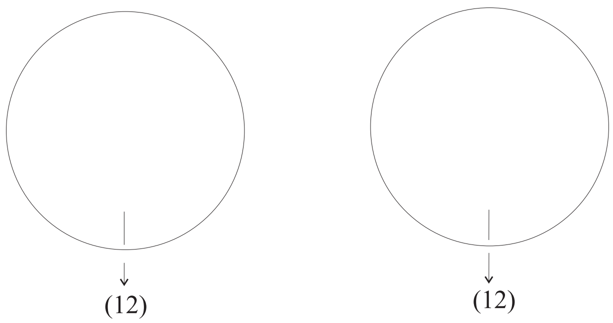
Como se ve $\pi_1(S^3-\sigma)$ es un gruo libre con un generador x; luego $\pi_1(S^3-\sigma)$ admite la representación ω que manda a x en un elemento arbitrario de S_n. Pero para que la cubierta sea conexa, $\omega(x)$ debe ser un n–ciclo y, sin perder la generalidad, $\omega(x)=(123\cdots n)$.

Veamos, pues, quién es la cubierta de S^3 que ramifica en σ asociada a esta representación. Descomponemos a S^3 en la unión de dos 3–bolas B_1, B_2

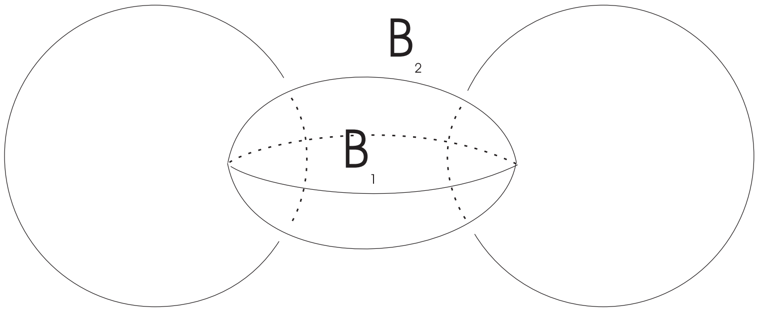


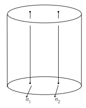
Ya sabemos que las cubiertas de $(B^3,\alpha)=$  son bolas (B^3,β). Así que la cubierta que se obtiene es el resultado de pegar dos 3–bolas por la frontera, a saber, las preimágenes de B_1 y B_2.

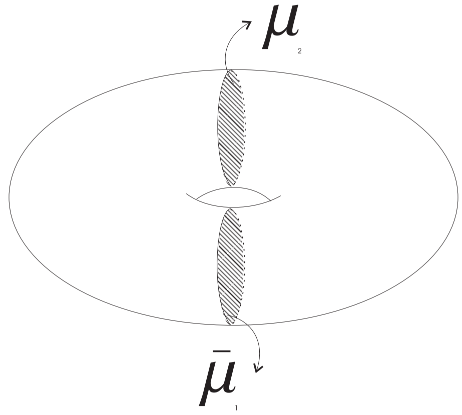
EJEMPLO 2.

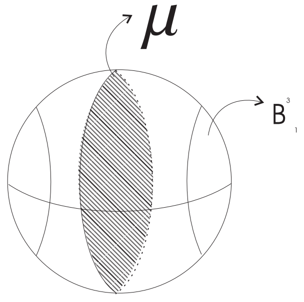


Descomponemos, nuevamente, a S^3 en dos 3–bolas B_1 y B_2.

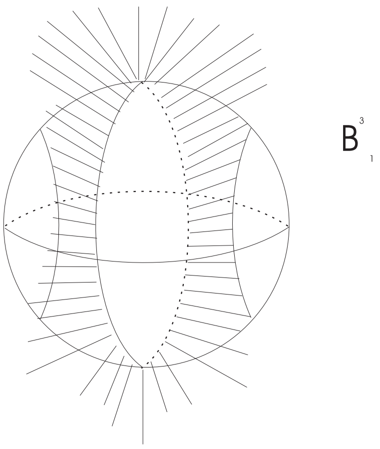


Hemos visto que la doble cubierta de  ramificada sobre los arcos α_1 y α_2 es un toro sólido. Por lo tanto la cubierta $\bar{M}$ de S^3 ramificada sobre el enlace L es la unión de dos toros sólidos, T_1 y T_2. Nos gustaría saber quién es $\bar{M}$; para ello obsérvese que el disco $D_1 \subset B_1$ cuya frontera es μ, como en la figura



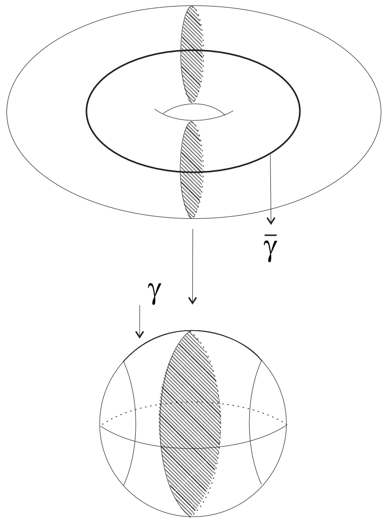


se levanta en dos discos $D_{1,1}, D_{1,2} \subset T_1$. Por otro lado μ también es frontera de un disco D_2 en B_2



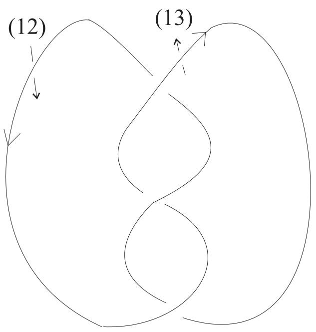
y D_2 se levanta a dos discos meridionales $D_{2,1}, D_{2,2} \subset T_2$. Ahora $D_{1,j}$ se pega a $D_{2,j}$ a lo largo de μ_j; por lo tanto en $\bar{M}$ tenemos una esfera S_j^2 para $j = 1, 2$.

Obsérvese además que el arco γ de la figura

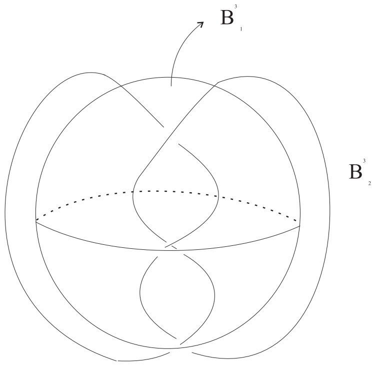


se levanta al lazo $\bar{\gamma} \cong S^1$ y que $\bar{\gamma}$ interseca cada esfera S_j de $\bar{M}$ en un punto. Por lo tanto $\bar{M} \cong S^2 \times S^1$.

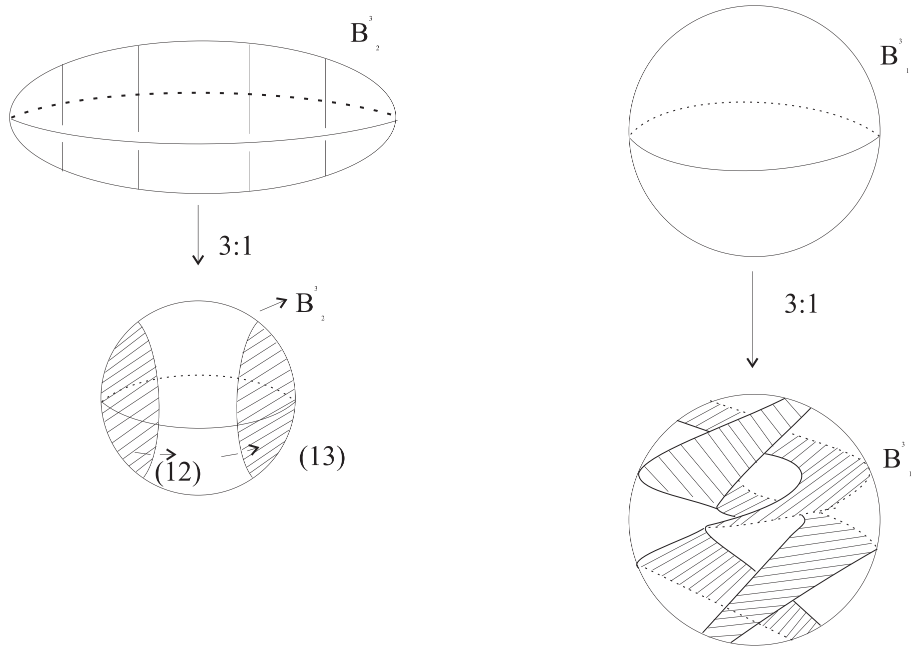
EJEMPLO 3.



Nuevamente descomponemos a S^3 en dos 3–bolas B_1 y B_2.



Es claro que la preimagen de B_i es nuevamente una 3–bola



Por lo tanto $\bar{M}$ se obtiene como la unión de dos 3–bolas. ¿$\bar{M} \cong S^3$? Sí; para demostrarlo necesitamos el

Teorema. *Si $M = B_1 \cup_h B_2$ donde $h : \partial(B_1) \to \partial(B_2)$ es un homeomorfismo, entonces $M \cong S^3$.*

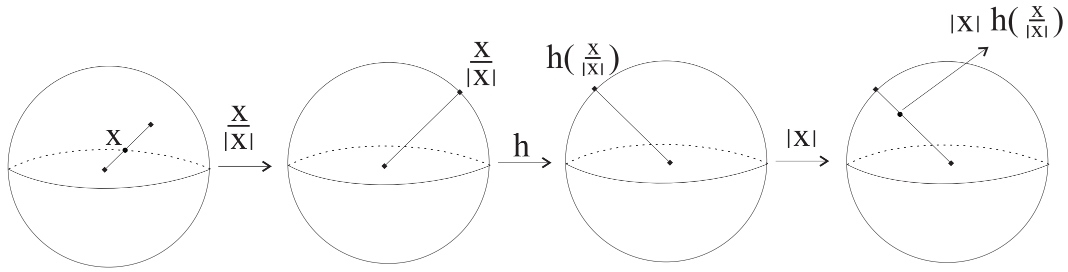
Demostración. Sabemos que $S^3 = B_1 \cup_{id} B_2$ y queremos definir $f : B_1 \cup_{id} B_2 \to B_1 \cup_h B_2$ un homeomorfismo.

Damos $f(x) = x$ si $x \in B_1$. Si $x \in \partial(B_1)$, entonces x se pega con $x \in \partial(B_2)$ en $B_1 \cup_{id} B_2$. Luego f debe ser igual a h en $\partial(B_1)$ (para que sea continua). Así que debemos encontrar $H : B_2 \to B_2$ homeomorfismo tal que $H|\partial(B_2) = h$ y definir $f(x) = H(x)$ para $x \in B_2$. Esto nos lo garantiza el siguiente lema.

El Truco de Alexander. *Si $h : \partial(B^n) \to \partial(B^n)$ es un homeomorfismo, entonces existe $H : B^n \to B^n$ homeomorfismo tal que $H|\partial(B^n) = h$.*

Demostración. Definimos

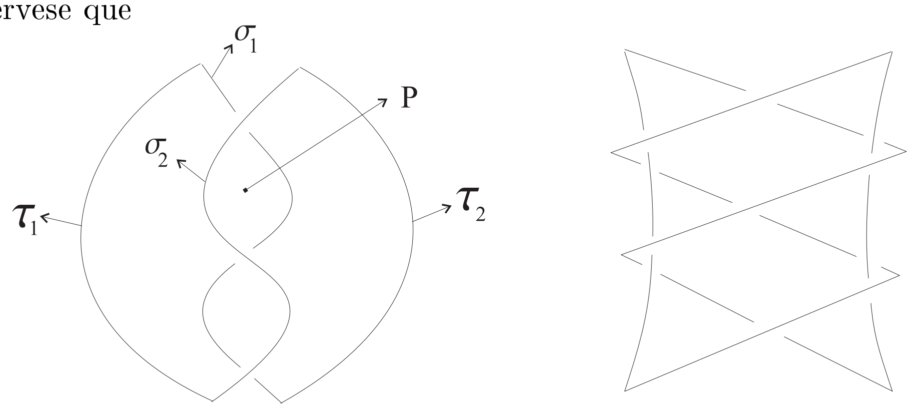
$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0; \\ |x| h(\frac{x}{|x|}) & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$



□

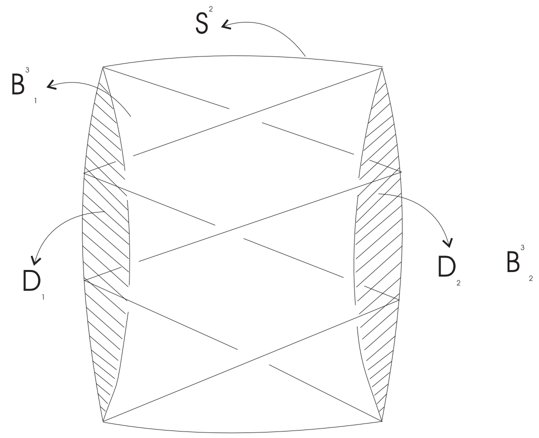
Veamos otra forma de construir a S^3 como cubierta triple simple de S^3 ramificada sobre el nudo trébol que nos muestra, de manera sencilla, la preimagen del trébol en S^3.

