

Enlaces Universales.

Jesús Rodríguez Viorato.

9 de agosto de 2002

Prólogo

El presente trabajo lo desarrollé durante el período de agosto de 2001 a julio de 2002 en las instalaciones del CIMAT, bajo la valiosa asesoría del Dr. Víctor Núñez Hernández quien además de asesorarme, me compartió muchos de sus conocimientos.

Quiero agradecer al Dr. José Carlos Gómez Larrañaga por el apoyo brindado durante todo el período de la tesis; al Dr. Enrique Ramírez Losada por las charlas tan útiles en la terraza del CIMAT y al Dr. Luis Gerardo Valdez por sus buenas observaciones.

Y un especial agradecimiento a toda la comunidad del CIMAT y FAMAT por facilitarme la estancia durante todo este tiempo.

Agradezco al CIMAT el haberme provisto de un ambiente estimulante para el desarrollo del trabajo.

Jesús Rodríguez Viorato.
Facultad de Matemáticas de la U.G.
CIMAT, México.
jesusr@cimat.mx

Índice General

Prólogo	i
Introducción	iii
1 Preliminares	1
1.1 Clasificación de cubiertas en dimensión 2.	1
1.2 Teorema de unicidad	3
1.3 Cubiertas ramificadas sobre S^2	4
1.4 Teorema de Hilden, Lozano y Montesinos.	7
2 Existencia de Enlaces Universales	9
2.1 La Tercera Moviada	9
2.2 Teorema de Existencia de Thurston	12
2.3 Los Borromeanos y de Withehead son enlaces universales	15
3 Enlaces de dos puentes	20
3.1 Cubiertas diédricas del 2-ovillo trivial.	20
3.2 Cubiertas diédricas sobre enlaces de dos puentes.	22
3.3 El Enlace Romano.	25
3.4 Universalidad de los nudos y enlaces racionales.	27
Nudos y Enlaces Racionales	31
.1 El grupo fundamental de los enlaces racionales	32
Bibliografía	34

Introducción

El problema fundamental de la Topología de variedades es dar un teorema de clasificación de todas las n -variedades, es decir, dar una lista completa y sin repeticiones de todas las n -variedades.

Se conoce un teorema de clasificación para las 2-variedades y además se conoce que es imposible lograr un teorema de clasificación para n -variedades donde $n > 3$; el problema que queda es entonces clasificar las 3-variedades. En la búsqueda de esta clasificación se han obtenido resultados que sirven para dar una descripción de todas las 3-variedades posibles (por ejemplo la descomposición de Heggard y cirugías en S^3); es decir, se comienza por dar una construcción (una lista con repetición) de todas las 3-variedades con alguna de estas técnicas.

Una de las herramientas más atractivas para describir las 3-variedades es la construcción de *Cubiertas Ramificadas*. Las cubiertas ramificadas, al igual que las cirugías, nos describen un algoritmo para construir diferentes 3-variedades a partir de un enlace o nudo, sólo que las cubiertas ramificadas tienen una ventaja bastante peculiar: Existen enlaces y nudos en $L \subset S^3$ tales que todas las 3-variedades se pueden describir a partir de L tomando cubiertas ramificadas a lo largo de L ; a esta clase de nudos o enlaces se les conoce como *Universales*. La existencia de enlaces universales parece facilitar la búsqueda de un teorema de clasificación.

El propósito de esta tesis es dar una descripción de alguno de los teoremas más importantes sobre enlaces universales y sobre todo tratar de explicar cómo se pueden entender las cubiertas ramificadas.

El Capítulo 1 es un recuento de los teoremas básicos sobre cubiertas ramificadas; se ha tratado de dar explicaciones intuitivas y algunos ejemplos para cada uno de estos teoremas, en especial se ha hecho énfasis en los teoremas más útiles de la teoría.

En el Capítulo 2 se da una nueva demostración de la existencia de enlaces universales, además de que se realizan las demostraciones correspondientes para algunos enlaces importantes. Las demostraciones están bastante ilustradas para ayudar al lector.

El teorema más importante de este trabajo se ha escrito en el Capítulo 3, a saber, la universalidad de los nudos racionales. Para que el lector pueda entender el Capítulo 3 es recomendable leer el Apéndice, si es que el lector no está familiarizado con los enlaces o nudos racionales.

Durante el desarrollo de cada Capítulo se ha tratado de explicar de modo muy gráfico el significado de una cubierta ramificada, por ello se pueden “visualizar” las cubiertas ramificadas, además de entender mejor las demostraciones.

Capítulo 1

Preliminares

Definición 1.1. Una función $\varphi : M^m \rightarrow N^m$ entre variedades se llama cubierta ramificada si es finita a uno, abierta, continua y propia, donde finita a uno quiere decir que $\#\varphi^{-1}(x)$ es finito para toda $x \in M$; abierta nos dice que para todo $U \subset M$ abierto $\varphi(U)$ es abierto; propia es que cumpla que la frontera va a la frontera y el interior al interior.

Es difícil tratar de imaginar una función de éstas con sólo ver la definición, para eso veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2. Sea $f : D^2 \rightarrow D^2$ definida como $f(z) = z^2$. Ahora bien, esta función es claramente continua, finita a uno, propia y es abierta. De hecho es homeomorfismo local para casi todos los puntos de D^2 excepto uno, el centro.

El conjunto de puntos donde una cubierta ramificada no es homeomorfismo local se le conoce como el conjunto *singular de φ* y a la imagen del conjunto singular se le conoce como el conjunto de *ramificación de la función*, al cual denotaremos con $B_\varphi \subset N$. Para $x \in N - B_\varphi$, el número $\#\varphi^{-1}(x)$ se le llama el grado (o número de hojas) de φ .

En los casos que nos interesan pediremos que el conjunto de ramificación sea un subpoliedro de codimensión 2. Y una observación importante es que $\varphi|_{M^2 \setminus \varphi^{-1}(B_\varphi)} : M^2 \setminus \varphi^{-1}(B_\varphi) \rightarrow N^2 \setminus B_\varphi$ es una función cubriente en el sentido usual ([5]).

1.1 Clasificación de cubiertas en dimensión 2.

Definición 1.3. Dos cubiertas ramificadas son equivalentes $\varphi_0, \varphi_1 : M^m \rightarrow N^m$, si existen homeomorfismos $f : M^m \rightarrow M^m$ y $g : N^m \rightarrow N^m$ tales que $g \circ \varphi_0 = \varphi_1 \circ f$. Esto es que el siguiente digrama

$$\begin{array}{ccc} M^m & \xrightarrow{f} & M^m \\ \varphi_0 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ N^m & \xrightarrow{g} & N^m \end{array}$$

conmuta.

Antes de buscar equivalencias de cubiertas tenemos que observar algunas características locales de los cubrientes ramificados, como lo es el siguiente lema.

Proposición 1.4. *Sea $\varphi : M^2 \rightarrow N^2$ una cubierta ramificada. Sea $p \in B_\varphi$, $D^2 \subset N^2$ un disco tal que $p \in \text{int}(D)$ y $D \cap B_\varphi = \{p\}$. Sea $U \subset \varphi^{-1}(D)$ una componente conexa. Entonces :*

- 1.- U es un disco.
- 2.- $\varphi|U$ es equivalente a $z \mapsto z^k$, $k \geq 2$, para $z \in D^2 \subset \mathbb{C}$.

Definición 1.5. A este número k de la proposición 1.4.2 se le conoce como el grado local de la función en x y lo denotaremos como $\text{grado}(\varphi, x) = k$, donde x es un elemento del conjunto singular..

Proposición 1.6 (Fórmula de Riemann-Hurwitz). *Sea $\varphi : M^2 \rightarrow N^2$ una cubierta ramificada de grado n , entonces*

$$\chi(M^2) = n \cdot \chi(N^2) - \sum (\text{grado}(\varphi, x) - 1)$$

donde la suma se extiende sobre todos los x en el conjunto singular de φ .

Una cubierta ramificada $\varphi : M^2 \rightarrow N^2$ está determinada por el espacio cubriente $\varphi_0 : M^2 \setminus \varphi^{-1}(B_\varphi) \rightarrow N^2 \setminus B_\varphi$. Y éste está determinado por un homomorfismo $\rho_\varphi : \pi_1(N \setminus B_\varphi, *) \rightarrow S_n$ donde S_n denota el n -grupo simétrico y $*$ $\in N \setminus B_\varphi$ es algún punto base. El homomorfismo ρ_φ está definido de la siguiente manera. Tomemos una biyección $f : \varphi^{-1}(*) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ y un elemento $\sigma \in \pi_1(N \setminus B_\varphi, *)$ entonces σ se levanta a $\tilde{\sigma}_i$ para toda $i = 1, 2, \dots, n$, i.e., el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & M^2 & \\ \tilde{\sigma}_i \nearrow & \downarrow \varphi & \\ I & \xrightarrow{\sigma} & N^2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & f^{-1}(i) & \\ \nearrow & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & * \end{array}$$

conmuta. Definimos $\rho_\varphi(\sigma)$ como la permutación tal que $\rho_\varphi(\sigma)(i) = f(\tilde{\sigma}_i(1))$, de esta manera la función $\rho_\varphi : \pi_1(N \setminus B_\varphi, *) \rightarrow S_n$ es un homomorfismo de grupos bien definido. La representación de ρ_φ está determinada módulo los automorfismos de S_n . Esto es que ρ_φ depende sólo de la biyección $f : \varphi^{-1}(*) \rightarrow \{1, 2, 4, \dots, n\}$.

Definición 1.7. Al homomorfismo ρ_φ se le conoce como la representación o la monodromía de la cubierta ramificada φ .

Una vez teniendo la representación ρ_φ resulta más facil calcular $\sum(\text{grado}(\varphi, x) - 1)$. Sea $B_\varphi = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ y sea m_i una curva meridional de r_i , luego digamos que $\sigma_1^i \cdots \sigma_{n_i}^i$ es la descomposición en ciclos ajenos de $\rho_\varphi(m_i)$, entonces $\sum(\text{grado}(\varphi, x) - 1) = \sum_{i=1}^k \sum_{k=1}^{n_i} (\text{long}(\sigma_k^i) - 1)$, donde $\text{long}(\sigma)$ es la longitud del ciclo σ .

Teorema 1.8 (Teorema de Clasificación de Hurwitz). *Dos cubiertas ramificadas $\varphi, \psi : M_i^2 \rightarrow N^2, i = 1, 2$ son equivalentes si y sólo si existe un homeomorfismo $h : (N^2, B_\varphi, *) \rightarrow (N^2, B_\psi, *)$ tales que $\rho_\varphi = \rho_\psi \circ h_\#$.*

Teorema 1.9 (Teorema de Existencia de Hurwitz). *Para un subconjunto $B \subset N^2$ y una representación $\rho : \pi(N^2 \setminus B, *) \rightarrow S_n$ existe una cubierta ramificada de n -hojas $\varphi : M^2 \rightarrow N^2$ con $B_\varphi \subset B$ y $\rho_\varphi = \rho$.*

Estos dos teoremas son la base de la teoría de cubiertas ramificadas en dimensión dos, ya que con ellos podemos afirmar que lo importante en una cubierta ramificada es el homomorfismo ρ_φ .

1.2 Teorema de unicidad

Definición 1.10. Una cubierta ramificada $\varphi : M^m \rightarrow N^m$ de grado $n \geq 2$ se dice simple si para cada $x \in N^m$ la fibra $\varphi^{-1}(x)$ sobre x consiste de al menos $n - 1$ puntos. Esto es que cada fibra contiene a lo más un punto singular de grado local dos.

En este caso la fórmula de Riemann-Hurwitz nos dice que si $\varphi : M^2 \rightarrow N^2$ es simple entonces:

$$\chi(M^2) = n\chi(N^2) - k$$

donde $k = \#B_\varphi$ y n es el grado de φ . ¡Esto sí es simplicidad! Ahora veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.11. Si tengo $B_\varphi \subset S^2$ y $B_\varphi = \{A, B, C, D\}$ como se muestra en la figura 1. Si $\rho_\varphi : \pi(S^2 - B_\varphi) \rightarrow S_3$ es tal que los generadores los manda a las permutaciones $(1, 2), (1, 2), (2, 3), (2, 3)$, respectivamente, del grupo simétrico de 3 símbolos.

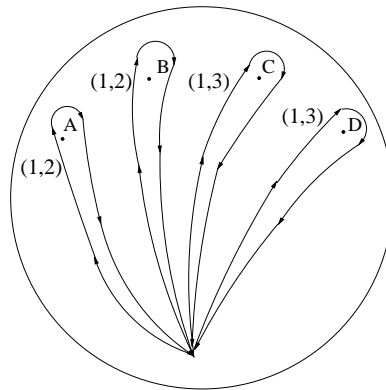


Figura 1.

¿Quién es la $\varphi : M \rightarrow S^2$ que garantiza Hurwitz? Pues si aplicamos la fórmula de Riemann-Hurwitz a esta esfera obtenemos que: $\chi(M) = 3\chi(S^2) - 4 = 3 * 2 - 4 = 2$, por lo cual M es otra vez una esfera.

Definición 1.12 (Giro de Arco). Sea a un arco en N^2 , definimos $t(a) : N^2 \rightarrow N^2$ como sigue. Sea D una vecindad de a (la cual es homeomorfa a un disco, Figura 2); fuera de D definimos $t(a)$ como la identidad y en D como un giro de 180° en la dirección de la orientación de ∂D , de manera que manda el arco a en sí mismo con los extremos intercambiados (ver figura 3). Una observación importante es que los giros de arco son isotópicos a la identidad.

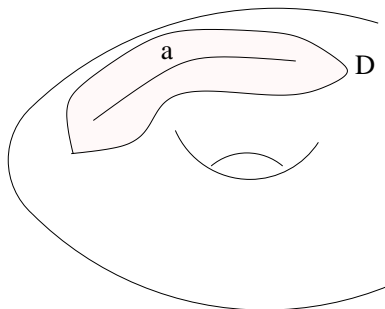


Figura 2.

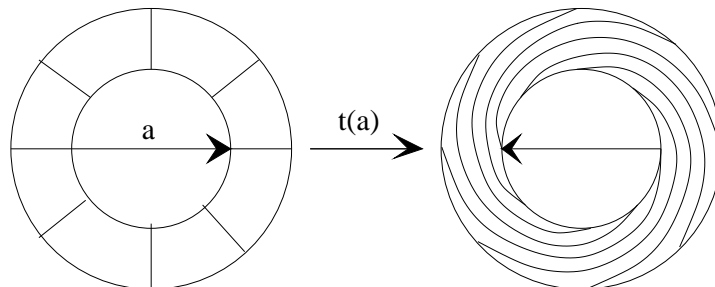


Figura 3.

Este homeomorfismo de arco tiene su primera importancia en la prueba del teorema de unicidad para variedades de dimensión dos.

