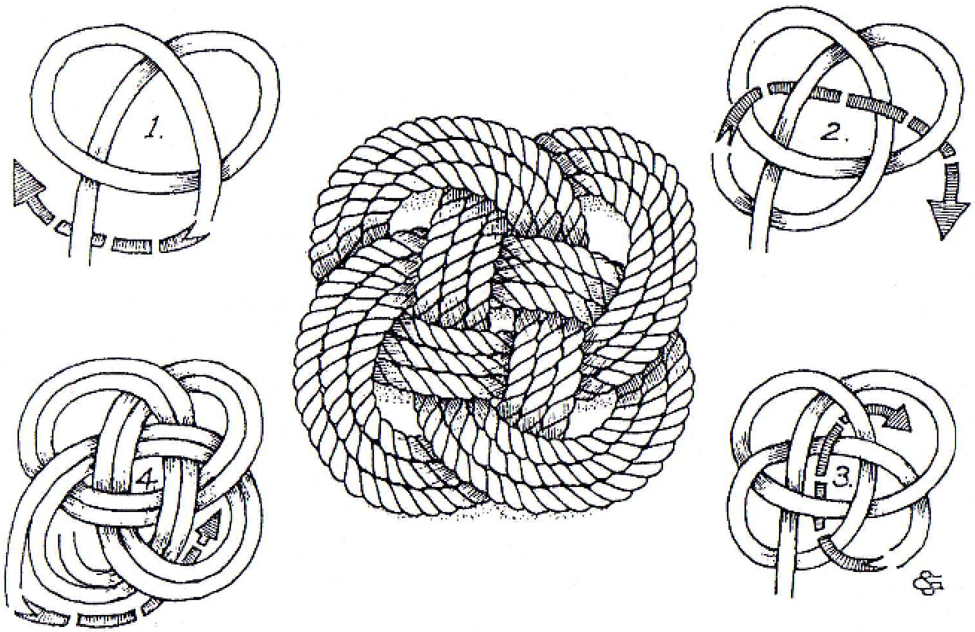
Nudos De Cuerda

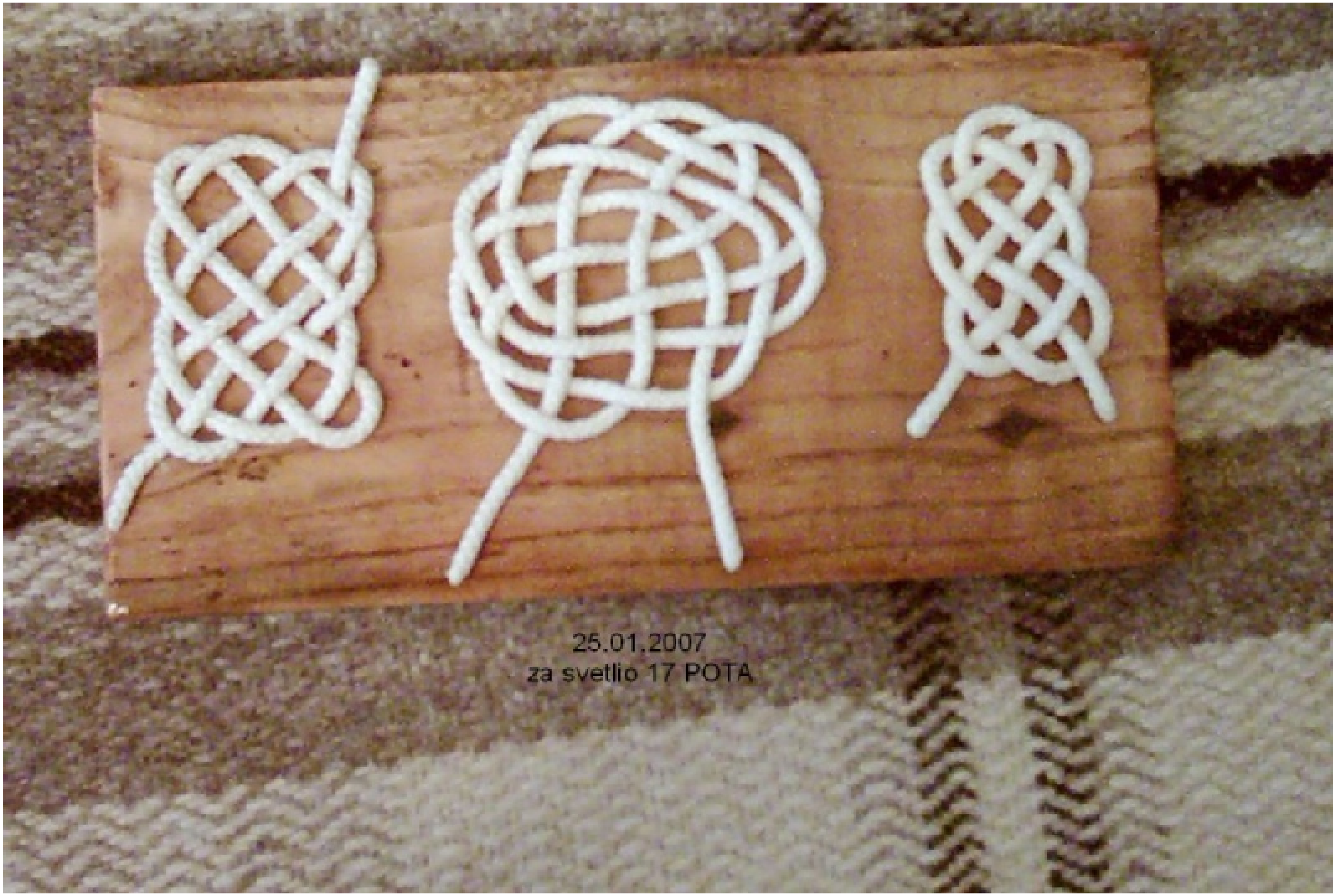
International Guild of Knot Tyers

The International Guild of Knot Tyers (IGKT) is an association of people interested in knots and knotting techniques of all kinds. We have over a thousand members world-wide, from all walks of life, including academics, surgeons, sailors, sportsmen and women, scouts, magicians, farmers, miners and accountants. Membership is open to anyone interested in knotting, whether expert or simply hoping to learn from others.

IGKT is an educational, non-profit making organization and our mission is to promote the art, craft and science of knotting, its study and practice, to undertake research into all aspects of knotting and to establish an authoritative body for consulting purposes. We attend public events to advertise the Guild and its work, and conduct talks and demonstrations by arrangement with interested groups. We keep in touch with each other by correspondence, by holding regular meetings and exhibitions at both international and regional levels. The Guild publishes a quarterly newsletter in English, Knotting Matters.

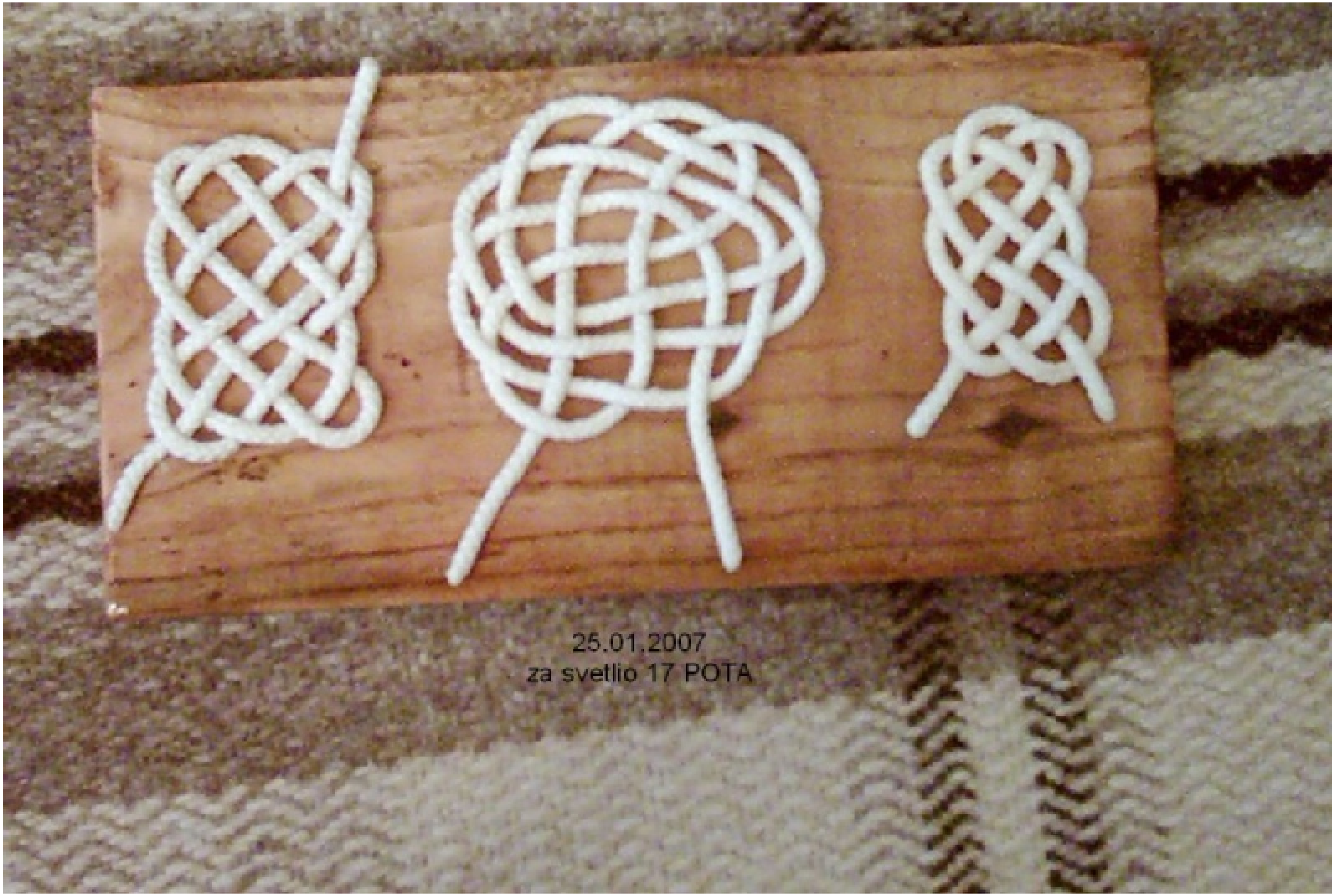
For more information about the IGKT, please contact: secretary@igkt.net

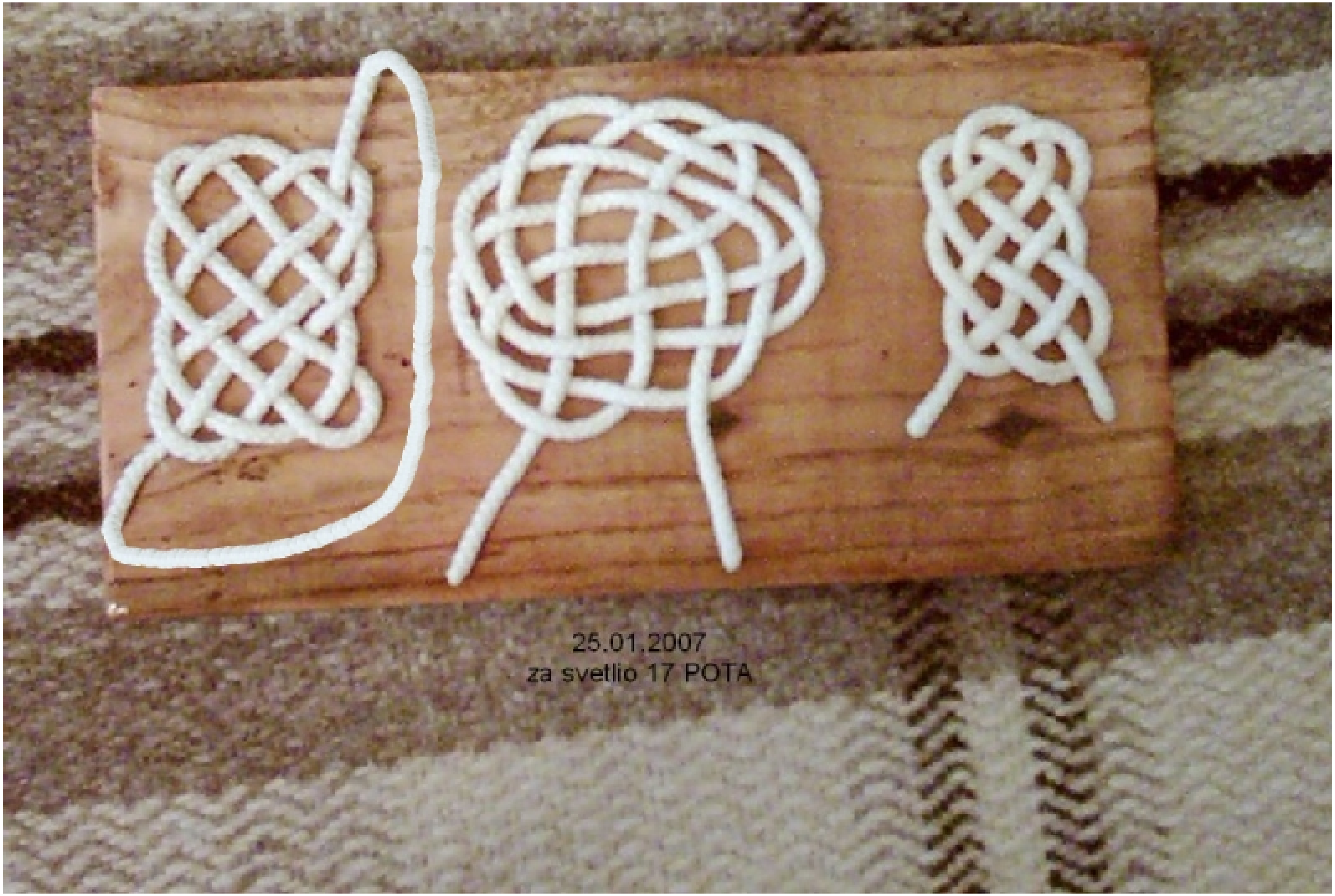


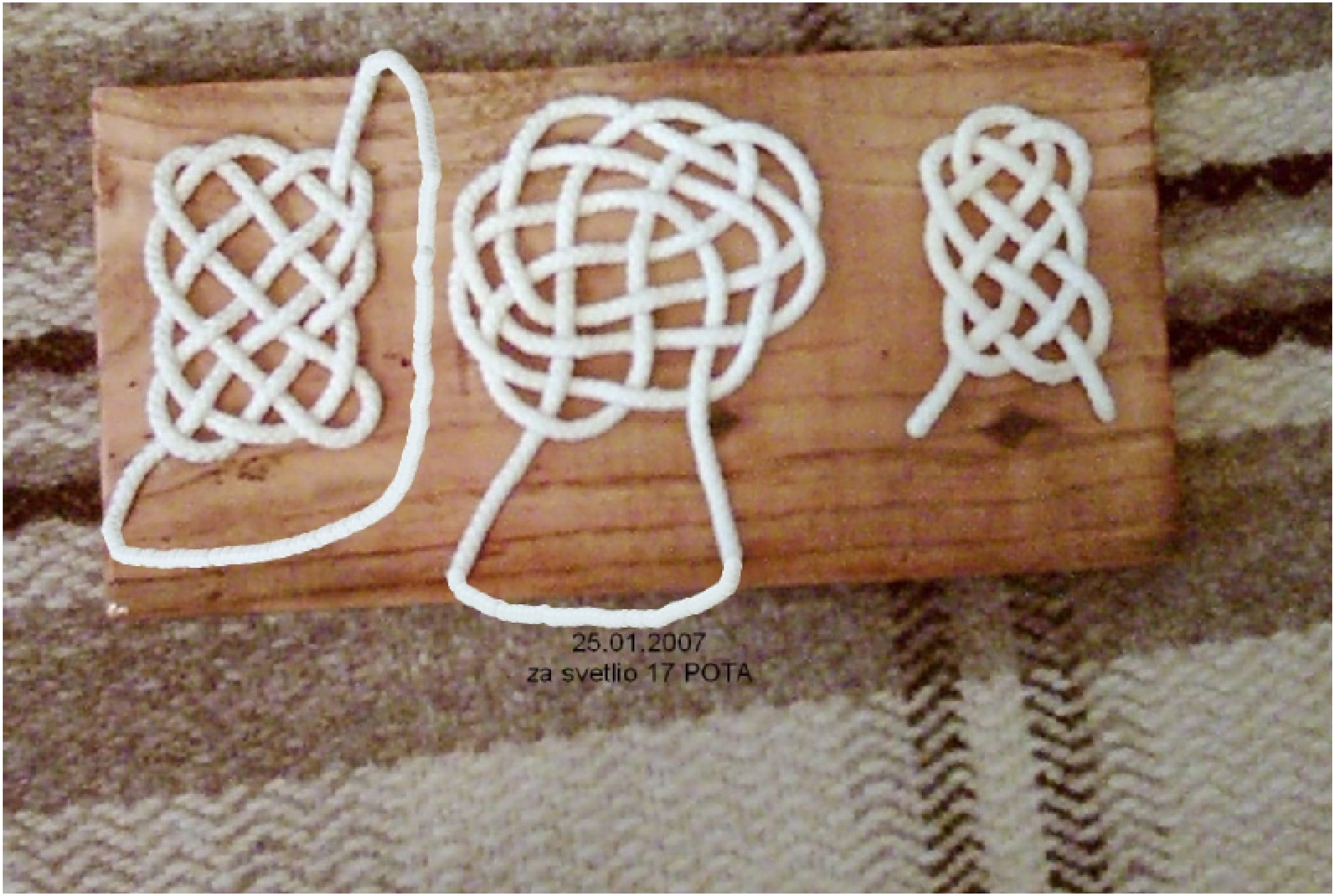


¡Estos nudos se pueden desanudar!

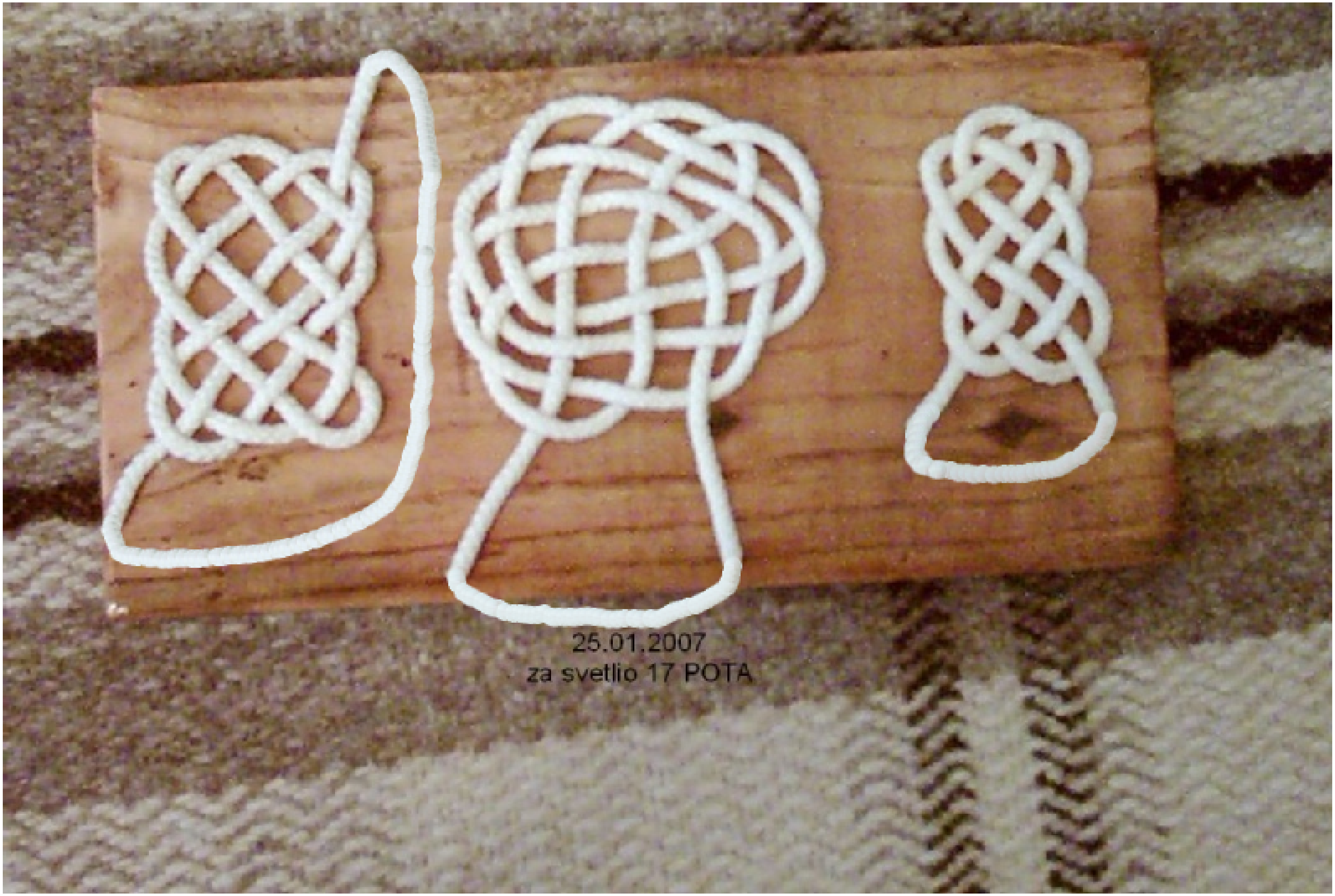
Cerramos:

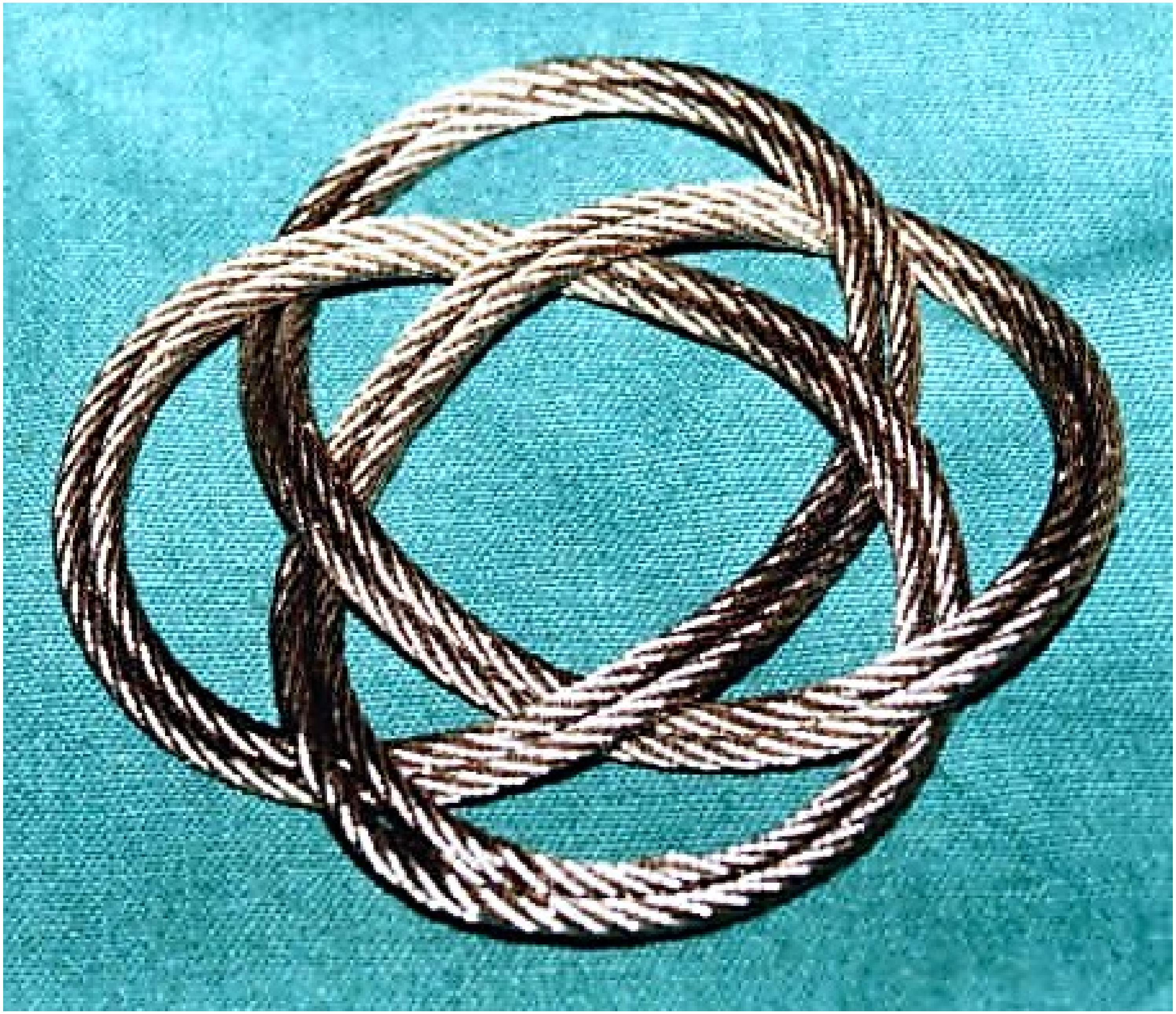

25.01.2007
za svetlio 17 POTA


25.01.2007
za svetlio 17 POTA



25.01.2007
za svetlio 17 POTA


25.01.2007
za svetlio 17 POTA



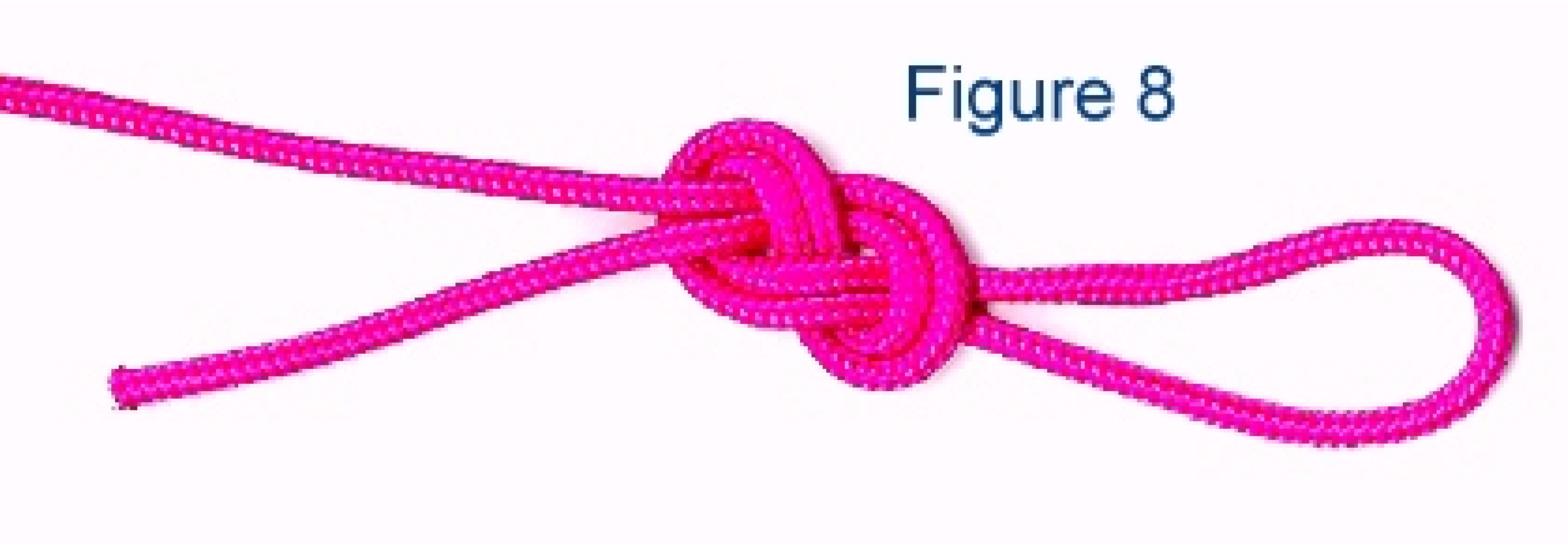
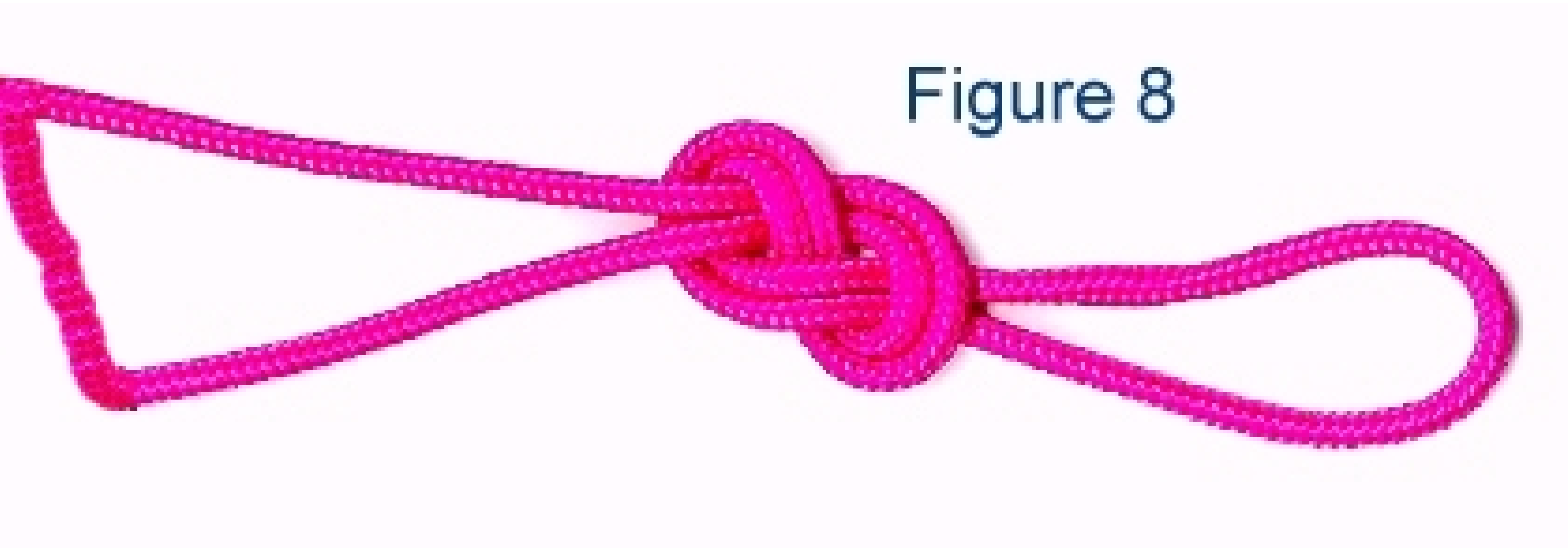
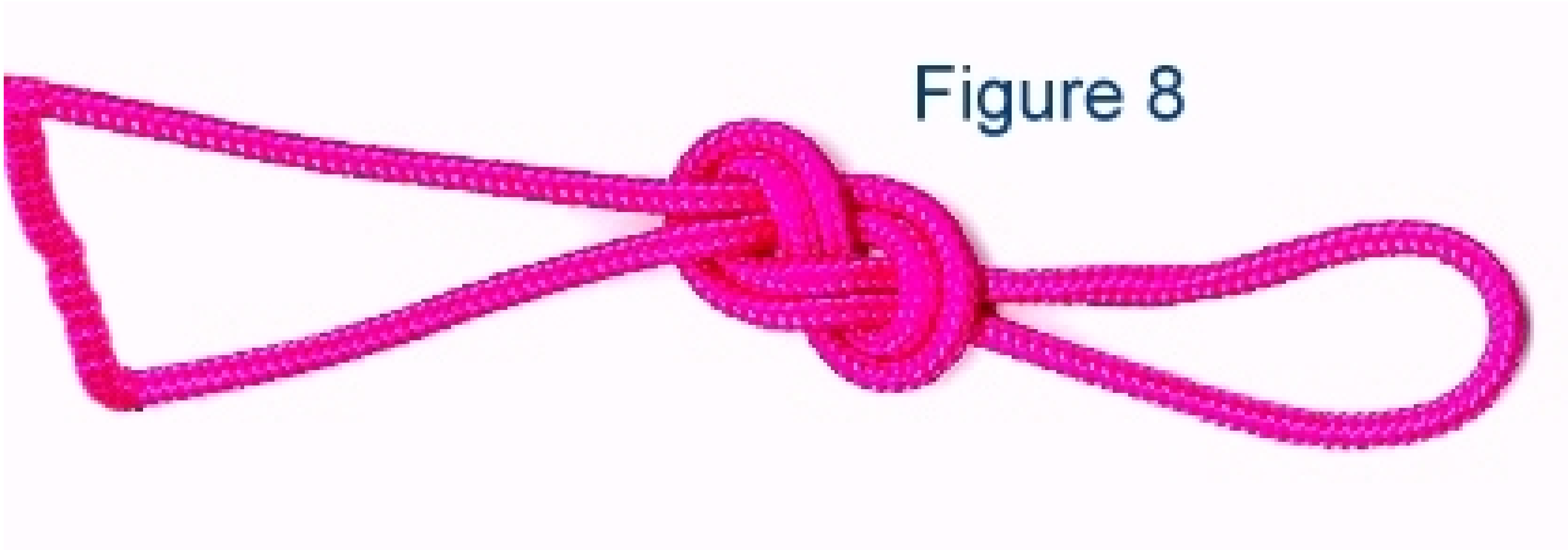


Figure 8

...