Obsérvese que

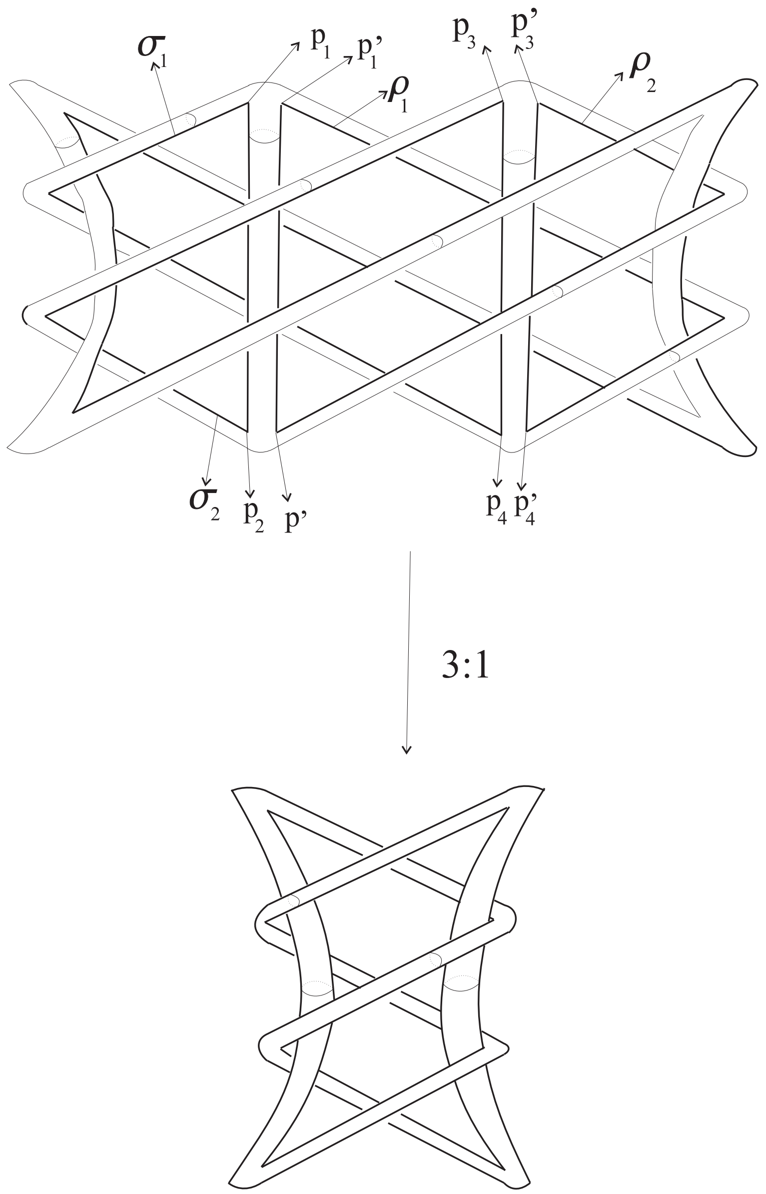


Una forma de entender este dibujo es como sigue (recordemos que $S^3 = R^3 \cup \{\infty\}$): En los arcos del trébol de la izquierda el observador está parado en ∞. En el dibujo de la derecha el observador se traslada al punto p y obseva a su alrededor; o sea, ponemos a ∞ en el punto p. Nótese que al estar parado en p el observador ve primeramente los arcos que se entrecruzan, σ_1 y σ_2, y luego ve los postes τ_1 y τ_2.

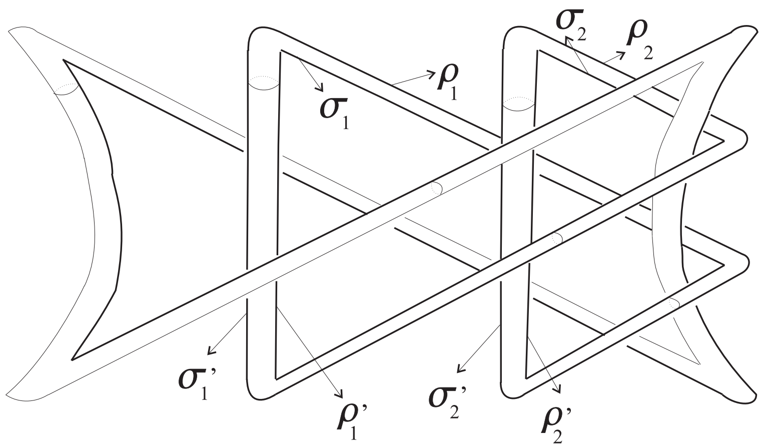
Sea S^2 la esfera que separa a S^3 en dos 3–bolas B_1 y B_2 de la siguiente figura



(con fecuencia diremos que B_1 es la almohada). Obsérvese que los arcos σ_1 y σ_2 se pueden dibujar sobre S^2. Cortamos a B_1 a lo largo de los discos D_1 y D_2, tomamos tres copias y pegamos los lados correspondientes. Para visualizar el levantamiento del trébol conviene que nos fijemos primero en el espacio cubriente asociado de $S^3 - \mathcal{N}(\text{trébol})$.

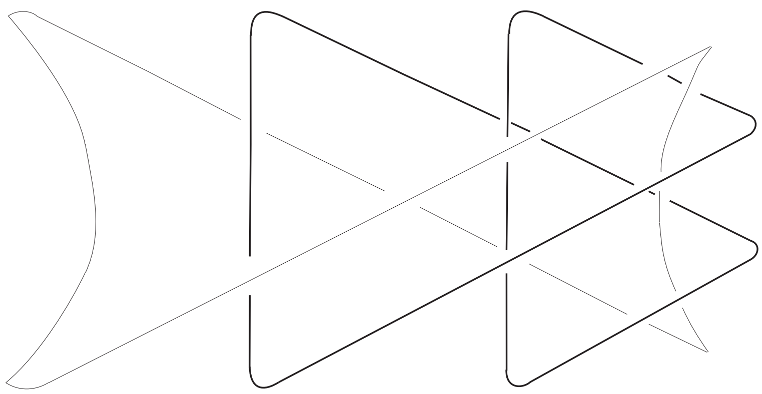


Osérvese que el segmento de la vecindad tubular del levantamiento del trébol que contiene al arco σ_1 —el arco que une a p_1 con p_2— es isotópico a ρ_1; lo mismo sucede con los segmentos de σ_2 y ρ_2.

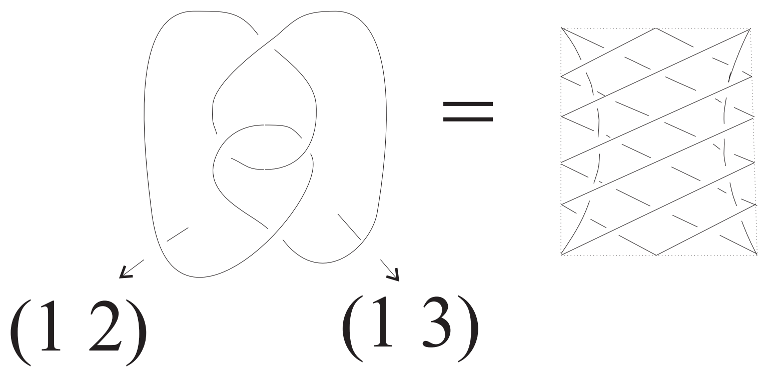


Después de realizar la isotopía y ramificar, debemos identificar a ρ_1 con σ_1 y a ρ_2 con σ_2, pues son lo mismo. En otras palabras, para determinar el levantamiento del trébol borramos dos segmentos, σ_1 y σ_2 (o, si se prefiere, ρ_1 y ρ_2, o σ_1 y ρ_2, o ρ_1 y σ_2).

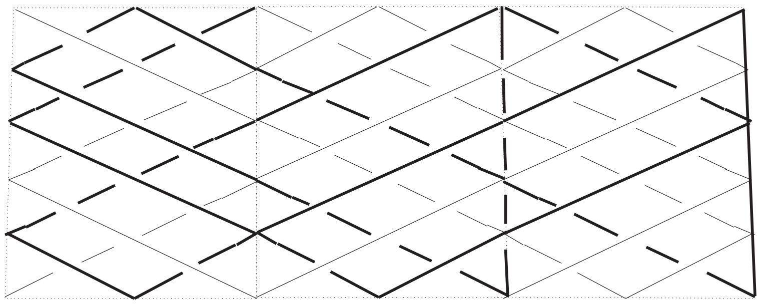
Así el levantamiento del trébol en S^3 es el enlace



EJEMPLO 4.



Sea $\bar{M}$ la cubierta triple simple sobre el nudo con figura de ocho. Es fácil ver que que debería suceder que $\bar{M} \cong S^3$. La preimagen del ocho se vería como



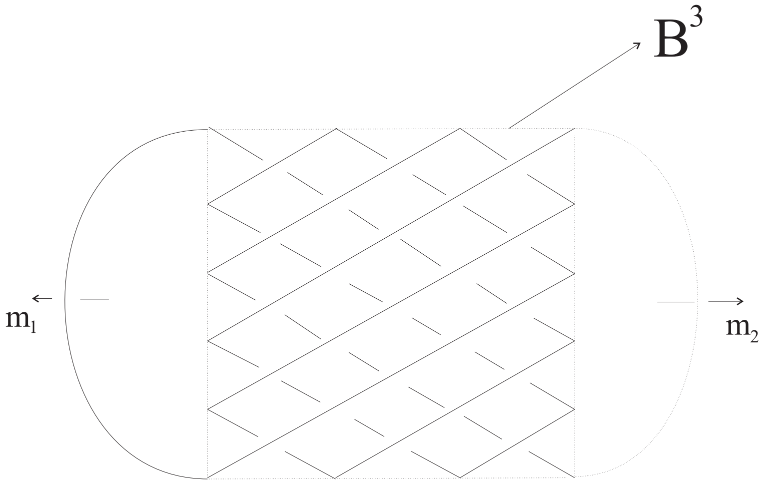
Como en el ejemplo anterior se deben identificar los arcos que unen a los postes; pero estos arcos no terminan en el mismo punto. ¡Algo anda muy mal!

Resulta que el grupo fundamental del complemento del ocho no admite una representación en el grupo simétrico S_3 tal que la imagen de los meridianos sea (12) y (13).

Tarea: Verificar esta afirmación y demostrar que la única cubierta triple del ocho es la cubierta cíclica (cada meridiano va a (123)).

¡Uf! ¡Qué susto! Este ejemplo muestra que se debe ser muy cuidadoso en todos los aspectos y no sólo se debe pensar “geométricamente”.

EJEMPLO. A continuación describiremos una familia infinita de nudos en S^3. Para cada pareja de enteros positivos p y q tales que $(p, q) = 1$ existe un nudo $k_{p/q}$ como el de la figura



La rejilla central consiste de líneas de pendiente $\pm p/q$ las cuales están sobre la almohada B_1.

Obsérvese que si p es impar, entonces $k_{p/q}$ es un nudo (es decir, es conexo). Se puede probar que $\pi_1(S^3 - k_{p/q})$ está generado por los meridianos m_1 y m_2 y que $S^3 - k_{p/q}$ admite la representación $\omega : \pi_1(S^3 - k_{p/q}) \to S_p$ dada por

$$\begin{aligned}\omega(m_1) &= (12)(34)\cdots(p-2\ p-1)\\ \omega(m_2) &= (23)(45)\cdots(p-1\ p)\end{aligned}$$

Tarea: La cubierta asociada a la representación ω es S^3.

DESCOMPOSICIONES DE HEEGAARD

Queremos estudiar objetos de dimensión tres.

DEFINICIÓN. Una *3–variedad* es un espacio topológico que localmente es homeomorfo a B^3.

Nuestro objetivo final es dar una lista de todas las 3–variedades (cerradas, conexas). Hemos visto que todas las superficies son cubiertas ramificadas dobles de S^2. Resulta que esta es una descripción conveniente y económica: Cada superficie se codifica con una 2–esfera con un número de puntos marcados sobre ella (la ramificación). Una pregunta natural sería ¿Se puede tener algo similar en dimensión tres (todas las 3–variedades y S^3)?

La respuesta es: Sí. Recordemos que en dimensión dos la herramienta que nos permitió resolver completamente los problemas asociados a las cubiertas ramificadas fue la Fórmula de Riemann–Hurwitz. Como en dimensión tres no es posible tener un análogo de esta fórmula (no es claro ni mucho menos el cómo se le podría dar algún sentido), necesitaremos una nueva estrategia para poder enlistar las variedades de dimensión tres.

Plan.

Sea M una 3–variedad.

I) Descomponemos a $M = W_1 \cup W_2 \cup \cdots$, donde W_i es algún espacio fácil de entender.

II) Construimos $\varphi_i : W_i \to B_i^3$ cubierta ramificada para cada i, donde B_i^3 es algún espacio más sencillo aun.

III) Recuperamos $M = W_1 \cup W_2 \cup \cdots$ y construimos $S = B_1^3 \cup B_2^3 \cup \cdots$ de alguna manera sensata.

IV) Rezamos para que $\varphi = \varphi_1 \cup \varphi_2 \cup \cdots : M \to S$ sea una cubierta ramificada (¡Que sea continua es lo difícil!).

V) Averiguamos quién es S.

Buenas Noticias.

Se sabe (y veremos) que

i) $M = W_1 \cup W_2$ donde $\partial(W_1) = \partial(W_2) = W_1 \cap W_2$ es una superficie orientable cerrada.

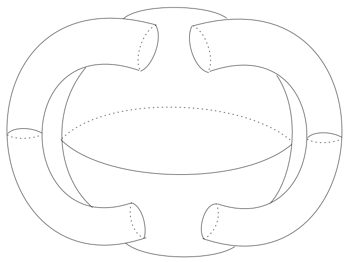
ii) Existen $\varphi_1 : W_1 \to B_1$ y $\varphi_2 : W_2 \to B_2$ cubiertas ramificadas de <u>tres</u> hojas tales que $B_i \cong B^3$ ¡La 3–bola! Luego el espacio $S = B_1 \cup B_2 \cong S^3$.

iii) Efectivamente se puede pegar a φ_1 con φ_2 para que el resultado $\varphi = \varphi_1 \cup \varphi_2 : M \to S^3$ sea una función continua y, por lo tanto, una cubierta ramificada.