Teorema 1.13 (Teorema de Unicidad). *Si M^2 es una 2-variedad conexa, entonces cualesquiera dos cubiertas simples $\varphi_0, \varphi_1 : M^2 \rightarrow S^2$ de n hojas son equivalentes.*

Esbozo de la Demostración. De la fórmula de Riemann-Hurwitz tenemos que $\chi(M^2) = n\chi(S^2) - \#B_{\varphi_0} = n\chi(S^2) - \#B_{\varphi_1}$ entonces $\#B_{\varphi_0} = \#B_{\varphi_1}$. De aquí que podemos suponer que $B_{\varphi_0} = B_{\varphi_1} = B$. Y por una isotopía en S^2 tenemos que también podemos suponer que el punto base es el mismo. Ahora que el problema es el ver que pasa con ρ_{φ_0} y ρ_{φ_1} . En tal caso hay que construir una función $f : (S^2, B, *) \rightarrow (S^2, B, *)$ tal que $\rho_1 \circ f_* = \rho_0$. Y este homeomorfismo lo encontramos mediante composición de giros de arco que se levantan a homeomorfismos de M . ■

1.3 Cubiertas ramificadas sobre S^2

Teorema 1.14. *Sea M^2 una variedad conexa, $\varphi : M^2 \rightarrow S^2$ cubierta ramificada simple de $n \geq 3$ hojas y $f : M^2 \rightarrow M^2$ un homeomorfismo. Entonces existe $h : M^2 \rightarrow M^2$ y $\bar{h} : S^2 \rightarrow S^2$ tales que h es isotópica a f y el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} M^2 - \frac{h}{n} & \simeq & M^2 \\ \varphi_0 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ S^2 - \frac{\bar{h}}{n} & \simeq & S^2 \end{array}$$

conmuta.

Antes de demostrar el teorema veamos algunos puntos. Si tengo $\varphi : A \rightarrow D$ una cubierta ramificada de 2 hojas, donde D es un 2-disco y el conjunto $B_\varphi = \{y_1, y_2\}$. ¿Quién es A ? Como φ es de dos hojas, entonces es una cubierta simple, usando la fórmula de Riemann-Hurwitz obtenemos que:

$$\chi(A) = 2 \cdot \chi(D) - 2 = 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

Y usando el hecho que sólo puede tener una o dos fronteras, sólo puede ser una banda de Moebius ó un anillo. Dado que estamos en el caso orientable, sólo puede ser un anillo, ya que si $\varphi : M^m \rightarrow N^m$ es cubierta ramificada y N es orientable, entonces M es orientable.

Ahora bien, como acabamos de ver, todas las cubiertas ramificadas simples $\varphi : A \rightarrow D$ de n -hojas son equivalentes (Teorema de unicidad), por lo cual podemos pensar que φ es el cociente de la función que gira 180° como se muestra en la figura 4.

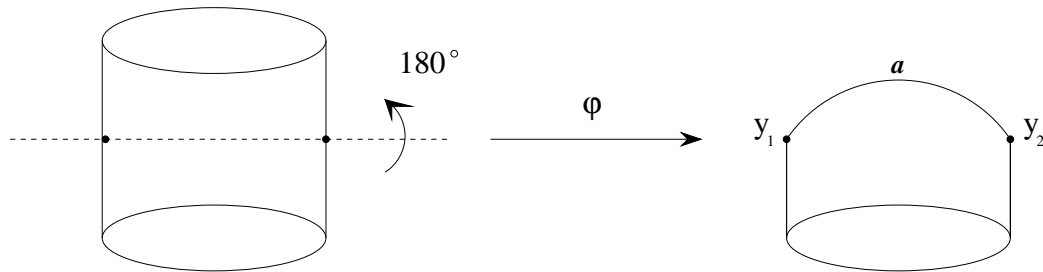
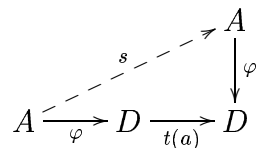


Figura 4.

Ya estamos listos para lo siguiente.

Lema 1.15. Sea $\varphi : A \rightarrow D$ una cubierta de dos hojas donde A es un anillo, D un 2-disco y el conjunto de ramificación es $B = \{y_1, y_2\} \subset D$. Entonces el giro sobre el arco a que conecta y_1 con y_2 en D se levanta (salvo isotopía relativa a la frontera de A), a un giro en el ánimo de A .

Demostración. Para demostrar esto sólo hay que ver que existe una función $s : A \rightarrow A$ tal que el siguiente diagrama conmuta.



Pero esta función existe si y sólo si:

$$t(a)_\# \circ \varphi_\#(\pi_1(A - \varphi^{-1}(B))) \subset \pi(A - \varphi^{-1}(B)) \quad (\text{ver [5]})$$

Veamos primero que si x_1, x_2 son las curvas alrededor de los puntos y_1, y_2 , respectivamente, entonces:

$$\varphi_\#(\pi_1(A - \varphi^{-1}(B_\varphi))) = \langle x_1^2, x_1x_2, x_2^2 \rangle$$

Observemos que la función giro de arco manda $x_1 \rightarrow x_2$ y $x_2 \rightarrow x_2^{-1}x_1x_2$. Usando estas dos propiedades calculemos que pasa con los generadores de $\varphi(\pi_1(A - \varphi^{-1}(B))) = T$.

$$t(a)(x_1^2) = x_2^2 \in T$$

$$t(a)(x_1x_2) = x_2(x_2^{-1}x_1x_2) = x_1x_2 \in T$$

$$t(a)(x_2^2) = x_2^{-1}x_1^2x_2 = (x_1x_2)^{-1}(x_1^2)(x_1x_2) \in T \quad \blacksquare$$

Para la prueba del Teorema 1.14 haremos uso del Teorema de Lickorich (ver [5]), que nos dice que cualquier homeomorfismo es isotópico a una composición de giros sobre las curvas que se muestran en la figura 5 (estos giros no son giros de arco, sino de curvas).

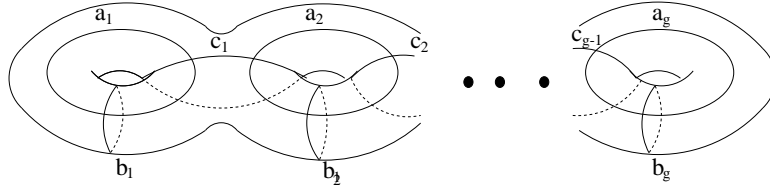


Figura 5.

Si \$M^2\$ es de género \$g\$ tenemos \$3g - 1\$ curvas. Esto nos dice que sólo basta con demostrar que para cada curva \$a_i\$ (\$b_i\$ o \$c_i\$) existe una función \$h : S^2 \to S^2\$ tal que el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} T_g & \xrightarrow{t(a_i)} & T_g \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ S^2 & \xrightarrow{h} & S^2 \end{array}$$

conmuta, donde \$T_g\$ denota la 2-variedad de género \$g\$.

Esbozo de la demostracion. Por el teorema 1.13 sólo tenemos que construir cualquier cubierta ramificada simple \$\varphi : T_g \to S^2\$ y demostrar en ella la validez del teorema 1.14.

Sea \$\varphi_2 : M_0^2 \to S^2\$ la cubierta doble de \$S^2\$ ramificada sobre \$2(g + 1)\$ puntos (ver figura 6 (a)), por Riemman-Hurwitz tenemos que \$\chi(M_0^2) = 2(2) - 2(g + 1) = 2 - 2g\$, por lo cual \$M_0^2 \cong T_g^2\$. Luego extendemos \$\varphi_2\$ a una cubierta \$\varphi'_n : M_0^2 \sqcup (n - 2)S^2 \to S^2\$ de \$n\$ - hojas donde \$(n - 2)S^2\$ es la union ajena de \$(n - 2)\$ copias de \$S^2\$, en cada una de las copias de \$S^2\$ definimos \$\varphi'_n\$ como la identidad. Como \$M_0^2 \sqcup (n - 2)S^2\$ no es conexo no podemos usar \$\varphi'_n\$ como modelo de \$\varphi\$.

Consideremos la cubierta de la esfera que tiene representación \$\rho : \pi_1(S^2 \setminus \{2n \text{ puntos}\}) \to S_n\$ como la que se muestra en la figura 6 (b).

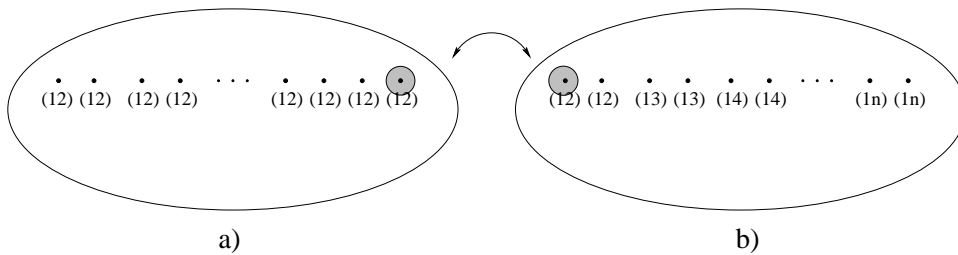


Figura 6.

Esto me define una cubierta \$\varphi''_n : S^2 \to S^2\$ ramificada sobre \$2n\$ puntos y de \$n\$-hojas.

Sea \$\varphi_n : (M_0^2 \sqcup (n - 2)S^2) \# S^2 \to S^2 \# S^2\$ obtenida de \$\varphi'_n\$ y \$\varphi''_n\$ mediante la suma conexa en un punto de ramificación que le corresponda la permutación \$(12)\$ como en la figura 6. Como \$(M_0^2 \sqcup (n - 2)S^2) \# S^2 \cong T_g\$ podemos, ahora sí, usar \$\varphi_n\$ como modelo para \$\varphi\$.

Los homeomorfismos de arcos en \$\bar{a}_i, \bar{b}_i\$ y \$\bar{c}_i\$ (ver figura 7) se levantan a giros sobre curvas gracias al lema 1.15 y se levantan precisamente a giros sobre las curvas \$a_i, b_i\$ y \$c_i\$ que se muestran en la figura 5. Para los detalles faltantes de la prueba ver [8].

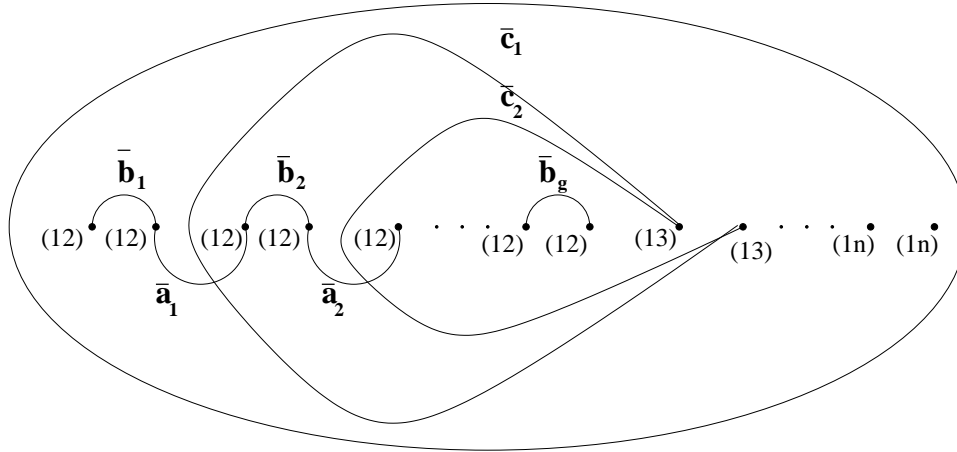


Figura 7.



1.4 Teorema de Hilden, Lozano y Montesinos.

Este es el primer teorema que nos permite estudiar las tres variedades de manera distinta a las conocidas previamente (cirugias y descomposición de Heggard).

Consideremos la cubierta ramificada del ovrillo con $g + 1$ hilos, ramificada sobre los hilos, como se muestra en la figura 8.

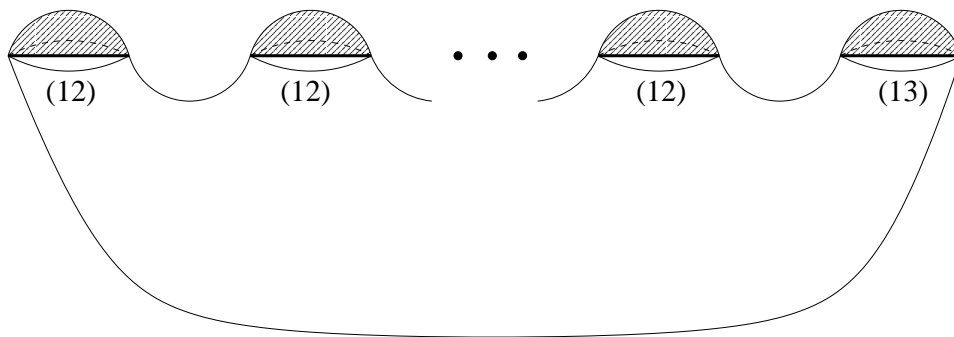


Figura 8.

Las permutaciones que aparecen cerca de los hilos en la figura 8 se refieren a que la monodromía (representación) $\rho : \pi_1(B^3 \setminus \{\text{hilos}\}) \rightarrow S_3$ asociada a la cubierta; manda los meridianos de los hilos en las respectivas transposiciones.

Esta monodromía nos describe una regla de construcción para $\varphi : M^3 \rightarrow B^3$ tal que $B_\varphi = \{\text{hilos}\}$ y $\rho_\varphi = \rho$. ¿Cómo haremos esto? Cortemos la bola a lo largo de los discos marcados en la figura 8, luego tomemos tres copias de esta bola cortada y enumerémoslas del uno al tres, por último peguemos las tres copias de acuerdo a la monodromía (ver figura 9).

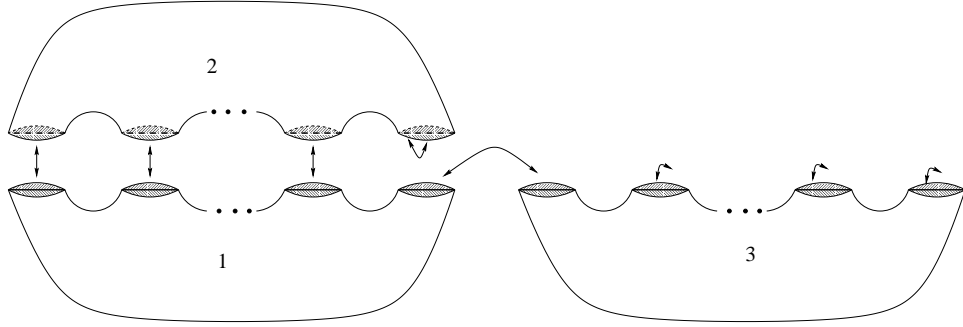


Figura 9.