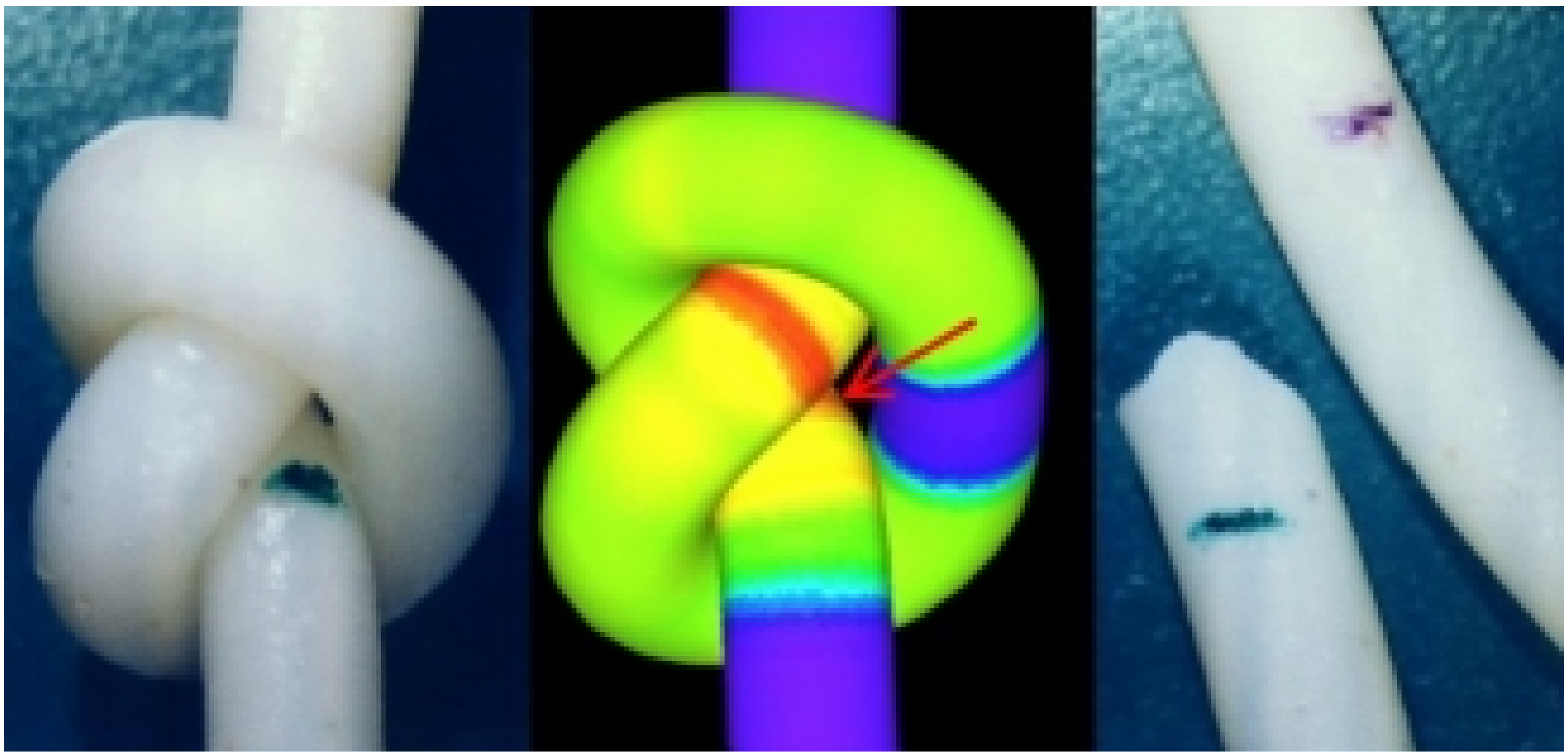


¿qué nudo es éste?

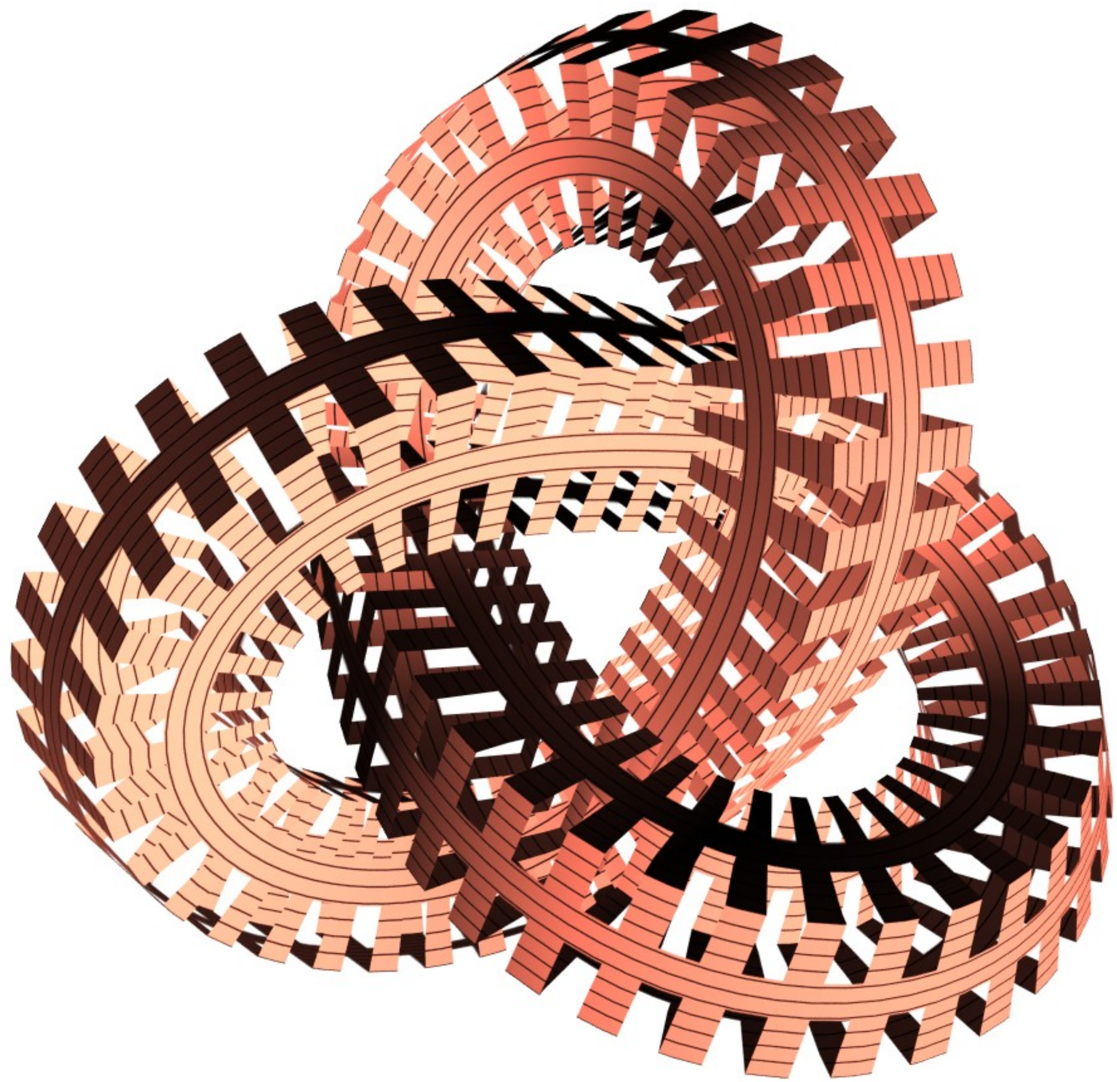


El no nudo:

Take one spaghetto.
Tie a knot on it and pull it by its ends. Gently!
Observe, where it breaks (Pieransk).

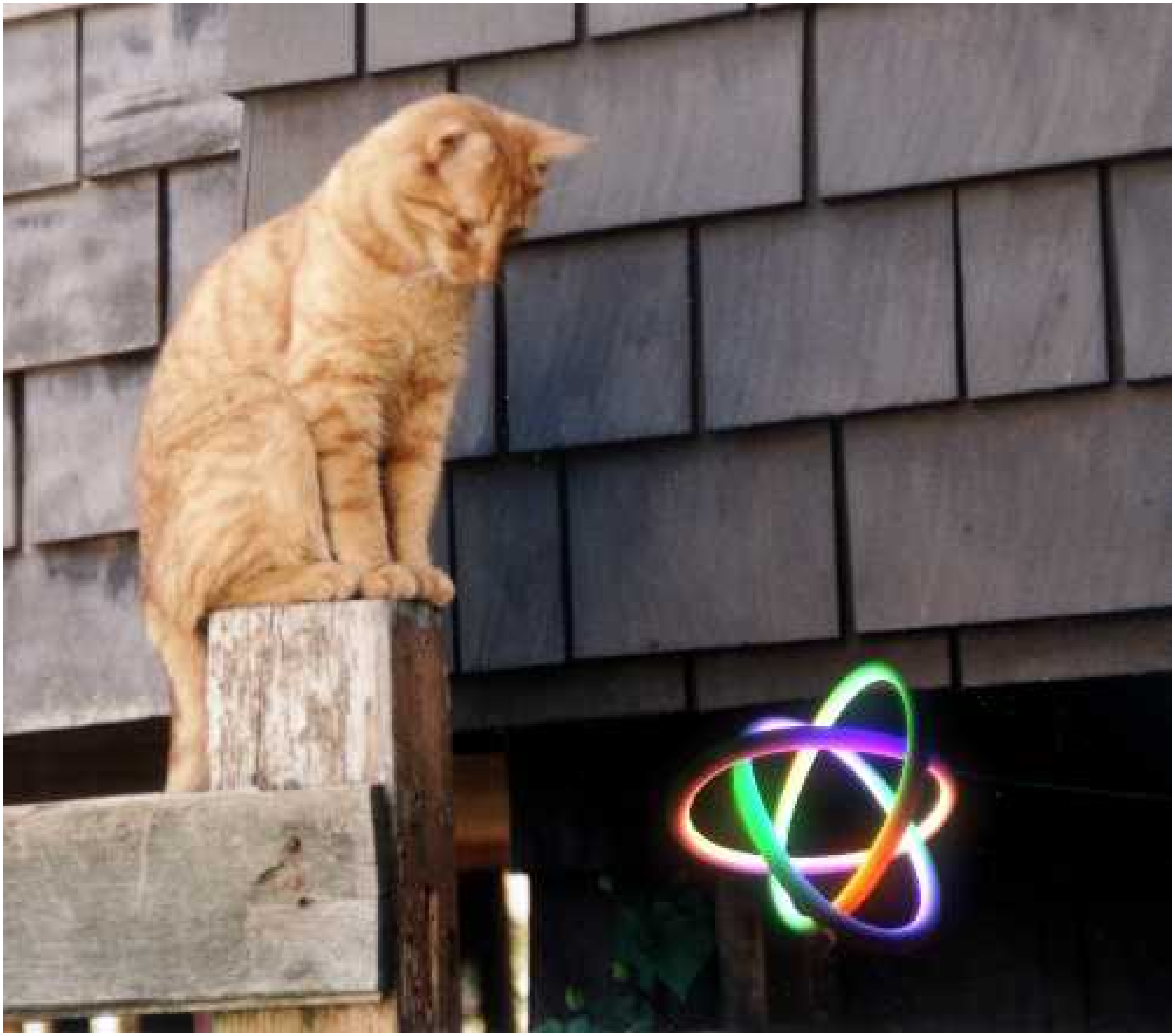


Otros usos



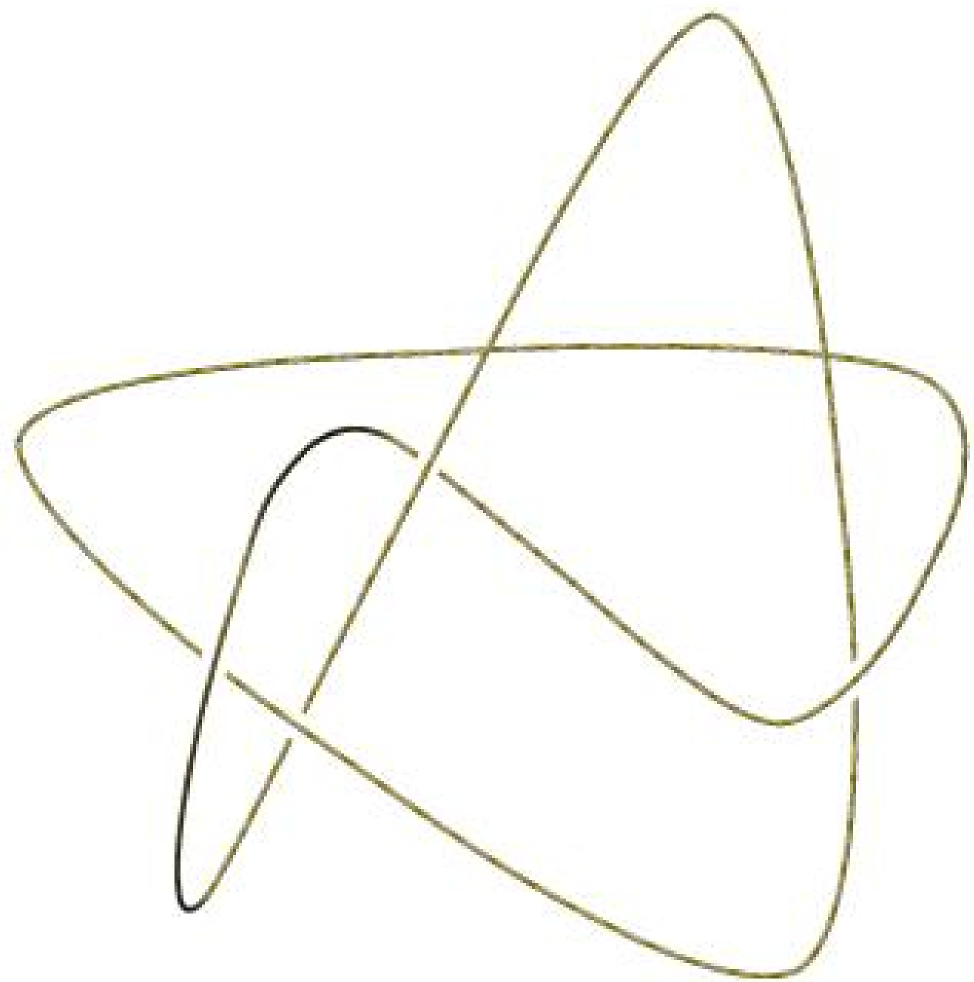
Otros usos

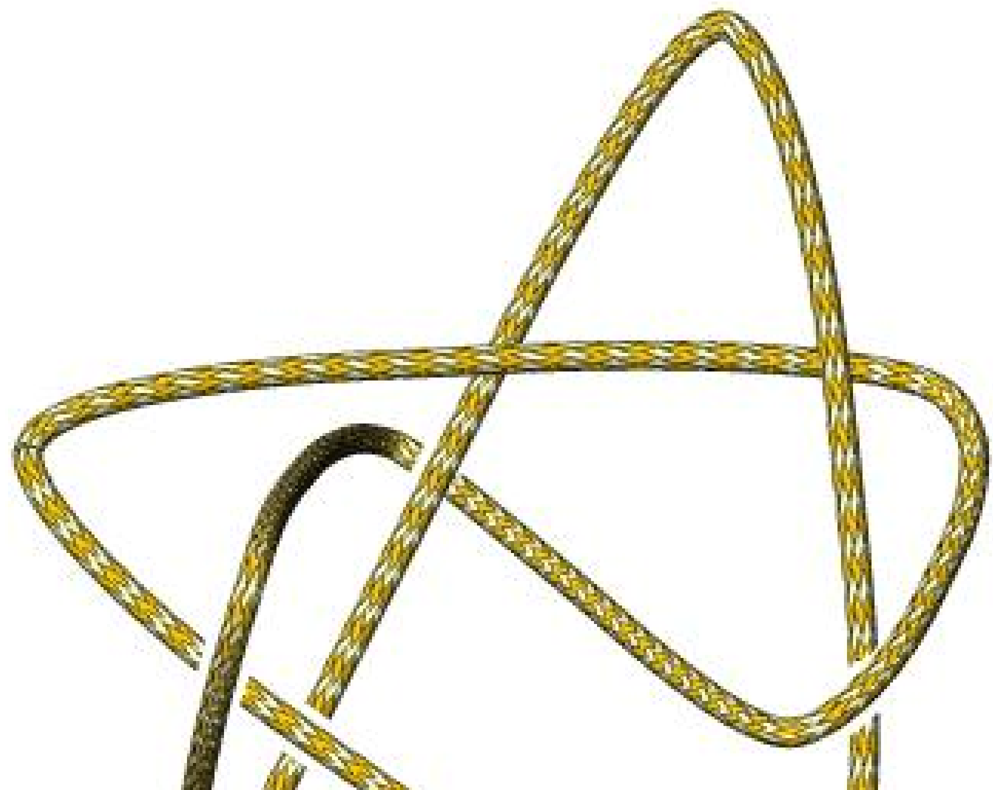
Otros usos

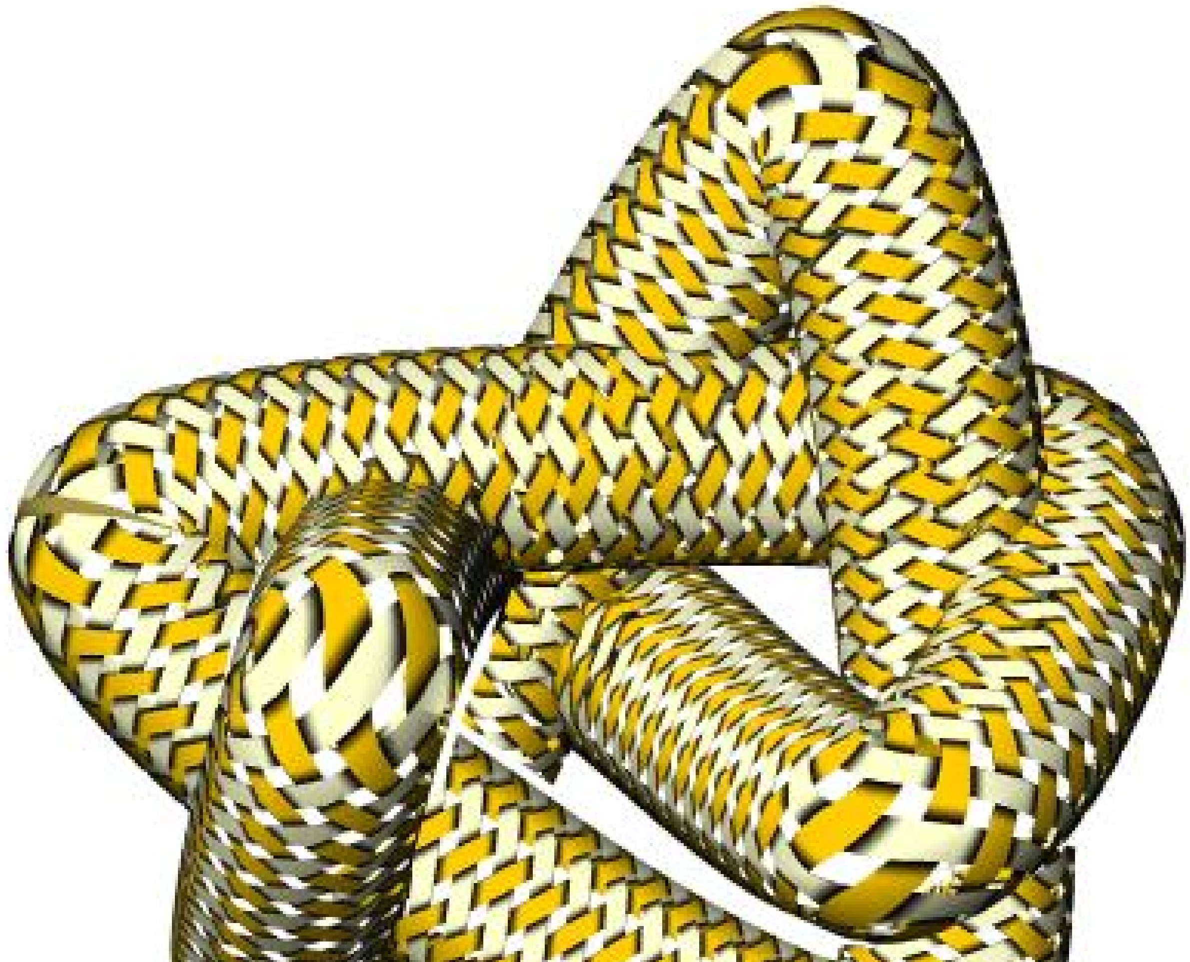


Nudos De Matemáticos

Los nudos van a ser curvas en el espacio tridimensional.



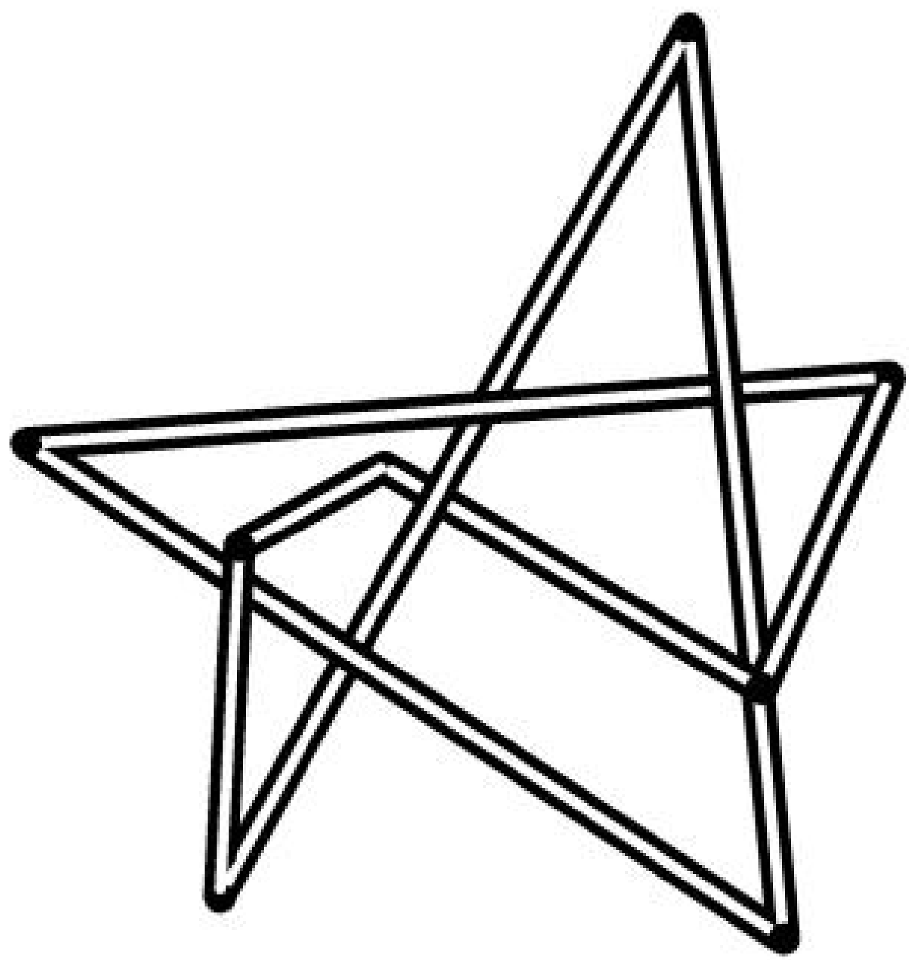




Mejor aún:

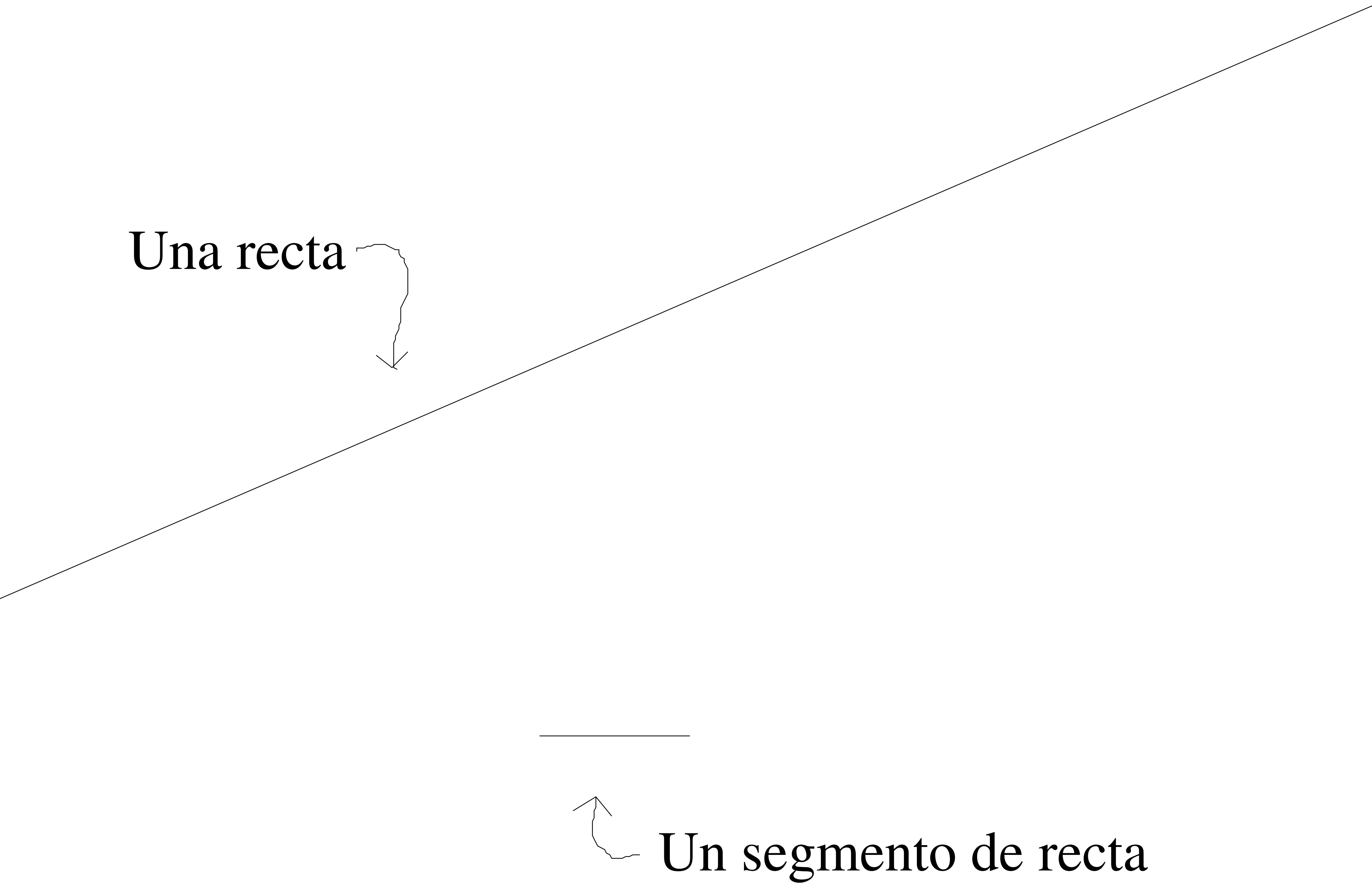
Nuestros nudos son curvas en el espacio que están hechas de segmentos de recta.