Estudiaremos la manera de llevar a cabo estos tres pasos.

DEFINICIÓN. "Cubo con asas"

Un cubo con asas es

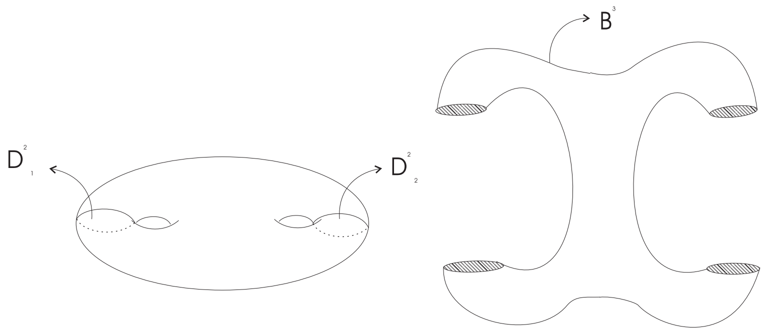


¡Un cubo con asas!

Observación. Sea W una 3–variedad con frontera. Entonces W es un cubo con asas ssi existen discos $D_1, D_2, \ldots, D_g \subset W$ ajenos y propiamente encajados en W tales que $W - \bigcup D_i$ es una 3–bola.

Al conjunto $\{D_1, D_2, \ldots, D_g\}$ se le llama un *sistema de discos meridianales* para W y a las fronteras $\partial(D_1), \partial(D_2), \ldots, \partial(D_g) \subset \partial(W)$ se les llama un *sistema de meridianos* para W. En este caso se dice que W *tiene género* g.

EJEMPLO.



Teorema de Heegaard. *Toda 3–variedad cerrada M es unión de dos cubos con asas con interiores ajenos.*

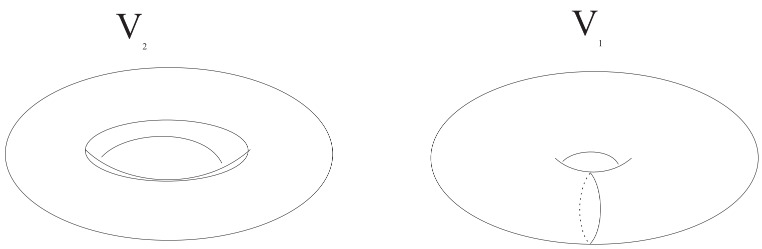
Demostración. Sabemos que M es un poliedro y, por lo tanto es unión de tetraedros. Una vecindad pequeña W de las aristas de M es un cubo con asas.

En efecto si cortamos a W a lo largo de discos, uno por cada arista, que sean transversales y pasen por el punto medio de cada arista, lo que obtenemos es una colección de bolas de dimensión tres. Ahora si pegamos dos de estas 3–bolas a lo largo de uno de los discos por los que recortamos a W, obtenemos una sola 3–bola; si queda alguna otra 3–bola que podemos pegar a la anterior a lo largo de un solo disco, la pegamos y obtenemos una 3–bola; continuamos así hasta agotar la colección de todas las 3–bolas. Lo que obtenemos es una sola 3–bola que se debe identificar en algunos de los discos para recuperar a W; es decir, W es un cubo con asas.

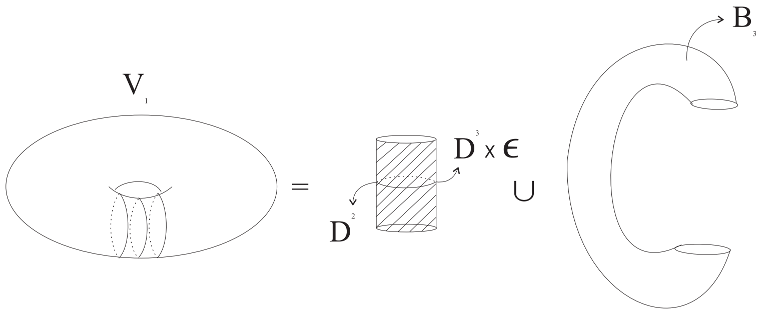
El exterior de W, $\overline{M-W}$, también es un cubo con asas. Procedemos de manera similar donde ahora el sistema de discos lo obtenemos de los triángulos de M. □

.*Observación:* Lo que obtuvimos en la demostración anterior es que M es la unión de dos cubos con asas W_1 y $W_2 = \overline{M-W}$ pegados a lo largo de la frontera $\partial(W_1) = \partial(W_2)$; es decir, existe un homeomorfismo $h : \partial(W_1) \to \partial(W_2)$ tal que $M \cong W_1 \sqcup W_2/(x \sim h(x) \text{ para } x \in \partial(W_1))$.

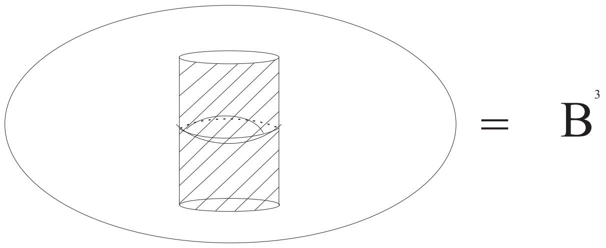
EJEMPLO. $M = V_1 \cup_h V_2$ donde $V_1 \cong V_2 \cong D^2 \times S^1$ y $h : \partial(V_1) \to \partial(V_2)$ es un homeomorfismo tal que $h(\partial(D^2)) = \lambda$. D^2 es un disco meridianal de V_1 y λ es paralela al ánima de V_2.



Si queremos saber quién es M conviene cortar a V_1 a lo largo de D^2

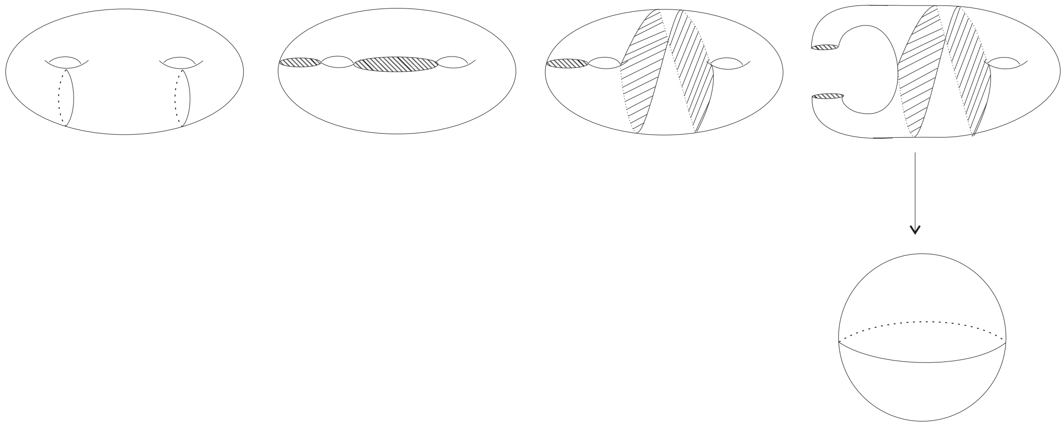


Pegamos el veinte $D^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ a V_2 a lo largo de λ



Resulta una 3–bola; así que M es unión de dos 3–bolas y, por lo tanto, $M \cong S^3$.

EJEMPLO. La siguiente figura nos muestra que en un cubo con asas existen muchos sistemas de discos meridianos.



Proposición. *Supongamos que* $M = W_1 \cup_f W_2$ *y que* $N = W_1 \cup_g W_2$ *son dos descomposiciones de Heegaard. Si* $g \circ f^{-1} : \partial(W_2) \to \partial(W_2)$ *se extiende a un homeomorfismo*

$H : W_2 \to W_2$, entonces $M \cong N$.

Demostración. Queremos definir $h : W_1 \cup_f W_2 \to W_1 \cup_g W_2$ un homeomorfismo. Forzamos de nuevo a que $h(x) = x$ si $x \in W_1$; como y se pega con $f(y)$ para $x \in \partial(W_1)$ en M y y se pega con $g(y)$ para $x \in \partial(W_1)$ en N, debemos constuir una extensión de $g \circ f^{-1}$ a todo W_2 para poder definir a h. Pero esta extensión la tenemos por hipótesis. □

La pregunta natural es determinar cuáles homeomorfismos de la frontera de un cubo con asas se extienden a todo el cubo con asas. Veamos.

Proposición. *Sea W un cubo con asas y sea $h : \partial(W) \to \partial(W)$ un homeomorfismo. Entonces h se extiende a un homeomorfismo $H : W \to W$ ssi h manda a un sistema de meridianos de W en un sistema de meridianos de W.*

Demostración. Sean $\{m_1, m_2, \ldots, m_g\}$ y $\{m'_1, m'_2, \ldots, m'_g\}$ dos sistemas de meridianos de W tales que $h(m_i) = m'_i$. Si $D_1, \ldots, D_g \subset W$ son los discos meridianales correspondientes a $\{m_1, \ldots, m_g\}$, entonces al cortar a W a lo largo de $D_1, \ldots, D_g$ obtenemos una 3–bola B_1 y en $\partial(B_1)$ tenemos, para cada i, dos copias D_{i+} y D_{i-} de D_i. De igual manera al cortar a W a lo largo de $D'_1, \ldots, D'_g$ obtenemos una 3–bola B_2 con discos $D'_{i+}, D'_{i-} \subset \partial(B_2)$ que son copias de D'_i. Como h está definida $\partial(D_{i+}) \to \partial(D'_{i+})$ y $\partial(D_{i-}) \to \partial(D'_{i-})$, podemos extender a h mediante el Truco de Alexander a los discos $D_{i+} \to D'_{i+}$ y $D_{i-} \to D'_{i-}$. Tenemos entonces un homeomorfismo $\partial(B_1) \to \partial(B_2)$ que, de nuevo por Alexander, podemos extender a un homeomorfismo $\tilde{H} : B_1 \to B_2$. Si deshacemos los cortes (es decir, volvemos a pegar D_{i+} con D_{i-} y D'_{i+} con D'_{i-}), obtenemos $H : W \to W$ como se desea. □.

Corolario 1. *Supongamos que $M = W_1 \cup_f W_2$ y que $N = W_1 \cup_g W_2$ son dos descomposiciones de Heegaard. Si f y g mandan a un sistema de meridianos de W_1 en el mismo sistema de meridianos de W_2, entonces $M \cong N$.* □

Corolario 2. *Supongamos que $M = W_1 \cup_f W_2$ y que $N = W_1 \cup_g W_2$ son dos descomposiciones de Heegaard. Si f y g son homotópicas, entonces $M \cong N$.* □

DEFINICIÓN. "Diagrama de Heegaard"

Sea M una 3–variedad y $M = W_1 \cup_f W_2$ una descomposición de Heegaard. Llamamos $F = \partial(W_2)$. Sea $\{m_1, m_2, \ldots, m_g\}$ un sistema de meridianos de W_1.

$\Rightarrow$

la pareja $(F, \{f(m_1), f(m_2), \ldots, f(m_g)\})$ se llama *un diagrama de Heegaard* para M.

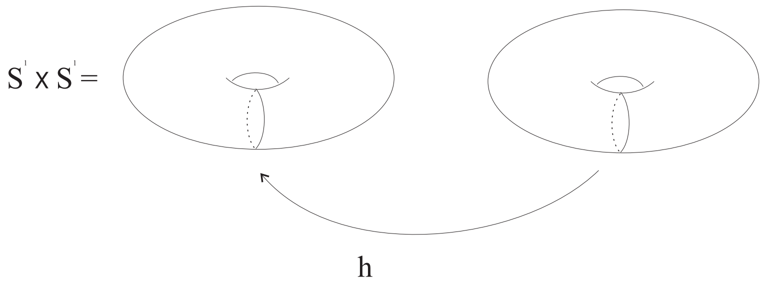
DEFINICIÓN. "Género de Heegaard"

Al mínimo género posible de los cubos con asas de una descomposición de Heegaard de M se le llama *el género de Heegaard* de M (o, simplemente, *el género* de M) y se denota con $g(M)$.

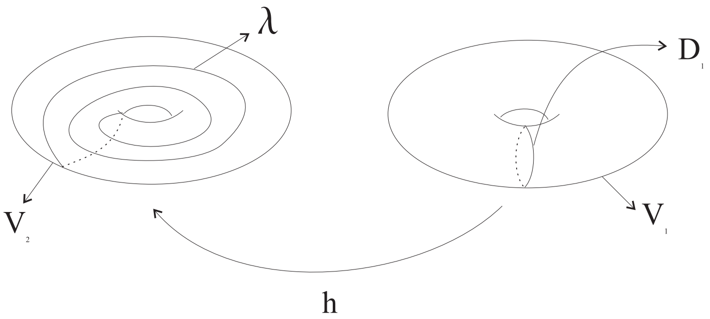
EJEMPLOS. 1) Si $g(M) = 0$, entonces $M \cong S^3$, pues $M = B^3 \cup_f B^3 \cong S^3$.

2) Si $g(M) = 1$, ...