Esto nos determina una función $\varphi : T^3 - B^3$ donde T^3 es un cubo con g - asas. Observemos que $\varphi|_{\partial T^3} : \partial T^3 \rightarrow \partial B^3$ es una cubierta simple de tres-hojas sobre la esfera.

Teorema 1.16. *Para cualquier 3-variedad compacta, cerrada y orientable M^3 existe $\varphi : M^3 \rightarrow S^3$ cubierta ramificada simple de 3-hojas tal que B_φ es un enlace tricoloreable.*

Demostración. Como M^3 es variedad cerrada, compacta y orientable admite una descomposición de Heegaard, $M^3 = (T_1^3 \sqcup T_2^3)/(x \sim f(x))$, donde T_1 y T_2 son cubos con asas del mismo género y $f : \partial T_1 \rightarrow \partial T_2$ es un homeomorfismo de pegado.

Por el teorema 1.14 existen homeomorfismos $\tilde{h} : \partial T_1 \rightarrow \partial T_2$ y $h : \partial B_1^3 \rightarrow \partial B_2^3$ tales que \tilde{f} es isotópica a f y el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \partial T_1 & \xrightarrow{\tilde{h}} & \partial T_2 \\ \varphi_1|_{\partial T_1} \downarrow & & \downarrow \varphi_2|_{\partial T_2} \\ \partial B_1^3 & \xrightarrow{h} & \partial B_2^3 \end{array}$$

conmuta; en este diagrama φ_i es la función cubierta ramificada que definimos al principio.

Definamos $\varphi : (T_1 \sqcup T_2)/(x \sim \tilde{h}(x)) \rightarrow (B_1^3 \sqcup B_2^3)/(y \sim h(y))$, como el homeomorfismo tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{si } x \in T_1 \\ \varphi_2(x) & \text{si } x \in T_2 \end{cases}$$

como \tilde{h} es isotópica a f tenemos que $(T_1 \sqcup T_2)/(x \sim \tilde{h}(x)) \cong M^3$ y sabemos además que $(B_1^3 \sqcup B_2^3)/(y \sim h(y)) \cong S^3$.

Hemos construido una cubierta ramificada simple $\varphi : M^3 \rightarrow S^3$ de 3-hojas, por lo que casi terminamos la prueba del teorema. Sólo falta probar que B_φ es tricoloreable; para ello pintemos cada meridiano de acuerdo a la transposición asociada, las cuales sólo pueden ser tres posibles: (12), (23) ó (31). La relacion de los meridianos en un cruce es del estilo $x^{-1}yx = z$ por lo cual, si x y y tienen colores distintos (digamos el correspondiente a (12) y (23)) entonces z tiene que ser de color distinto (o sea (12)(23)(12) = (31)). En el caso de que tengan el mismo color z tendrá el mismo color. Lo anterior prueba que B_φ es tricoloreable. ■

Capítulo 2

Existencia de Enlaces Universales

Por el Teorema de Montesinos sabemos que para cualquier 3-variedad M^3 cerrada y orientable existe una cubierta ramificada simple $\varphi : M^3 \rightarrow S^3$ de grado 3 tal que $B_\varphi \subset S^3$ es un enlace 3-coloreable.

Empezando por esto trataremos de construir una nueva φ para obtener un B_φ que no dependa de M^3 o, lo que es lo mismo, un enlace universal.

Para lograr esto necesitamos crear unas movidas que no alteren M^3 pero que nos permitan manipular $B_\varphi = L$, el enlace de ramificación. Ahora las movidas que inmediatamente tenemos permitidas son las siguientes.

Movida 1. Podemos isotopar el enlace $L \in S^3$. Una isotopía de L en el entorno de S^3 no afecta en nada, pues el grupo fundamental del complemento del nudo no cambia y por lo tanto tampoco cambia el homomorfismo ρ_φ .

Movida 2. Podemos anexar componentes al enlace. Al anexar componentes a L , obtenemos un nuevo enlace y cada una de las nuevas componentes no tiene como preimagen algún punto del conjunto singular, sin embargo podemos pensar que este nuevo \bar{L} , es el conjunto de ramificación, sólo que ahora el homomorfismo $\rho_\varphi : \pi_1(S^3 \setminus \bar{L}) \rightarrow S_3$ manda los meridianos de las nuevas componentes a la identidad.

Hay una tercera movida, sólo que es más complicada, pero es la que nos va permitir cambiar el enlace de manera más útil.

2.1 La Tercera Movida

Sea D^2 un disco y $a, b \in D^2$ dos puntos en su interior; tomemos $\rho : \pi_1(D \setminus \{a, b\}) \rightarrow S_3$ el homomorfismo que manda a los generadores de $\pi_1(D \setminus \{a, b\})$ en dos transposiciones distintas; sin pérdida de generalidad podemos pensar que son $(1\ 2)$ y $(1\ 3)$ (ver figura 10).

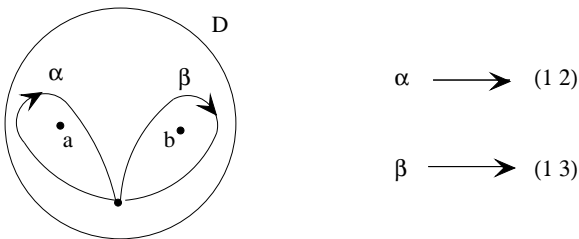
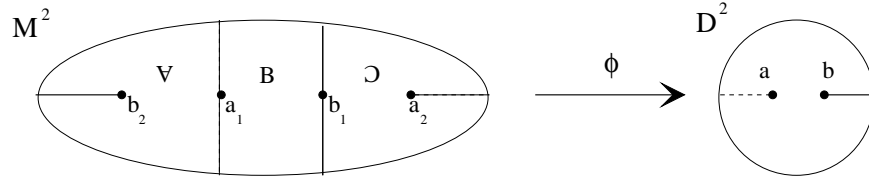


Figura 10.

El Teorema de Existencia de Hurwitz nos garantiza la existencia de un espacio M^2 y una cubierta ramificada $\phi : M^2 \rightarrow D^2$ tal que $\rho_\phi = \rho$. Además sabemos que $\chi(M^2) = 3\chi(D^2) - 2 = 1$ y como ∂D tiene la representación $\alpha\beta \in \pi_1(D^2 \setminus \{a, b\})$ entonces $\rho_\phi(\partial D) = \rho_\phi(\alpha)\rho_\phi(\beta) = (1\ 2)(1\ 3) = (1\ 2\ 3)$, por lo cual ∂M tiene una componente; de aquí se deduce que M es isomorfa a un disco. Para visualizar mejor esto veamos la figura 11.

Figura 11. Hemos partido el disco M^2 en tres regiones A, B y C cada una de estas regiones cubre mediante la ϕ al disco D^2 y las líneas punteadas (negras) cubren el segmento punteado (negro) de D^2 .



Luego la función giro de arco al cubo $t^3(\delta) : D^2 \rightarrow D^2$ se levanta a un giro de arco $h : (M^2, \{a_1, b_1, a_2, b_2\}) \rightarrow (M^2, \{a_1, b_1, a_2, b_2\})$ esto gracias a que:

$$t^3(\delta) \circ \phi(\pi_1(D^2 - a, b)) \leq \phi(\pi_1(D^2 - a, b))$$

estos cálculos se realizan de manera parecida a los descritos en el lema 1.15.

Este resultado algebraico nos garantiza que el levantamiento es exactamente un giro sobre la preimagen de δ a la cual llamaremos $\bar{\delta}$. Para entender con mayor claridad veamos la figura 12.

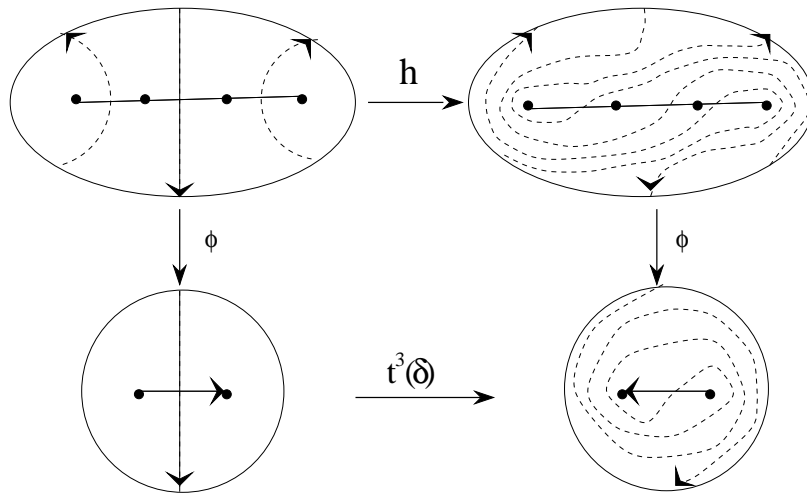


Figura 12.

Bueno, todo esto es muy bonito, ¿pero qué tiene que ver con lo que decaíamos hacer? Pues lo que haremos es lo siguiente. Sea B^3 un ovillo trivial con 2-hilos, donde los generadores del ovillo son enviados nuevamente a las transposiciones $(1\ 2), (1\ 3)$. A esta función la llamaremos $\rho : \pi_1(B^3 \setminus H) \rightarrow S_3$, donde H son los hilos del ovillo.

Sabemos que existe una única cubierta ramificada $\varphi : M^3 \rightarrow B^3$ (salvo equivalencia de cubiertas) que satisface $\rho_\varphi = \rho$. Ahora bien, si tomo un disco D como el que se muestra en la figura 4 y me fijo en $\varphi|_{\varphi^{-1}(D)}$, esta función va ser idéntica a la función ϕ descrita

al principio de este capítulo. Si tomo $\phi \times 1_I$ (donde 1_I representa la función identidad del intervalo cerrado $[0, 1]$ en si mismo) tengo nuevamente una función cubriente $\phi \times 1_I : B^3 \rightarrow B^3$ y además $\rho_{\phi \times 1_I} = \rho$, por lo cual podemos pensar que $\varphi = \phi \times 1_I$.

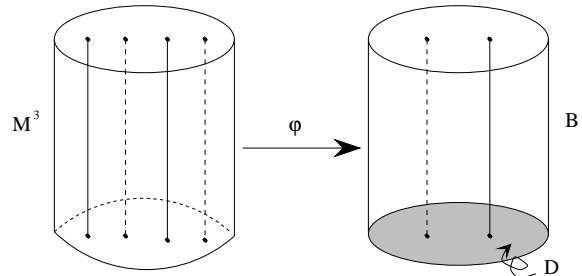


Figura 13.

Es una gran ayuda ver la función φ como producto de funciones, pues ahora podemos aplicar el análisis que hicimos de la función giro de arco en esta función, ya que la función giro de arco se puede ver como $t : S^2 \rightarrow S^2$, entonces se puede extender a una función $\bar{t} : B^3 \rightarrow B^3$.

Teorema 2.1. *Sea B^3 un ovillo de 2-hilos y sea $\varphi : M^3 \rightarrow S^3$, tal que $\rho_\varphi : \pi_1(B^3 - \{\text{hilos}\}) \rightarrow S_3$ asocia a cada hilo la transposición $(1,2)$ y $(1,3)$. Sea $\bar{t} : B^3 \rightarrow B^3$ la extensión del giro de arco. Entonces existe $H : M^3 \rightarrow M^3$ tal que el diagrama siguiente*

$$\begin{array}{ccc} M^3 & \xrightarrow{H} & M^3 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ B^3 & \xrightarrow{\bar{t}} & B^3 \end{array}$$

conmuta.

Demostración. Como ya vimos el homeomorfismo $t : D^2 \rightarrow D^2$ se levanta a un homeomorfismo $h : D^2 \rightarrow D^2$, veamos como aplicar esto. Podemos definir $\bar{t} : D^2 \times I \rightarrow D^2 \times I$ como la función que en $D^2 \times \{s\}$ es la función que gira incompleto el arco, dando un giro de ángulo $\pi(1 - s)$ con $s \in I$. La función $\bar{h} = H$ es la función que hace exactamente lo mismo en cada nivel, esto es, un giro de $\pi(1 - s)$ (Figura 14). Esta función H es continua y por lo tanto es nuestra función. ■

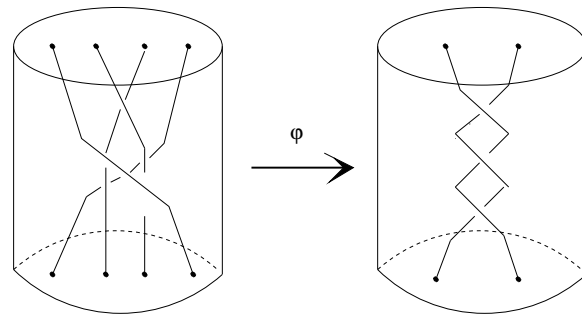


Figura 14.

Lo que hemos probado es que podemos cambiar la apariencia del conjunto de ramificación, sólo que también se cambia la del conjunto singular. ¿Cómo usaremos este resultado? Este teorema es la famosa movida 3; para entender mejor como usarla veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2. Digamos que tenemos $\varphi : M^3 \rightarrow S^3$ una cubierta ramificada de 3-hojas, donde a cada meridiano del enlace B_φ se asocia una transposición de S_3 . De esto se sigue que el enlace de ramificación es tricoloreable, por ejemplo el trébol. Luego tomamos una bola tal que sea homeomorfa al ovillo trivial como la de la figura 15 . Llamémosla B^3 .

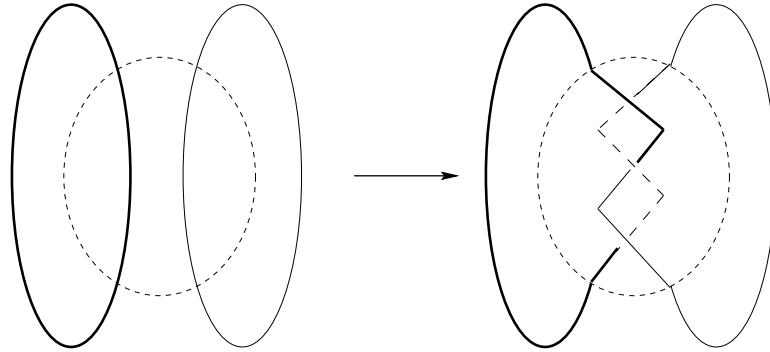


Figura 15.

Claramente esta bola es como la planteada en esta sección, por lo cual podemos desprender la bola y pegarla nuevamente con alguna función que no mueva los 4 puntos de ramificación de la esfera, digamos la función giro de arco. Entonces podemos cambiar la bola por su imagen bajo H , donde H es el homeomorfismo del Teorema 2.1. Lo cual sin duda alguna es una maravilla, pues como ya sabemos, al pegar la preimagen de B^3 nuevamente a M^3 sigue siendo M^3 . Con esto logramos cambiar muchísimo nuestro enlace, en nuestro ejemplo los cambios se ven como en la figura 15.