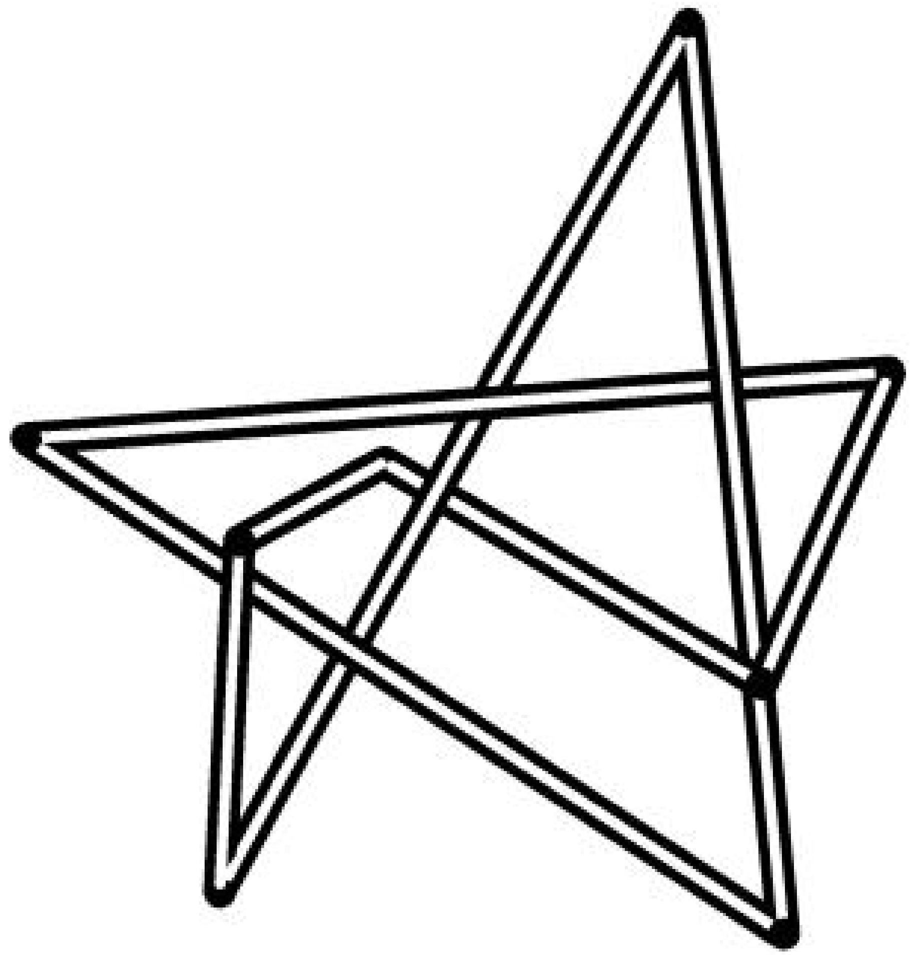
(ecuaciones más sencillas)



Pero, ¿Qué es una recta?

¿Qué es un segmento de recta?

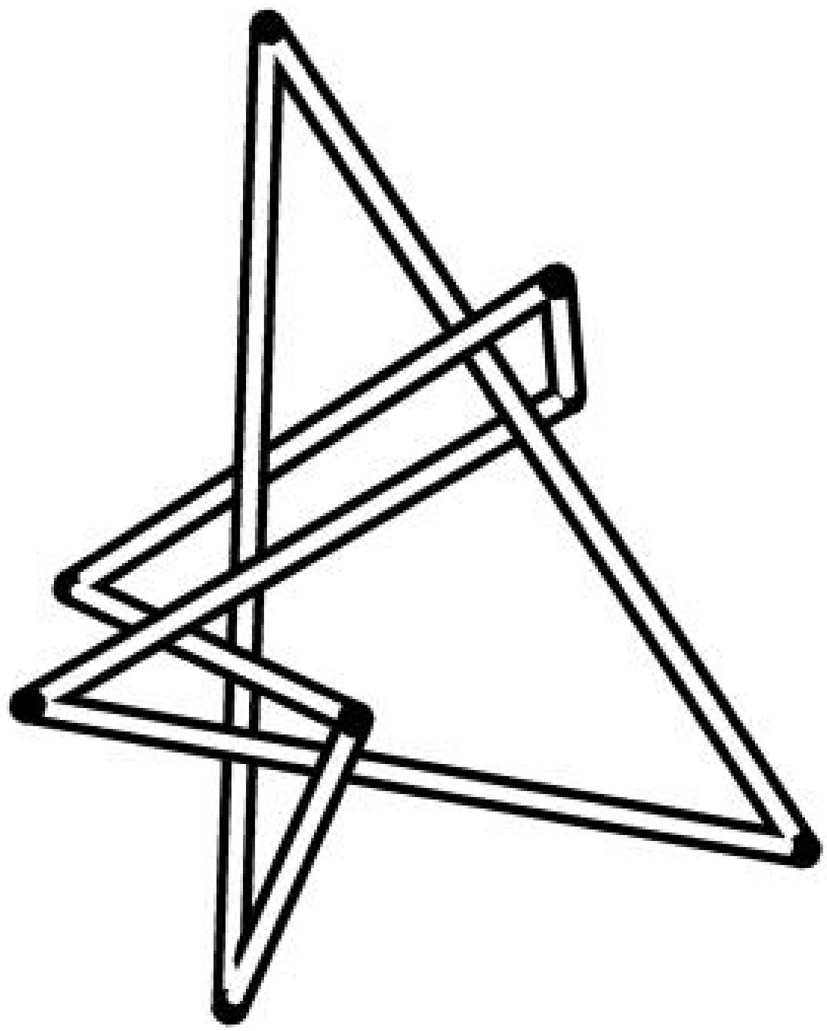

Una recta
Un segmento de recta



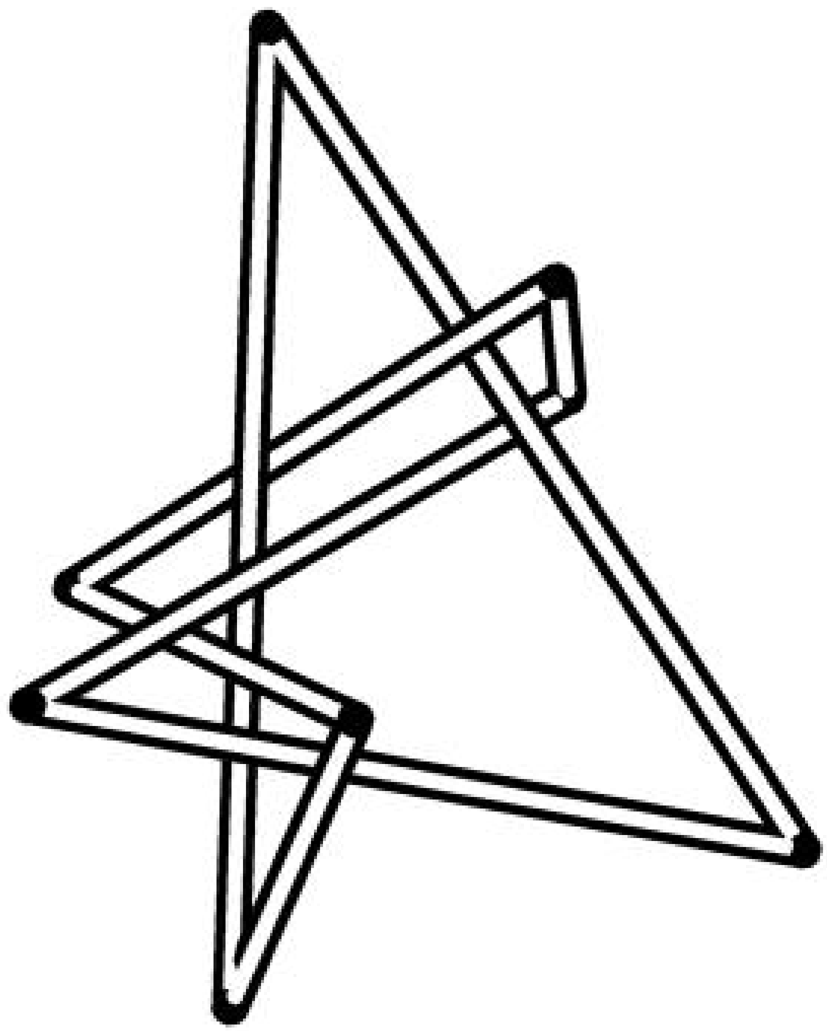
Definición. Un nudo es una curva, k, en el espacio tridimensional.

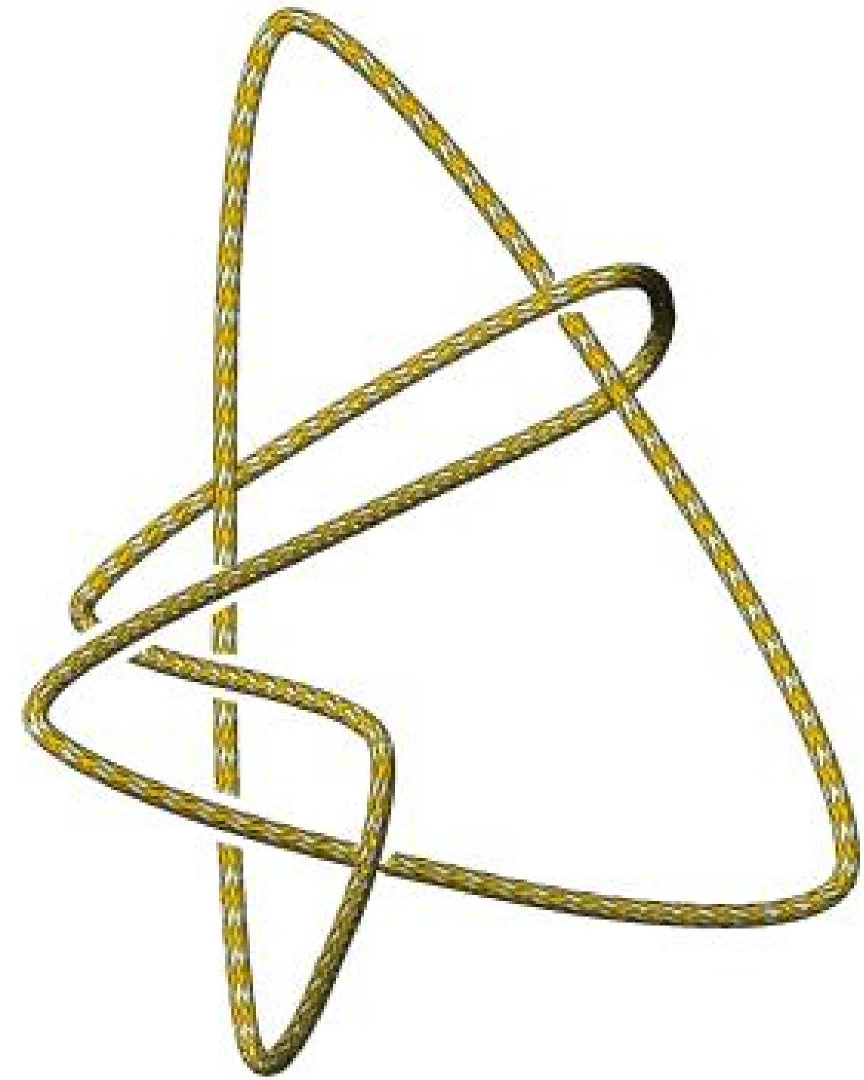
Pedimos que k sea una curva simple y cerrada.

También pedimos que k sea unión de un número finito de segmentos de recta.



Sin embargo, usualmente vamos a dibujar los nudos como curvas “redonditas”



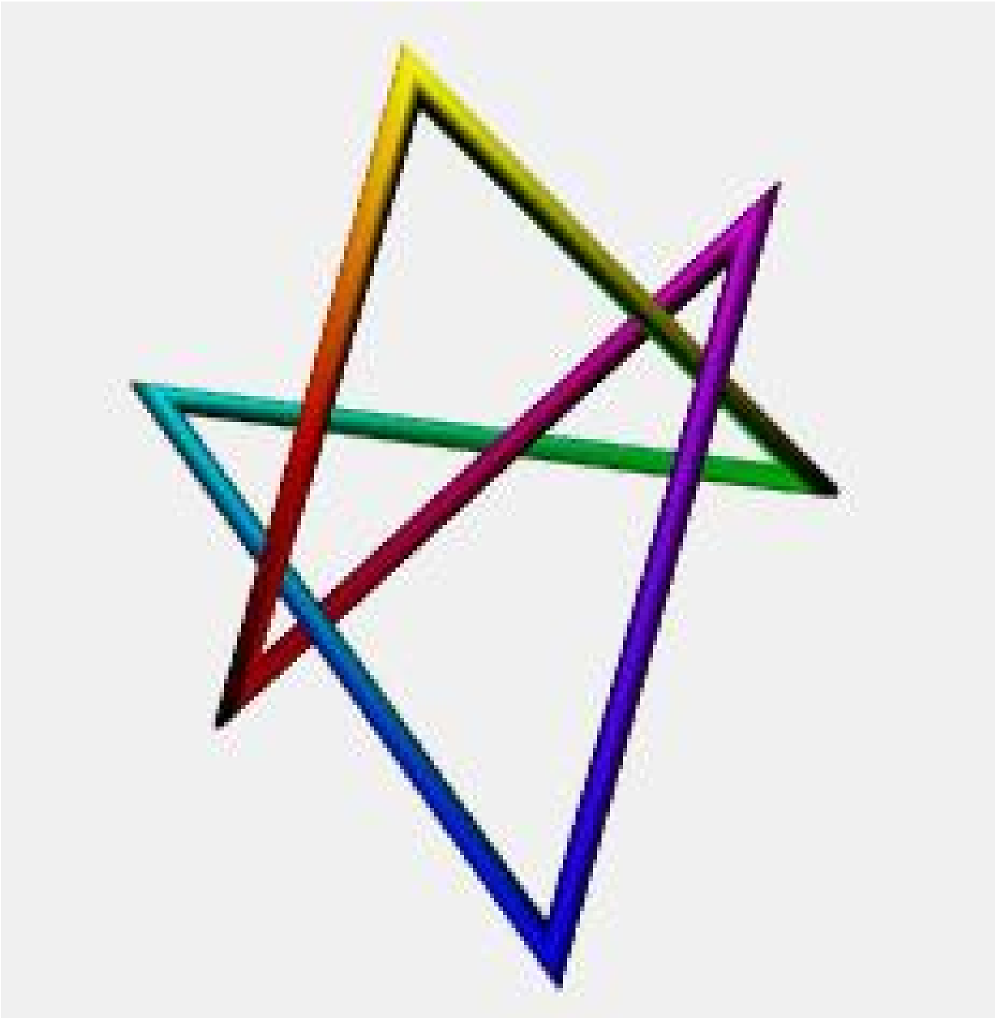


¿Por qué?

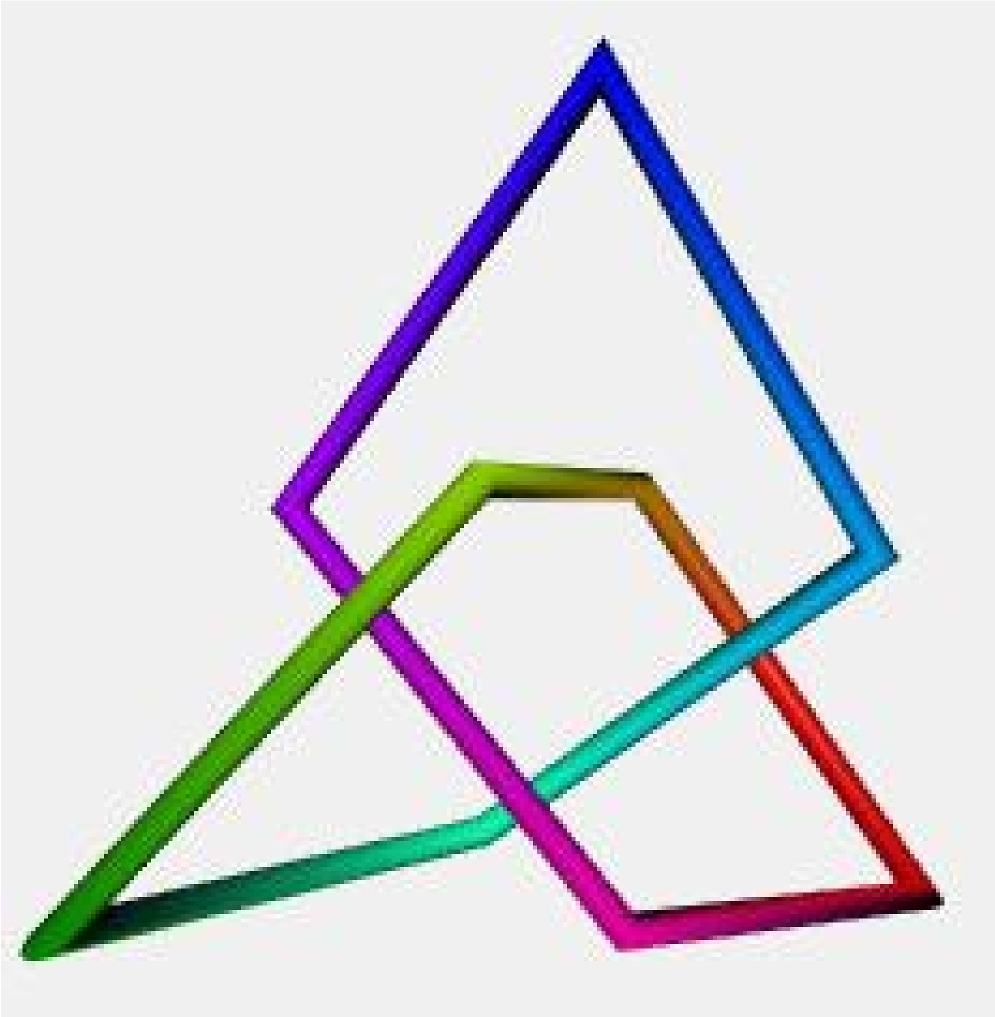
Bueno, primero porque es más fácil.

Y luego:

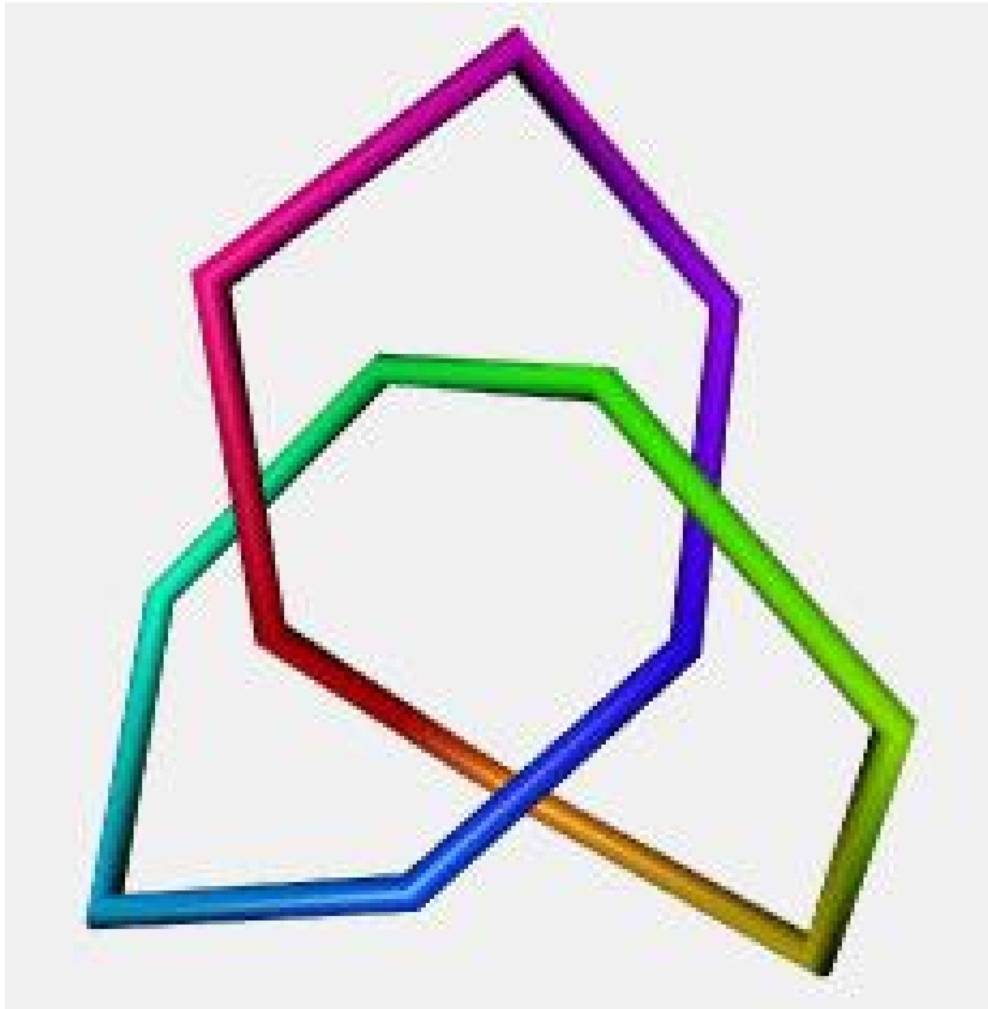
Seis lados



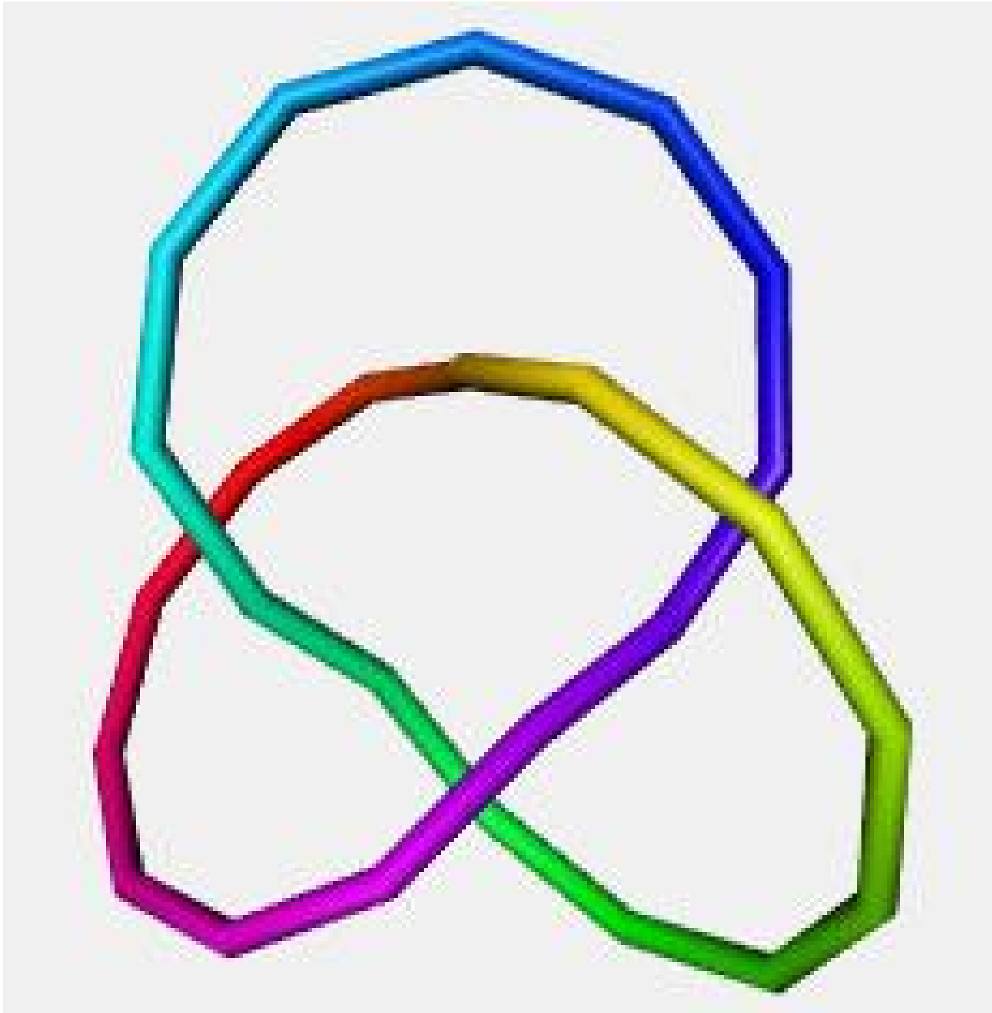
Nueve lados



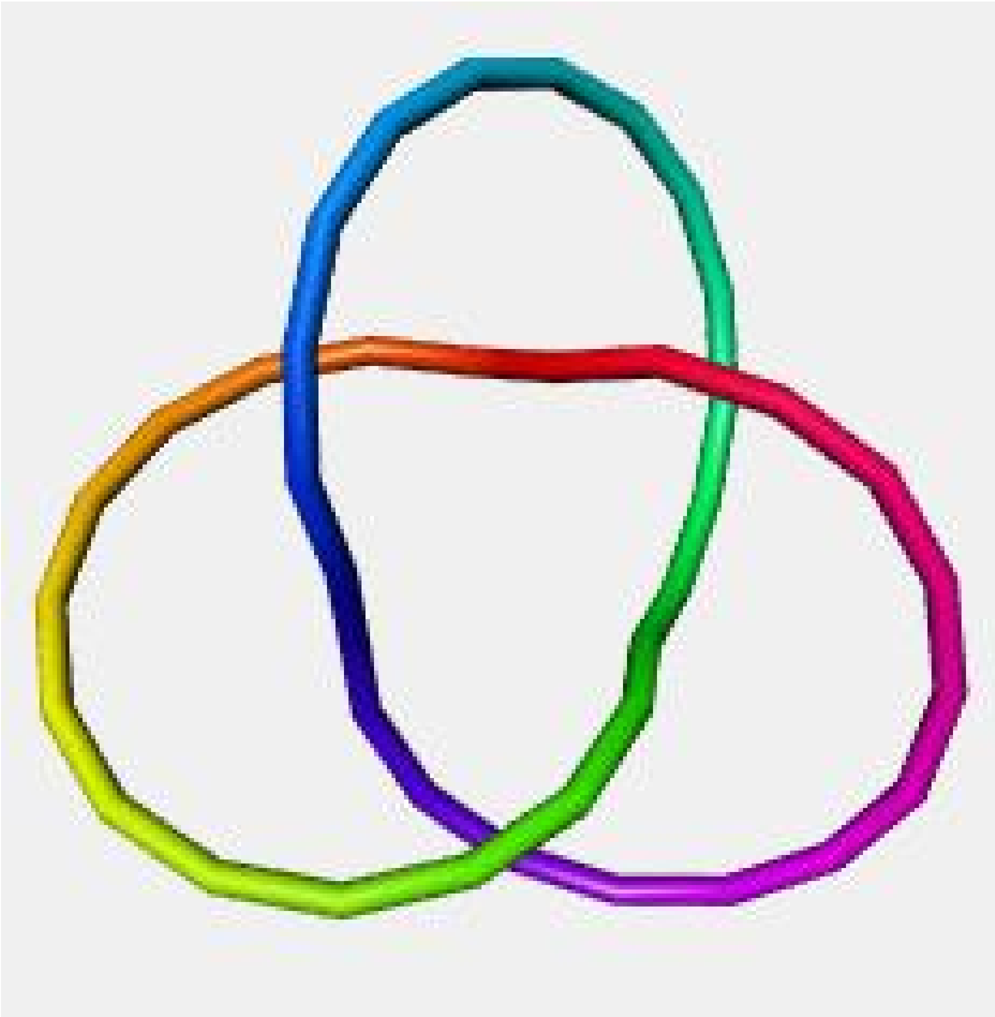
Trece lados



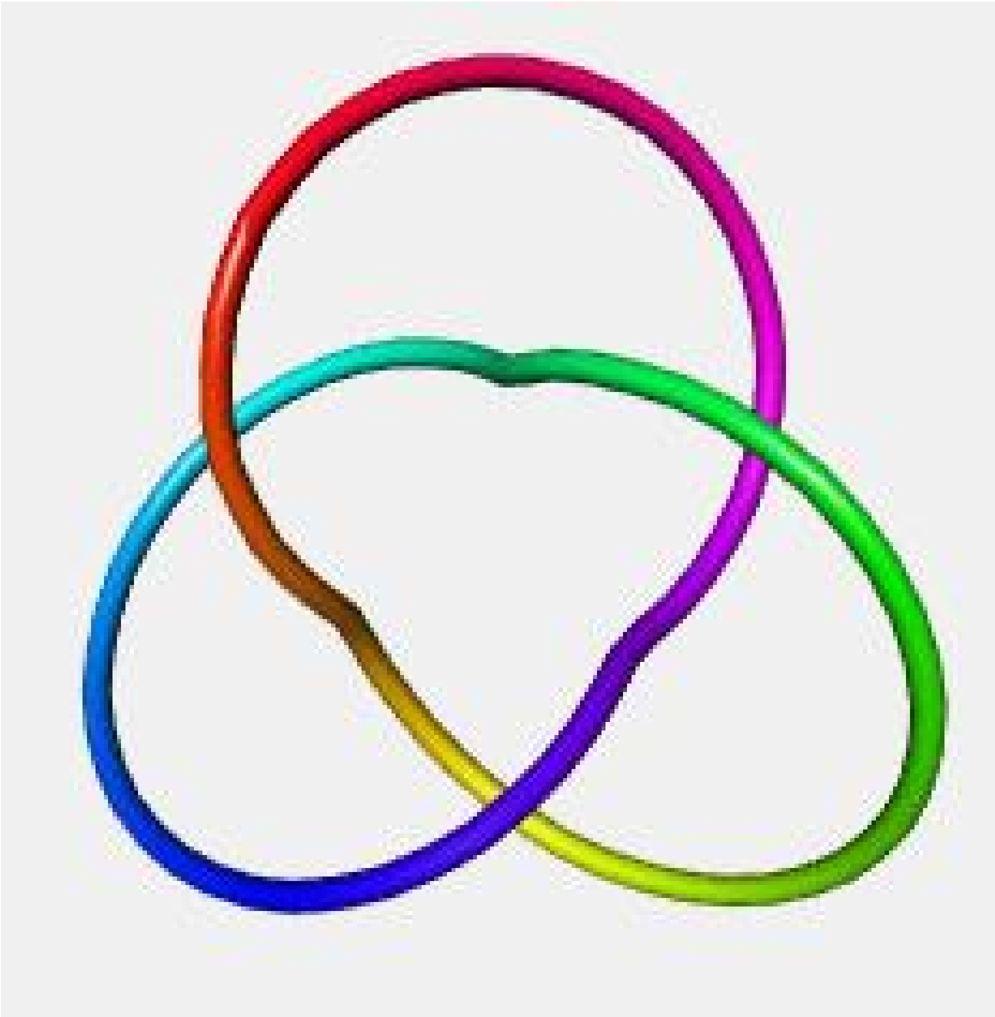
Veintisiete lados



Cuarenta y un lados

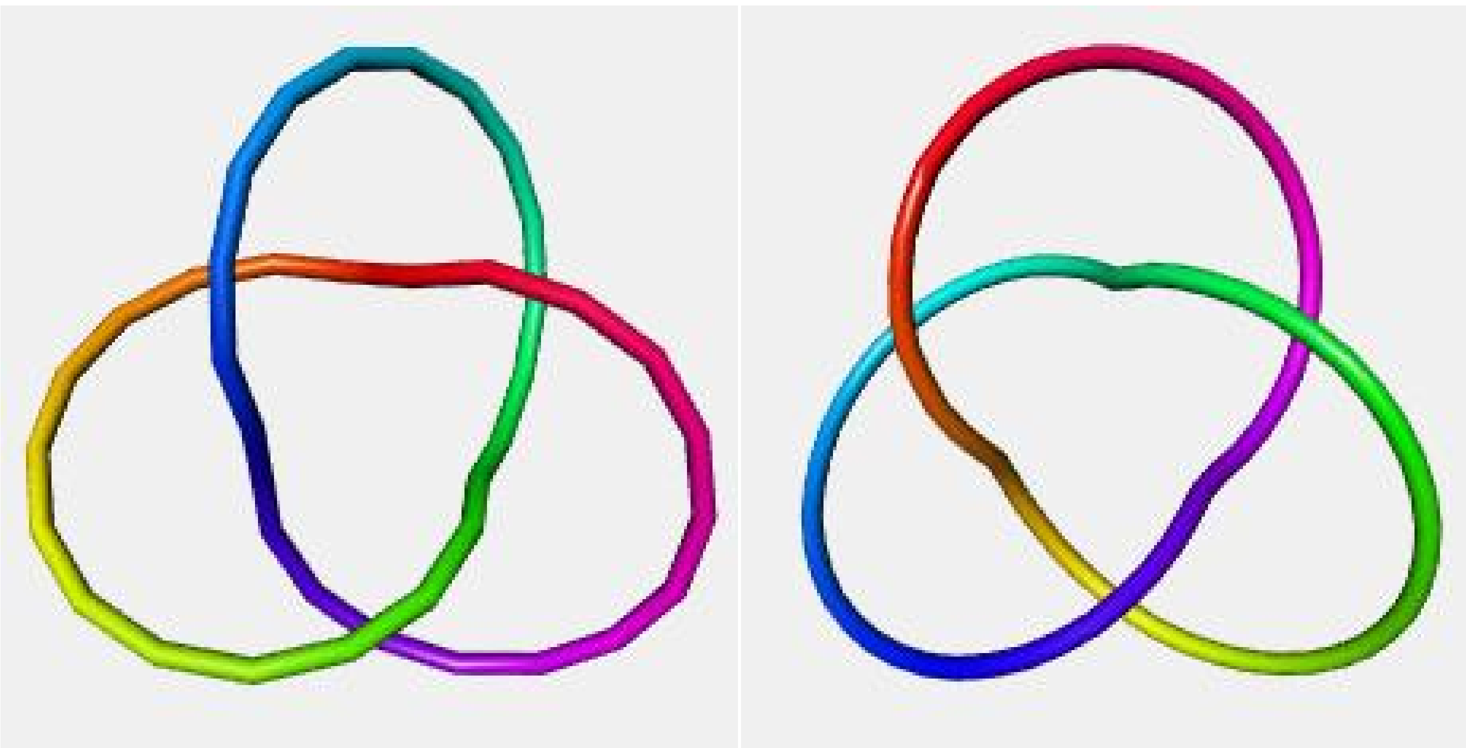


Cien lados



Pero, ¿esos nudos son el mismo nudo?

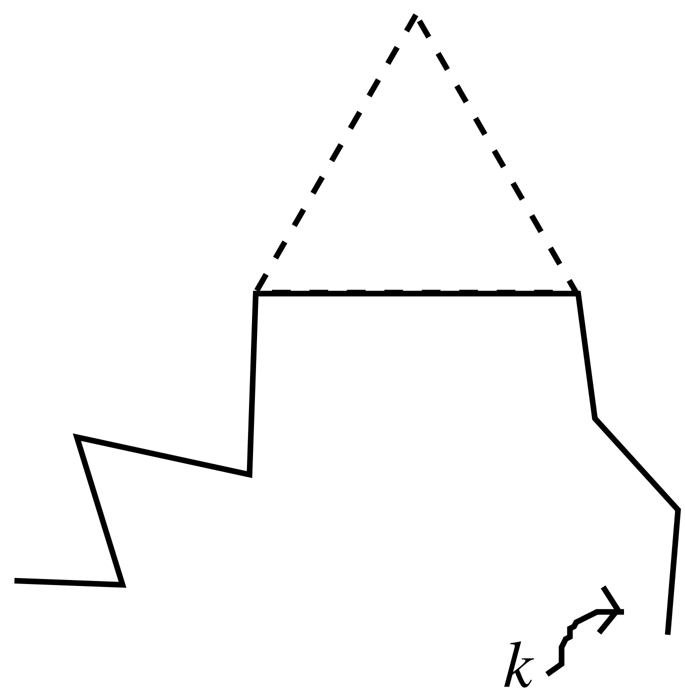
(¿la misma curva?)

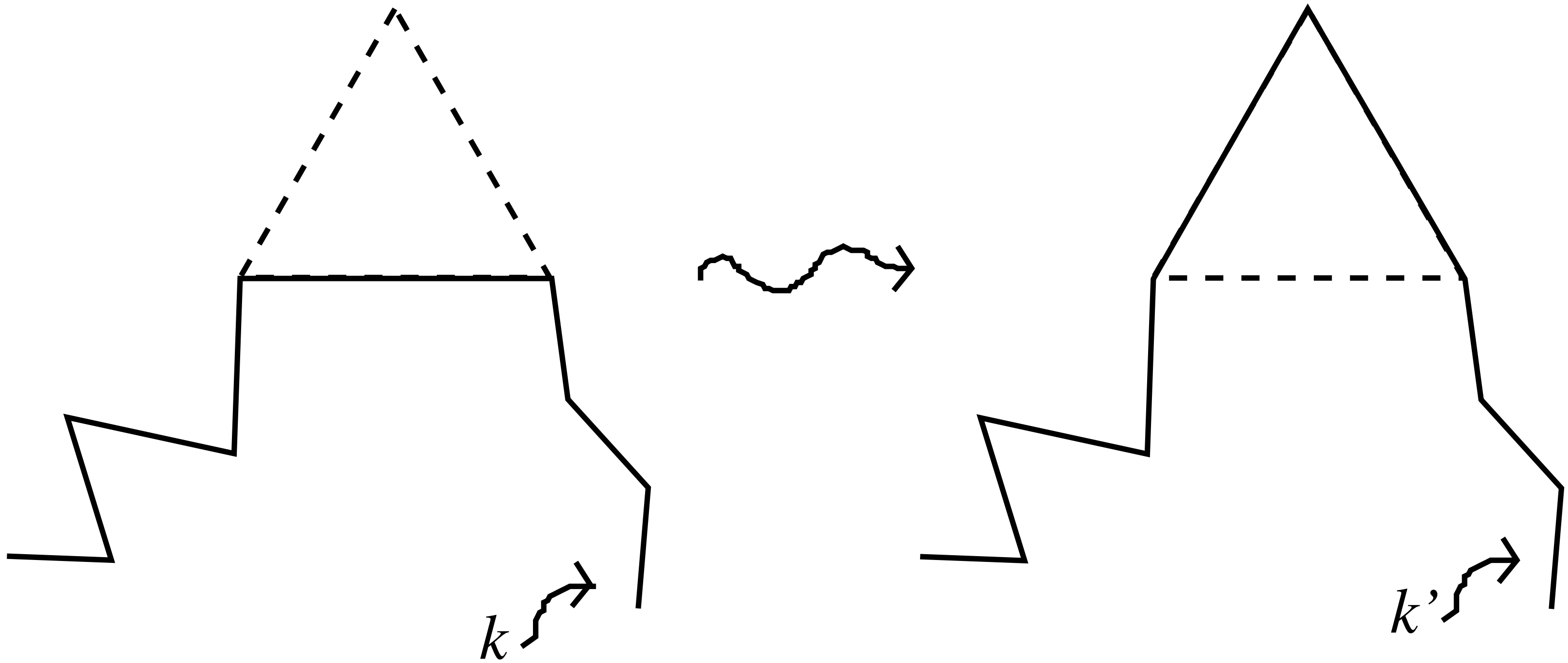


(pues, sí y no)

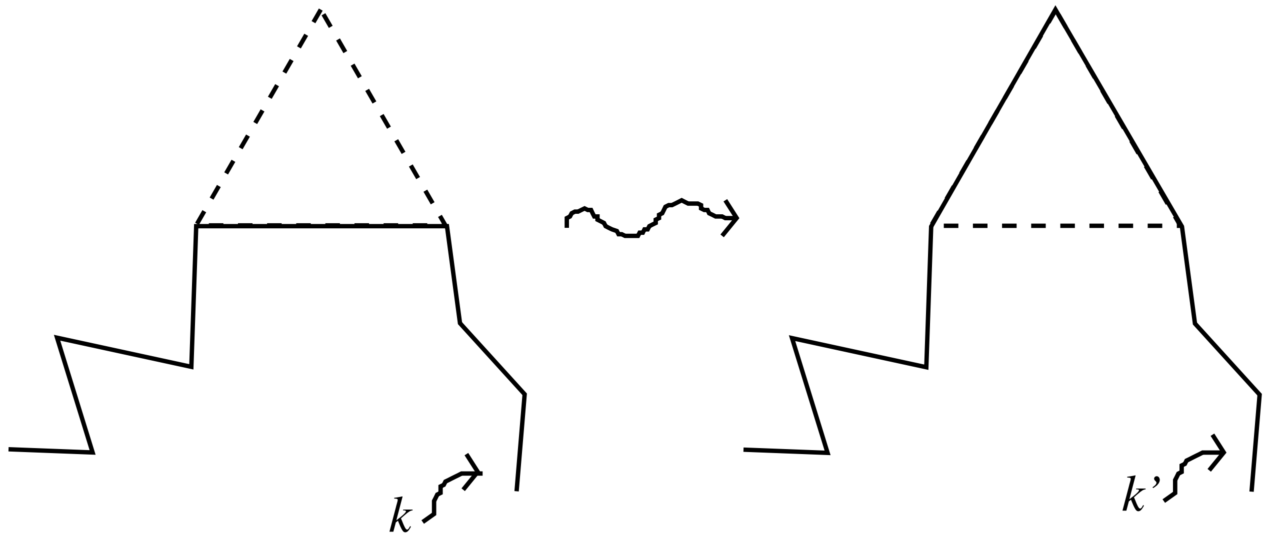
Tenemos que decir cuándo dos curvas son el mismo nudo.

Tomemos un nudo k y un triángulo Δ en el espacio de tal manera que Δ y k se tocan en exactamente un segmento de k y un lado de Δ.





Si hacemos el cambio del dibujo, obtenemos un nuevo nudo k'.

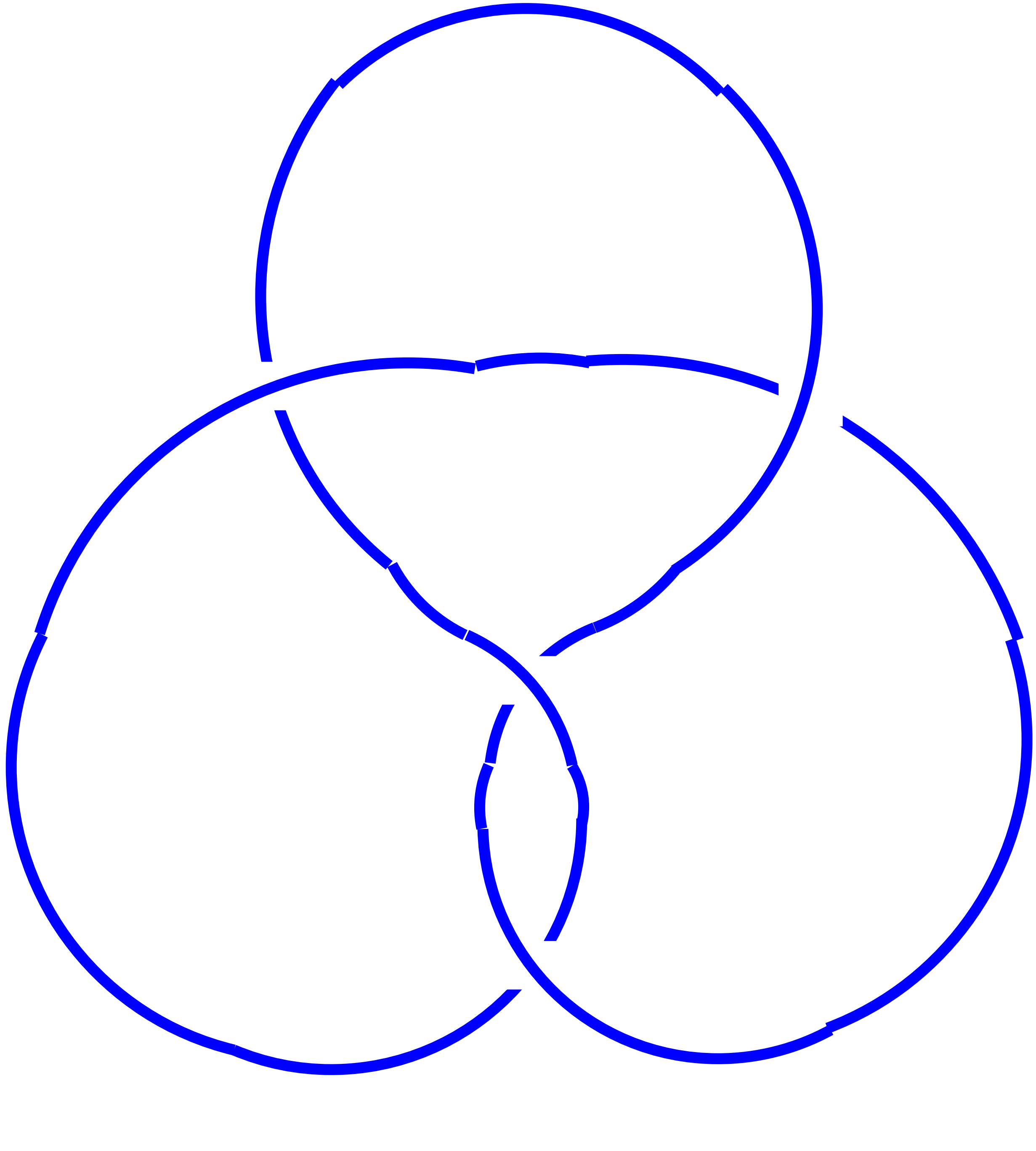


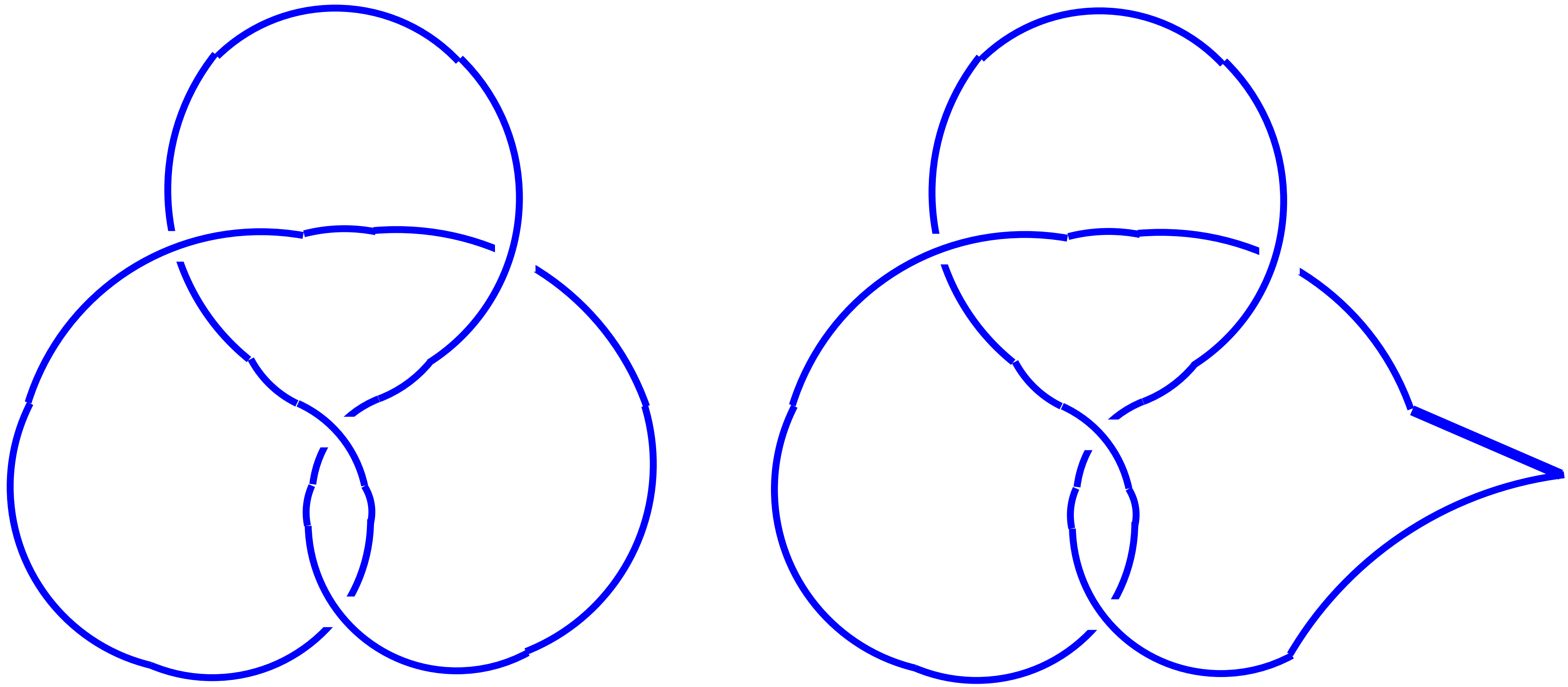
Según el dibujo, decimos que el nudo k' se obtiene del nudo k mediante una movida Δ.

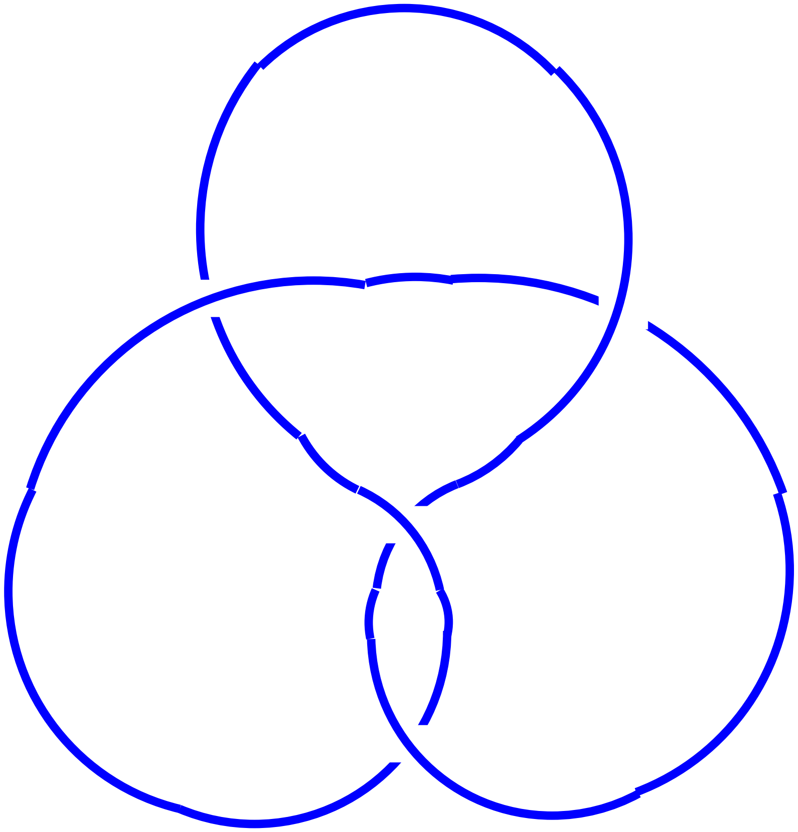
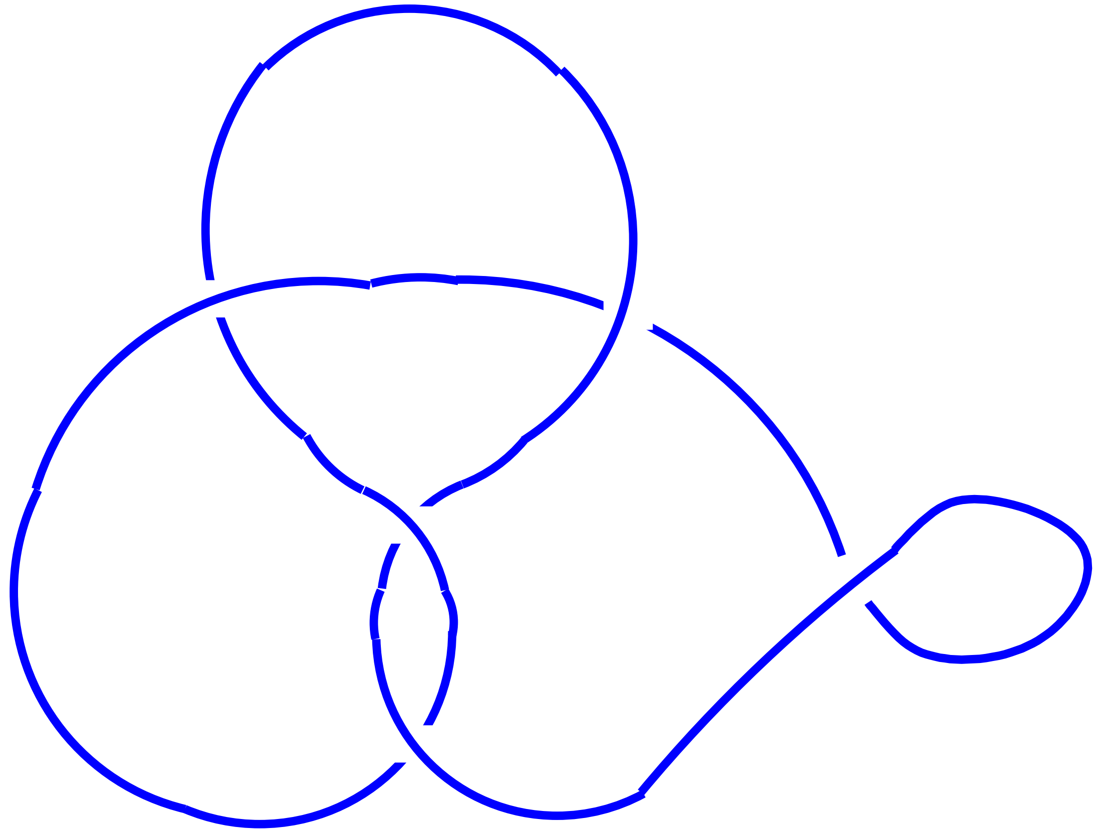
(También decimos que k se obtiene de k' mediante una movida $\bar{\Delta}$).

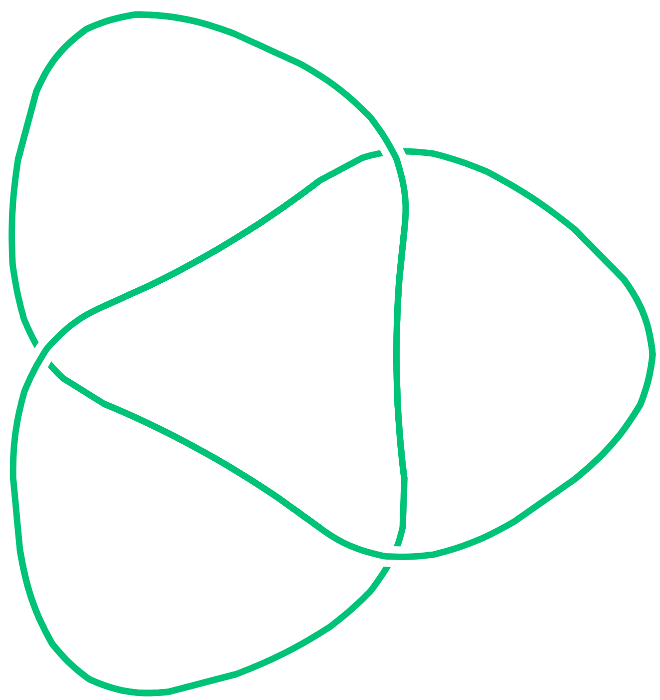
Definición. Dos curvas k y ℓ se dicen equivalentes (o sea, "son el mismo nudo") si una se puede llevar a la otra mediante una sucesión finita de movidas Δ y $\bar{\Delta}$.

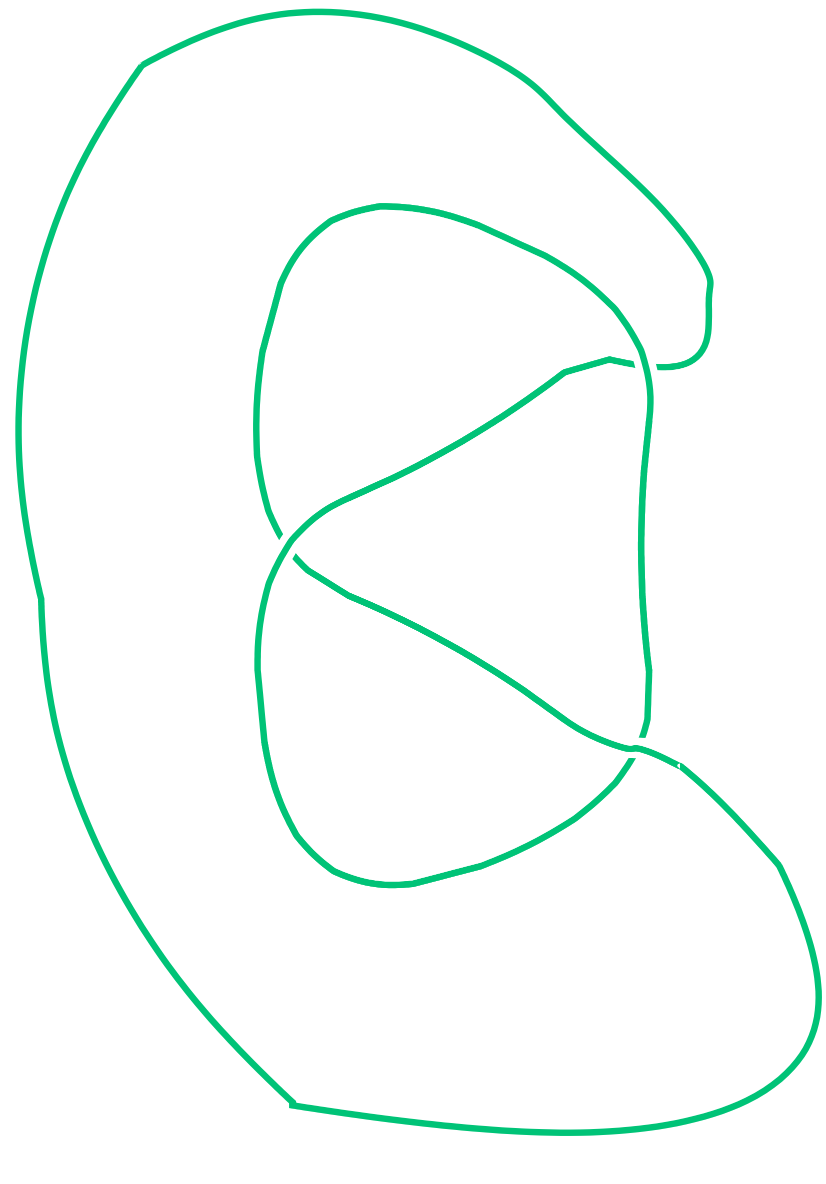
Se escribe "$k \sim \ell$".