2.1)



2.2)



Pregunta: ¿Quién es esta última 3–variedad? Podemos "calcular" que la variedad $M = V_1 \cup_h V_2$ tiene grupo fundamental $\pi_1(M) \cong \langle x : x^2 = 1\rangle$. Nótese que el toro sólido V_2 tiene grupo fundamental libre con un solo generador representado por el ánima de

V_2. Sea $D_1 \subset V_1$ un disco meridiano. De nuevo tomamos un veinte $D^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset V_1$ y lo pegamos a V_2 a lo largo de $\lambda = h(\partial(D^2))$. En el resultado se cumple que dos veces el ánima de V_2 es contraible, pues λ da dos vueltas a la longitud. Se puede probar que $\pi_1(V_2 \cup_h (D^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon))) \cong \langle x : x^2 = 1\rangle$. Ahora para recuperar a M, en $V_2 \cup_h D^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ falta añadir una 3–bola $(\overline{V_1 - (D^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon))})$ a lo largo de $\partial(V_2 \cup_h (D^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon))) \cong S^2$. Del hecho de que las 3–bolas son espacios contraibles, se puede probar que $\pi_1(M) \cong \pi_1(V_2 \cup_h (D^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon))) \cong \langle x : x^2 = 1\rangle$.

Si generalizamos esta construcción, es decir, si tomamos $h : \partial(V_1) \to \partial(V_2)$ homeomorfismo tal que $h(\partial(D^2))$ es una curva que le da p vueltas a la longitud de V_2 (veremos más adelante que efectivamente hay homeomorfismos con esta propiedad), obtendremos una infinidad de 3–variedades —una por cada p— no homeomorfas (cada una de ellas tiene grupo fundamental Z_p).

Sin embargo, se puede dar una lista completa y sin repeticiones de las 3–variedades con género de Heegaard 1. Para las 3–variedades con género de Heegaard 2, hasta la fecha, no se ha podido obtener una lista que las clasifique y los expertos en el tema consideran que éste es un problema extremadamente difícil.

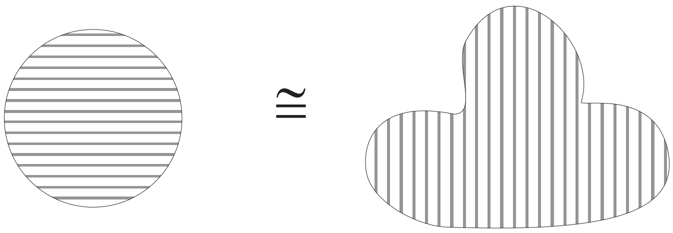
HOMEOMORFISMOS DE SUPERFICIES

Tratemos de entender cómo se ve un homeomorfismo.

EJEMPLO. $f : R^2 \to R^2$ dada por $f(x) = 3x$ es un homeomorfismo que manda a D^2 en $3D^2$; es decir, la sustancia de la que está hecho R^2 es muy “flexible”.

Y aún más

Proposición.



Lema técnico. *Sean $x_1, x_2 \in D^n$. Entonces existe $h : D^n \to D^n$ homeomorfismo tal que $h(x_1) = x_2$ y $h|\partial(D^n) = id$.*

Demostración: La función $f : (D^n)^\circ \to R^n$ dada por $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ es un homeomorfismo con inversa $f^{-1}(z) = \frac{z}{1+|z|}$. Sea $T : R^n \to R^n$ la traslación que manda a $f(x_1)$ en $f(x_2)$, $T(u) = u - f(x_1) + f(x_2)$. Entonces la composición $h = f^{-1} \circ T \circ f : (D^n)^\circ \to (D^n)^\circ$ es un homeomorfismo que manda a x_1 en x_2.

$$\begin{tikzcd} (D^n)^\circ \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & (D^n)^\circ \\ R^n \arrow[r, "T"] & R^n \arrow[u, "f^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

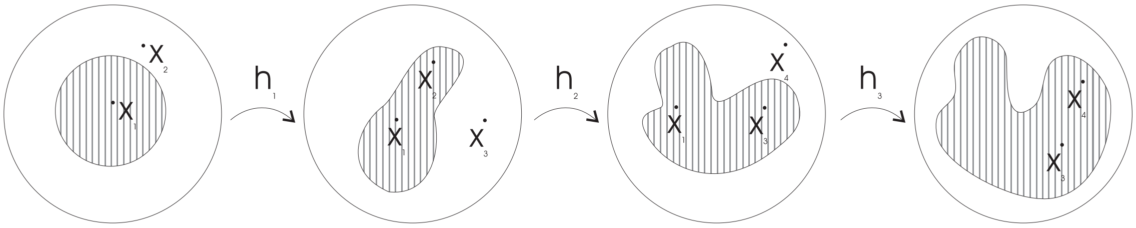
Nótese que

$$h(x) = f^{-1} \circ T \circ f(x) = \frac{\frac{x}{1-|x|} - f(x_1) + f(x_2)}{1 + \left| \frac{x}{1-|x|} - f(x_1) + f(x_2) \right|};$$

se prueba sin dificultad que $\lim_{|x|\to 1} h(x) = \lim_{|x|\to 1} \frac{\frac{x}{1-|x|} - f(x_1)+f(x_2)}{1+\left|\frac{x}{1-|x|} - f(x_1)+f(x_2)\right|} = x.$

Así que si definimos $h(u) = u$ para $u \in \partial(D^n)$, entonces $h : D^n \to D^n$ es un homeomorfismo que manda a x_1 en x_2 y $h|\partial(D^n) = id$. □

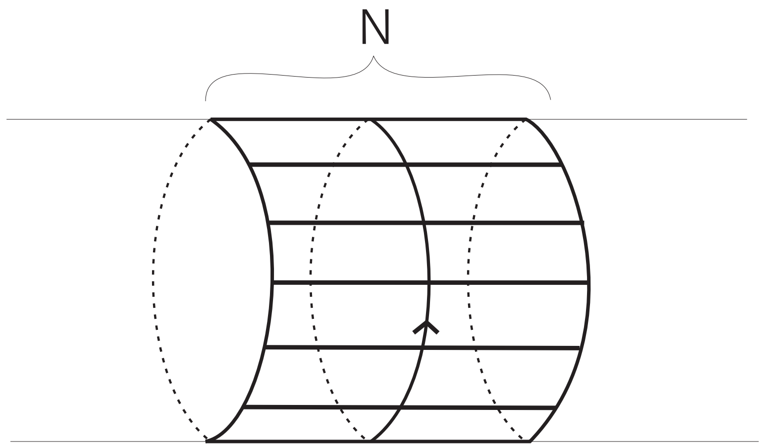
Demostración de la proposición: Escojamos homeomorfismos h_1, h_2, h_3 de un disco de radio m que contenga a la amiba del enunciado de esta proposición y tales que $h_1(x_1) = x_2, h_2(x1) = x_3, h_3(x_3) = x_4$:



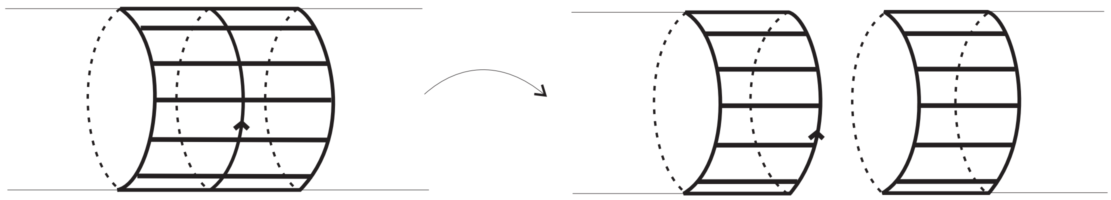
□

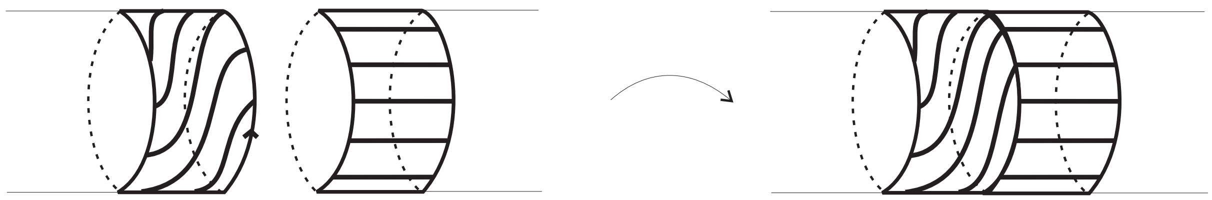
DEFINICIÓN. "Giro de Dehn"

Sea F una superficie y $c \subset F$ una curva simple cerrada (orientada). Si $N \subset F$ es una vecindad pequeñita de c, entonces N se ve como



Podemos definir en N un homeomorfismo $h : N \to N$ descrito de la manera siguiente: Recortamos a N a lo largo de c; damos una vuelta completa al extremo izquierdo del resultado siguiendo la dirección de c; finalmente volvemos a pegar los extremos libres para recuperar a N.





Nótese que para hablar de "extremo izquierdo de lo que queda", nos tenemos que poner de acuerdo en de qué lado de la superficie estamos parados; es decir, en rigor se debe también orientar a la superficie F.

(Por supuesto que se pueden dar fórmulas; como N es un anillo, se tiene un homeomorfismo $f : N \to S^1 \times I$. En $S^1 \times I$ tenemos el homeomorfismo

$$\begin{array}{rcl} g : S^1 & \to & S^1 \\ (z,t) & \mapsto & \begin{cases} (z \cdot e^{2\pi i(2t)}, t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (z,t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

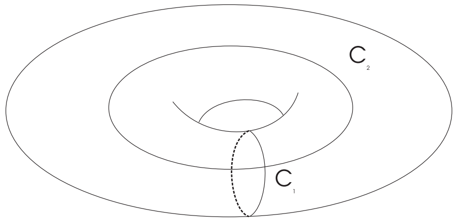
que es un giro; entonces el homeomorfismo h que describimos antes es $h = f^{-1} \circ g \circ f$.)

Podemos entonces definir un homeomorfismo $t(c) : F \to F$ dado por la regla $t(c)(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in N \\ x & \text{si } x \in F - N \end{cases}$.

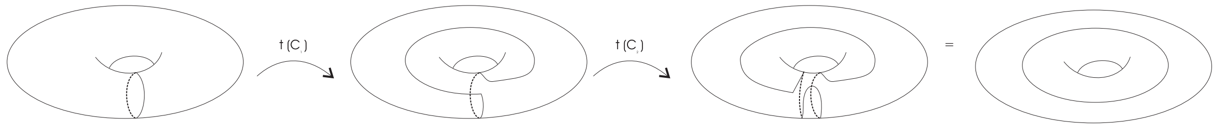
Al homeomorfismo $t(c)$ se le llama *el giro de Dehn a lo largo de c.*

Nótese: que si c^* es la curva c con la orientación inversa, entonces $t(c) = t(c^*)$; así que $t(c)$ "sólo depende" de c.

EJEMPLOS. 1) Considérense las curvas



Entonces



Notemos que si la curva $c \subset F$ es homotópica a un punto, entonces el homeomorfismo $t(c)$ realmente no hace nada: Lo podemos deshacer tal cual (es decir, $t(c)$ es homotópico a la identidad de F). Como $\pi_1(S^2) = \{[e]\}$, en S^2 no hay, esencialmente, giros de Dehn. ¿Cómo son los homeomorfismos de S^2? Aaah:

Teorema. *Sea $f : S^2 \to S^2$ homeomorfismo. Entonces f es homotópico a la identidad o a una reflexión.*

Necesitamos primero un lema que también es interesante.

Lema. *Sea $f : S^1 \to S^1$ homeomorfismo. Entonces f es homotópico a la identidad o a una reflexión.*

Pero primero, primero, necesitamos otro hecho:

Sublema. *Sea $f : S^n \to S^n$ un homeomorfismo. Entonces f es homotópica a un homeomorfismo que deja fijo a un punto.*

Demostración. Sea $x_1 \in S^n$ y sea $x_2 = f(x_1)$. Sea $\ell \subset S^n$ el segmento de recta que une a x_1 con x_2 (recuérdese que $S^n = R^n \cup \{*\}$) y sea B una vecindad pequeña de ℓ en S^n. Entonces B es una n–bola. Para $t \in [0,1]$ tomamos $h_t : B^\circ \to B^\circ$ el homeomorfismo dado por la composición $h_t = f^{-1} \circ T_t \circ f$ donde $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ y $T_t(u) = u - f(x_2) + tf(x_1)$, la traslación que manda a $f(x_2)$ en $tf(x_1)$. Com antes h_t se puede extender a $h_t : B \to B$ homeomorfismo tal que $h_t(u) = u$ para toda $u \in \partial(B)$. Definimos ahora $\varphi_t : S^n \to S^n$ como $\varphi_t(u) = h_t(u)$ si $u \in B$ y $\varphi_t(u) = u$ si $u \in S^n - B$; entonces φ_t es un homeomorfismo de S^n que manda a x_2 en tx_1. Definimos ahora $H : S^n \times I \to S^n$ como $H(u,t) = \varphi_t(f(u))$. Entonces H es continua, $H(u,0) = \varphi_0(f(u)) = f(u)$ y $H(u,1) = \varphi_1(f(u))$. Nótese que $\varphi_1(f(x_1)) = \varphi_1(x_2) = x_1$. $\square$

Notemos que en la demostración anterior la función $\varphi_t = H(-,t)$ es un homeomorfismo para toda $t \in I$. Muchas de las homotopías que vamos a construir satisfacen esta propiedad.