Esta será la movida principal para la prueba de la existencia de enlaces universales.

2.2 Teorema de Existencia de Thurston

La primera prueba de existencia de enlaces universales la realizó Thurston en [3]. En esta tesis veremos una prueba mucho más sencilla.

Sea $\varphi : M^3 \rightarrow S^3$ una cubierta ramificada simple de tres hojas y $L = B_\varphi$ el enlace de ramificación; isotopamos L a la forma de una trenza cerrada, lo cual podemos hacer gracias a la movida 1.

Demostración. Paso I. Podemos isotopar la trenza de tal manera que todos los cruces de la trenza se vean de tres colores. Recordemos que “verse” de tres colores implica que los meridianos del enlace en el cruce se pueden enviar a tres transposiciones distintas.

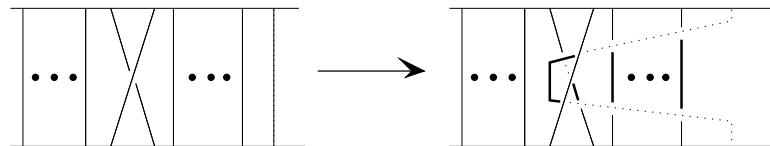


Figura 16.

Si tenemos un cruce de un color, podemos tomar la vecindad del cruce que representa un elemento generador del grupo de trenzas. Ahora bien, como el enlace está tricoloreado existe una cuerda que tiene diferente color que el cruce. Tomemos esa cuerda y pasémosla

a través del cruce; como podemos observar en la figura 16, con esta isotopía, la trenza ha mutado a otra trenza, ahora con más cruces, pero todos los cruces tienen tres colores.

Paso II. Podemos cambiar todos los cruces a positivos Si algún cruce es negativo podemos usar la movida tres y cambiarlo a dos cruces positivos (ver figura 17).

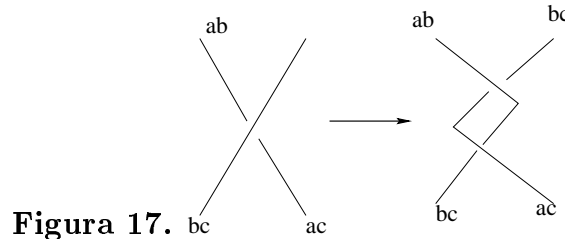


Figura 17.

Paso III. En cada cruce de la trenza hacemos la siguiente serie de cambios; usando varias veces la tercera movida en las bolas marcadas, en cada paso se realiza el giro en la dirección obvia.

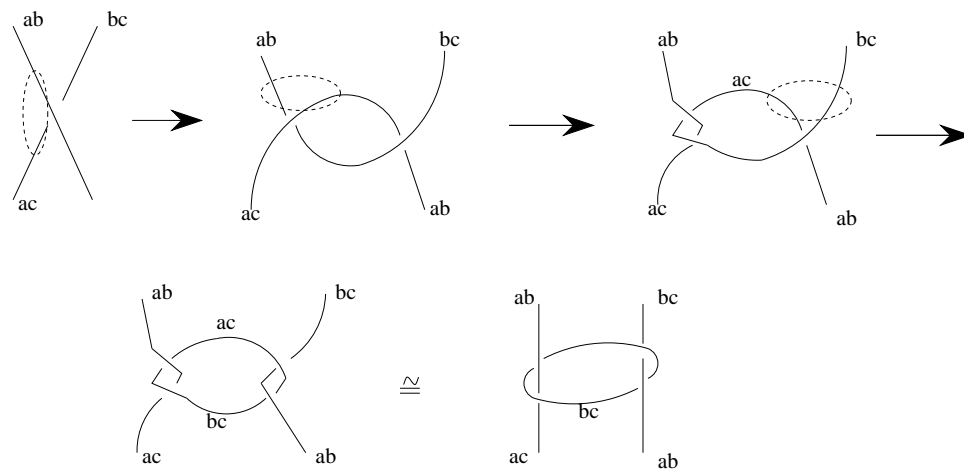


Figura 18.

Con estos cambios, nuestro enlace se ve como cuerdas de una guitarra, junto con unos aritos sujetando cuerdas vecinas.

Paso IV. Para cada aro anexamos algunas componentes como se muestra en la siguiente figura, hecho esto nuestro enlace tiene una forma bastante simétrica como para contruir una cubierta de S^3 en sí misma.

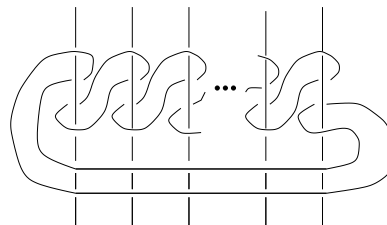


Figura 19.

Paso V. Los que alguna vez fueron los hilos de la trenza los acomodamos como círculos paralelos y dibujamos a distancias iguales cada una de las figuras obtenidas por el paso IV (ver figura 20). Ahora bien, si pensamos en S^3 como $(\mathbb{C} \times \mathbb{R}) \cup \{\infty\}$, podemos construir $\sigma : S^3 \rightarrow S^3$ como la cubierta ramificada tal que $(z, t) \rightarrow (z^N, t)$. Esta función lo que hace es mandar cada una de las regiones $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ marcadas en la figura 20 a S^3 ; a esta cubierta se le conoce como *la cubierta cíclica de la esfera ramificada sobre el nudo trivial*.

Ahora bien la imagen de todo el enlace más la nueva ramificación están dibujadas en la figura 20 (b); la nueva ramificación está dibujada más oscura.

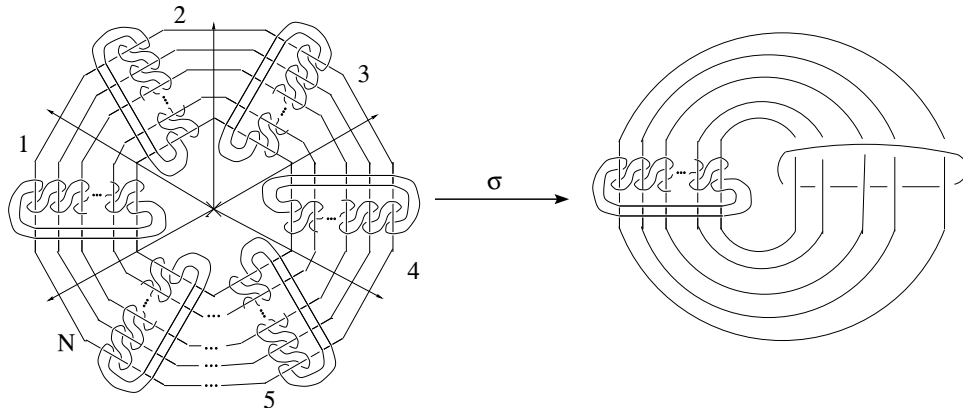


Figura 20.

a)

b)

Paso FINAL. La figura ha reducido mucho, lo que tenemos hasta ahora es que para cualquier 3-variedad M^3 existe una cubierta ramificada $\varphi : M^3 \rightarrow S^3$ donde B_φ es igual a algún enlace del tipo 20 (b). Podemos repetir el truco hecho en el paso V a este último enlace como se muestra en la figura 21. El enlace 20 (b) es isotópico al de la figura 21 (a), y mediante otra cubierta cíclica obtenemos un enlace que no depende en absoluto de M^3 , por lo cual este enlace es universal.

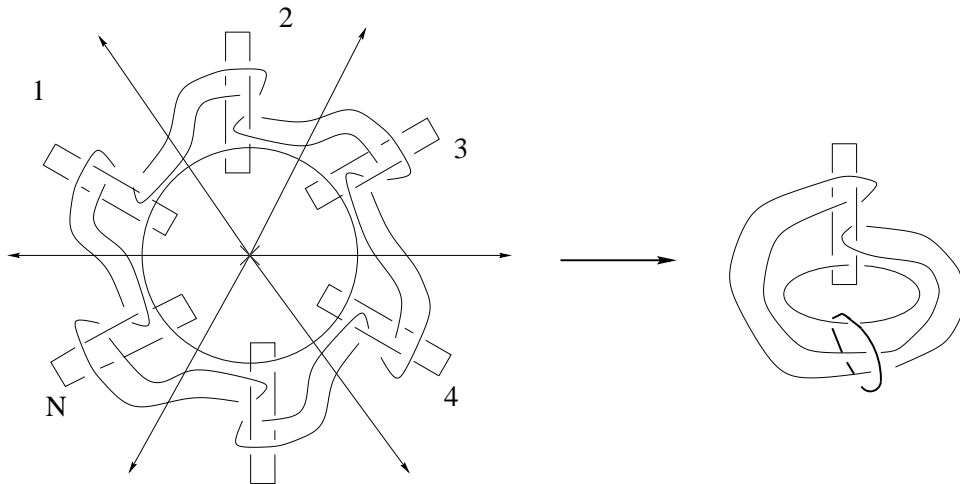


Figura 21.

a)

b)



2.3 Los Borromeos y de Withehead son enlaces universales

Hemos ya probado el teorema de Thurston, pero nuestra pregunta a resolver es ¿Cuáles enlaces son universales y si habrá alguno que sea nudo? En esta sección nos limitaremos a dar una familia de enlaces universales, en particular demostraremos que los enlaces Borromeos y Withehead son universales (ver [2]).

Paso I. La demostración empieza idéntica a la del Teorema de Existencia, la primera variación sucede en el paso IV, el cambio que realizaremos es el siguiente.

Paso II. En cada uno de estos aros hacemos nuevamente algunos cambios, sólo que ahora un poco más complicados. Primero que nada hacemos una isotopía hasta sacar las dos puntas del aro fuera de todas las cuerdas (figura 22).

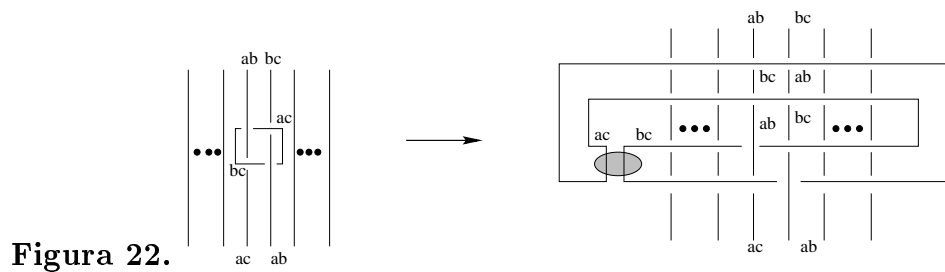


Figura 22.

En la bola marcada de la figura 22 realizamos la siguiente sucesión de movidas. Nuevamente en cada bola punteada aplicamos la tercera movida.

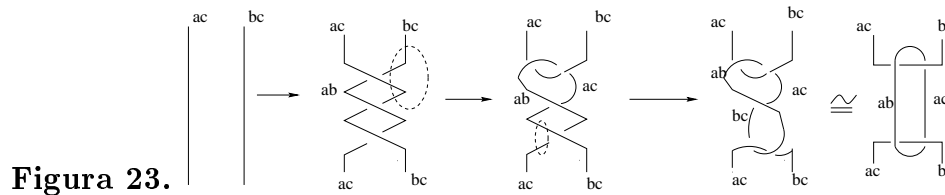
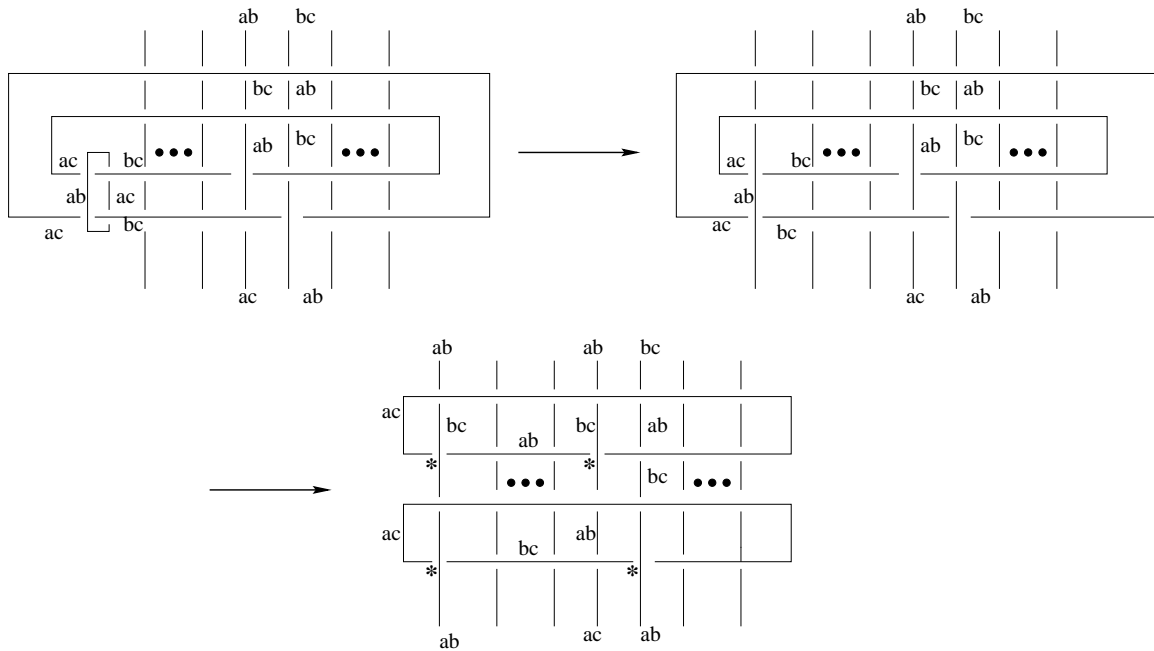


Figura 23.

Ahora aplicamos las isotopías que se ilustran en la siguiente figura. Cabe mencionar que la primera isotopía que se realiza es enviar el último aro que se construyó a una curva paralela a las cuerdas que conformaban la trenza.

Figura 24.



Paso III. En los cruces marcados con (*), realizamos los siguientes cambios: en la bola rellena, la movida a realizar es idéntica a la de la Figura 23.