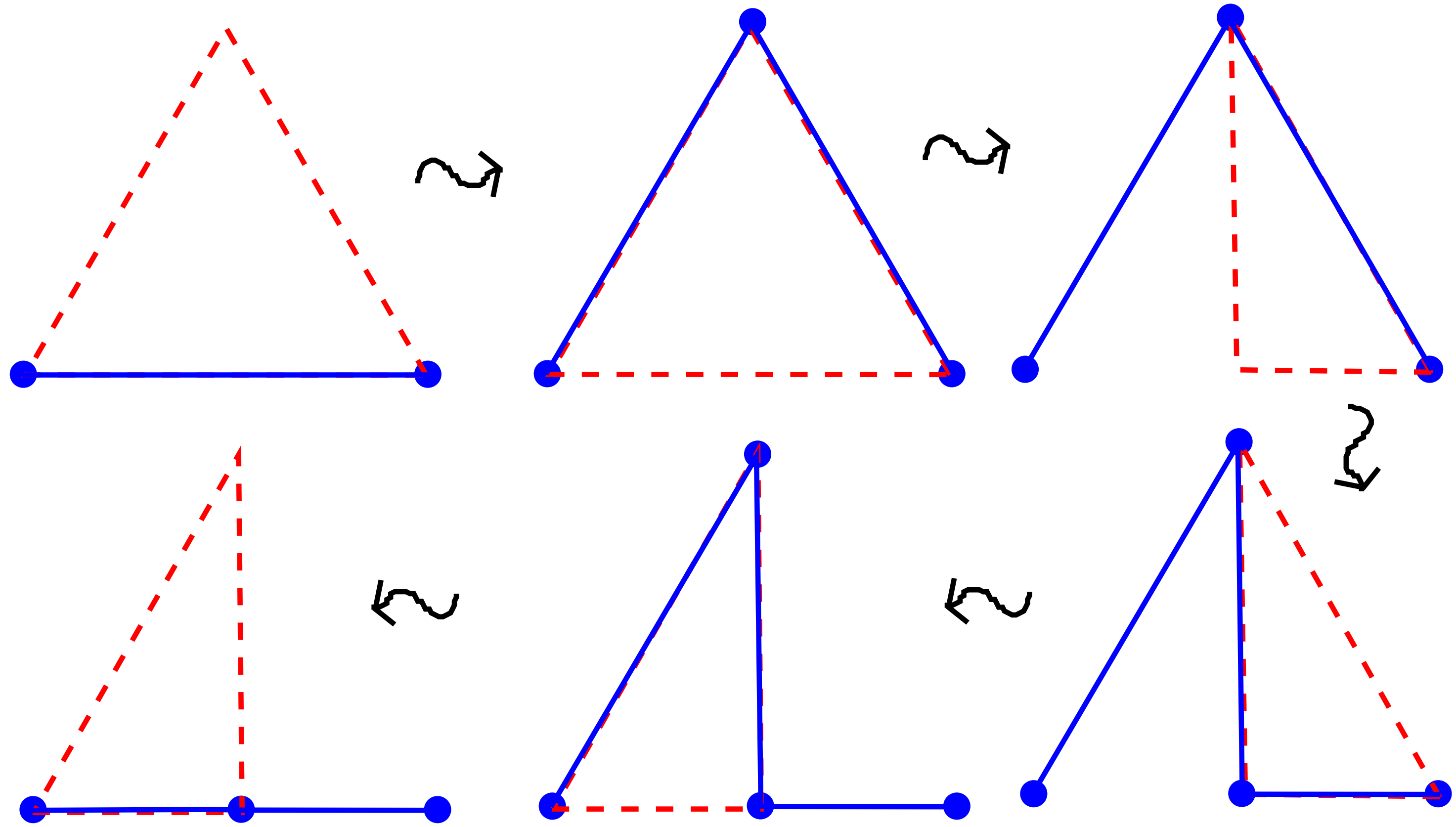


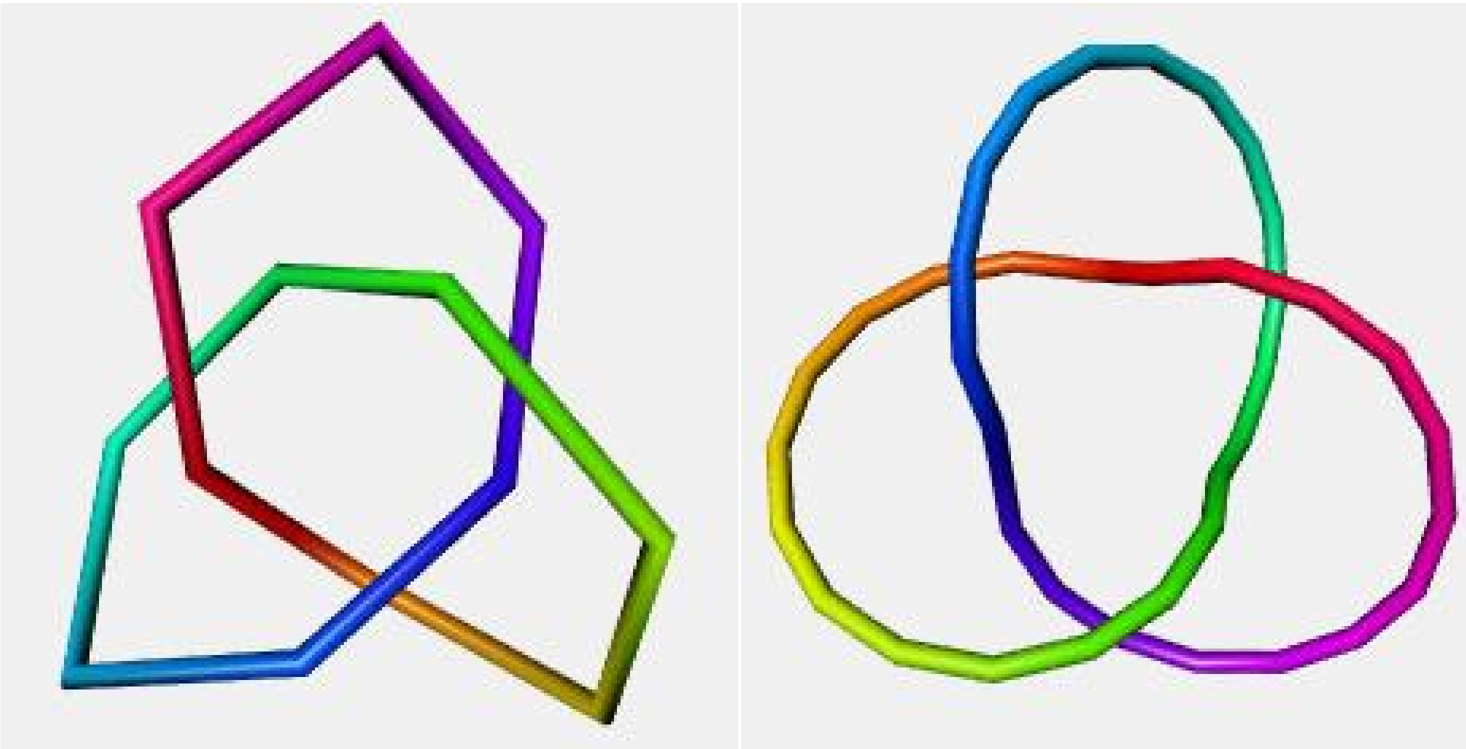




una arista $\sim$ dos aristas

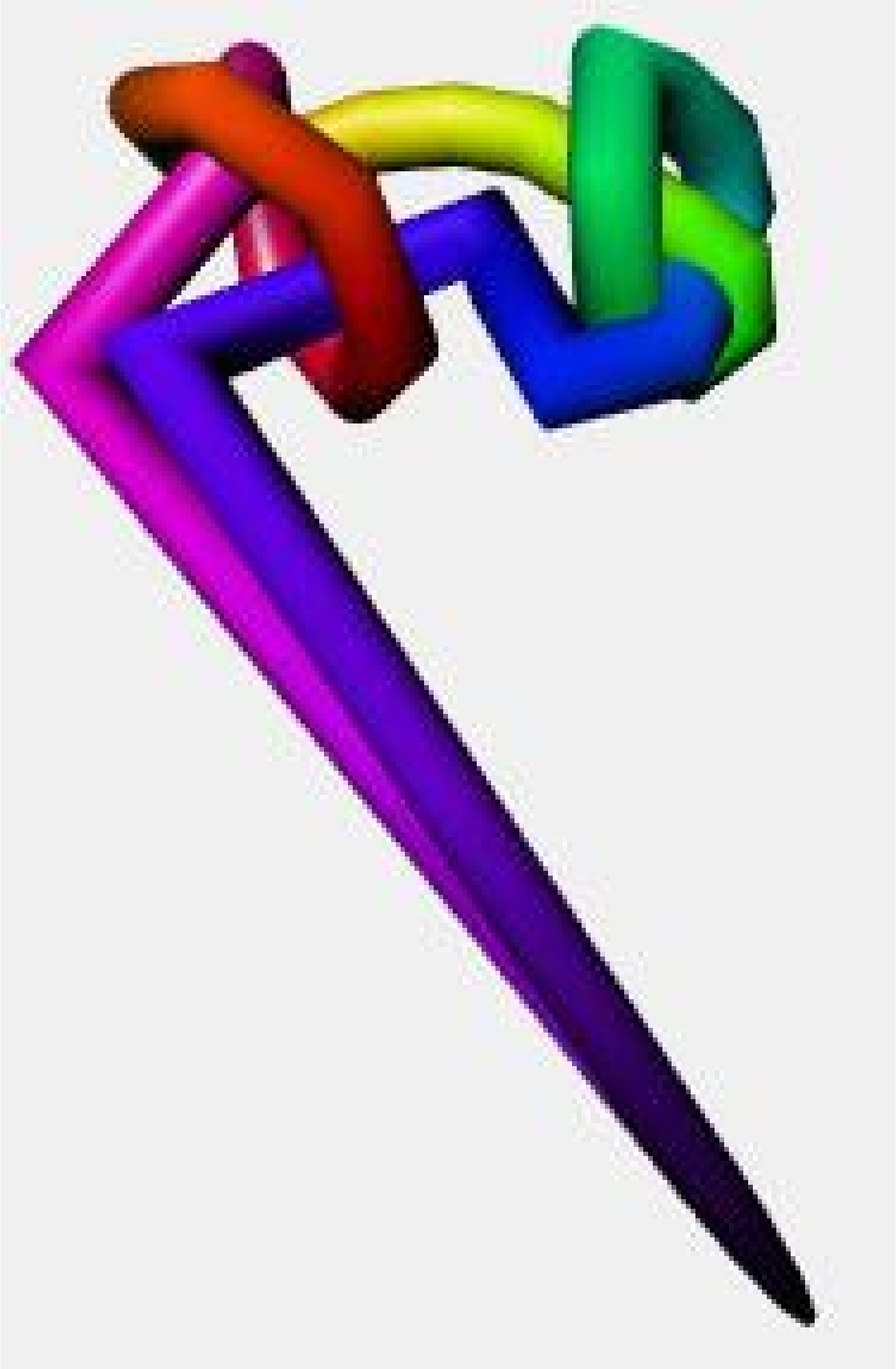


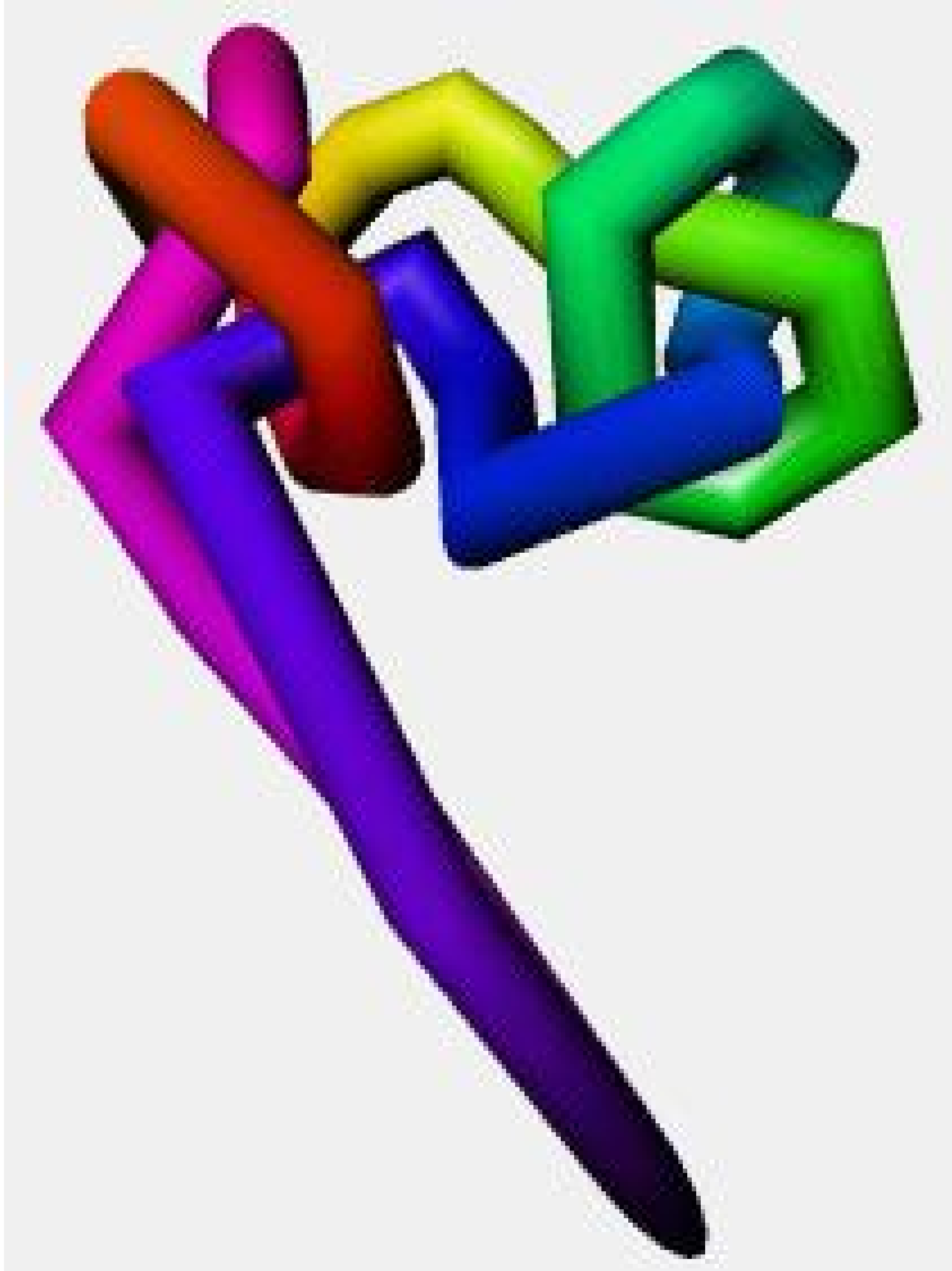
Estos nudos:

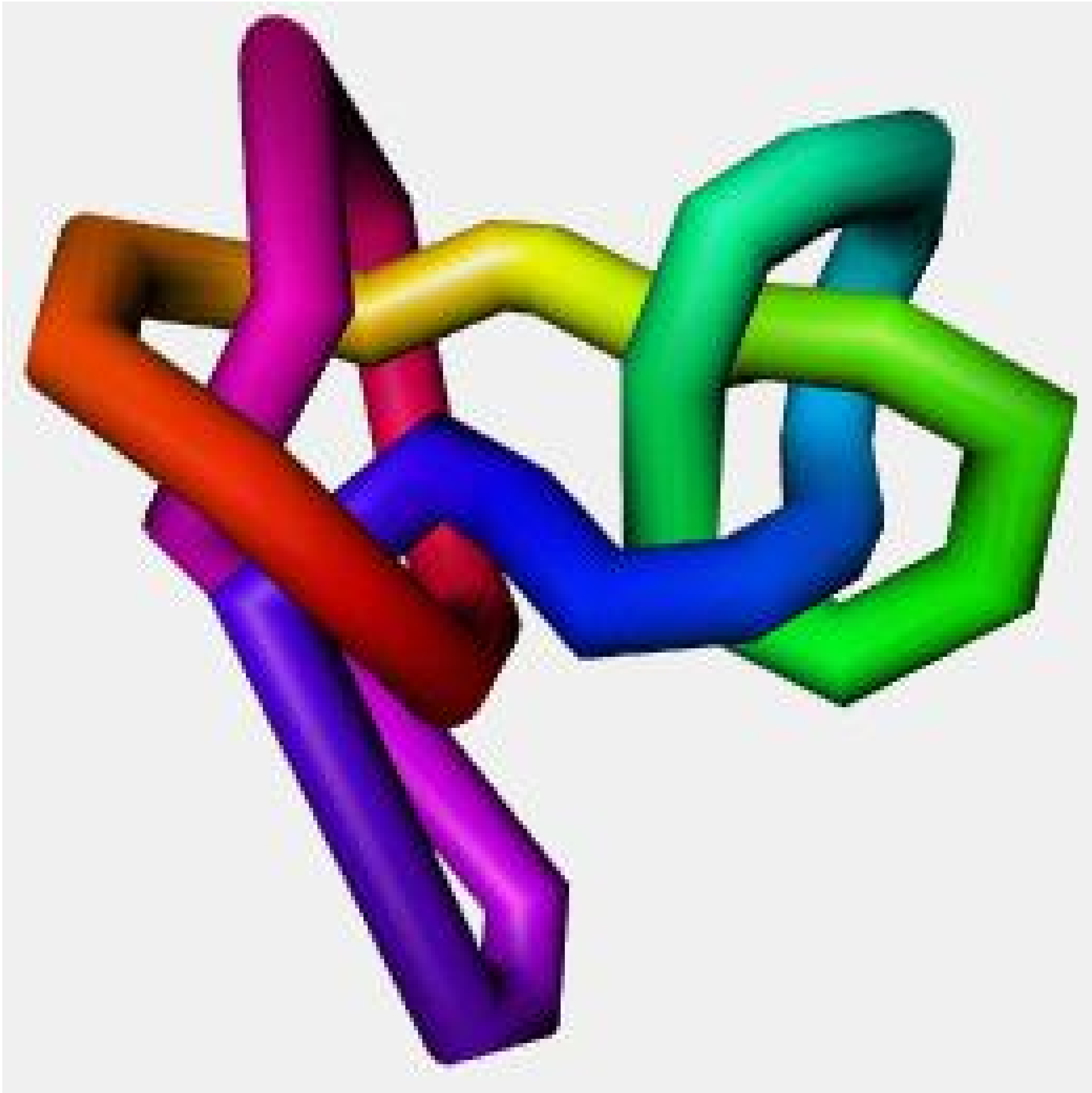


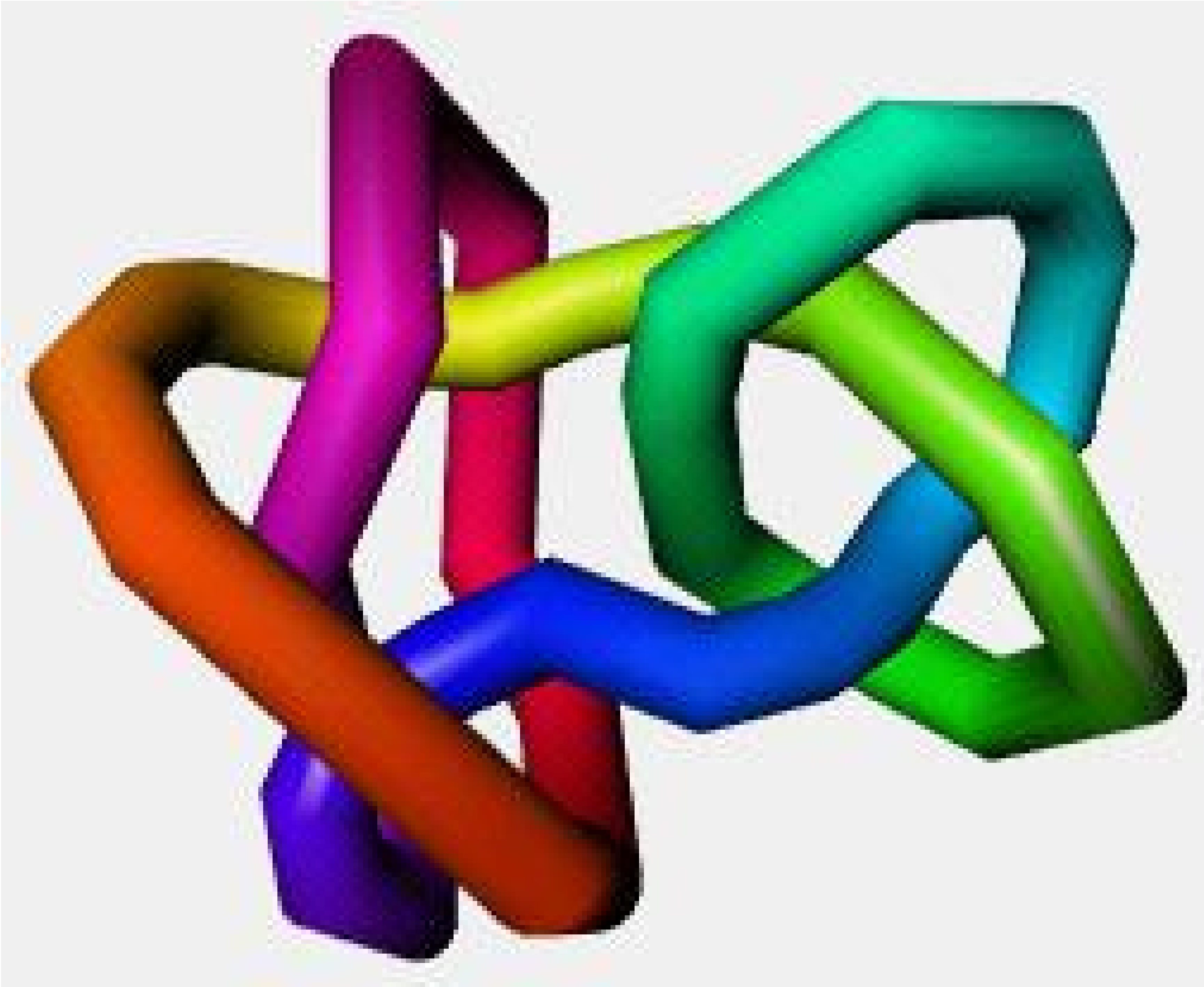
son el mismo nudo

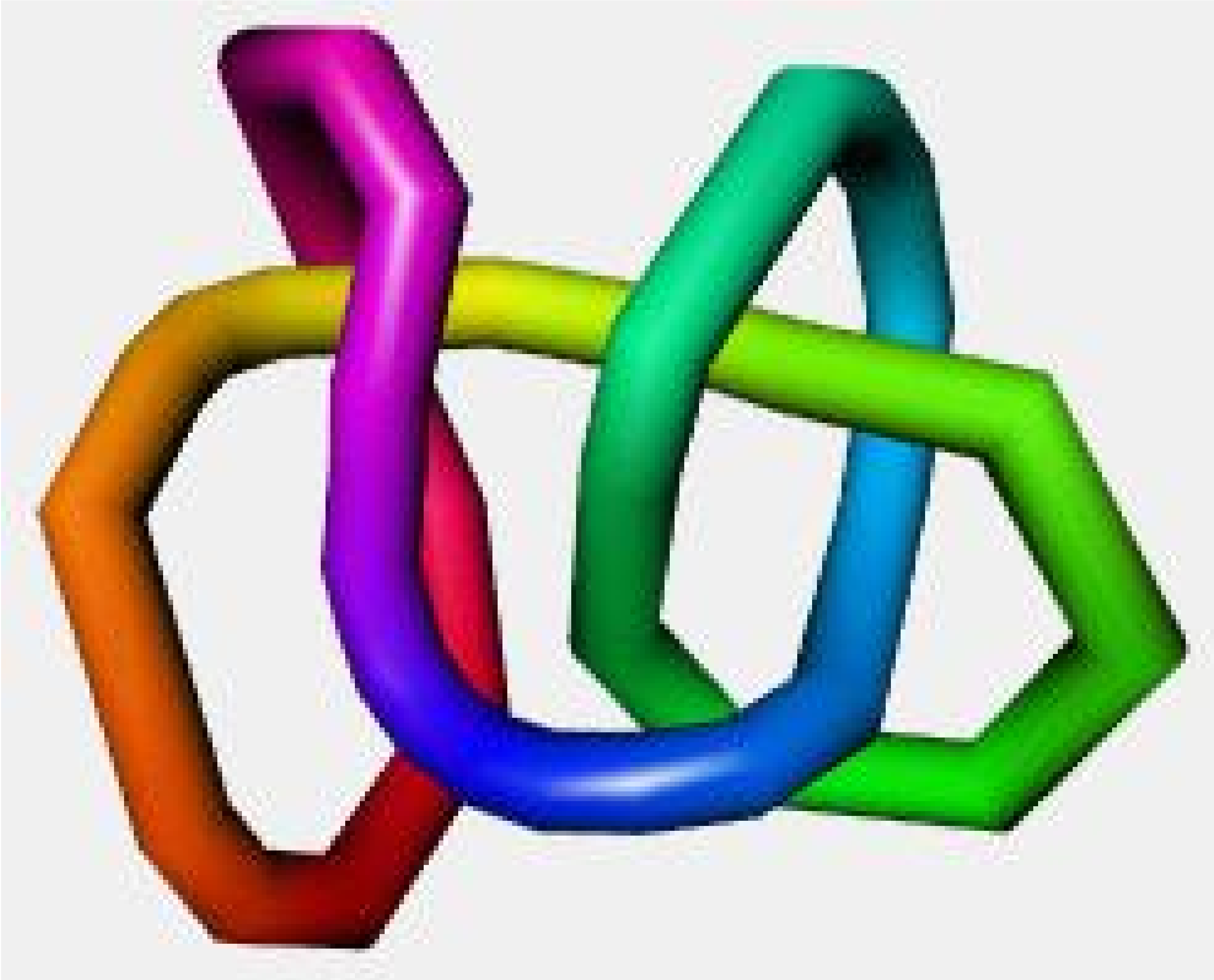
Algo (bastante) más complicado:

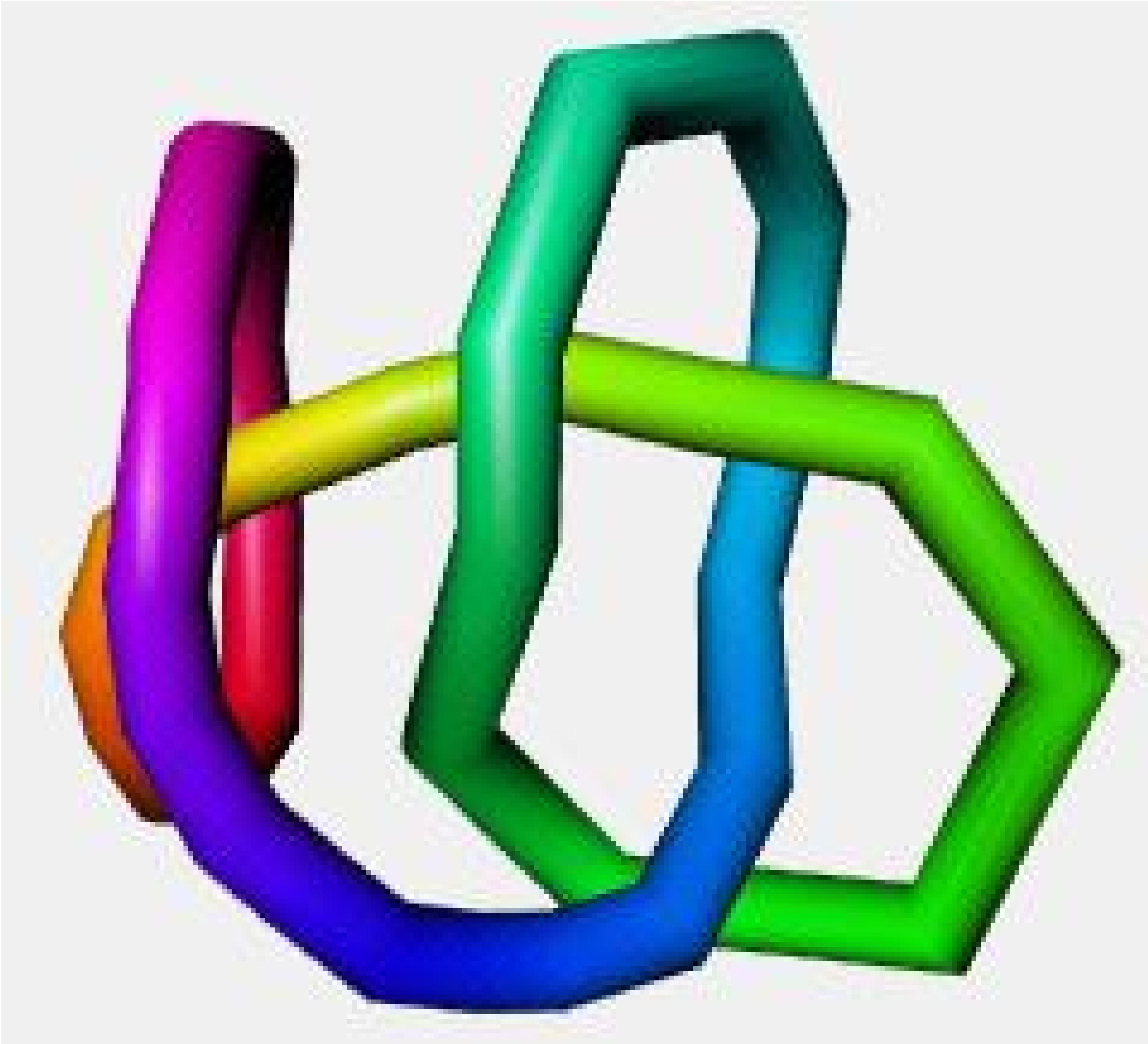


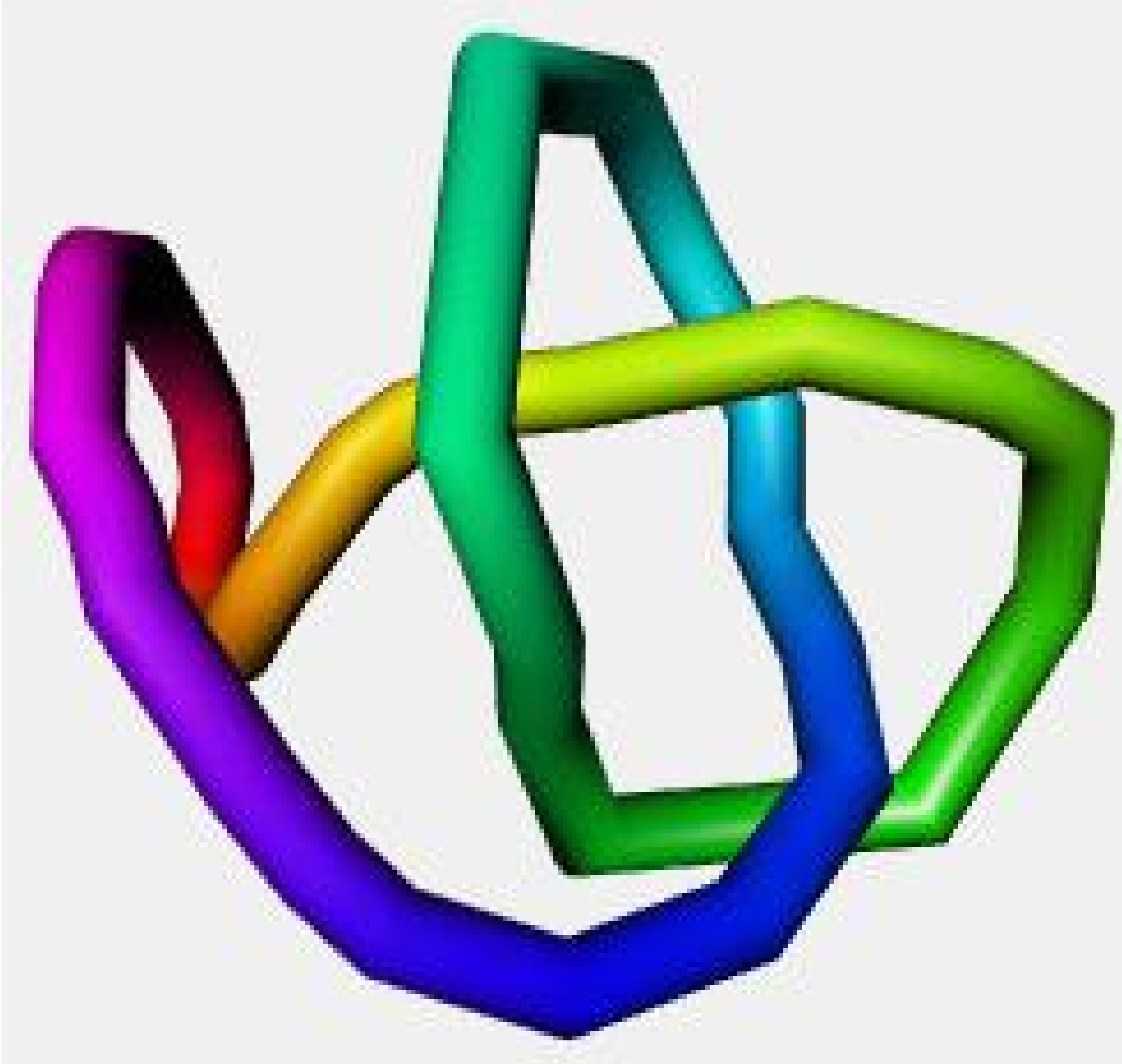


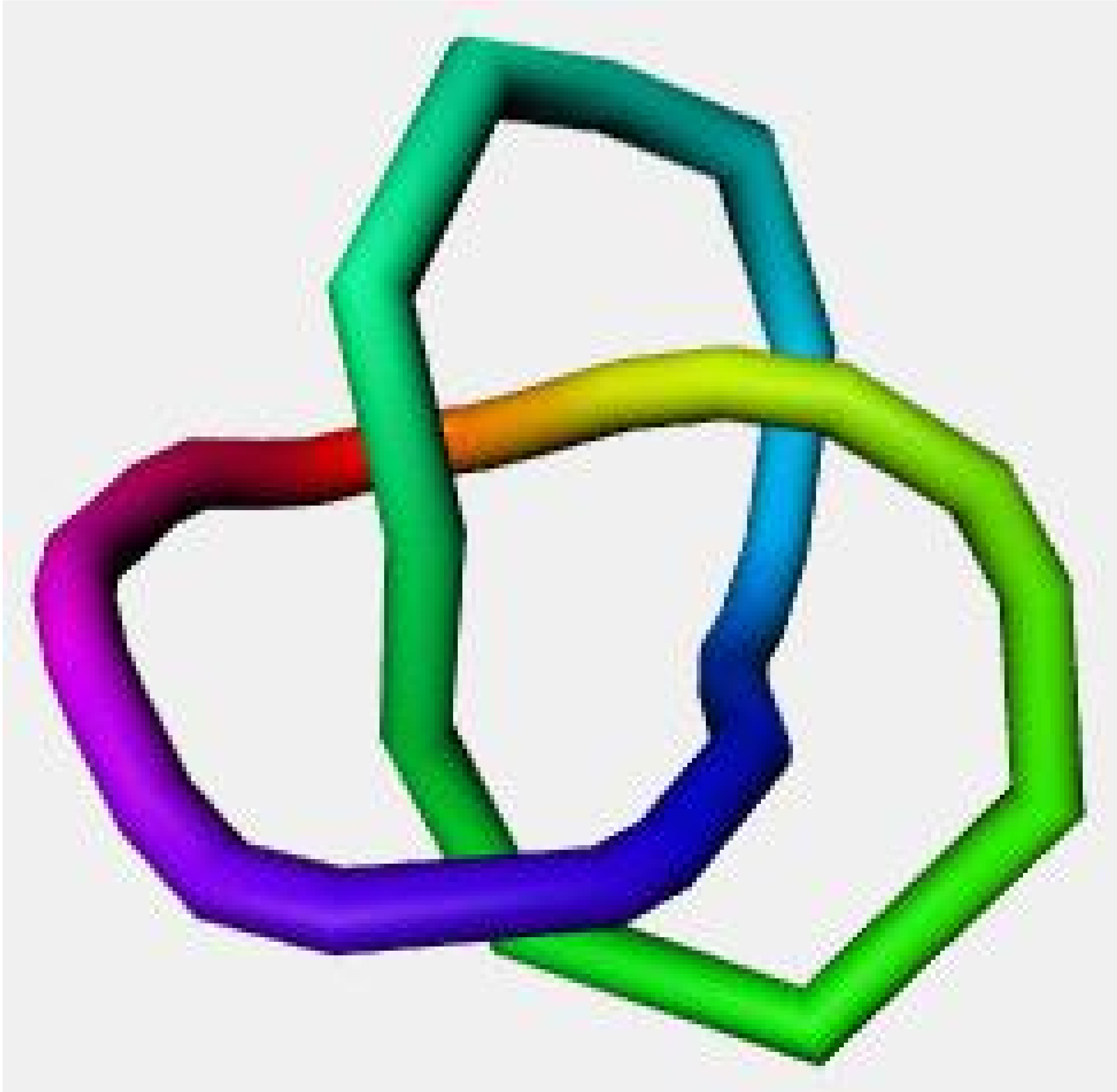


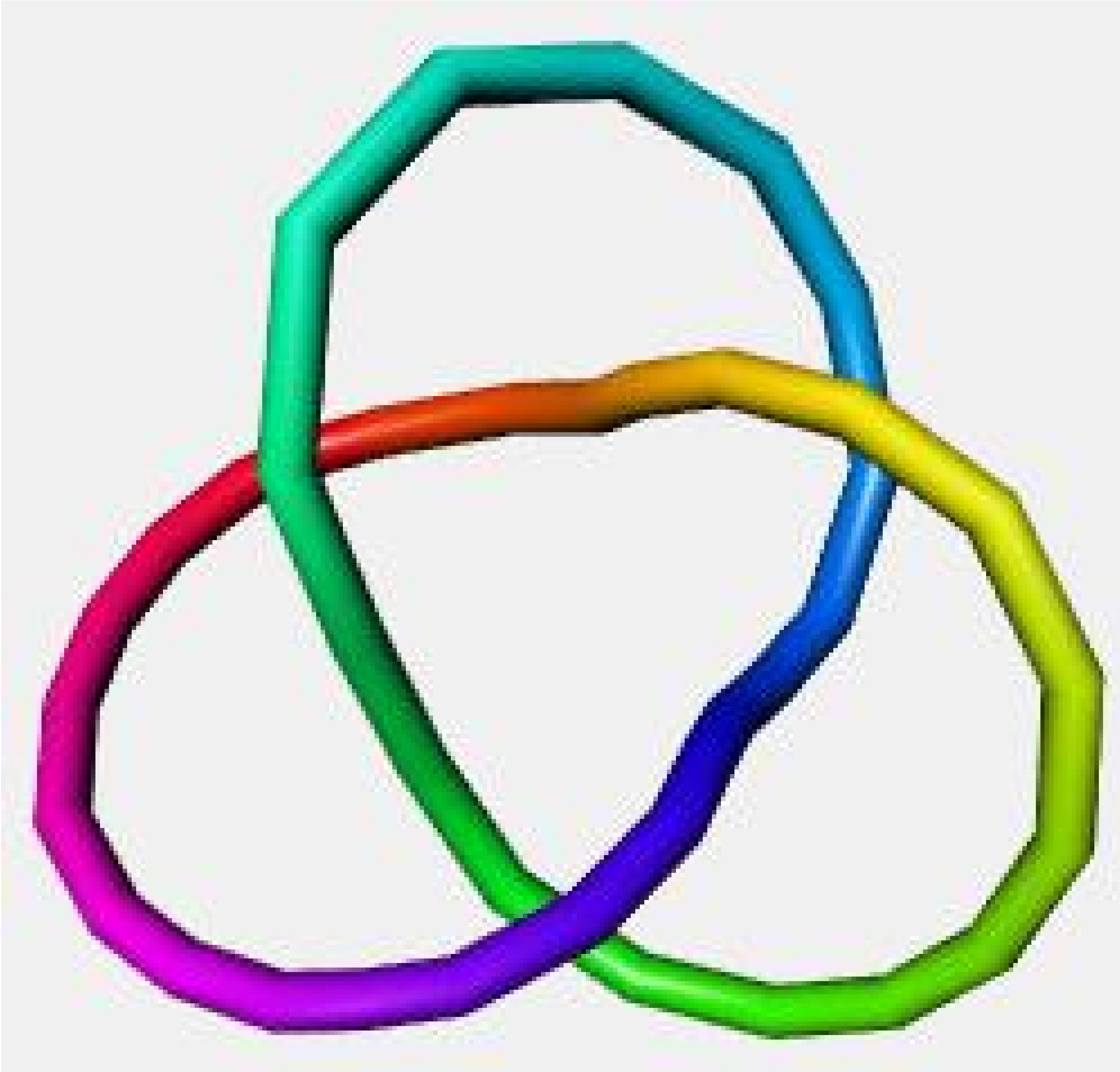


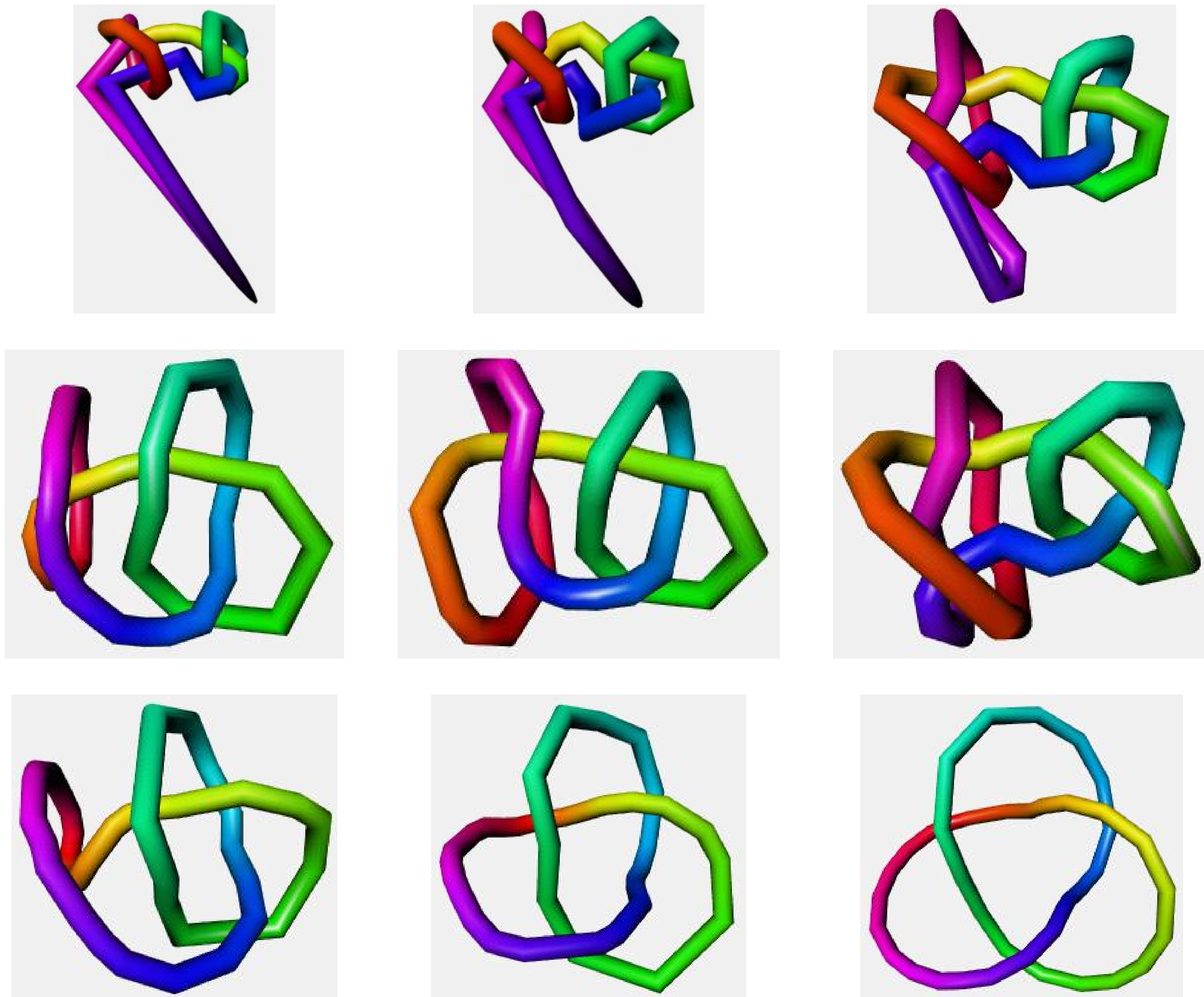












Dibujos De Nudos

Primero: Manipular nudos en el espacio es difícil.

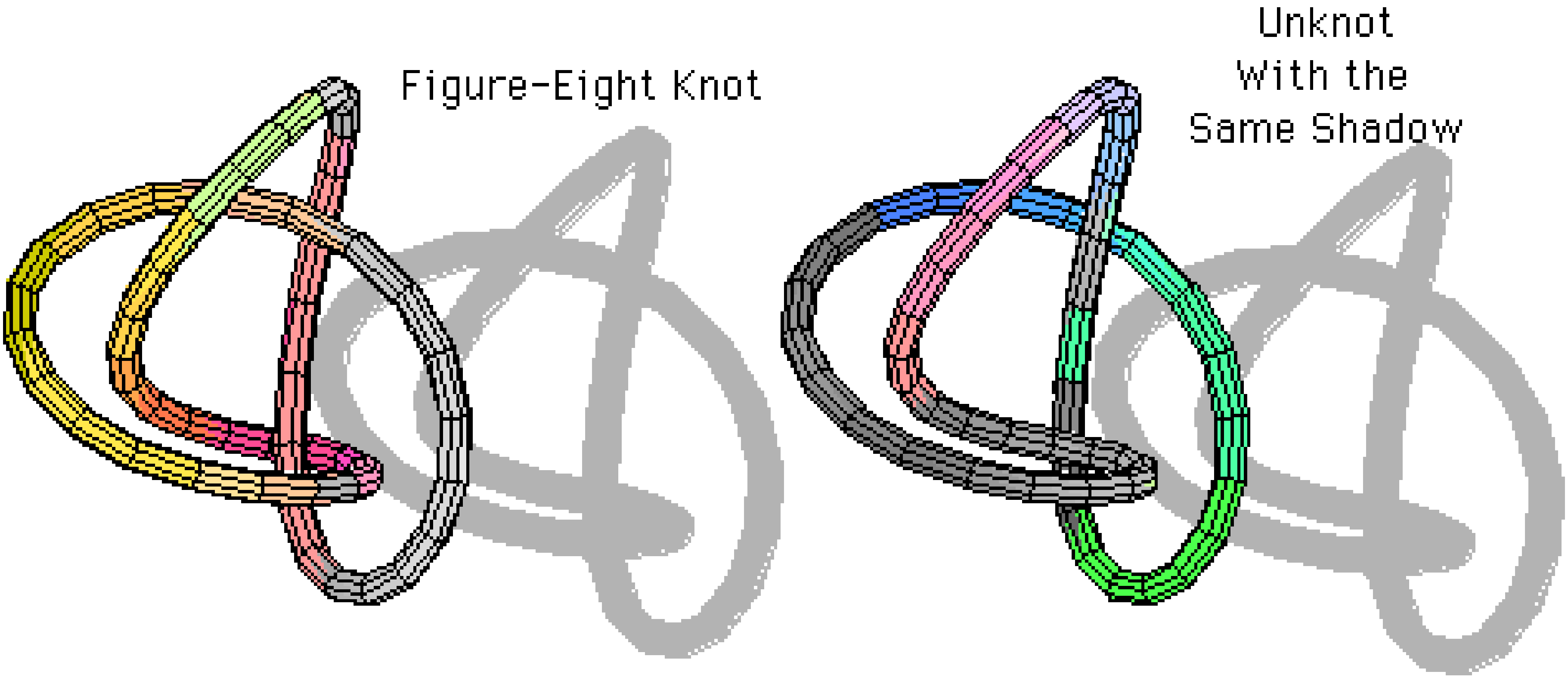
Segundo: Queremos hacer dibujos más fáciles, pero de los que se pueda recuperar el objeto tridimensional.

Proyectemos al nudo sobre un plano.

¿Qué es una proyección?

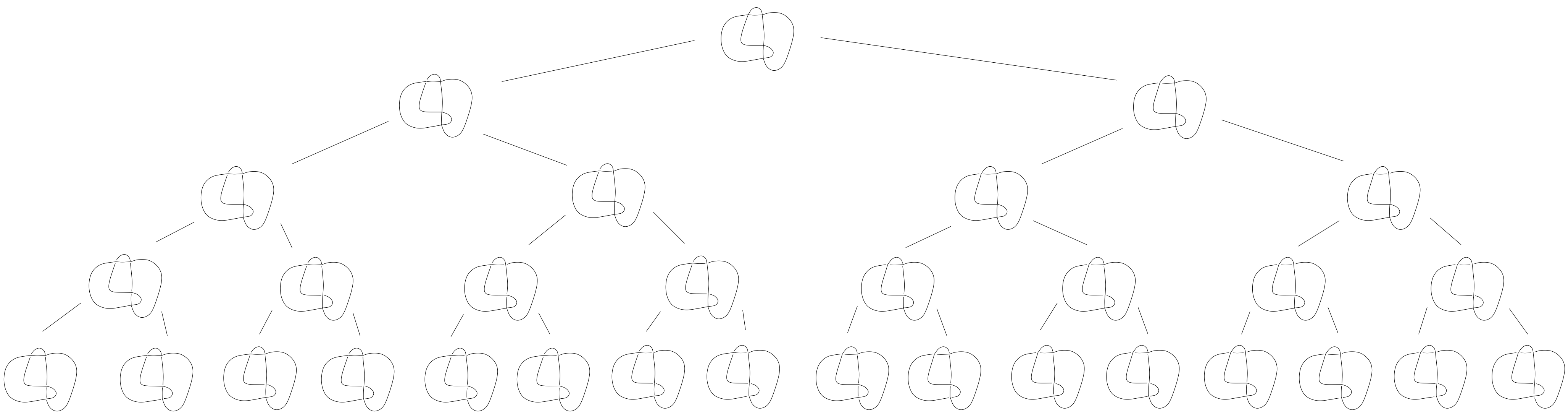
Una proyección no nos permite reconstruir el objeto original.

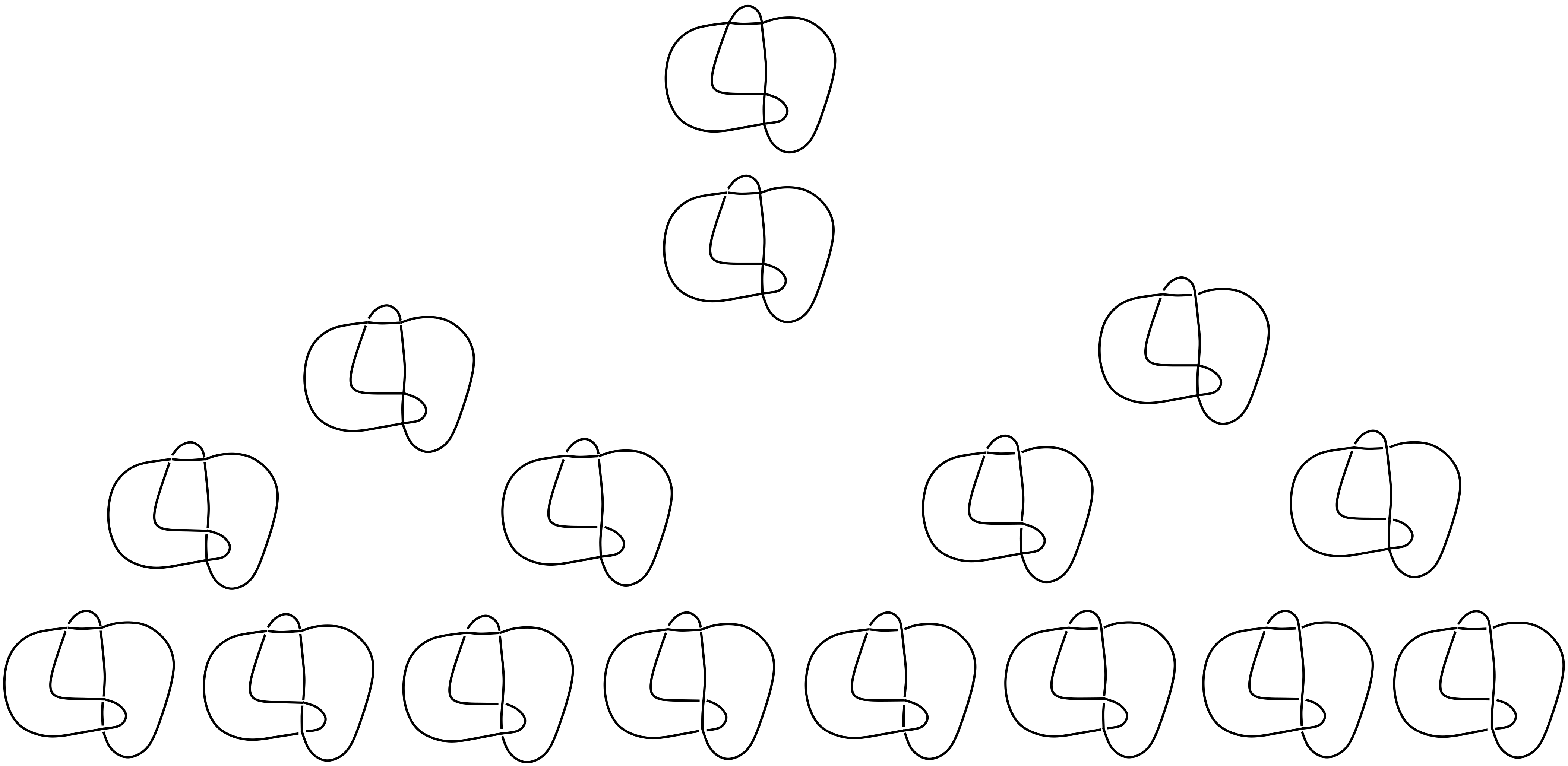
TWO KNOTS WITH THE SAME PROJECTION

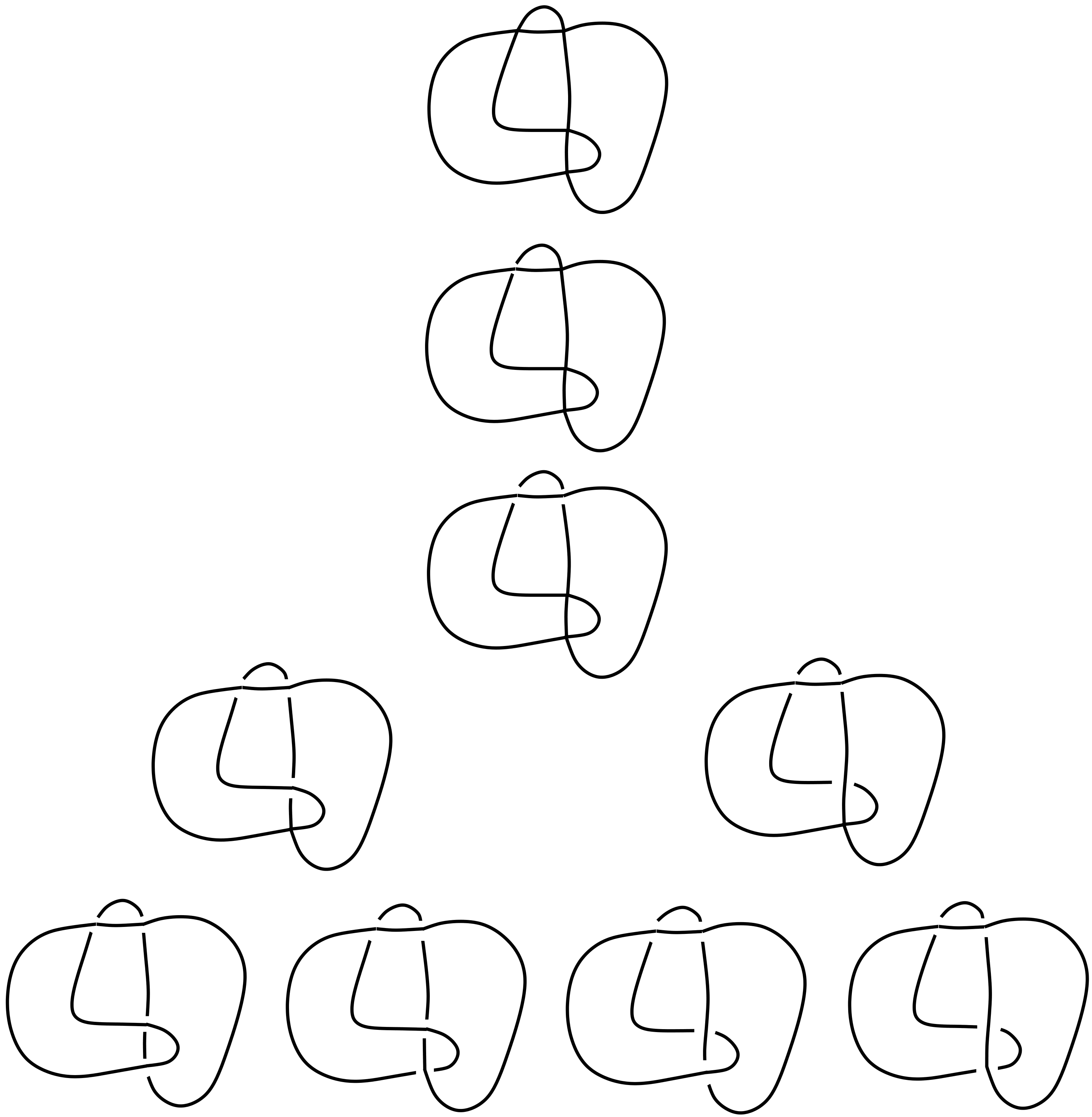


e illustrates the fact that one cannot recognize a particular kno
one of its shadows. The traditional (algebraic/combinatorial) a
eory has been to "decorate" the shadow with labels indicating w
e knot is going over or under which other part whenever the shac
cross itself. A standard graphical way to convey this extra inf
gaps in the shadow.

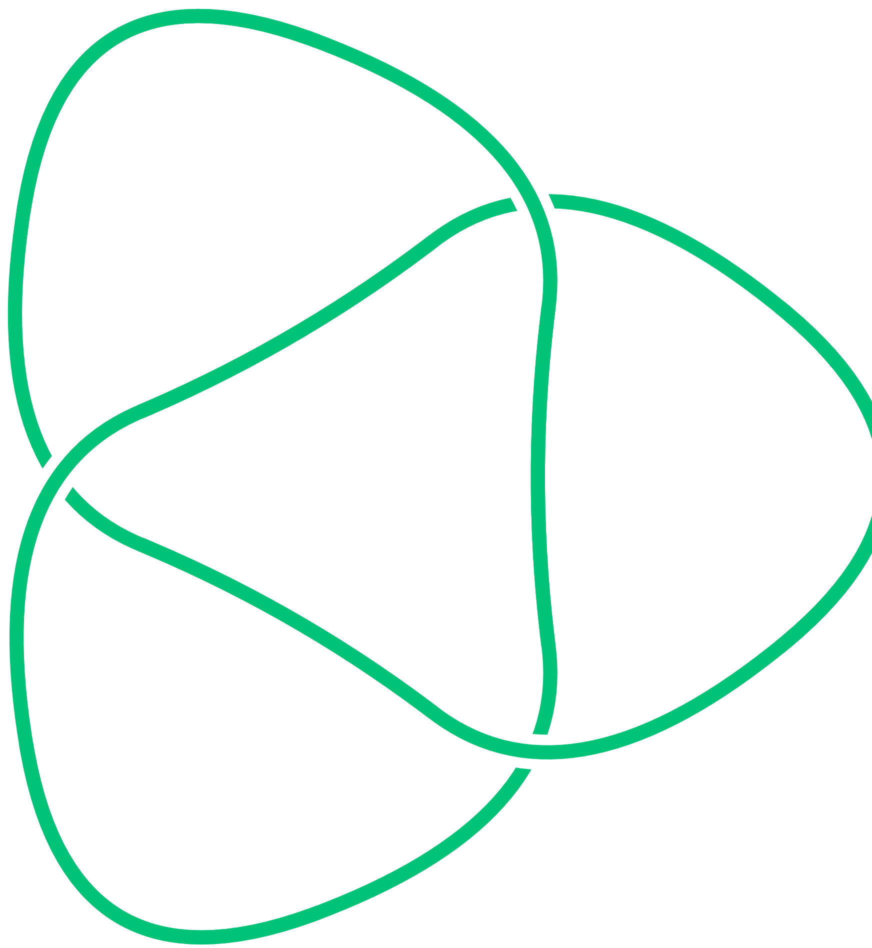
A una proyección le debemos añadir "indicaciones" en los puntos de cruce que nos digan qué puntos están más cerca o más lejos (están por arriba o por abajo).