Demostración del Lema: Sea $f : S^1 \to S^1$ homeomorfismo. Podemos suponer que $f(x_0) = x_0$ para algún $x_0 \in S^1$ por el sublema anterior. Se puede escoger $U \subset S^1$ una vecindad muy pequeña de x_0 tal que $f(U) = U$ y U es un intervalo abierto. Si llamamos $V = S^1 - U$, entonces V es un intervalo cerrado con extremos $y_1, y_2 \in V$; luego puede suceder que $f(y_1) = y_1$ y que $f(y_2) = y_2$, o bien que $f(y_1) = y_2$ y que $f(y_2) = y_1$. Si $f(y_1) = y_1$ y $f(y_2) = y_2$, definimos $\tilde{H} : \partial(V \times I) \to \partial(V \times I)$ como $\tilde{H}|(V \times \{0\}) = f$ y $H|((V \times \{1\}) \cup (\{y_1\} \times I) \cup (\{y_2\} \times I)) = id$. Por el Truco de Alexander $\tilde{H}$ se puede extender a $H : V \times I \to V \times I$ pues $V \times I \cong D^2$; podemos entonces definir $G : S^1 \times I \to S^1 \times I$ como $G(u,t) = f(u)$ si $u \in U$ y $G(u,t) = H(u,t)$

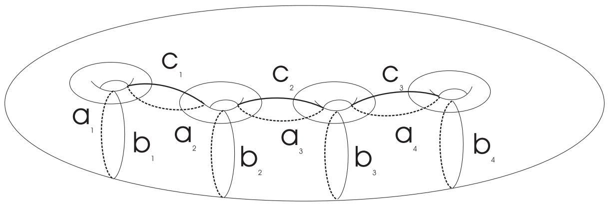
si $u \in V = S^1 - U$. Entonces G es una homotopía entre f y la identidad.

Si $f(y_1) = y_2$ y $f(y_2) = y_1$, definimos a $\tilde{H} : \partial(V \times I) \to \partial(V \times I)$ como $\tilde{H}|(V \times \{0\}) = f$ y $\tilde{H}|(V \times \{1\})(u, 1) = (1 - u, 1)$ (= una reflexión), $\tilde{H}(y_1, t) = (y_2, t)$ y $\tilde{H}(y_2, t) = (y_1, t)$. Extendemos a $H : V \times I \to V \times I$ y definimos $G : S^1 \times I \to S^1 \times I$ como $G(u, t) = f(u)$ si $u \in U$ y $G(u, t) = H(u, t)$ si $u \in V = S^1 - U$. $\square$

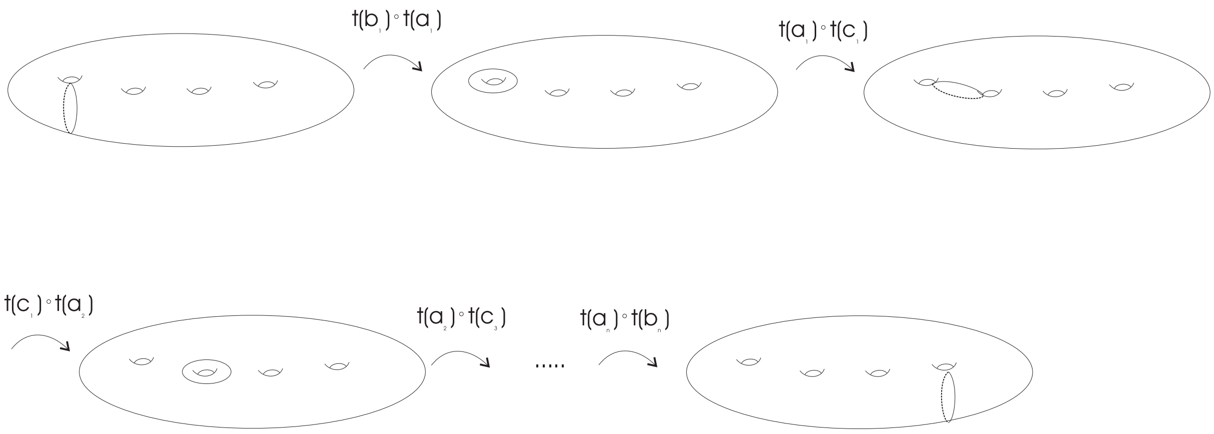
Demostración del Teorema: Sea $f : S^2 \to S^2$ un homeomorfismo. Podemos suponer que $f(x_0) = x_0$ para algún $x_0 \in S^2$. Escogemos de nuevo $U \subset S^2$ una vecindad de x_0 tal que $f(U) = U$ y U es un 2–disco abierto. Por el lema anterior podemos suponer que $f|\partial(U)$ es la identidad o una reflexión; si usamos el Truco de Alexander igual que antes, llegaremos a que f es homotópica a la identidad o a una reflexión e S^2. $\square$

Estudiaremos, ahora sí, los homeomorfismos de las superficies de género mayor que cero.

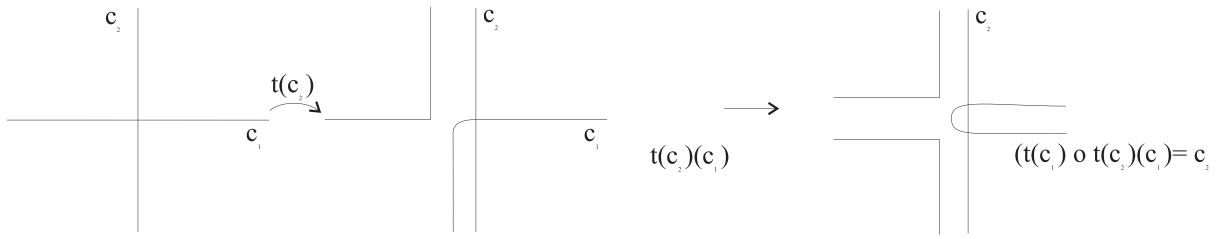
EJEMPLO. Considérense las curvas



Entonces



En general si c_1 y c_2 son curvas simples cerradas en F y $c_1 \cap c_2 =$ un punto, entonces $(t(c_1) \circ t(c_2))(c_1) \simeq c_2$.



DEFINICIÓN. "c–equivalencia"

Si α y β son curvas simples cerradas en F

$\Rightarrow$

se escribe $\alpha \sim_c \beta$ ssi existen curvas $c_1, c_2, \ldots, c_n \subset F$ tales que

$$(t(c_n)^{d_n} \circ t(c_{n-1})^{d_{n-1}} \circ \cdots t(c_2)^{d_2} \circ t(c_1)^{d_1})(\alpha) \simeq \beta$$

donde $d_i = \pm 1$.

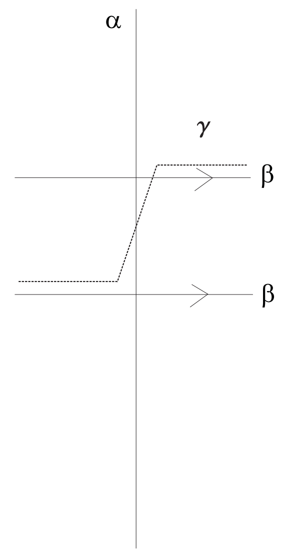
Es claro que $\sim_c$ es una relación de equivalencia entre las curvas simples cerradas de una superficie.

Lema. *Si c_1 y c_2 son curvas simples cerradas en F y $c_1 \cap c_2 =$ un punto, entonces $c_1 \sim_c c_2$.*

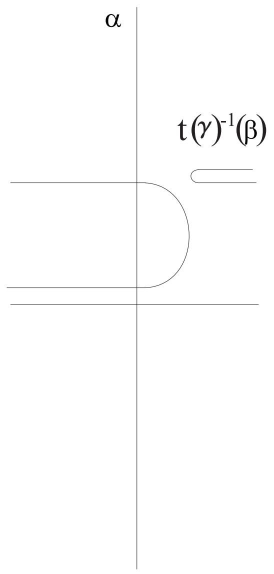
Demostración: Ver el ejemplo anterior. □

Lema. *Si α, β son curvas en la superficie F tales que, si al seguir la dirección de α, encontramos dos puntos consecutivos de $\alpha \cap \beta$ en los que β cruza a α en la misma dirección, entonces existe β' tal que $\beta \sim_c \beta'$ y $\#(\alpha \cap \beta) > \#(\alpha \cap \beta')$.*

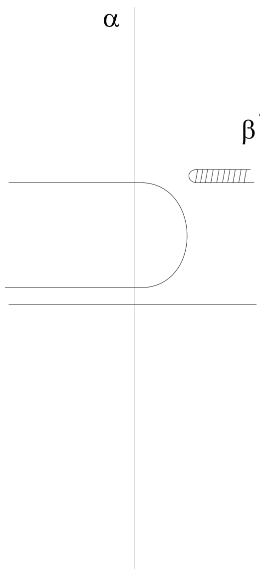
Demostración: Construimos la curva γ como en la figura



Entonces $t(\gamma)^{-1}(\beta)$ se ve como



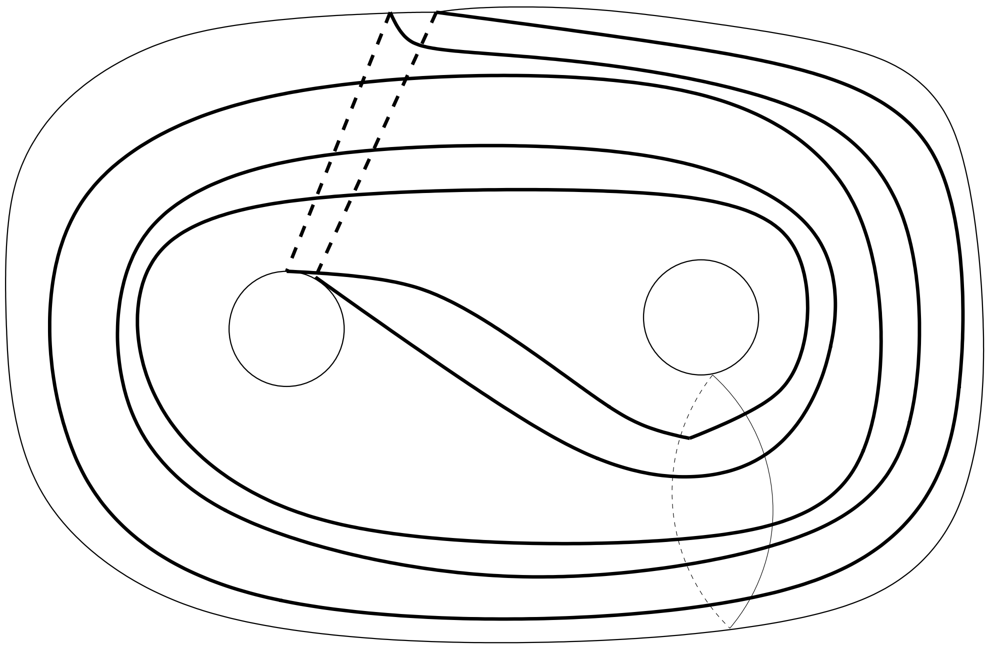
Claramente $t(\gamma)^{-1}(\beta)$ se puede deformar a una curva β' tal que $\#(\alpha \cap \beta) \geq \#(\alpha \cap \beta') + 1$