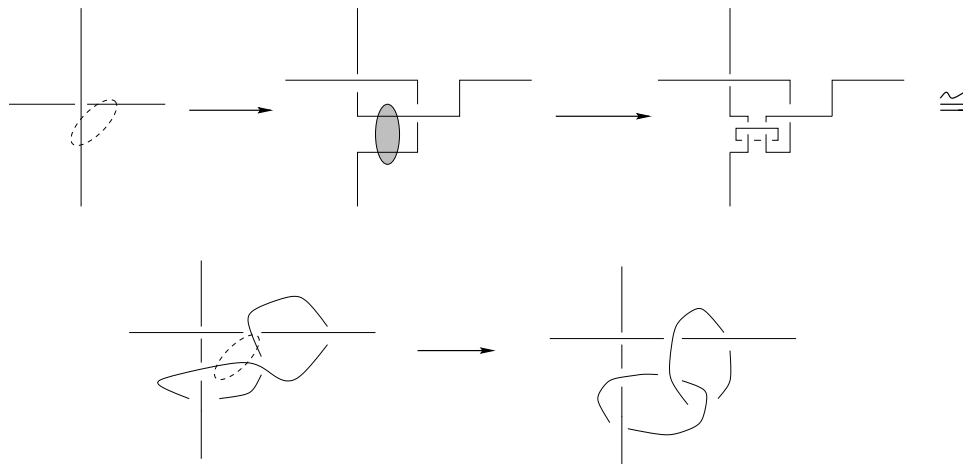


Figura 25.

A los enlaces que hacen esto los llamaremos patrones y en las figuras aparecerán con una P . Ahora anexemos componentes al enlace para que en todos los cruces se vea idéntico; hecho esto nuestro enlace se ve como en la figura 26 (a).

Paso IV. Ahora bien, después de todos los pasos realizados, dibujamos el enlace en forma simétrica como en la figura. Ahora tomamos la función que gira π/n y con eje en la línea perpendicular al punto marcado con X . Ésta es una cubierta ramificada de la esfera en la esfera con ramificación en el eje; si nos fijamos en la imagen de todo el enlace, obtenemos el enlace que se muestra en 26 (b).

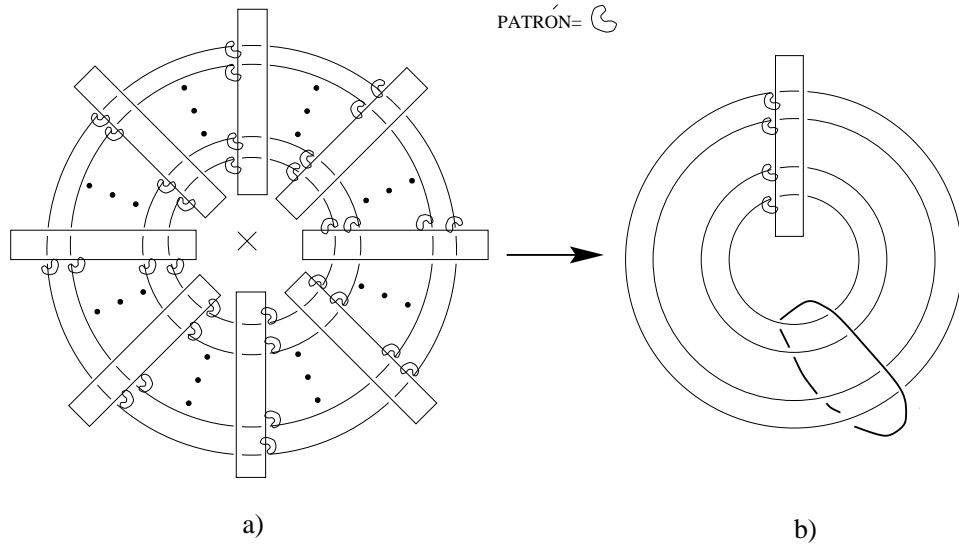


Figura 26.

Ahora bien, cualquier tres variedad se puede escribir como cubierta ramificada de S^3 , con ramificación en un enlace del tipo 26 b).

Paso V. De manera análoga al paso IV, podemos probar que la preimagen del siguiente enlace bajo la cubierta cíclica con ramificación en la curva negra, es el enlace de la figura 26 (b).

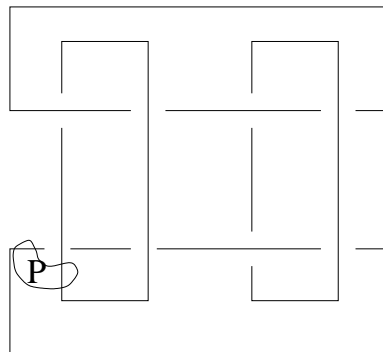


Figura 27.

Podemos cambiar el patrón P por varias posibilidades. Cambiémoslo por los dos siguientes que ya hemos probado que son realizables. Entonces obtenemos los siguientes dos enlaces universales.

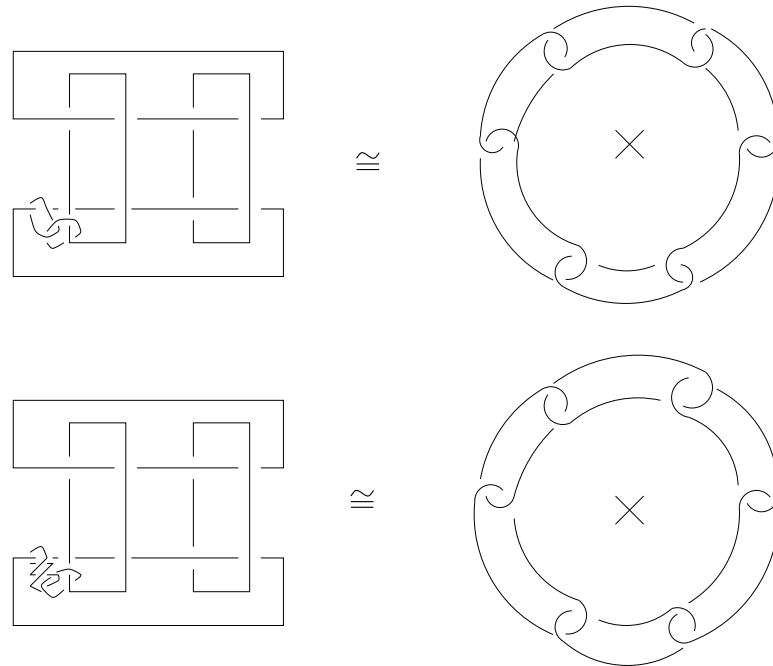


Figura 28.

Paso FINAL. Ahora en cada uno de estos casos tomamos la cubierta cíclica con conjunto singular la recta perpendicular en el punto marcado con una "X", y lo que obtenemos son los Anillos Borromeos y el enlace Withehead respectivamente (ver Figura 29).

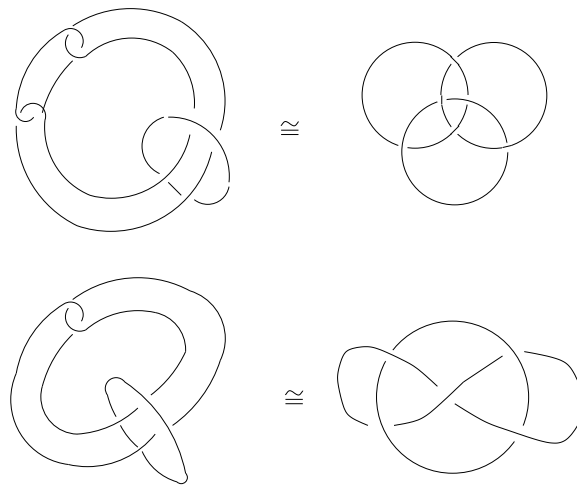


Figura 29.

Con esto hemos logrado probar que estos dos enlaces son universales. Con diferentes patrones, obtenemos una gran variedad de enlaces universales como por ejemplo, tenemos que todos los enlaces del siguiente tipo son universales.

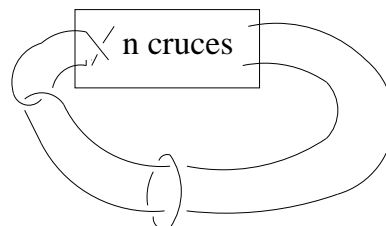


Figura 30.

Esta es una lista de enlaces universales distintos. De hecho con esto probamos que hay una cantidad infinita de enlaces universales.

Capítulo 3

Enlaces de dos puentes

Cuando Thurston introdujo el concepto de enlace universal en [3] hizo la pregunta: ¿Es el nudo ocho universal? La respuesta a esta pregunta la dieron M.T. Lozano, H.M. Hilden y J.M. Montesinos en [1]. Pero llegaron más lejos, demostraron que todos los enlaces de dos puentes no toroidales son universales.

El porqué los toroidales no son universales se debe a que su complemento se puede extender a una fibración de Seifert de S^3 y cualquier cubierta ramificada sobre una de estas fibras sólo nos dan variedades de Seifert, por tanto los toroidales no pueden ser universales (para más detalles ver [4]).

En este capítulo probaremos que todos los enlaces de dos puentes no toroidales son universales. Para un mejor entendimiento de este capítulo es preferible leer el apéndice A, ya que la notación empleada aquí es idéntica a la de dicho apéndice.

Como inicio veamos primero qué entenderemos por cubierta diédrica de un enlace de dos puentes. Para ello el siguiente lema.

Lema 3.1. *Existe $f : \pi_1(L(a/b)) \rightarrow D_{2a}$, donde D_{2a} el grupo diédrico de $2a$ elementos.*

Como sabemos $D_{2a} = \langle x, y : x^2 = y^2 = (xy)^a = 1 \rangle$, entonces podemos construir el homomorfismo $\alpha : D_{2a} \rightarrow S_a$ tal que $\alpha(x) = (12)(34)(56) \cdots$ y $\alpha(y) = (23)(45)(67) \cdots$ ya que:

$$\alpha(x^2) = 1, \alpha(y^2) = 1, \alpha((xy)^a) = 1$$

El morfismo $\alpha f : \pi_1(S^3 \setminus L(a/b)) \rightarrow S_a$ nos determina una cubierta "Diédrica" $\varphi : M^3 \rightarrow S^3$ ramificada sobre $L(a/b)$. En la siguiente sección describiremos esta cubierta en el caso especial de los ovillos de dos hilos.

3.1 Cubiertas diédricas del 2-ovillo trivial.

Sea B^3 un ovillo trivial de dos hilos, pensemos en la cubierta $\varphi : M^3 \rightarrow B^3$ tal que $\rho_\varphi(x) = (12)$ y $\rho_\varphi(y) = (23)$ donde x y y son los meridianos de los hilos en B^3 . Esta es la cubierta diédrica más simple sobre el ovillo, así que empecemos tratando de describir esta cubierta y luego generalizaremos.

Pensemos en una función $g_1 : B_1^3 \rightarrow B^3$ que se muestra en la Figura 31; la cual es la función proyección que resulta de identificar los discos A y B en un disco (el disco X) y los discos C y D en otro (el disco Y). Entendido esto tomamos tres copias de esta función a las cuales llamaremos g_1, g_2 y g_3 .

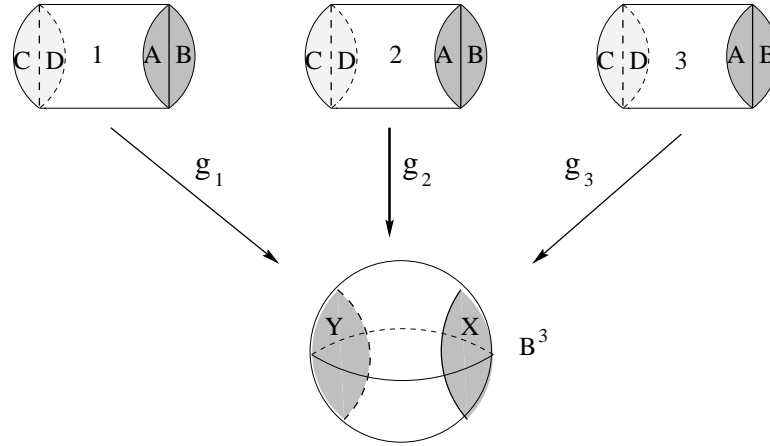


Figura 31.

Ahora pegamos las bolas B_1^3, B_2^3 y B_3^3 de tal manera que la función resultante sea la cubierta deseada. Como deseamos obtener una cubierta ramificada el pegado debe hacerse con las siguientes reglas:

- 1) Un disco de tipo A sólo se puede pegar con un disco de tipo B y viceversa;
- 2) Un disco de tipo C sólo se puede pegar con un disco de tipo D y viceversa;
- 3) Todos los discos deben ser pegados.

Estas reglas nos garantizan que la función resultante es una cubierta ramificada (es una función abierta). Para obtener la cubierta deseada (con el morfismo ρ_ϕ descrito) pegamos de la siguiente manera : B_1^3 con B_2^3 a lo largo de los discos C y D, pegamos B_2^3 con B_3^3 a lo largo de los discos A y B, y por último pegamos los discos de las orillas (Figura 32).

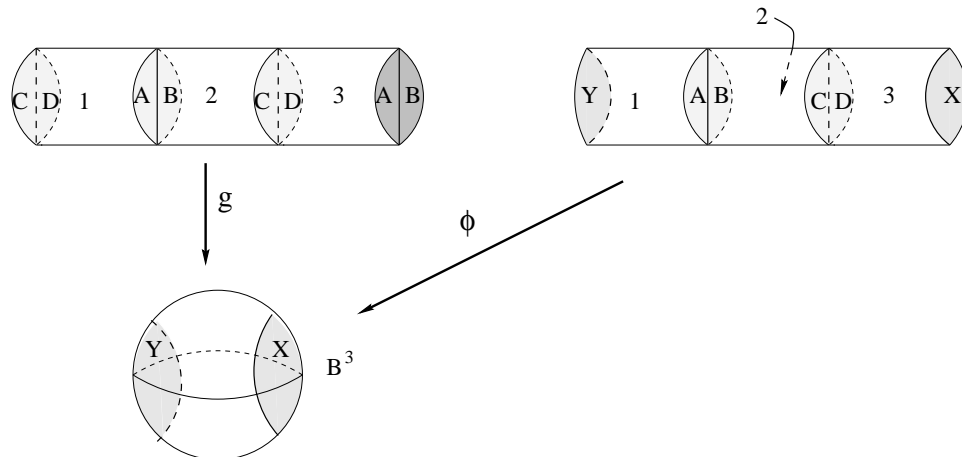


Figura 32.

La función así obtenida es continua, propia y abierta; por tanto es cubierta ramificada y ramifica precisamente en los hilos del ovillo. Denotemos a esta cubierta por ϕ .

Si calculamos ρ_ϕ en algún punto base (y asociando adecuadamente $\phi^{-1}(*)$ con $\{1, 2, 3\}$) tendremos que $\rho_\phi = \rho_\varphi$, esto prueba que este modelo es el correcto para φ .