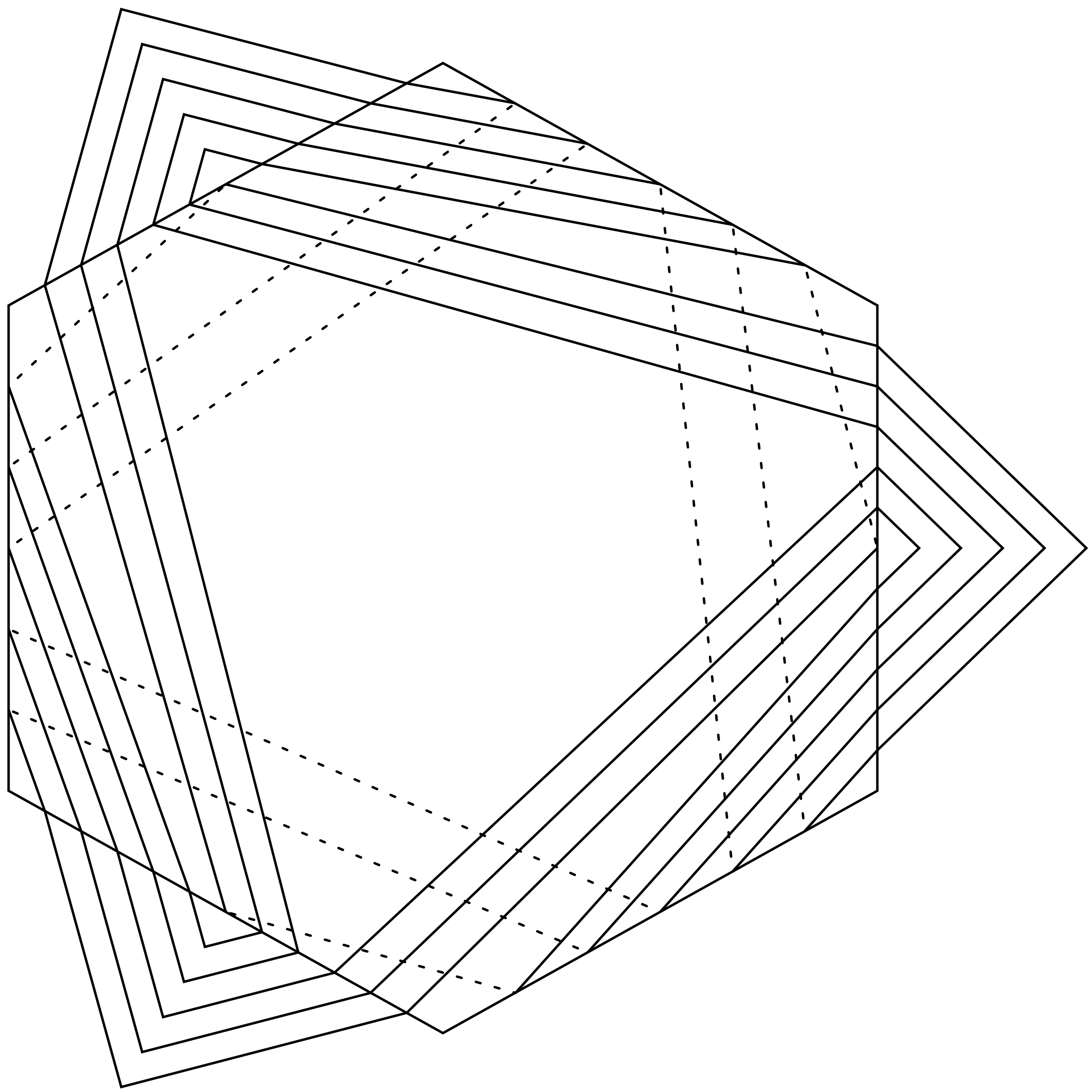




A una proyección le debemos añadir "indicaciones" en los puntos de cruce que nos digan qué puntos están más cerca o más lejos (están por arriba o por abajo).

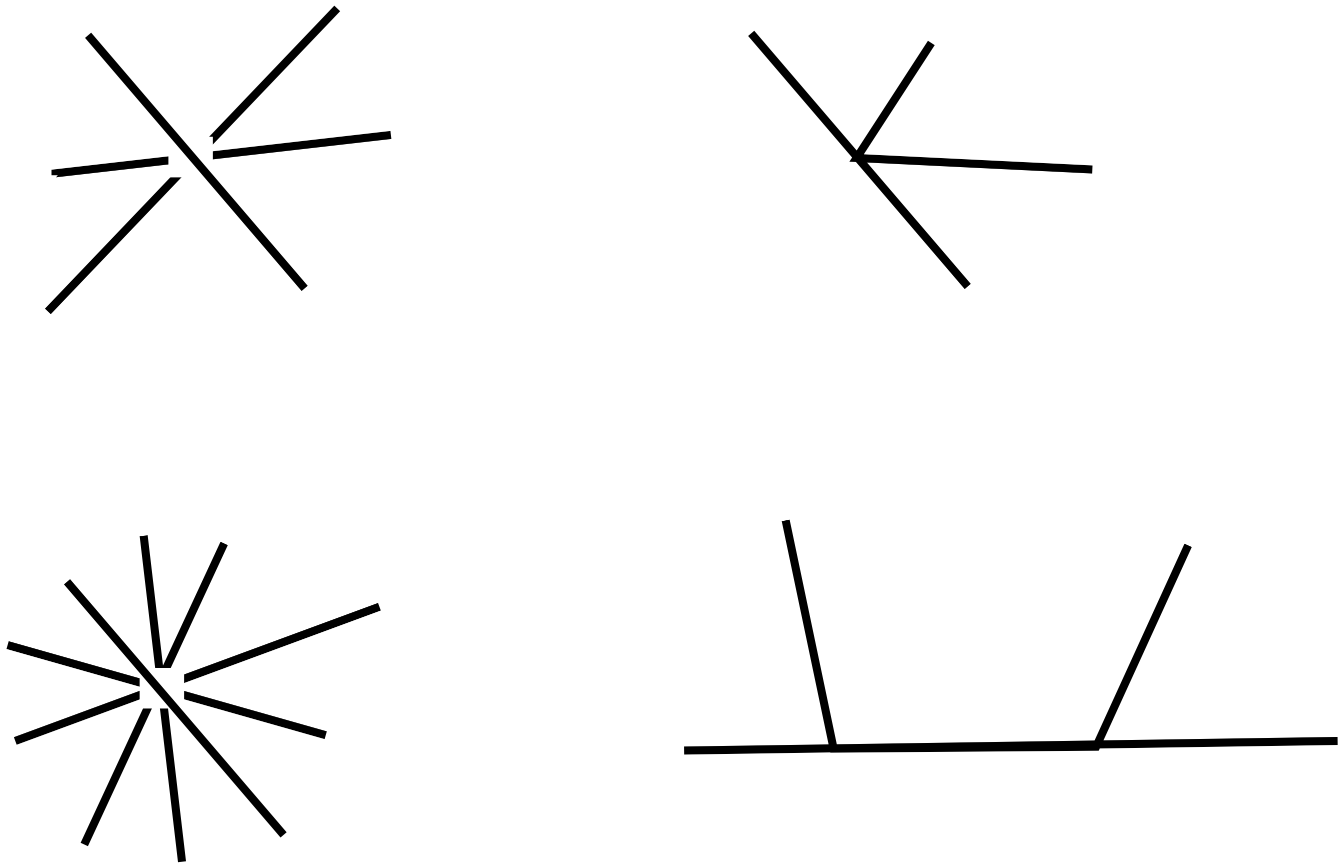


(otra manera)



Pero, para de veras poder reconstruir el nudo, debemos prohibir algunas proyecciones

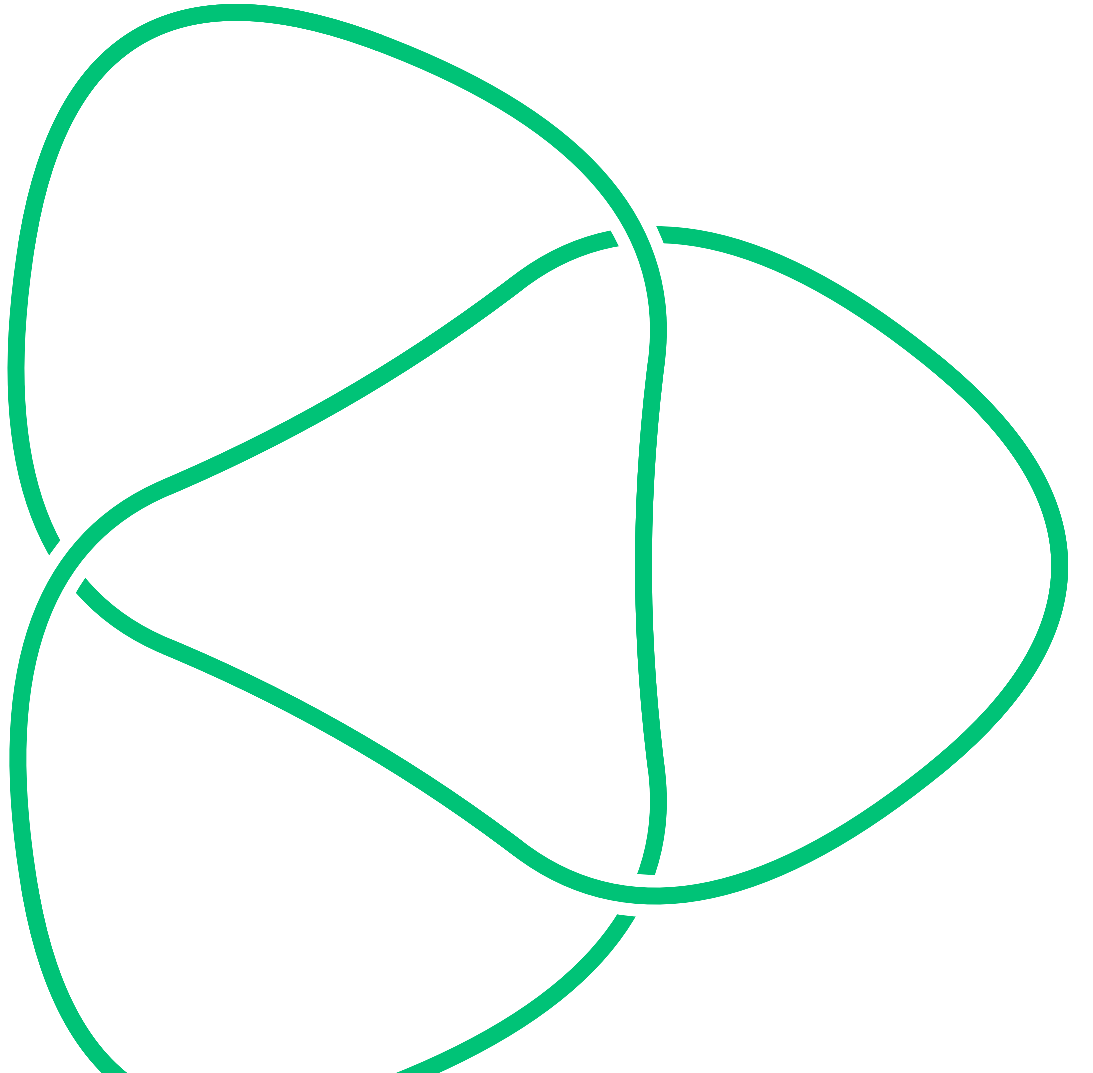
NO:

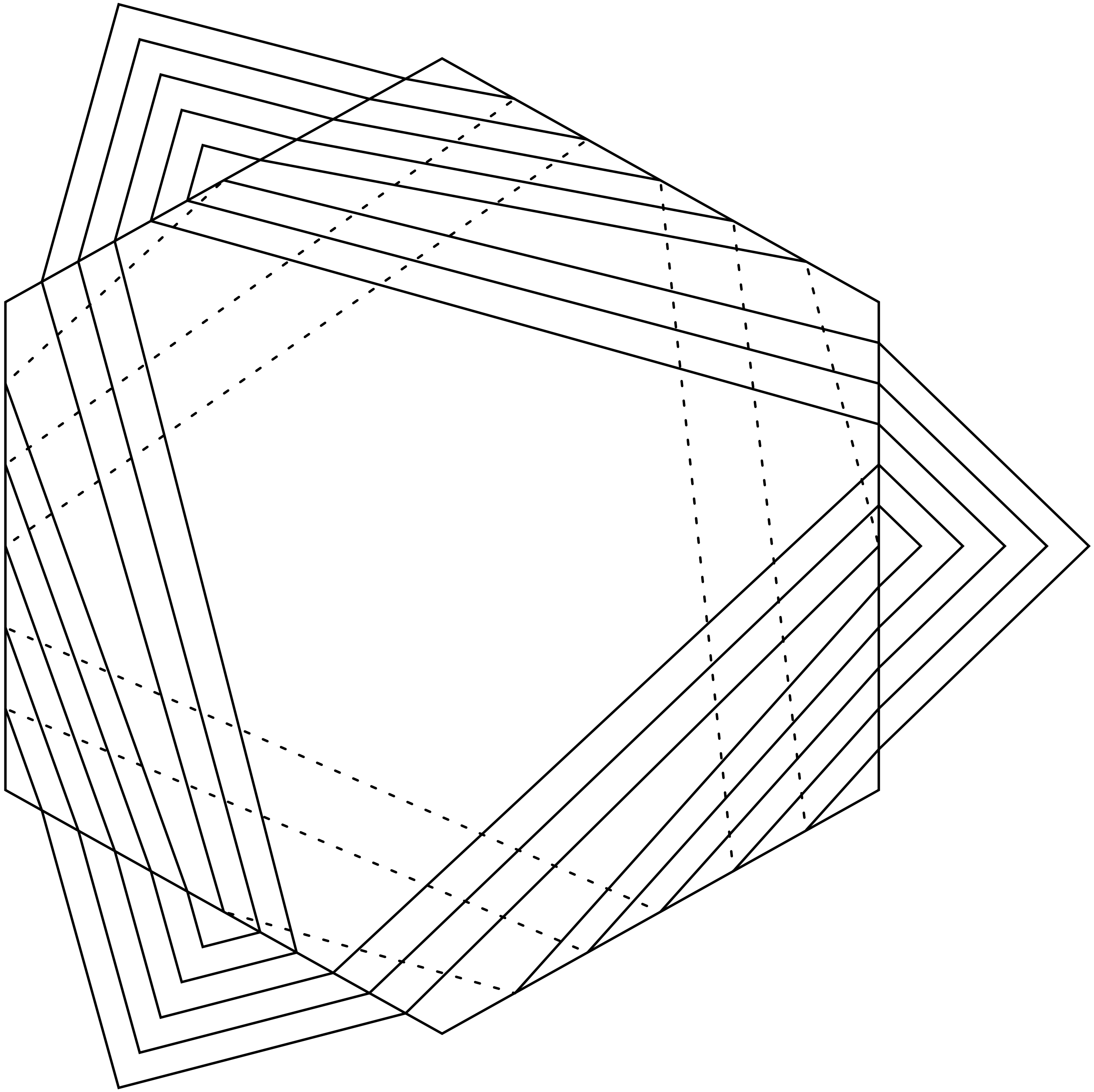


PROHIBIDO!

Definición. Una proyección de un nudo se llama regular si sólo contiene un número finito de puntos dobles y ningún vértice del nudo se proyecta sobre otro punto.

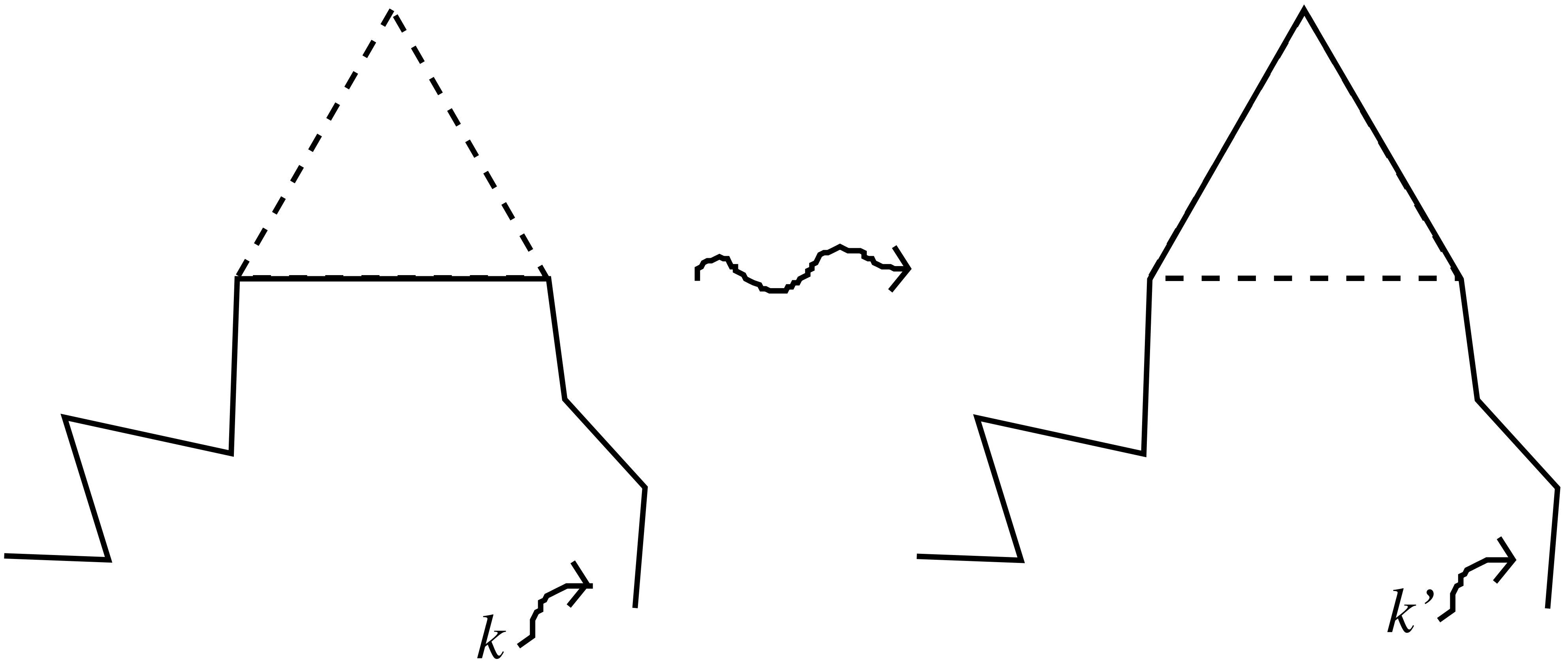
Definición. Una proyección regular de un nudo, k, junto con las indicaciones en los puntos de cruce que nos dicen qué puntos pasan por arriba o por abajo, se llama un <u>diagrama</u> del nudo k.





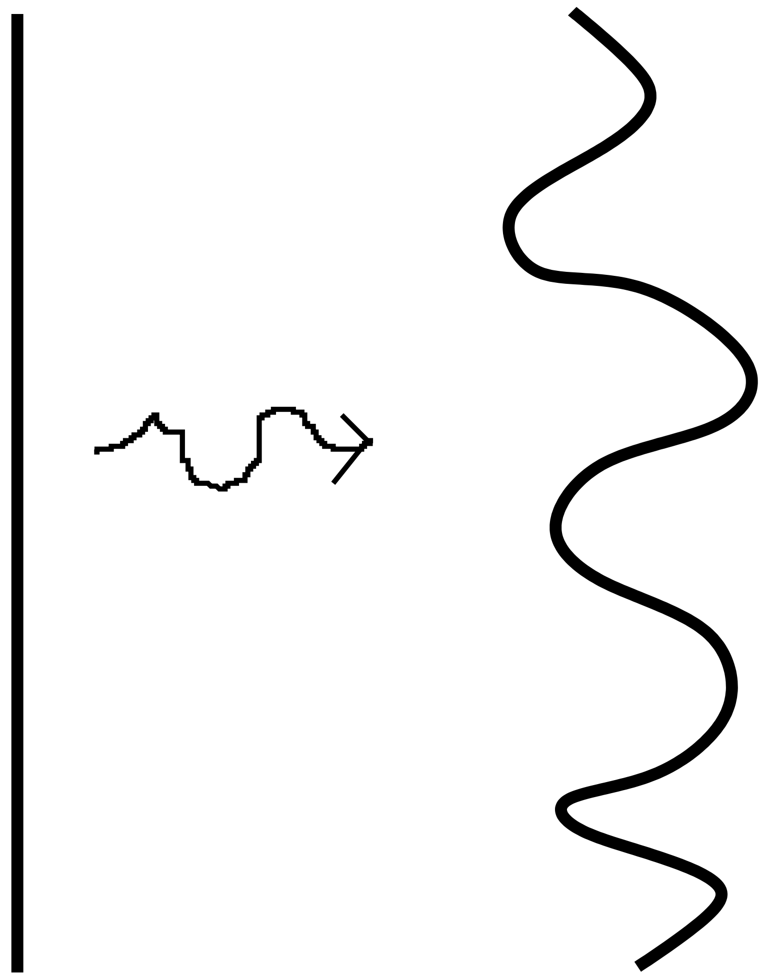
¿Cómo se ven las movidas Δ en un diagrama?

Recordatorio:



Vamos a fijarnos en un pedacito del nudo.
Digamos, vamos a fijarnos en un segmento:

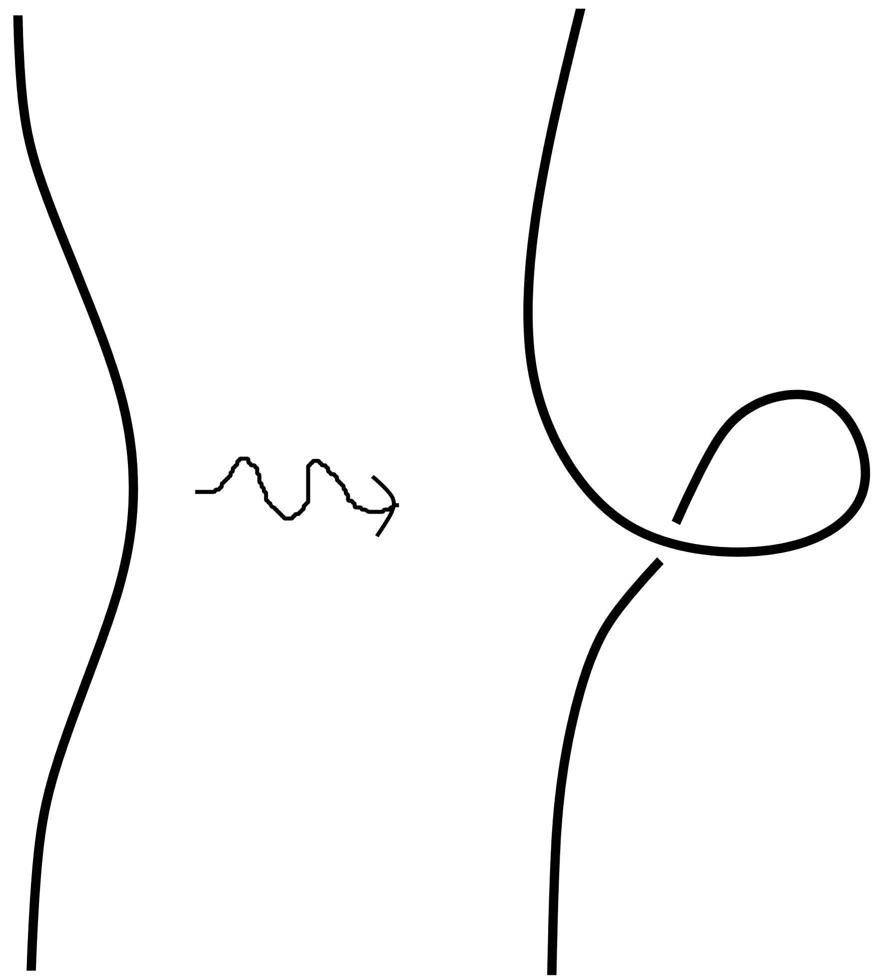
El segmento no toca a otro segmento:



(O sea, puedo desarrugar (o arrugar) el dibujo.)

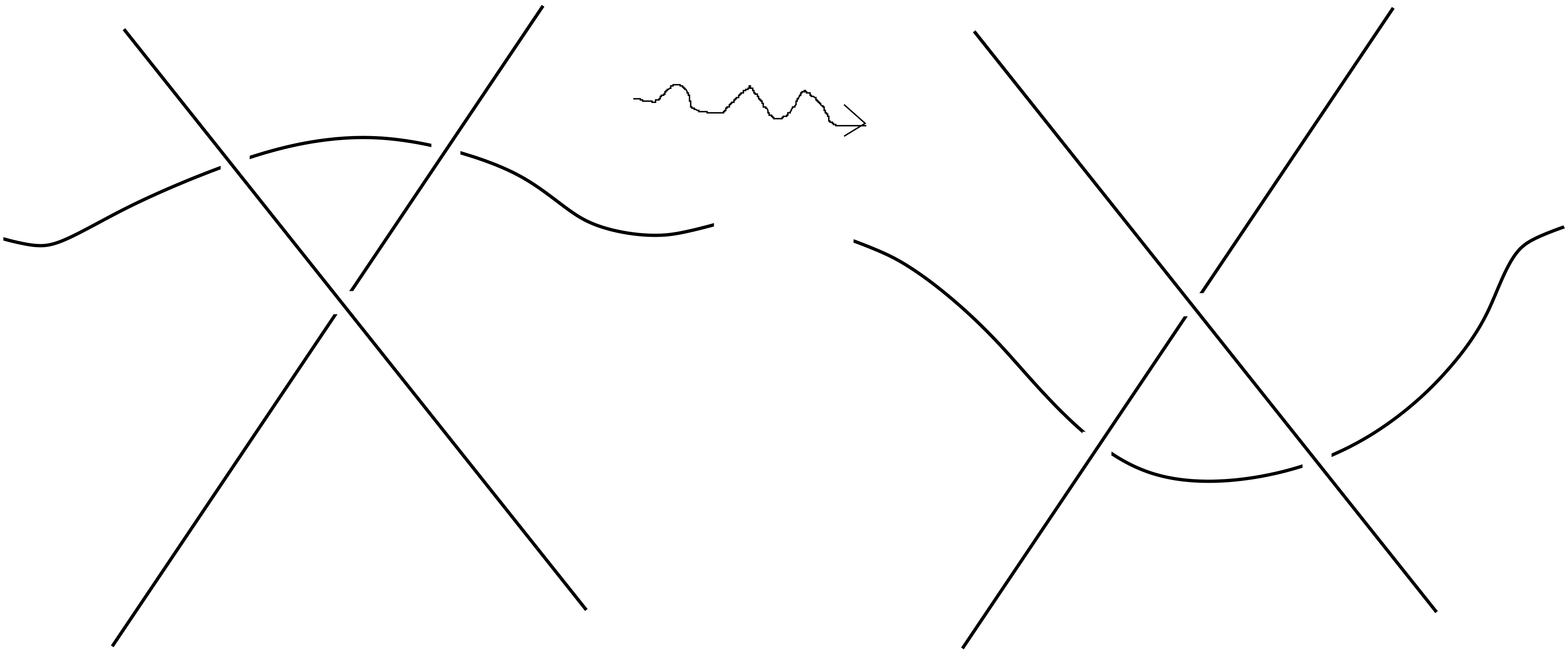
(Este cambio “realmente” no cambia el diagrama.)

El segmento se toca a sí mismo:



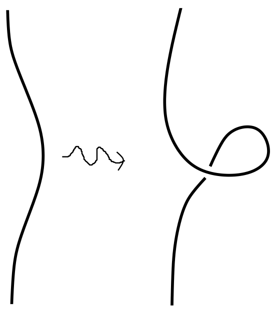
El segmento toca a otro segmento:

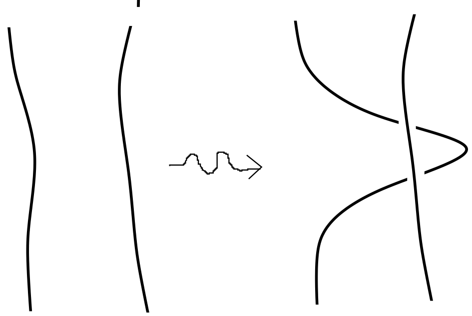
El segmento pasa por un punto de cruce:

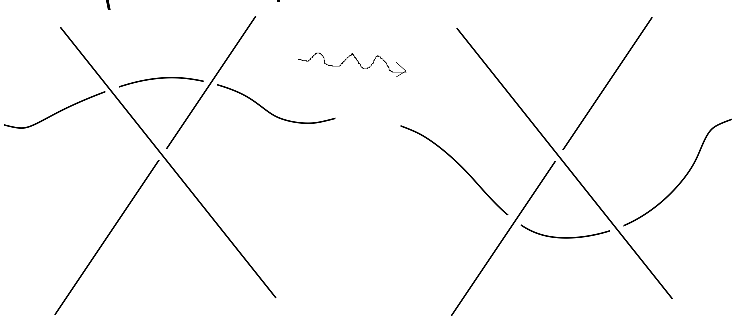


¿Qué más puede pasar?

Nada. Son todas las posibilidades, pues estamos en una proyección regular.

I. 

II. 

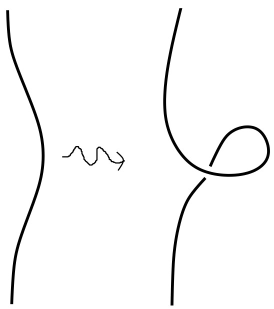
III. 