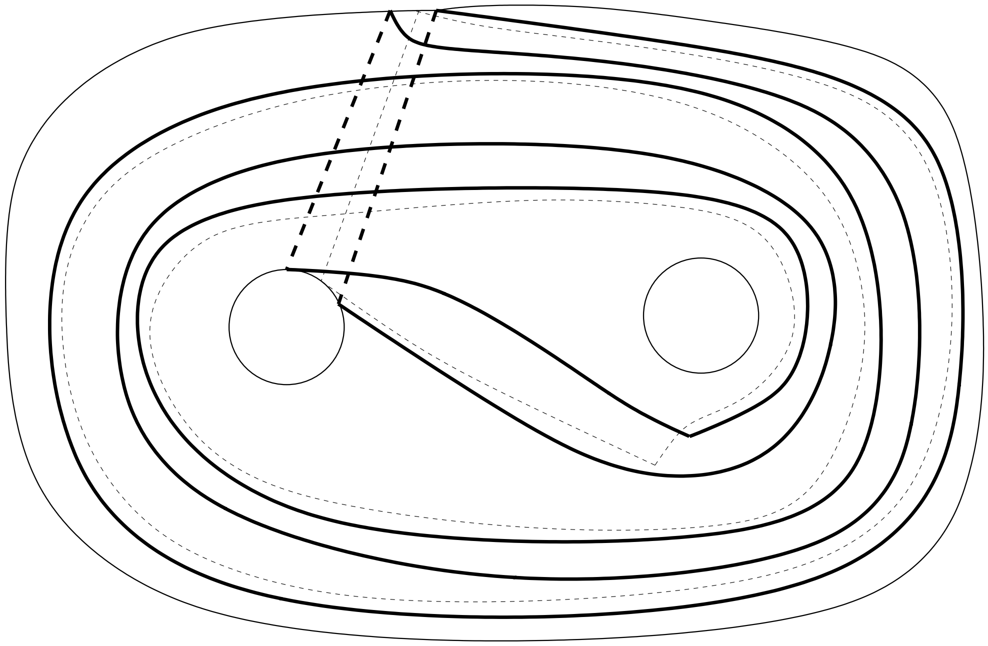


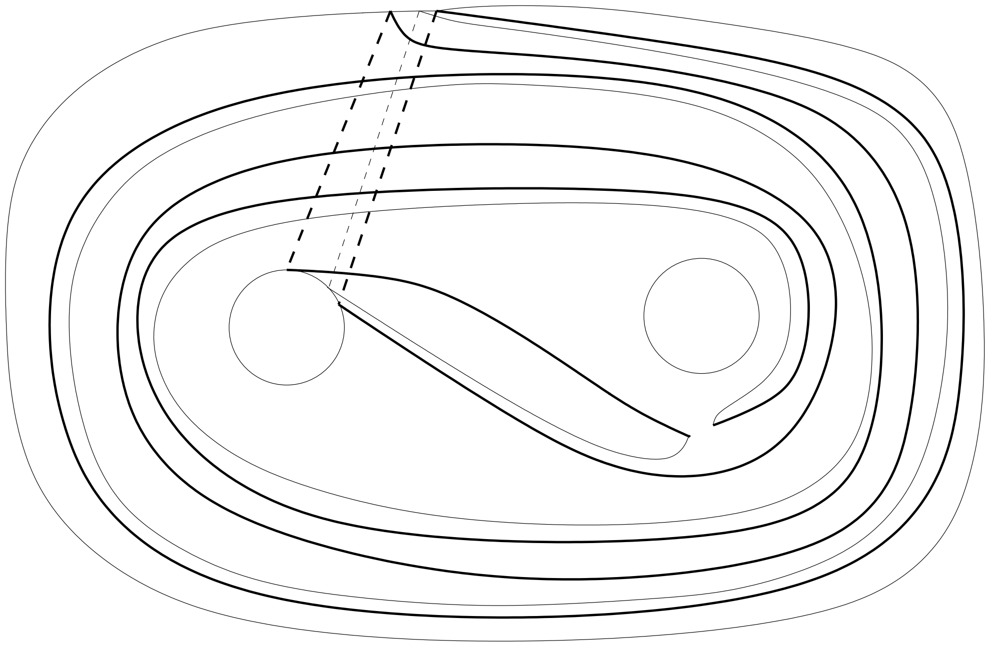
□

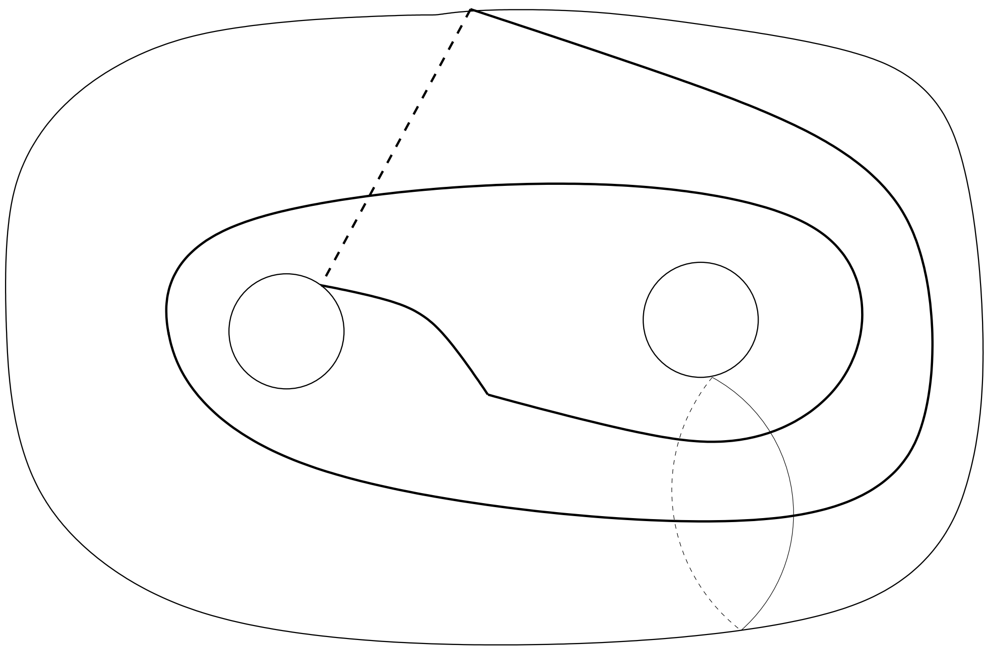
En la construcción de la demostración anterior es frecuente que $\#(\alpha \cap \beta')$ sea mucho más chico que $\#(\alpha \cap \beta)$.

EJEMPLO.







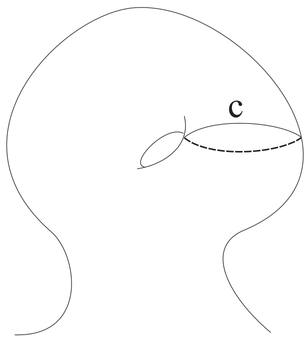


Nota: El lema anterior y su demostración son muy útiles y nos bastarán para los ejemplos que vamos a ver.

Vamos a enunciar ahora un teorema sorprendente debido al matemático inglés Raymond Lickorish.

Teorema de Lickorish. *Todo homeomorfismo de la superficie T_g es homotópico a un producto de giros de Dehn seguido, posiblemente, de una reflexión.*

Lickorish demuestra este teorema más o menos con las ideas siguientes: sea $h : T_g \to T_g$ un homeomorfismo y sea $c \subset T_g$ una curva que le da "una vuelta a una asa" como en la figura

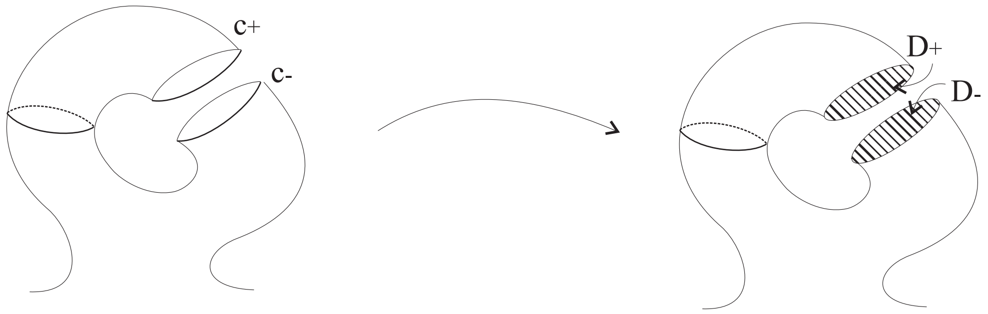


(recuérdese que esto no tiene sentido; aquí no hay asas: T_g es una superficie, no un sólido.)

La curva $h(c)$ puede estar terriblemente enredada en T_g, pero se muestra que se pueden elegir cuidadosamente algunos giros de Dehn $t_1, t_2, \ldots, t_n : T_g \to T_g$ tales que $t_n \circ \cdots \circ t_2 \circ t_1(h(c)) \simeq c$ (o sea, $c \sim_c h(c)$; para esto se usan movidas similares a la de la demostración anterior).

Llamemos ahora $\bar{h} = t_n \circ \cdots \circ t_2 \circ t_1 \circ h$.

Recortamos a T_g a lo largo de c para obtener una superficie $\bar{T_g}$ con dos fronteras c_+ y c_-; pegamos dos discos D_+ y D_- a lo largo de c_+ y c_- para obtener la superficie $T_{g-1} = \bar{T_g} \cup D_+ \cup D_-$.



Con el Truco de Alexander podemos extender $\bar{h}|c_+$ a $g_+ : D_+ \to D_+$ y $\bar{h}|c_-$ a $g_+ : D_- \to D_-$. Definimos ahora $h_1 : T_{g-1} \to T_{g-1}$ como $h_1|\bar{T_g} = \bar{h}|\bar{T_g}$, $h_1|D_+ = g_+$ y $h_1|D_- = g_-$.

Nótese que T_{g-1} es una superficie de género $g-1$. Podemos continuar estas operaciones en las asas de T_{g-1} escogiendo cuidadosamente algunos giros de Dehn hasta que finalmente obtendremos $h_g : T_0 \to T_0$ y, claro, $T_0 \cong S^2$.

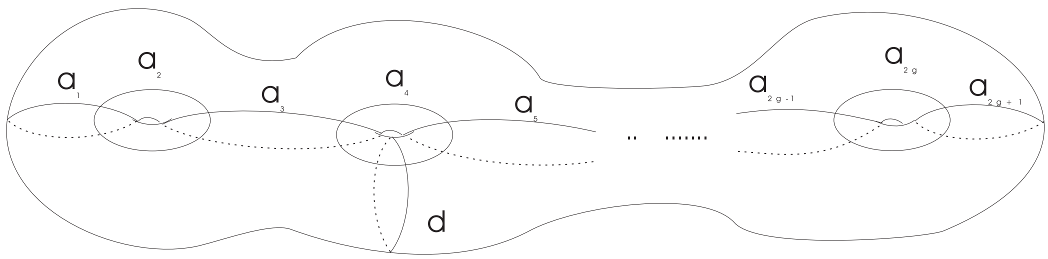
Ahora sabemos que h_g es (homotópico a) la identidad o una reflexión; de aquí podemos concluir (deshaciendo todos los cambios que hicimos) que el homeomorfismo original h es el producto de giros de Dehn (los inversos de todos los giros de Dehn que se construyeron) seguido de o bien la identidad, o bien una reflexión; o sea que se tiene el resultado deseado.

EJEMPLO.

******************** FIGURA VI.17 *************************

Posteriormente Lickorish revisó con muchísimo cuidado su demostración y haciendo algunos trucos nuevos obtuvo

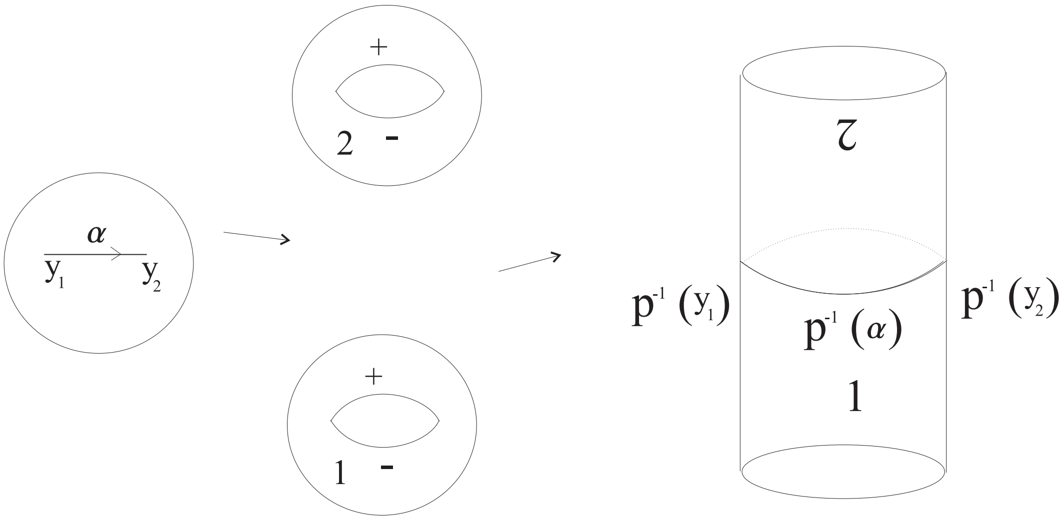
El Teorema Fuerte de Lickorish (y Humphries). *Todo homeomorfismo de T_g es homotópico a un producto de giros de Dehn a lo largo de las curvas*



seguido, posiblemente, de una reflexión.

TEOREMA DE MONTESINOS Y HILDEN

EJEMPLO. Sea $p : S^1 \times I \to D^2$ la cubierta doble ramificada en dos puntos $y_1, y_2 \in int(D^2)$. Sea $\alpha \subset int(D^2)$ un arco que conecta a y_1 con y_2. Recordemos que para construir la cubierta p, cortamos a D^2 a lo largo de α, tomamos dos copias y las pegamos de manera adecuada



Queremos estudiar ciertos homeomorfismos de D^2 y su “relación” con la cubierta doble $p : S^1 \times I \to D^2$.

DEFINICIÓN. “Homeomorfismo de arco”

Sea F una superficie y $\alpha \subset int(F)$ un arco con extremos y_1, y_2. Sea $N \subset int(F)$ una vecindad pequeña de α tal que $N \cong D^2$.

$\Rightarrow$

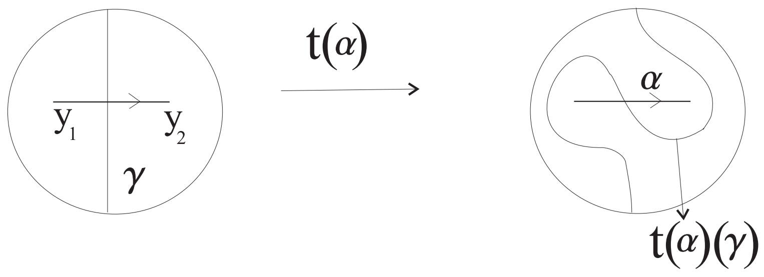
definimos el homeomorfismo $t(\alpha) : F \to F$ como sigue: $t(\alpha)(x) = x$ si $x \in F - N$ y, en N, $t(\alpha)$ es un homeomorfismo que es la identidad en $\partial(N)$, $t(\alpha)(\alpha) = \alpha$, $t(\alpha)(y_1) = y_2$ y $t(\alpha)(y_2) = y_1$.

(Para dar una fórmula para $t(\alpha)$ observemos que $N - \alpha \cong S^1 \times [0, 1)$; entonces $t(\alpha)$ es una rotación de ángulo $\pi \cdot \theta$ en la circunferencia $S^1 \times \{\theta\}$.)