Podemos generalizar esta idea a todas las cubiertas diédricas sobre ovillos de dos hilos, por ejemplo; tomemos el ovillo de la Figura 33 (a) con las respectivas permutaciones asociadas, entonces el espacio que lo va cubrir es el de la Figura 33 (b). Lo único que tenemos que hacer para ver esto es tomar 5 funciones como las de la Figura 31 y pegarlas siguiendo las instrucciones, en este caso hay que pegar así:

- 1) La permutación $(12)(34)$ nos dice que hay que pegar 1 con 2 y 3 con 4 a lo largo de los discos de tipo C y D.
- 2) La permutación $(23)(45)$ nos dice que hay que pegar 2 con 3 y 4 con 5 a lo largo de los discos de tipo A y B.

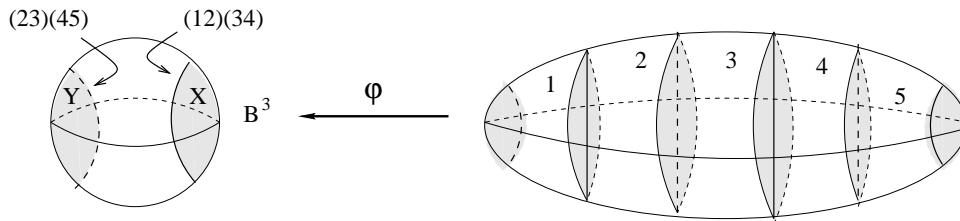


Figura 33. a) b)

Para finalizar la sección enunciemos el resultado de lo que hemos discutido.

Teorema 3.2. Sea $\varphi : M^3 \rightarrow B^3$ tal que B^3 es un ovillo de dos hilos y el homomorfismo $\rho_\varphi : \pi_1(B^3 \setminus \text{hilos}) \rightarrow S_a$ satisface que $\rho_\varphi(x) = (12)(34)(56) \cdots$ y $\rho_\varphi(y) = (23)(45)(67) \cdots$ donde x e y son los meridianos del ovillo, entonces M^3 es una bola; más aún, M^3 y el conjunto singular forman un ovillo de $a + 1$ hilos.

3.2 Cubiertas diédricas sobre enlaces de dos puentes.

Como sabemos los enlaces de dos puentes se pueden dibujar en una almohada como la de la Figura 4.4. Tomemos una esfera paralela a esta almohada solo que un poco más pequeña. Con esta esfera hemos dividido a la 3-esfera en dos ovillos triviales de dos hilos, donde la cubierta asociada $\varphi|_{\varphi^{-1}(B^3)} : \varphi^{-1}(B^3) \rightarrow B^3$ es una cubierta diédrica del ovillo trivial, por lo cual $\varphi^{-1}(B^3) \cong B^3$. Entonces la cubierta diédrica de S^3 sobre un enlace de dos puentes es S^3 . Ya que sabemos que $M^3 \cong S^3$ podemos dibujar la preimagen de la ramificación en S^3 .

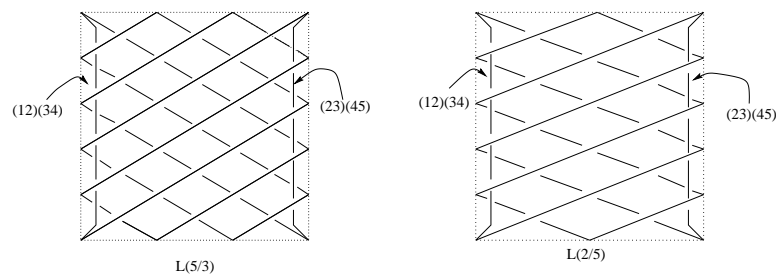


Figura 34.

Llamemos B_1^3 y B_2^3 a cada una de las bolas en que la almohada chica divide al enlace, B_1^3 es la bola que no contiene al punto al infinito según la Figura 34.

Ejemplo 3.3. Tomemos en el enlace $L(2/5)$ (también conocido como *nudo ocho*) la separación en dos bolas que describimos. En la Figura 35 (a) están dibujadas las dos bolas con sus respectivas cubiertas; las funciones f y \bar{f} son los homeomorfismos de pegado entre las fronteras de las bolas ($B_1^3 \sqcup^f B_2^3 \cong S^3$). Los arcos α y β de la bola B_2^3 se pegan en la bola B_1^3 como en la Figura 34 (b), o sea nos dan el mismo enlace; esto gracias a que estos arcos son isotópicos a las cuerdas de ramificación.

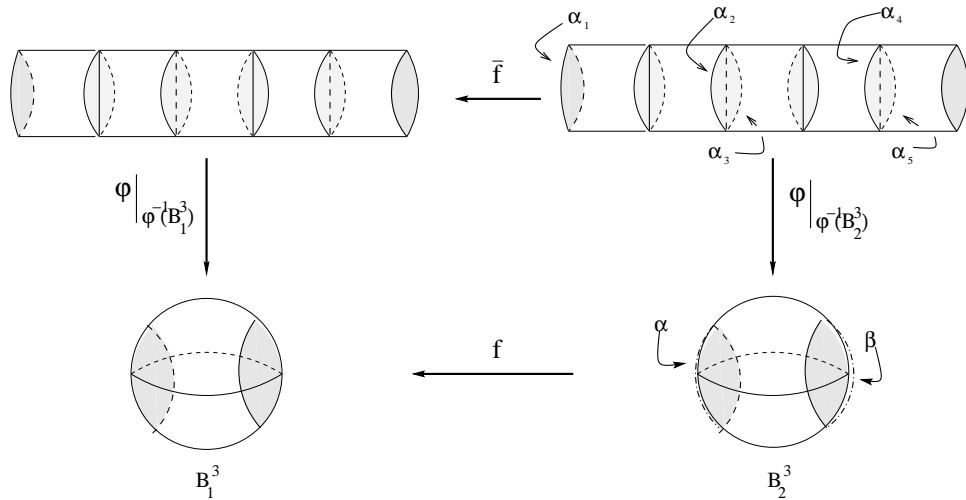


Figura 35.

En la Figura 36 hemos dibujado el arco α sobre la frontera de la bola B_1^3 con una línea más oscura. En esta Figura 36 también tenemos dibujada la preimagen del arco α bajo la cubierta original; como sabemos este arco tiene cinco preimágenes $\alpha_1, \dots, \alpha_5$, como se ve en la Figura 35, si borramos cualquiera de los arcos α_2 o α_3 y α_4 o α_5 tendremos que los tres arcos restantes serán isotópicos a la preimagen de la ramificación (ver Figura 35). En la Figura 37 (a) aparece el enlace después de borrar α_3 , α_5 y dos cuerdas de la preimagen de β .

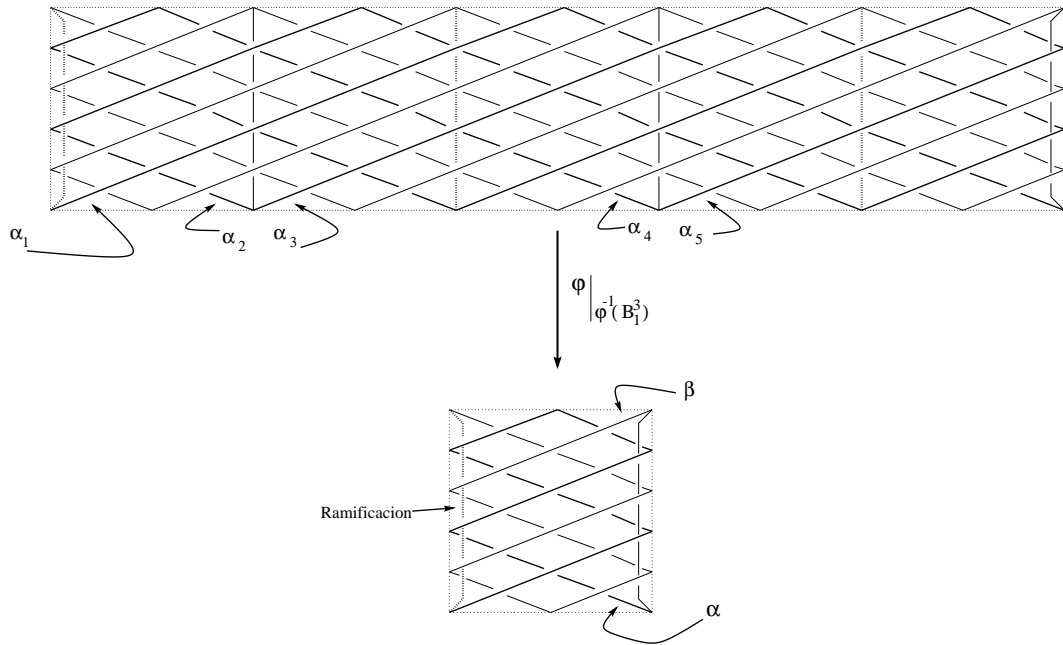
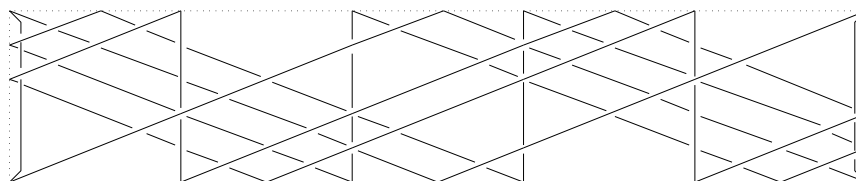
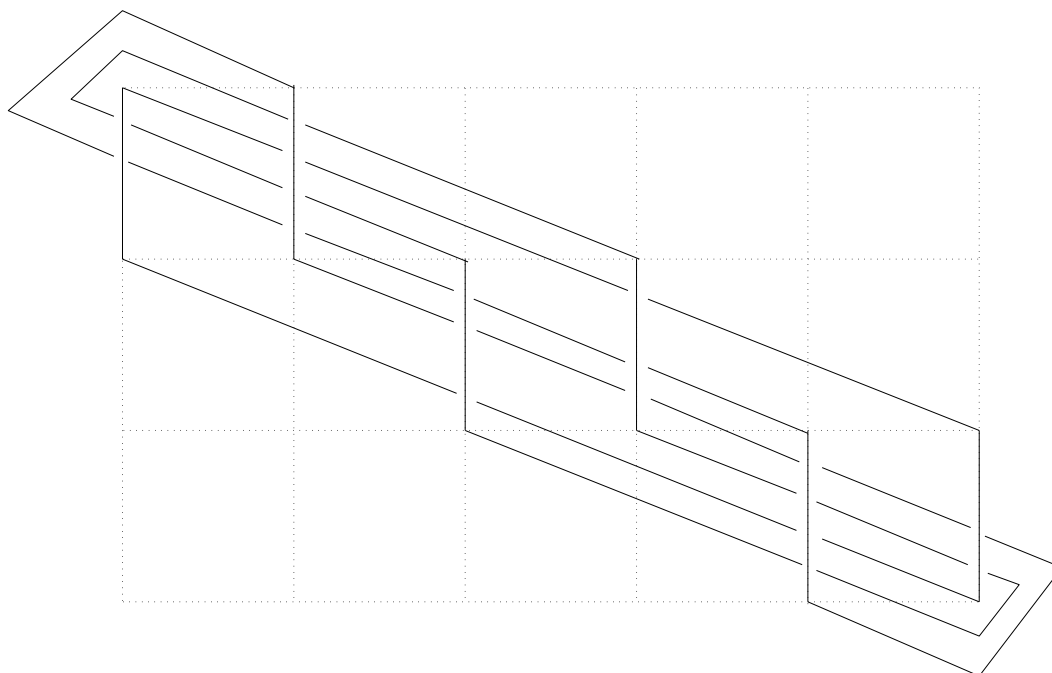


Figura 36.

El enlace de la Figura 37 (a), es la preimagen de B_φ . La Figura 37 (b) se obtiene al desdoblar la ramificación. El enlace anfiqueiral de tres componentes de la Figura 37 fue bautizado en [1] como el “Enlace Romano”.



a)



b)

Figura 37.

La construcción que acabamos de ver es generalizable a todos los enlaces de dos puentes. A esta cubierta la llamaremos la *cubierta diédrica* de un enlace de dos puentes.

Una cubierta que se necesitará mas adelante es la cubierta diédrica de 6-hojas del $L(12/5)$. Hemos probado que a este enlace le cabe una cubierta de 12-hojas pero tambien se le puede construir una de 6-hojas del tipo diédrico y la preimagen de la ramificación está dibujada en la siguiente Figura 38.

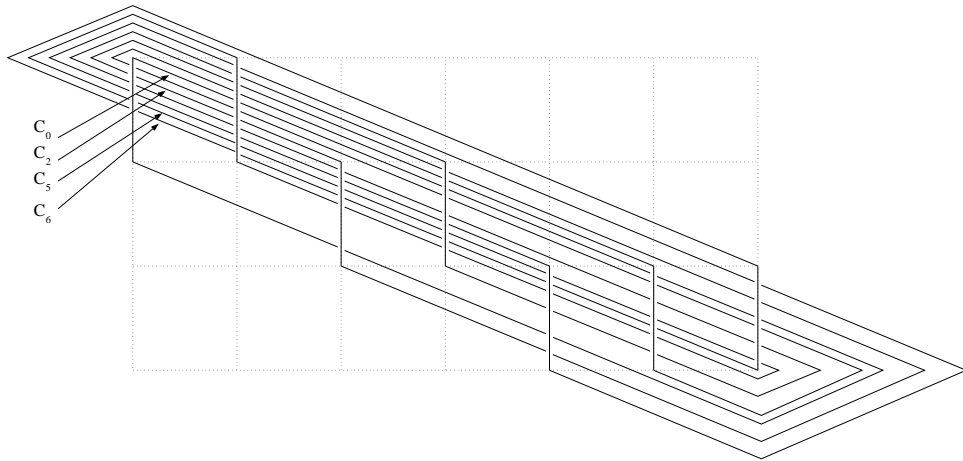


Figura 38.

3.3 El Enlace Romano.

Teorema 3.4. *Existe una cubierta ramificada $p : S^3 \rightarrow S^3$ con ramificación sobre el enlace Romano tal que el conjunto singular contiene los anillos Borromeos. Esto es, el enlace Romano es universal.*

Demostración. Paso 1: Dibujemos el enlace romano (Figura 36) como en la Figura 39. Sea $p_1 : S^3 \rightarrow S^3$ la cubierta diédrica de cuatro hojas con ramificación en las componentes A y B del enlace Romano (ver Figura 39). Observemos la esfera punteada; ésta separa a S^3 en dos ovillos triviales de 2-hilos. Aplicando la teoría de la sección 3.1 a estos dos ovillos, podemos dibujar la preimagen de la componente C como en la Figura 40 (a), esta preimagen es precisamente el enlace de dos puentes $L(12/5)$ (Figura 40 (b)).