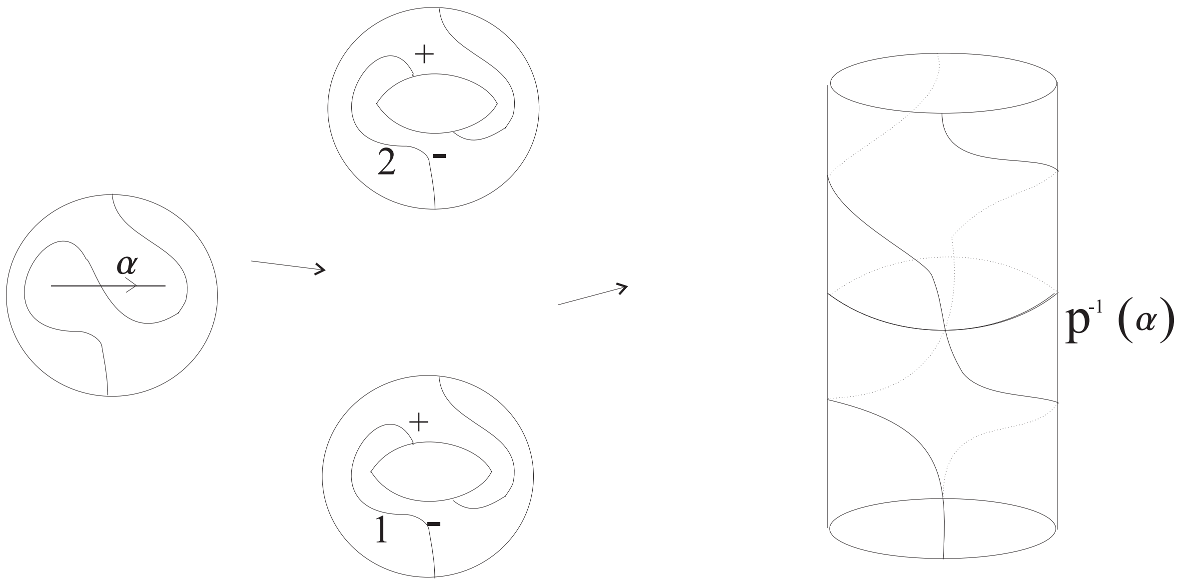
$t(\alpha)$ se llama *el homeomorfismo de arco a lo largo de α.*

Por supuesto que los homeomorfismos de arco son homotópicos a la identidad.

EJEMPLO (continuación). Consideremos el homeomorfismo de arco $t(\alpha) : D^2 \to D^2$. Si γ es un arco propiamente encajado en D^2 que es perpendicular a α, entonces $t(\alpha)(\gamma)$ se ve como



Veamos cómo se ve $p^{-1}(t(\alpha)(\gamma)$ donde $p : S^1 \times I \to D^2$ es la cubierta doble ramificada en dos puntos como antes.



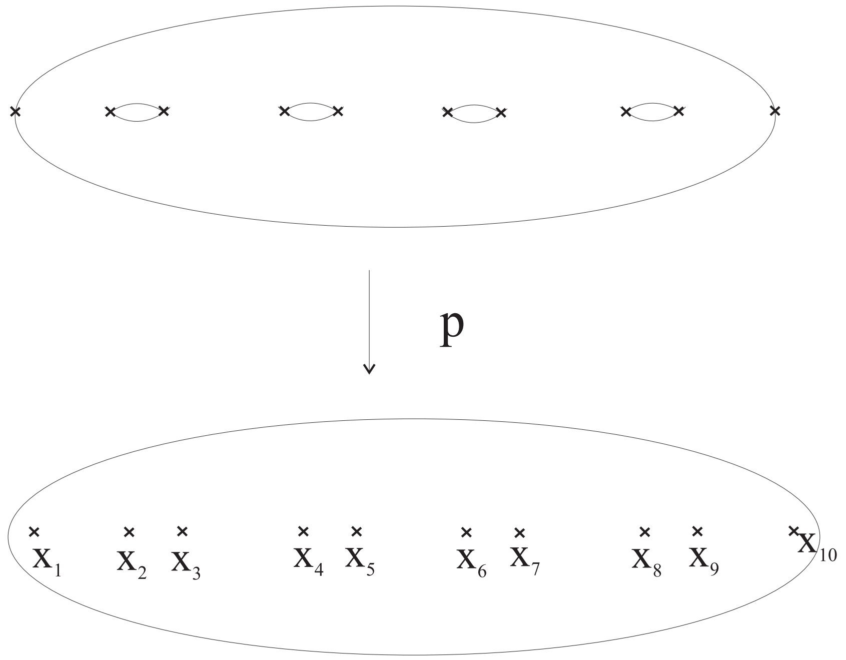
Del dibujo se ve que podemos pegar los homeomorfismos restringidos, $t(\alpha)|$ en la copia 1 de D^2 cortado a lo largo de α y $t(\alpha)|$ en la copia 2 de D^2 para obtener el homeomorfismo de Dehn $t(p^{-1}(\alpha)) : S^1 \times I \to S^1 \times I$. Es decir,

Teorema. *Si $p : S^1 \times I \to D^2$ es la cubierta doble ramificada en $y_1, y_2 \in int(D^2)$ y $\alpha \subset int(D^2)$ es un arco que conecta a y_1 con y_2, entonces $t(\alpha) \circ p = p \circ t(p^{-1}(\alpha))$.*

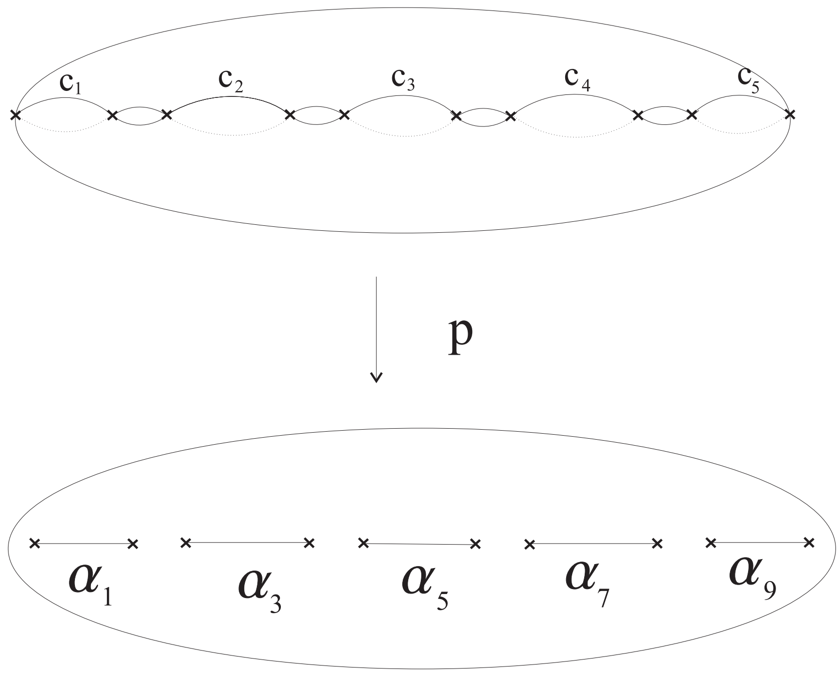
$$\begin{array}{ccc} S^1 \times I & \xrightarrow{t(p^{-1}(\alpha))} & S^1 \times I \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ D^2 & \xrightarrow{t(\alpha)} & D^2 \end{array}$$

Notación: El que la ecuación $t(\alpha) \circ p = p \circ t(p^{-1}(\alpha))$ se cumpla se expresa diciendo que $t(\alpha)$ *se levanta* a $t(p^{-1}(\alpha))$ bajo p.

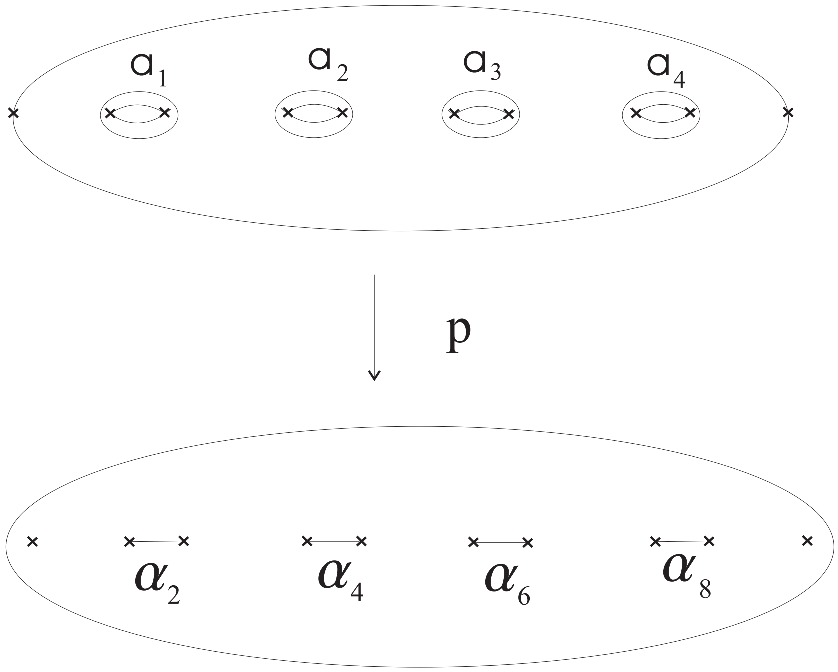
EJEMPLO. Sea $p : T_g \to S^2$ la cubierta doble ramificada de la superficie T_g de género g sobre la 2–esfera ramificada a lo largo de $2g+2$ puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{2g+1}, x_{2g+2} \in S^2$.



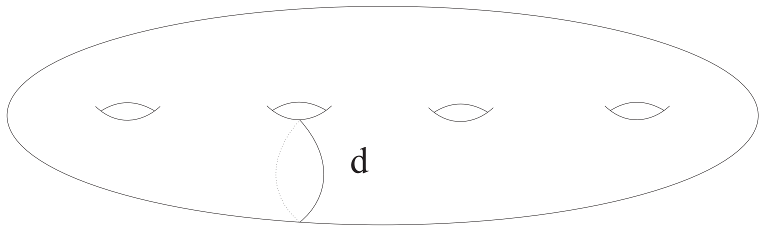
Sea $\alpha_i \subset S^2$ el arco que conecta a x_i con x_{i+1} y está "bien derechito" como en la figura



Para i impar, $i = 2j - 1$, el homeomorfismo $t(\alpha_i) : S^2 \to S^2$ se levanta al homeomorfismo $t(c_j) : T_g \to T_g$; y para i par, $i = 2k$, $t(\alpha_i) : S^2 \to S^2$ se levanta al homeomorfismo $t(a_k) : T_g \to T_g$.

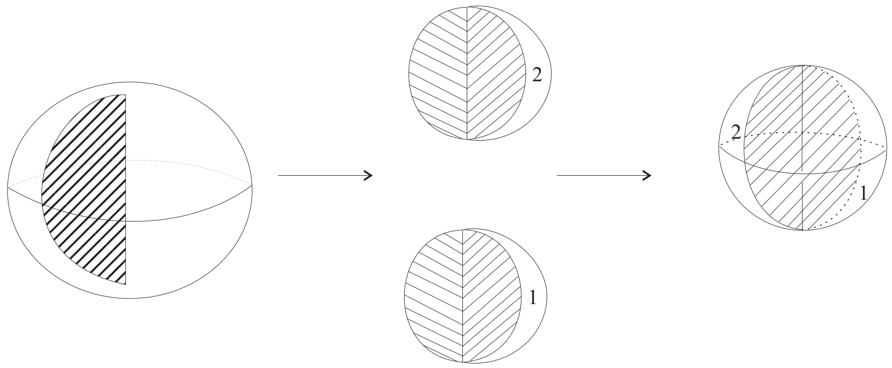


Se puede ver que el homeomorfismo $t(d) : T_g \to T_g$ no es el levantamiento de ningún homeomorfismo de S^2 bajo p, donde d es

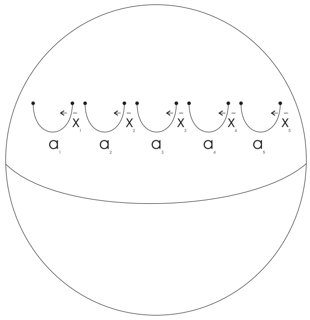


Recordemos que una cubierta ramificada de n hojas $p : X \to Y$ se llama *simple* ssi $\#(p^{-1}(x)) \geq n - 1$ para todo $x \in Y$. O sea que si $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, entonces al rededor de $\tilde{x}$ o bien p es un homeomorfismo, o bien p es una cubierta doble (sólo al rededor de $\tilde{x}$, o sea, en una vecindad pequeñita).

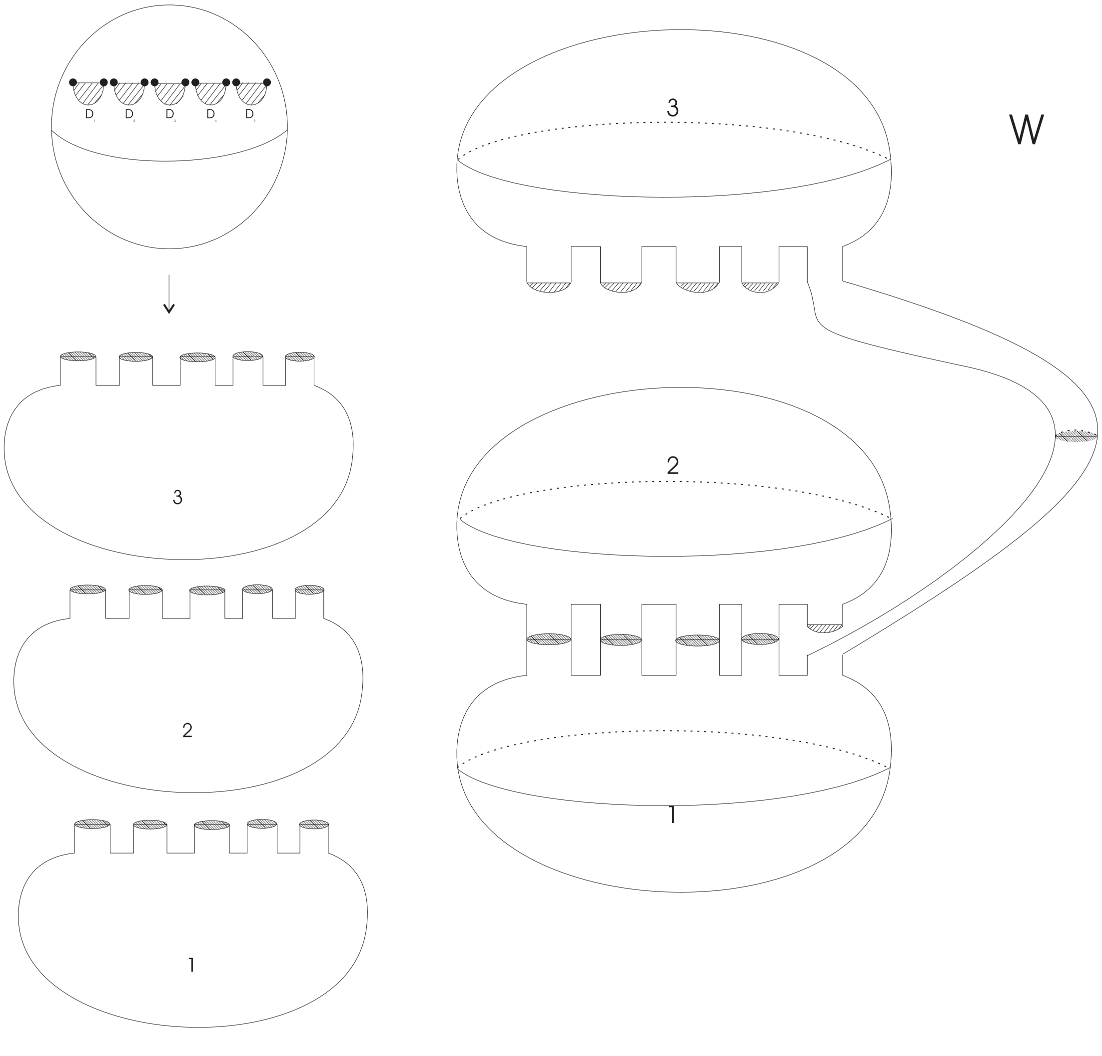
EJEMPLO. 1) Sea $p : B^3 \to B^3$ la cubierta doble ramificada en un arco a propiamente encajado en B^3. Entonces p se construye cortando a B^3 a lo largo de un 2–disco D tal que $\partial D = a \cup b$ donde b es un arco en ∂B^3, se toman dos copias y se pega:



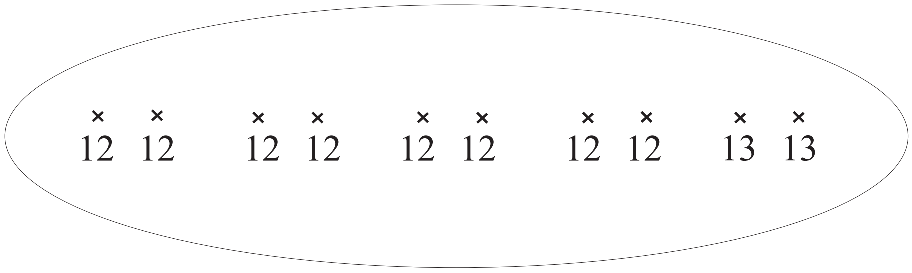
2) Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{g+1}, a_{g+2}$ $g+2$ arcos ajenos y propiamente encajados en B^3.



Se puede ver que $\pi_1(B^3 - \bigcup a_i) \cong \langle x_1, x_2, \ldots, x_{g+2} : -\rangle$; la asignación $[a_1] \mapsto (12), [a_2] \mapsto (12), \ldots, [a_{g+1}] \mapsto (12), [a_{g+2}] \mapsto (13)$ determina una representación $\pi_1(B^3 - \bigcup a_i) \to S_3$ que, a su vez, induce una cubierta $\varphi : W \to B^3$ triple simple ramificada a lo largo de $a_1, a_2, \ldots, a_{g+2}$. La cubierta φ se construye como sigue: Sea $D_i \subset B^3$ un 2–disco tal que $\partial D_i = a_i \cup b_i$ donde b_i es un arco en ∂B^3; cortamos a B^3 a lo largo de los discos $D_1, D_2, \ldots, D_{g+2}$, tomamos tres copias y pegamos adecuadamente:

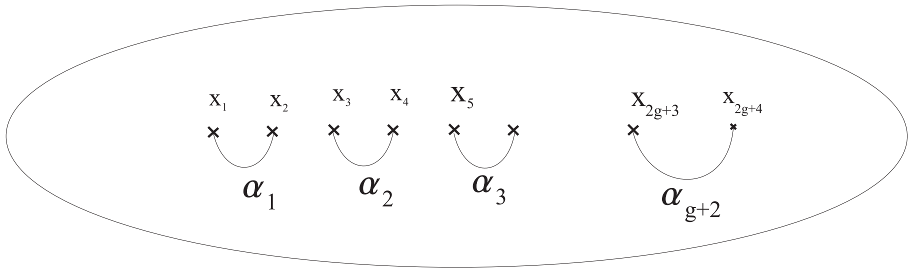


Entonces W es un cubo con g asas. Por supuesto que $\varphi|\partial W : \partial W \to \partial B^3$ es la cubierta triple simple con dibujo

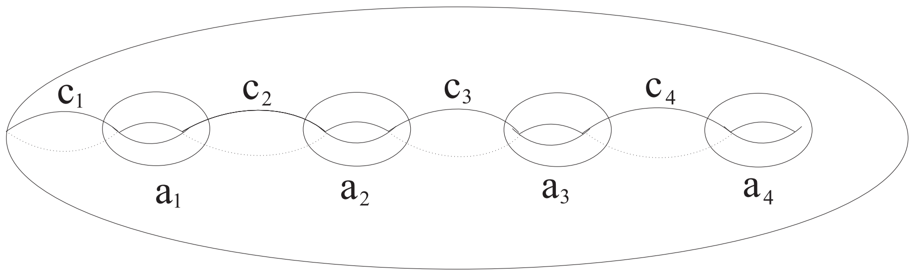


Nota: Se puede probar que si $\psi : T_g \to S^2$ es una cubierta triple simple, entonces, esencialmente, $\psi = \varphi|\partial W$ ("esencialmente" quiere decir que existen homeomorfismos $h : \partial W \to T_g$ y $\bar{h} : \partial B^3 \to S^2$ tales que $\bar{h} \circ \varphi = \psi \circ h$). Esto va a ser importante.

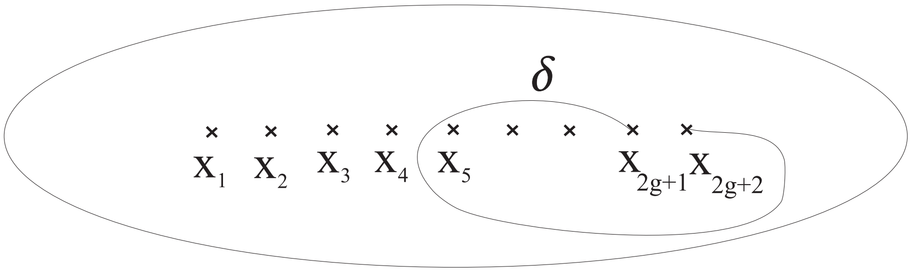
EJEMPLO (Continuación). De nuevo, si los extremos de a_i son x_{2i-1} y x_{2i}, tomamos α_j un arco en ∂B^3 con extremos x_j y x_{j+1}. Notemos que para $j \neq 2g+2$, $\varphi^{-1}(\alpha_j)$ es una curva simple cerrada y un arco en ∂W; $\varphi^{-1}(\alpha_{2g+2})$ es un solo arco en ∂W.



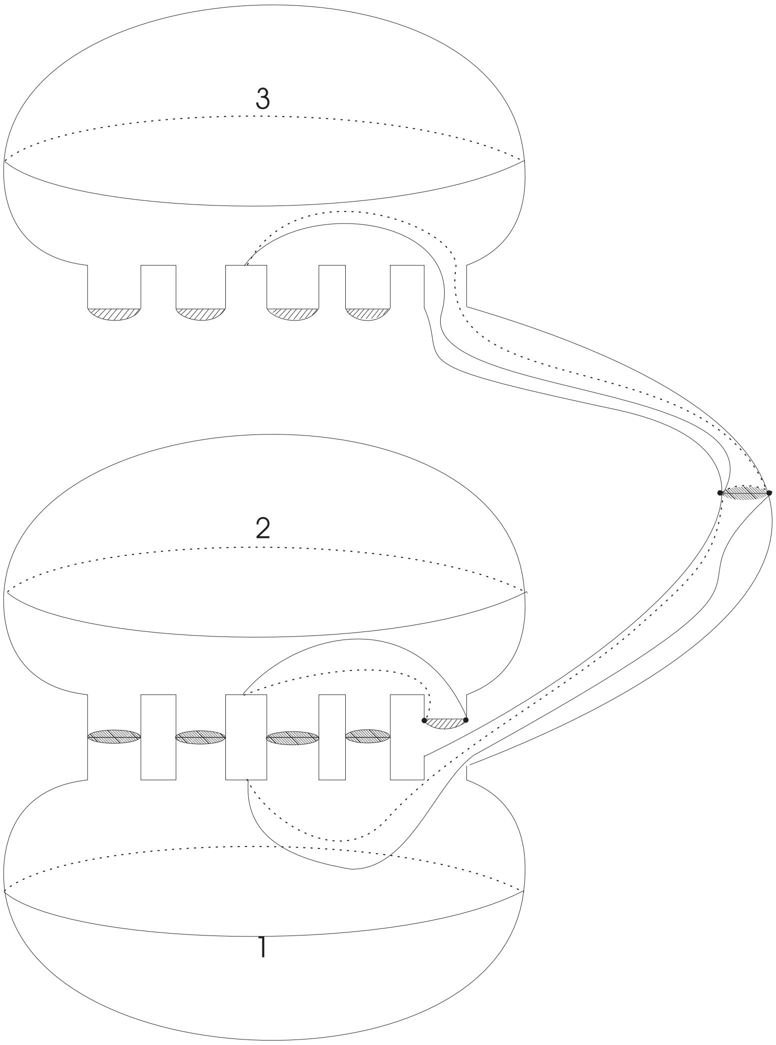
Así que obtenemos que el homeomorfismo $t(\alpha_{2j-1})$ se levanta al homeomorfismo $t(c_j)$ seguido de un homeomorfismo de arco para $j = 1, 2, \ldots, g$ y el homeomorfismo $t(\alpha_{2j})$ se levanta al homeomorfismo $t(a_j)$ segudo de un homeomorfismo de arco, $j = 1, 2, \ldots, g$.



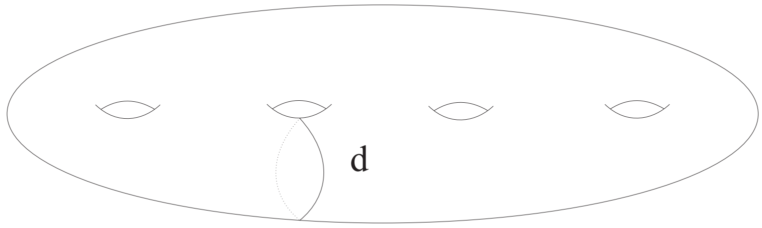
Tomemos ahora el arco $\delta \subset \partial B^3$ que conecta a x_{2g+3} con x_{2g+4} y que pasa entre x_4 y x_5 como en la figura



Dibujemos $\varphi^{-1}(\delta)$:



$\varphi^{-1}(\delta)$ es una curva simple cerrada homotópica a d y un arco en ∂W



Así que $t(\delta)$ se levanta a un homeomorfismo $t(d)$ seguido de un homeomorfismo de arco.

Teorema de Berstein–Edmonds. *Sea $\varphi : T_g \to S^2$ una cubierta triple simple y sea $h : T_g \to T_g$ un homeomorfismo. Entonces existen $\tilde{h} : T_g \to T_g$ y $\bar{h} : S^2 \to S^2$ homeomorfismos tales que $\tilde{h}$ es homotópico a h, $\bar{h}$ es homotópico a la identidad o a una reflexión de S^2 y $\varphi \circ \tilde{h} = \bar{h} \circ \varphi$.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de las observaciones anteriores, del Teorema Fuerte de Lickorish y de que una reflexión en S^2 a lo largo de una circunferencia que contiene a B_φ se levanta a una reflexión de T_g. $\square$

¡Sorprendente! Todos los homeomorfismos de T_g son levantamiento de un homeomorfismo de S^2 bajo una cubierta simple.

Finalmente tenemos el importante

Teorema de Montesinos y Hilden. *Sea M una 3–variedad cerrada, orientable y conexa. Entonces existe $\varphi : M \to S^3$ cubierta triple simple ramificada a lo largo de un enlace en S^3.*

Demostración. Primero tomamos una descomposición de Heegaard $M = W_1 \cup_h W_2$; tomamos $\varphi_1 : W_1 \to B^3$ y $\varphi_2 : W_2 \to B^3$ cubiertas triples simples ramificadas en $g+2$ arcos de B^3; finalmente tomamos $\tilde{h} : \partial W_1 \to \partial W_2$ un homeomorfismo homotópico a h y $\bar{h} : \partial B^3 \to \partial B^3$ un homeomorfismo tales que $\psi \circ \tilde{h} = \bar{h} \circ \psi$ donde $\psi = \varphi_1 | \partial W_1 = \varphi_2 | \partial W_2$. Entonces $\varphi = \varphi_1 \cup \varphi_2 : W_1 \cup_{\tilde{h}} W_2 \to B^3 \cup_{\bar{h}} B^3$ es una cubierta triple simple ramificada a lo largo de un enlace de $B^3 \cup_{\bar{h}} B^3$. Ahora $B^3 \cup_{\bar{h}} B^3 \cong S^3$ y, como $\tilde{h} \simeq h$, $M \cong W_1 \cup_{\tilde{h}} W_2$. $\square$

EJEMPLO.

Lo que obtuvimos es que toda 3–variedad se puede codificar con un enlace tricoloreado en S^3 (a través de una cubierta ramificada triple simple).