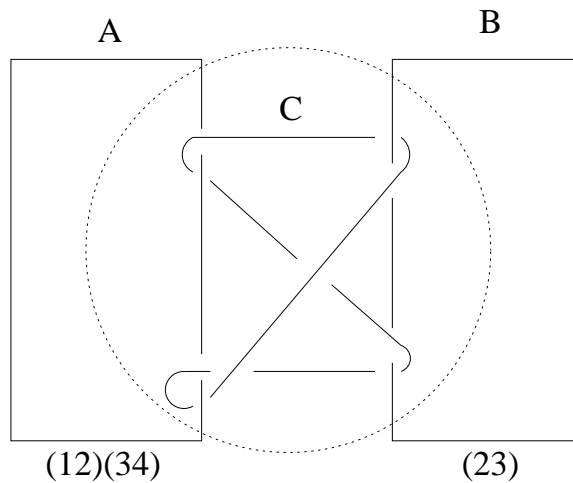


Figura 39.

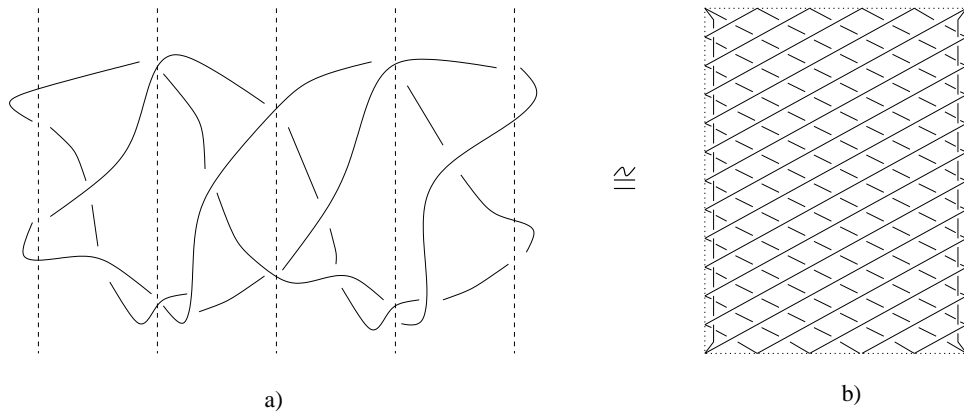


Figura 40.

Paso 2: Tomemos la cubierta diédrica de $p_2 : S^3 \rightarrow S^3$ de seis hojas (ver Figura 38) sobre $L(12/5)$ y de la preimagen de este enlace escogemos las componentes C_0, C_2, C_5 y C_6 marcadas en la Figura 38. Estas componentes están dibujadas en la Figura 41 (a).

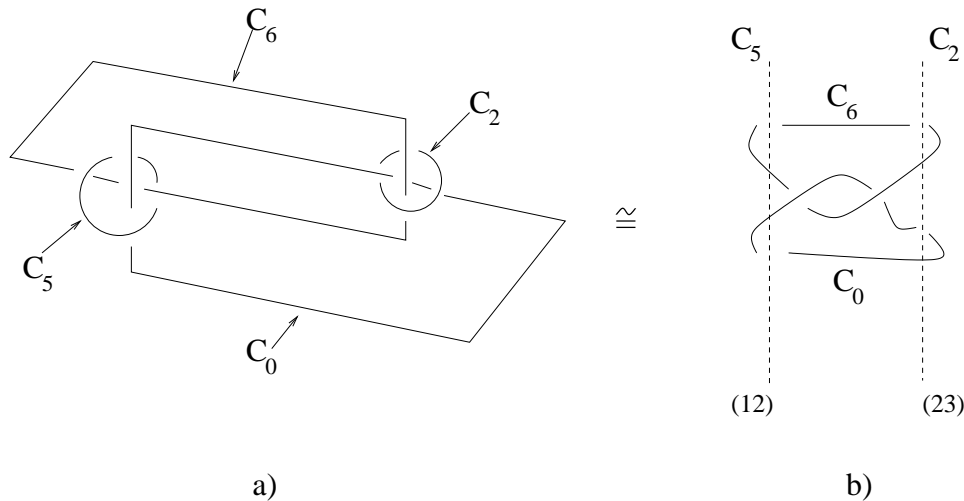


Figura 41.

Paso 3: Sobre el enlace anterior tomamos la cubierta diédrica $p_3 : S^3 \rightarrow S^3$ de tres hojas con ramificación sobre las componentes C_5 y C_2 (Figura 41 (b)). La preimagen bajo p_3 de C_0 y C_6 es el enlace de la Figura 42.

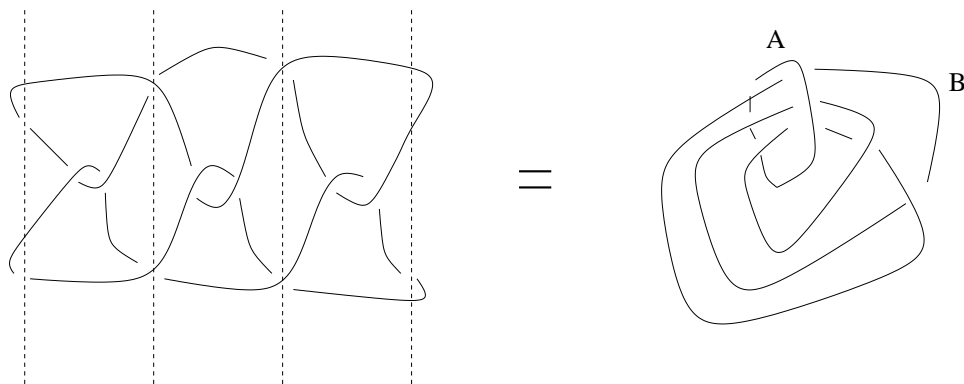


Figura 42.

Paso 4: Por último construimos una cubierta cíclica (como las de la Sección 2.2) $p_4 : S^3 \rightarrow S^3$ de tres hojas con ramificación sobre la curva A de la Figura 42. Y la preimagen de

B bajo esta cubierta son los Borromeanos. Por tanto la cubierta $p = p_4 \circ p_3 \circ p_2 \circ p_1$ es la cubierta que describe el teorema.

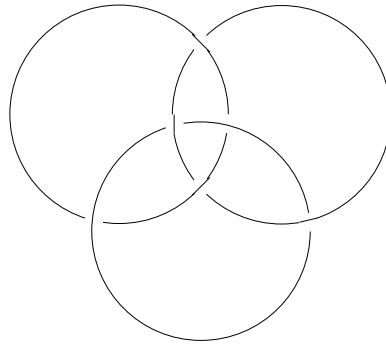


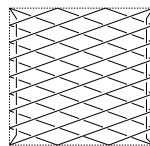
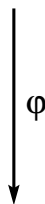
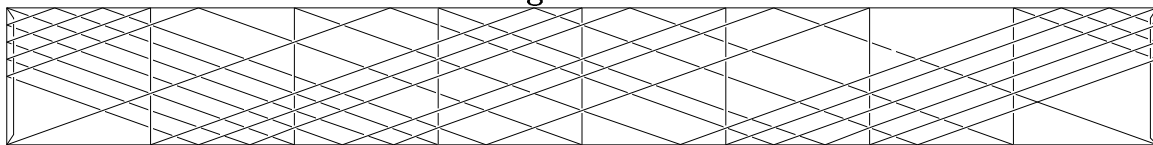
Figura 43.



3.4 Universalidad de los nudos y enlaces racionales.

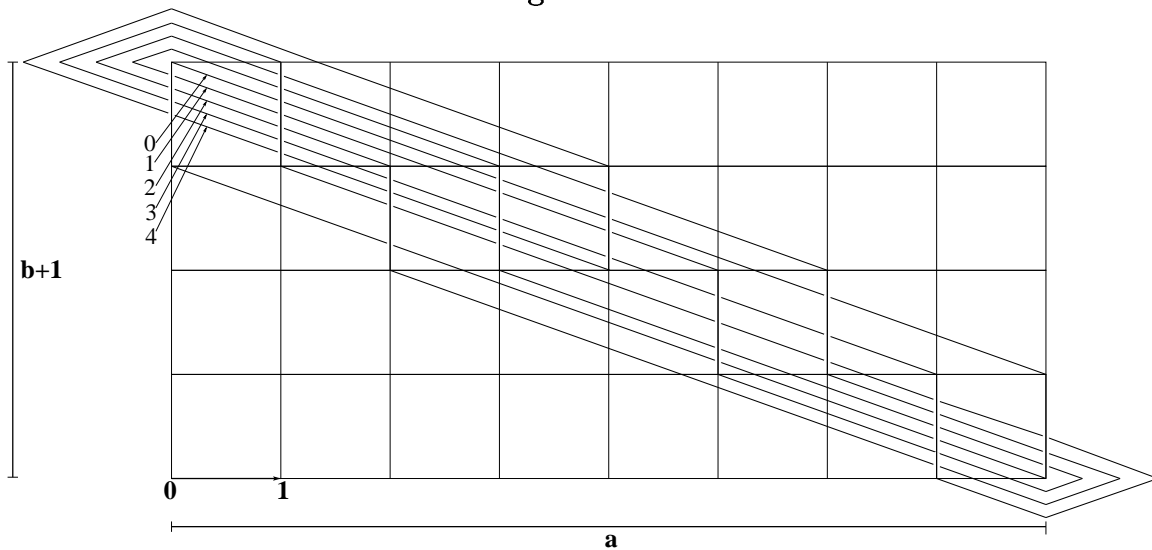
Sea $\varphi : S^3 \rightarrow S^3$ la cubierta diédrica de a -hojas con $B_\varphi = L(a/b)$. Podemos dibujar $\varphi^{-1}(L(a/b))$ en un rectángulo de $a \times (b + 1)$ con tan sólo desdoblar el rectángulo de $a \times 1$ que resulta de la preimagen de $L(a/b)$ (ver Figura 44 y 45).

Figura 44.



Una vez obtenida esta preimagen enumeramos sus componentes como C_0, C_1, \dots, C_k en el orden mostrado en la Figura 45. Si encontramos que tres de estas componentes son el “enlace romano” entonces $L(a/b)$ es universal.

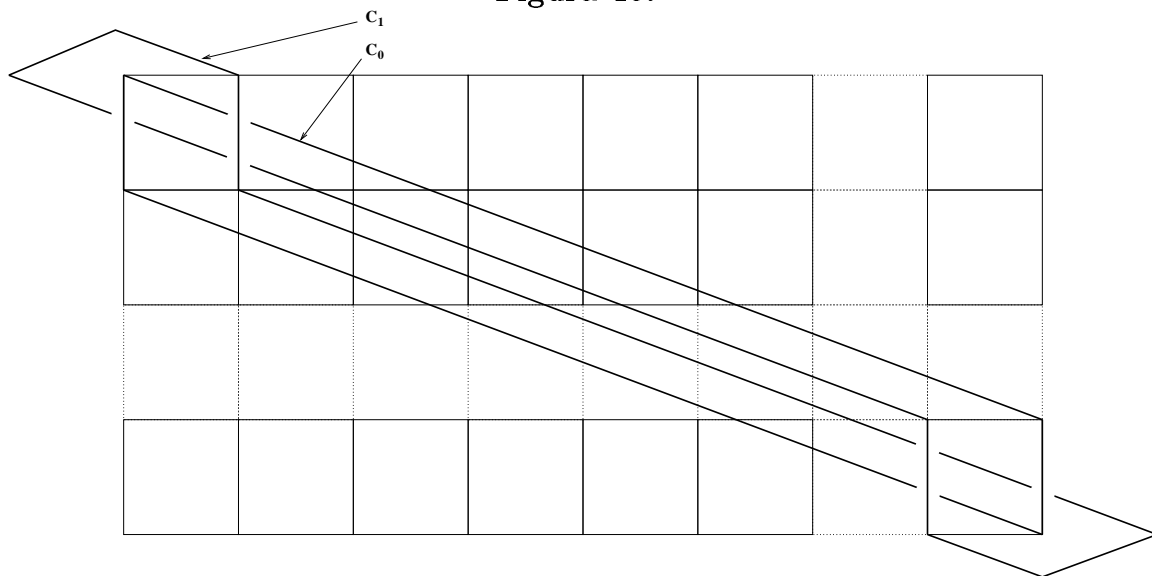
Figura 45.



Teorema 3.5. *La preimagen de $L(a/b)$ bajo la cubierta de a -hojas ramificada sobre $L(a/b)$ y con monodromía diédrica, contiene el “enlace romano” como subenlace si y sólo si $b \not\equiv \pm 1 \pmod{a}$.*

Demostración. Supongamos que $1 < b < a/2$. En la Figura 46 se muestran dibujadas las componentes C_0 y C_b según la enumeración descrita al inicio de esta sección.

Figura 46.

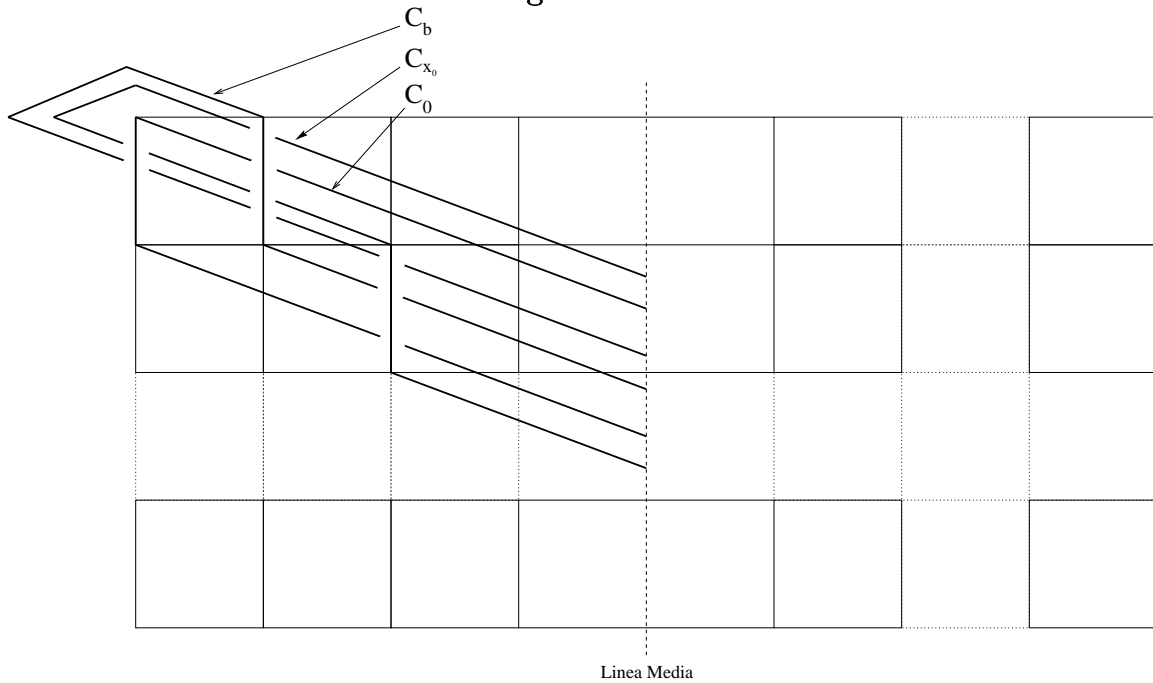


Ahora tenemos que buscar otra componente C_x tal que junto con C_0 y C_b sean el “enlace romano”. Pediremos que $0 < x < b$ para poder dibujar el “enlace romano” como en la Figura 37. Como $b > 1$ la parte racional de a/b satisface que $1 > \frac{a}{b} - [\frac{a}{b}] > 0$ entonces $b > a - [\frac{a}{b}]b > 0$, tomemos como candidato para la tercera componente a $x_0 = a - [\frac{a}{b}]b$.

El primer punto con coordenadas enteras que toca esta componente es $([\frac{a}{b}], b)$ y luego baja por el puente que tiene esas coordenadas y continua sin tocar un solo punto hasta

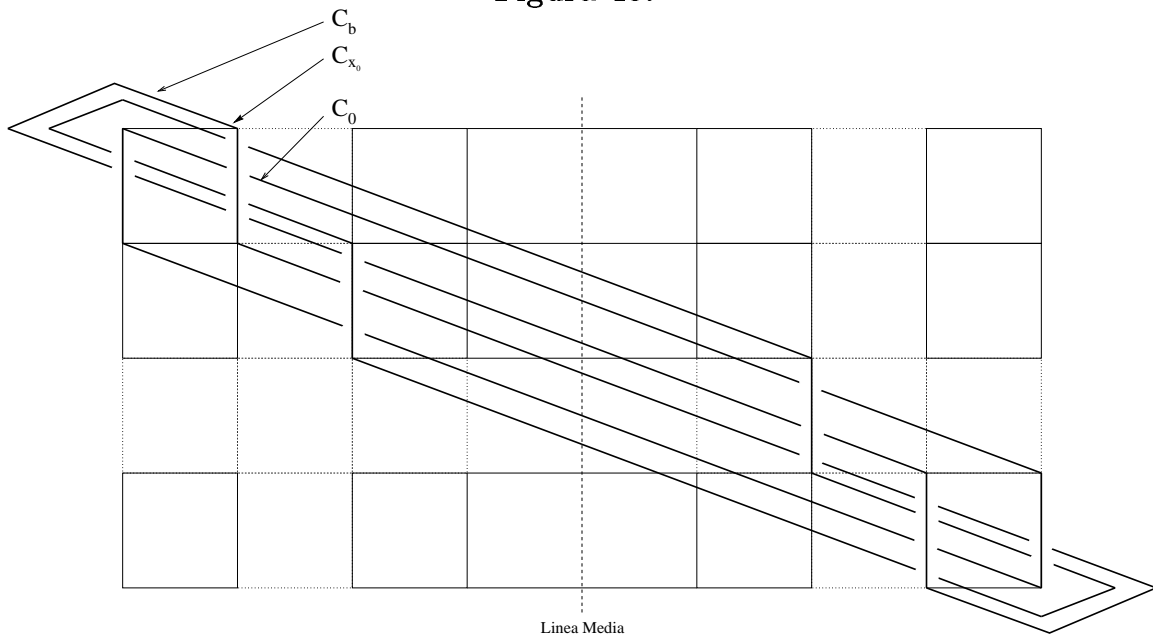
antes de la línea media del rectángulo ($X = \frac{a}{2}$). En la Figura 47 hemos dibujado las tres componentes hasta antes de la línea media.

Figura 47.



¿Qué pasa con las componentes después de la línea media? Pues se ven idénticas a la Figura 47 sólo que giradas 180°, por ello el dibujo completo se ve como el de la Figura 48 y este enlace es precisamente el “enlace romano”.

Figura 48.



El teorema queda probado para el caso $\frac{a}{2} > b > 1$. Como vimos en el apéndice A, siempre

podemos escribir $L(a/b)$ con $b < a$, entonces sólo nos falta ver que pasa cuando $\frac{a}{2} < b < a-1$, en tal caso $L(\frac{a}{a-b})$ es la reflexión de $L(a/b)$, como $L(\frac{a}{a-b})$ tiene en su preimagen al “enlace romano” entonces $L(a/b)$ tiene en su preimagen a la reflexión del “enlace romano” o, lo que es lo mismo, tiene al “enlace romano”. En los casos $L(\frac{a}{1})$ y $L(\frac{a}{a-1})$ no puede existir el “enlace romano” pues son nudos o enlaces toroidales y estos no pueden ser universales. ■

Corolario 3.6. *Todos los nudos y enlaces racionales no toroidales son universales.*

Nudos y Enlaces Racionales

Para una mejor comprensión del capítulo 3 es recomendable entender qué es un nudo de dos puentes.

Definición .7. Un nudo o enlace $k \in S^3$ no trivial es de *dos puentes* si existe una separación en dos bolas de la 3-esfera ($B_1^3 \cup_f B_2^3 = S^3$) tal que $(B_i^3, B_i^3 \cap k)$ es isomorfa al ovillo trivial de dos hilos.

Esta definición nos dice cómo construir un nudo o enlace de dos puentes. Para cualquier automorfismo $f \in \text{End}(S^2, A)$ donde $A \subset S^2$ de 4 puntos, podemos contruir un nudo (o enlace) de dos puentes que se forma de pegar dos ovillos triviales por la frontera con el homeomorfismo f . Esto nos dice que estudiar los nudos (o enlaces) de dos puentes es lo mismo que estudiar el grupo $\text{End}(S^2, A)$.

Ejemplo .8. Sea $t(\delta) : \partial B_1^3 \rightarrow \partial B_2^3$ el giro del arco δ (Figura 49). Este homeomorfismo deja fijos a los puntos a, b, c y d , por lo cual $t(\delta) \in \text{End}(S^2, A)$ donde $A = \{a, b, c, d\}$. El nudo de dos puentes que resulta de la operación $B_1^3 \sqcup_{t(\delta)} B_2^3$ es exactamente el nudo trébol.

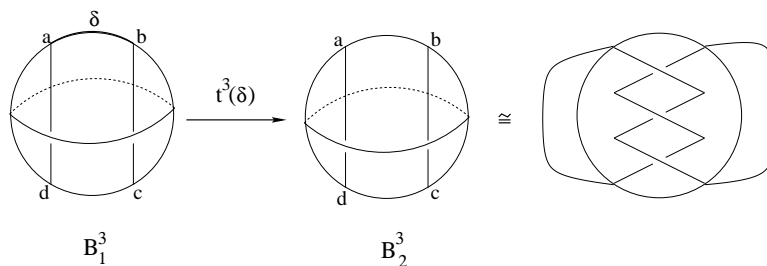


Figura 49.

Los nudos (o enlaces) racionales son una familia de nudos de dos puentes que se construye de la siguiente manera.

Consideremos el cuadrado $I \times I \subset S^3$, tracemos los segmentos con pendiente $\pm b/a$ que pasan a través de los puntos $(0, i/a)$ y $(j/b, 0)$ donde $i = 0, \dots, a$ y $j = 0, \dots, b$. Después levantemos los segmentos con pendiente positiva por arriba de las de pendiente negativa, pero sin despegar los puntos de la frontera de $I \times I$; luego anexamos dos arcos α y β (que no se enlacen) dentro de la “almohada cuadrada” (descrita por los segmentos de pendiente positiva y negativa), de tal manera que α una el vértice $(0, 1)$ con el $(0, 0)$ y el arco β los vértices $(1, 1)$ y $(1, 0)$. En la Figura 50 hemos dibujado el racional $L(4/3)$.

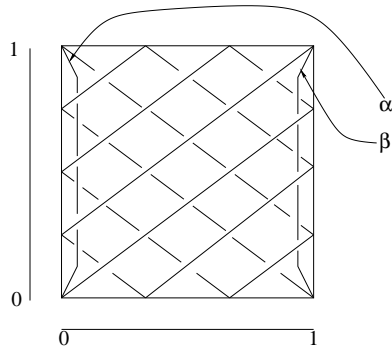


Figura 50.

Lo realmente útil de los nudos (o enlaces) racionales es el siguiente teorema.

Teorema .9. *Todo nudo (enlace) de dos puentes $L \subset S^3$ es isotópico a un nudo (enlace) racional.*

Algunas propiedades fáciles de ver en los enlaces racionales son las siguientes:

1. $L(a/b)$ tiene una componente si y sólo si a es impar.
2. Si $L(a/b), L(a/b')$ son tales que $b \equiv b' \pmod{a}$ entonces son iguales, pero si $b \equiv -b' \pmod{a}$ entonces $L(a/b)$ es la reflexión en un espejo de $L(a/b')$.
3. El enlace $L(a/b)$ es toroidal si y sólo si $b \equiv \pm 1 \pmod{a}$.

Debido a estas propiedades se puede asumir que a y b son primos relativos y que $a > b$.

.1 El grupo fundamental de los enlaces racionales

Como ya vimos un nudo de dos puentes se puede separar en dos ovillos triviales B_1^3 y B_2^3 . El grupo fundamental de cada ovilla es $\pi_1(B_1^3 \setminus \{p_1, q_1\}) = \langle x, y : - \rangle$ y $\pi_1(B_2^3 \setminus \{p_2, q_2\}) = \langle \alpha, \beta : - \rangle$ y el de la intersección es $\pi_1(S^2 \setminus \{a, b, c, d\}) = \langle r, s, t : - \rangle$.

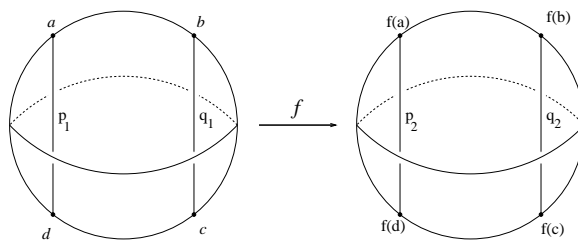


Figura 51.

Usando Van-Kampen tenemos que el grupo fundamental es:

$$\pi_1(S^3 \setminus k) = \langle x, y, \alpha, \beta : x = i_{\#} \circ f_{\#}(r), y = i_{\#} \circ f_{\#}(s), y^{-1} = i_{\#} \circ f_{\#}(t) \rangle$$

donde $i : S^2 \rightarrow B_2^3$ es la inclusión; usando movidas de Tietze, tenemos que:

$$\pi_1(S^3 \setminus k) = \langle \alpha, \beta : i_{\#} \circ f_{\#}(st) = 1 \rangle$$

Esto nos dice que para calcular el grupo fundamental sólo hay que averiguar a dónde va la curva st .

No es muy difícil de averiguar quién es la curva st a partir de un diagrama racional del nudo (o enlace). Ya que es la curva que esta en medio de la imagen de p_1 y q_1 .

Ejemplo .10. En el caso del nudo-ocho tenemos que la curva st es la curva negra de la Figura.

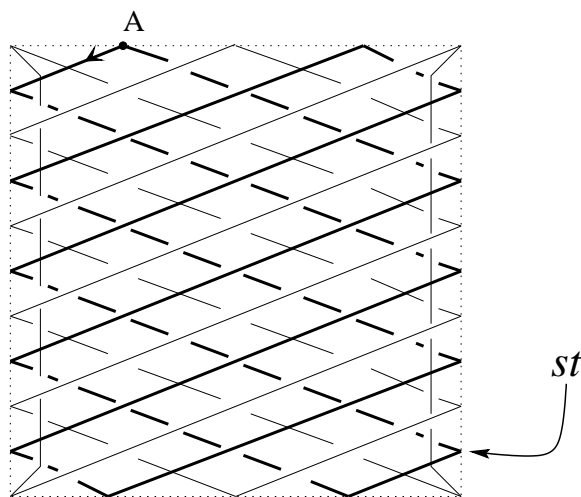


Figura 52. $L(2/5)$

Si recorremos desde la curva empezando en el punto A y avanzamos hacia la izquierda la palabra que leeremos, será: $\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta\alpha$.

En conclusión el grupo fundamental de k =nudo-ocho es:

$$\pi_1(S^3 \setminus k) = \langle \alpha, \beta : \beta^{-1}\alpha^{-1}\beta\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta\alpha = 1 \rangle$$

Este procedimiento lo podemos hacer para todos los nudos racionales y, en conclusion, tenemos el siguiente lema.

Lema .11. Si $k = L(a/b)$ entonces el grupo fundamental es igual a $\langle x, y : \omega = 1 \rangle$ donde $\omega = y^{\epsilon_1}x^{\epsilon_2} \dots y^{\epsilon_{2a-1}}x^{\epsilon_{2a}}$ y $\epsilon_i \in \{1, -1\}$ para todo i .

Usando este lema podemos probar que si $D_{2a} = \langle x', y' : x'^2 = 1, y'^2 = 1, (x'y')^a = 1 \rangle$ es el grupo diédrico de $2a$ elementos, entonces existe un epimorfismo $h : \pi_1(S^3 \setminus L(a/b)) \rightarrow D_{2a}$. Existe un homomorfismo tal que $h(x) = x'$ y $h(y) = y'$ ya que $h(\omega) = \prod_{k=1}^a h(y)^{\epsilon_{2k-1}} h(x)^{\epsilon_{2k}} = \prod_{k=1}^a y'^{\epsilon_{2k-1}} h(x')^{\epsilon_{2k}} = \prod_{k=1}^a y'x' = (y'x')^a = 1$.

Este resultado será útil para el Capítulo 3.

Bibliografía

- [1] Hugh M. Hilden, María Tereza Lozano y José María Montesinos. *On Knots that are Universal*. Topology 24 (1985), 499-504.
- [2] H. M. Hilden, M.T. Lozano y J.M. Montesinos. *The Whitehead link, the Borromean link and the Knot 9_{46} are universal*. Collectanea Mathematica XXXIV (1983), 19-28.
- [3] W. Thurston. *Universal links*. preprint, 1982.
- [4] C. McA. Gordon y W. Heil. *Simply connected branched coverings of S^3* . Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972), 287-288.
- [5] Massey. *Introduction to algebraic topology*. Springer-Verlag.
- [6] Yoshiaki Uchida. *Universal Pretzel Links*. Knots 90. Walter de Gruyter & Co., Berlin-New York (1992), 241-270.
- [7] Yoshiaki Uchida. *Universal Chains*. Kobe J. Math. 8 (1991) 55-65.
- [8] Fabiola Manjarrez. *Enlaces Tricoloreados*. Tesis de Licenciatura UJAT, CIMAT (2000).
- [9] H. M. Hilden, M.T. Lozano y J.M. Montesinos. *Non-simple universal knots*. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 187 (1987) 102.
- [10] Víctor Núñez. *Universal Links For $S^2 \tilde{\times} S^1$* . Pacific J. Math. 182 (1998) 55-68