Estos tres cambios se conocen como

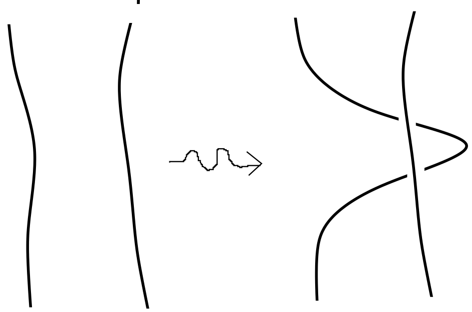
“Las Movidas de Reidemeister”

Movidas de Reidemeister

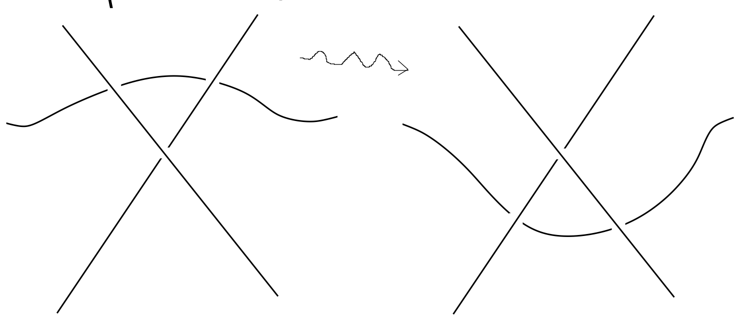
I.



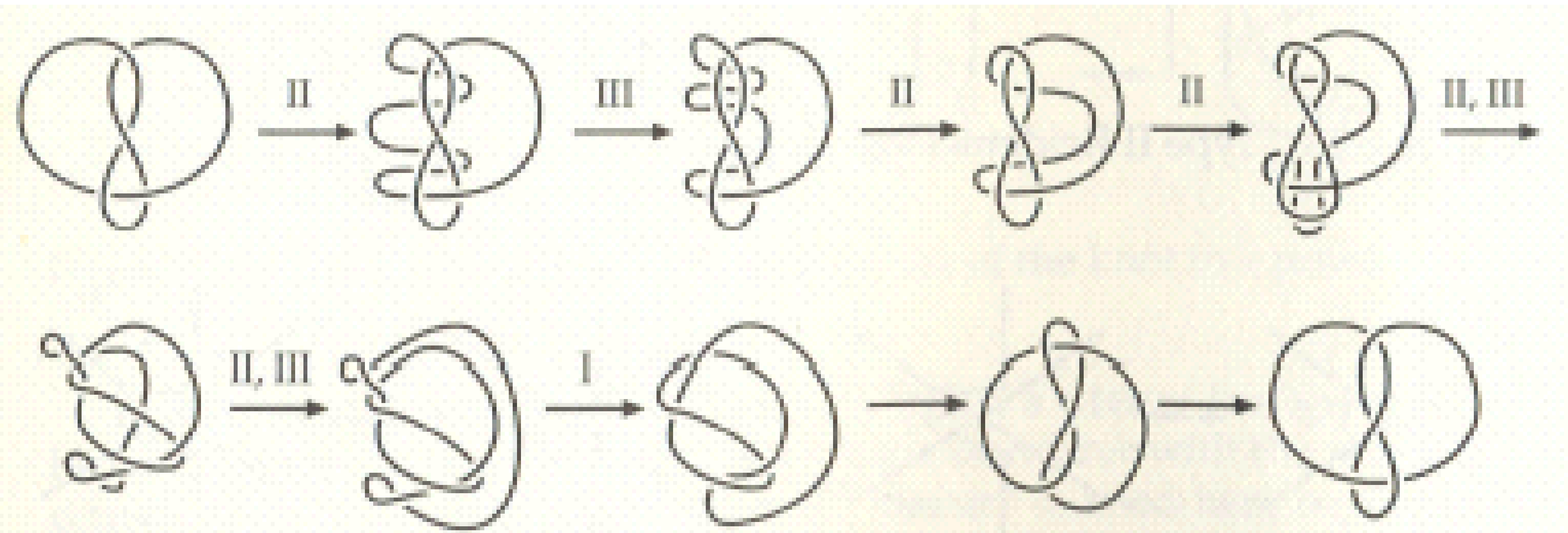
II.



III.



Es claro que dos diagramas que difieren por una sucesión de movidas de Reidemeister representan al mismo nudo.

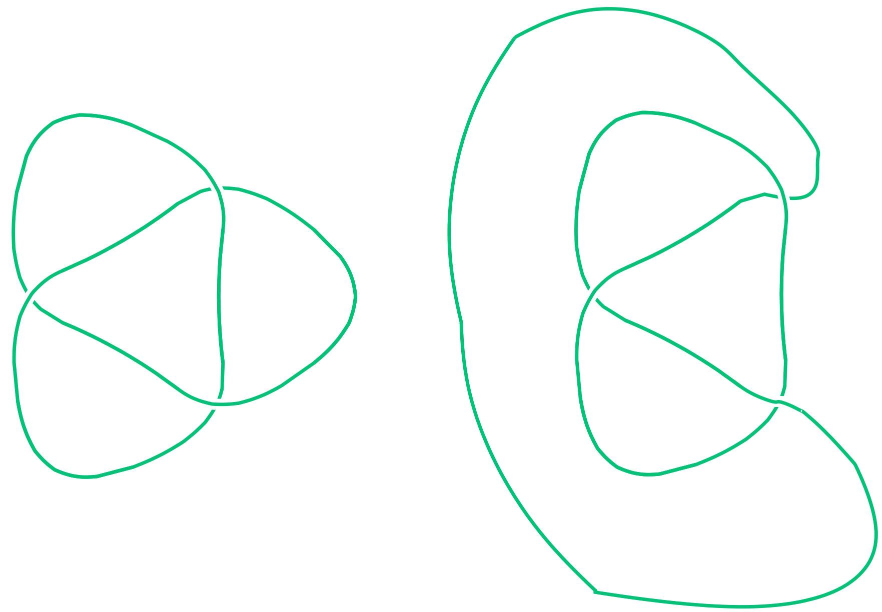


Pero el maestrísimo, el señor don Kurt Reidemeister además demostró:

Teorema. Si dos diagramas representan al mismo nudo, entonces hay una sucesión finita de movidas I, II y III que llevan un diagrama al otro.

Que es un teorema impresionante, pero...

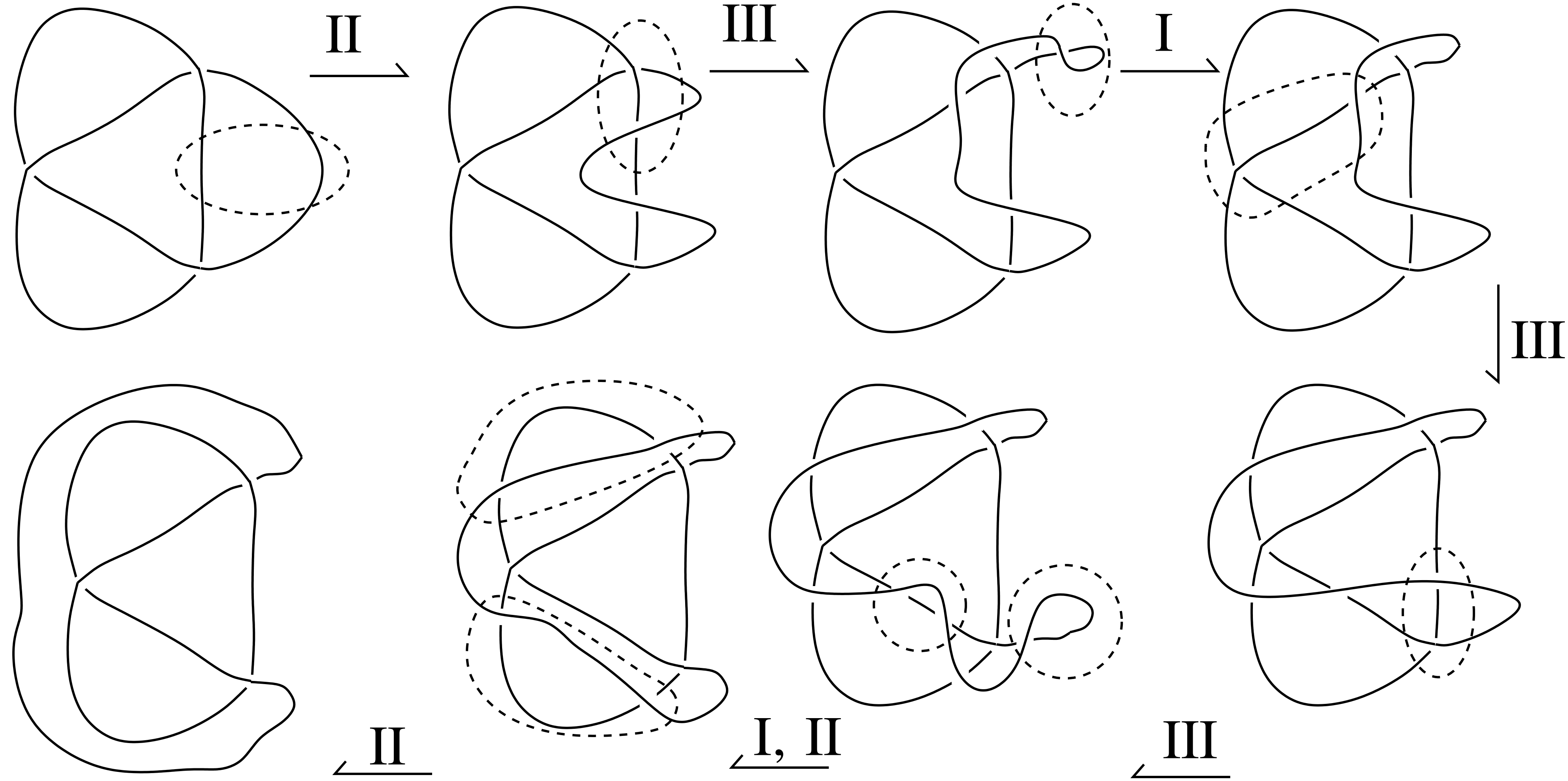
(es una buena noticia que, para verificar la equivalencia de nudos, nos basta con las movidas de Reidemeister.)

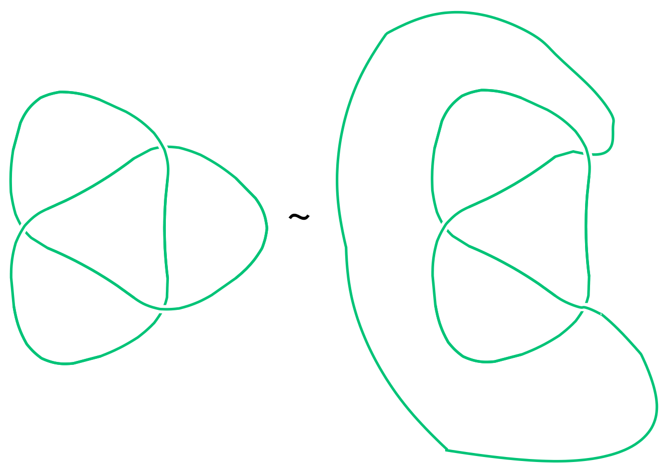


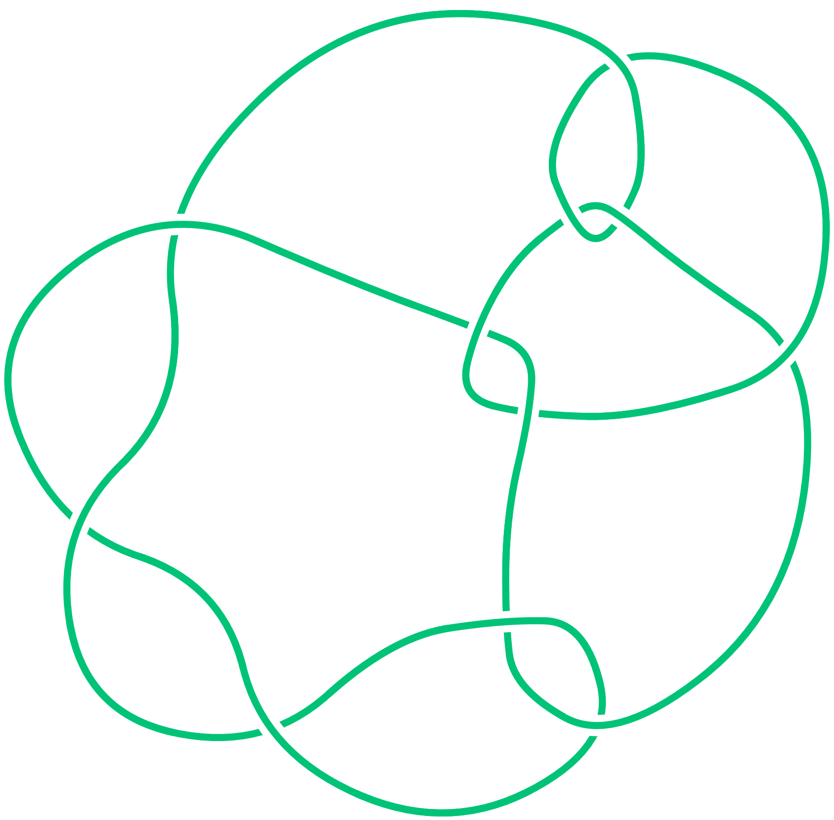
Los dos diagramas representan al mismo nudo.

Por Reidemeister sabemos que podemos llevar un diagrama al otro con una sucesión de movidas sencillas I, II y III.

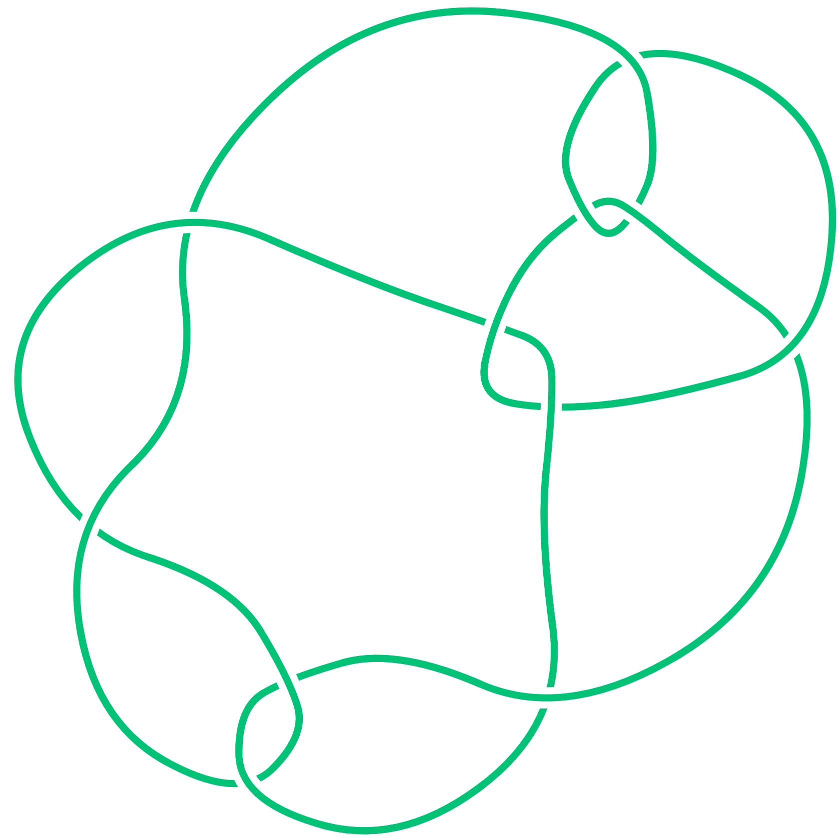
Pero Reidemeister no nos dice cuál es esa sucesión de movidas.


II
III
I
III
III
I, II
II


~



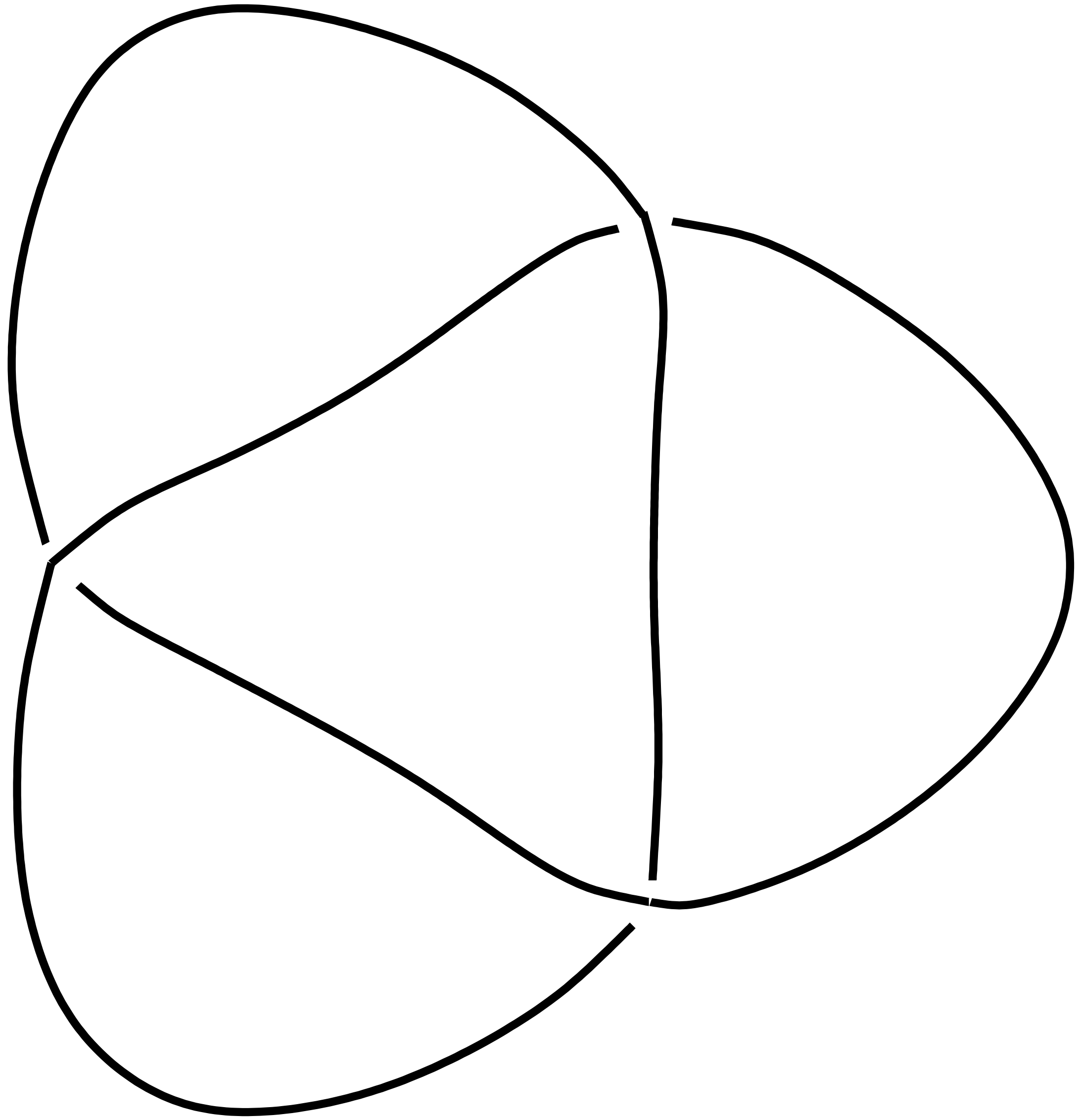
$\sim$



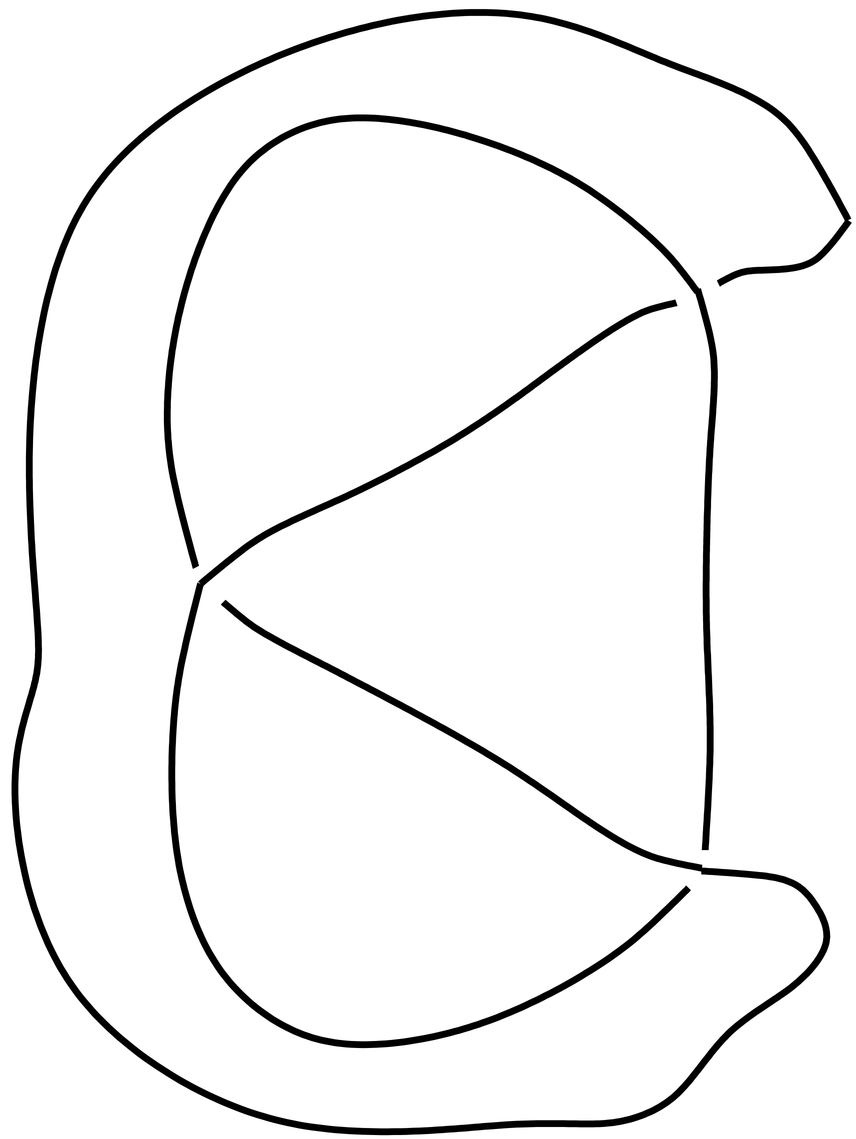
Más despacio

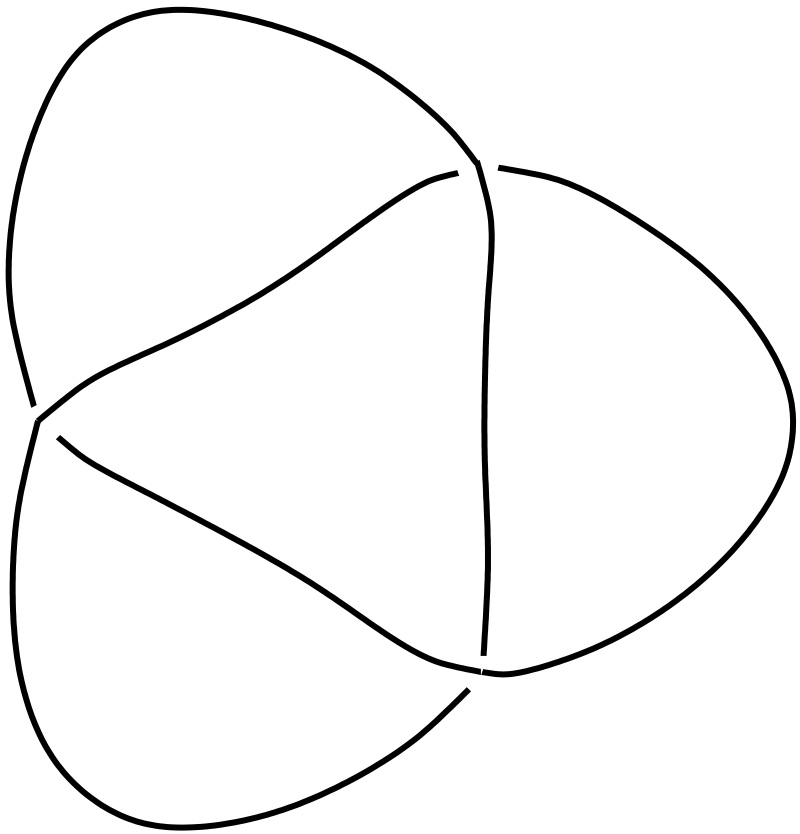
Bueno, pero primero vamos a conocer un poquito más a los nudos.

El nudo trébol ($= 3_1$)

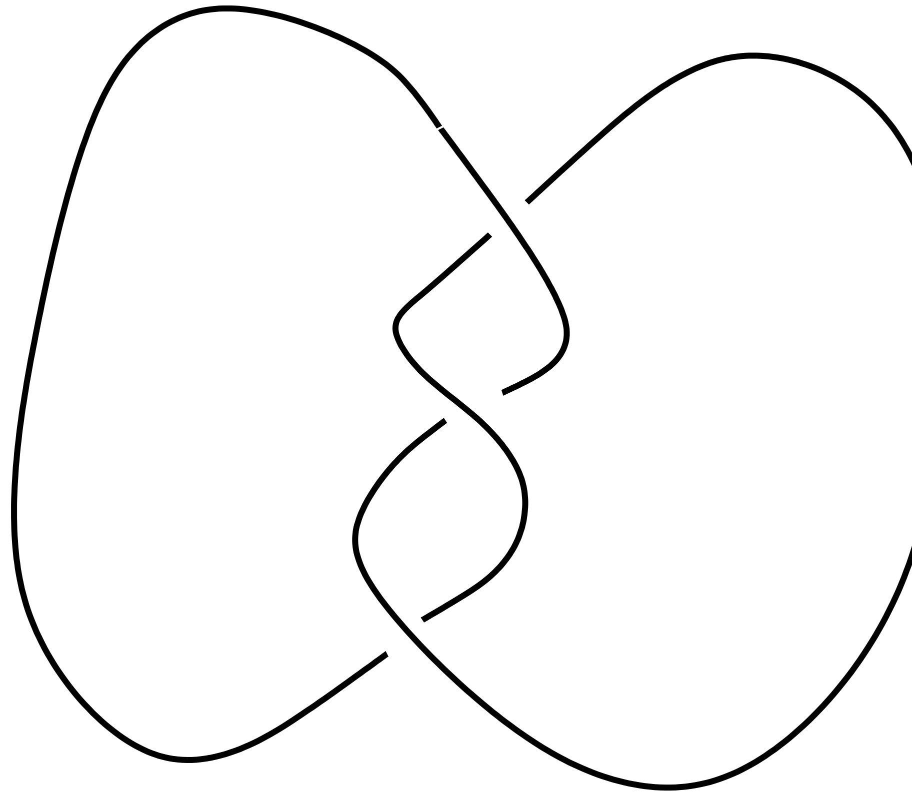


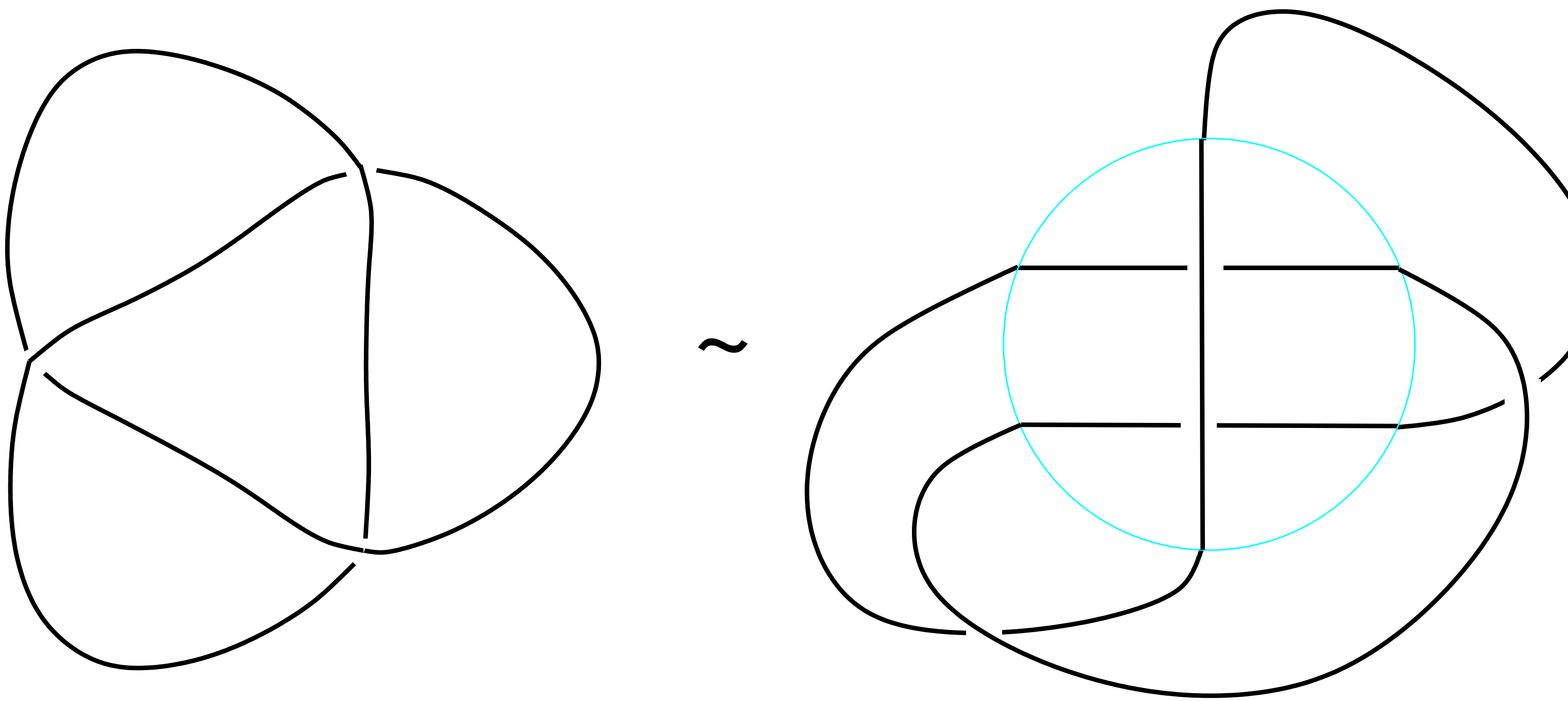
Otra vez el trébol

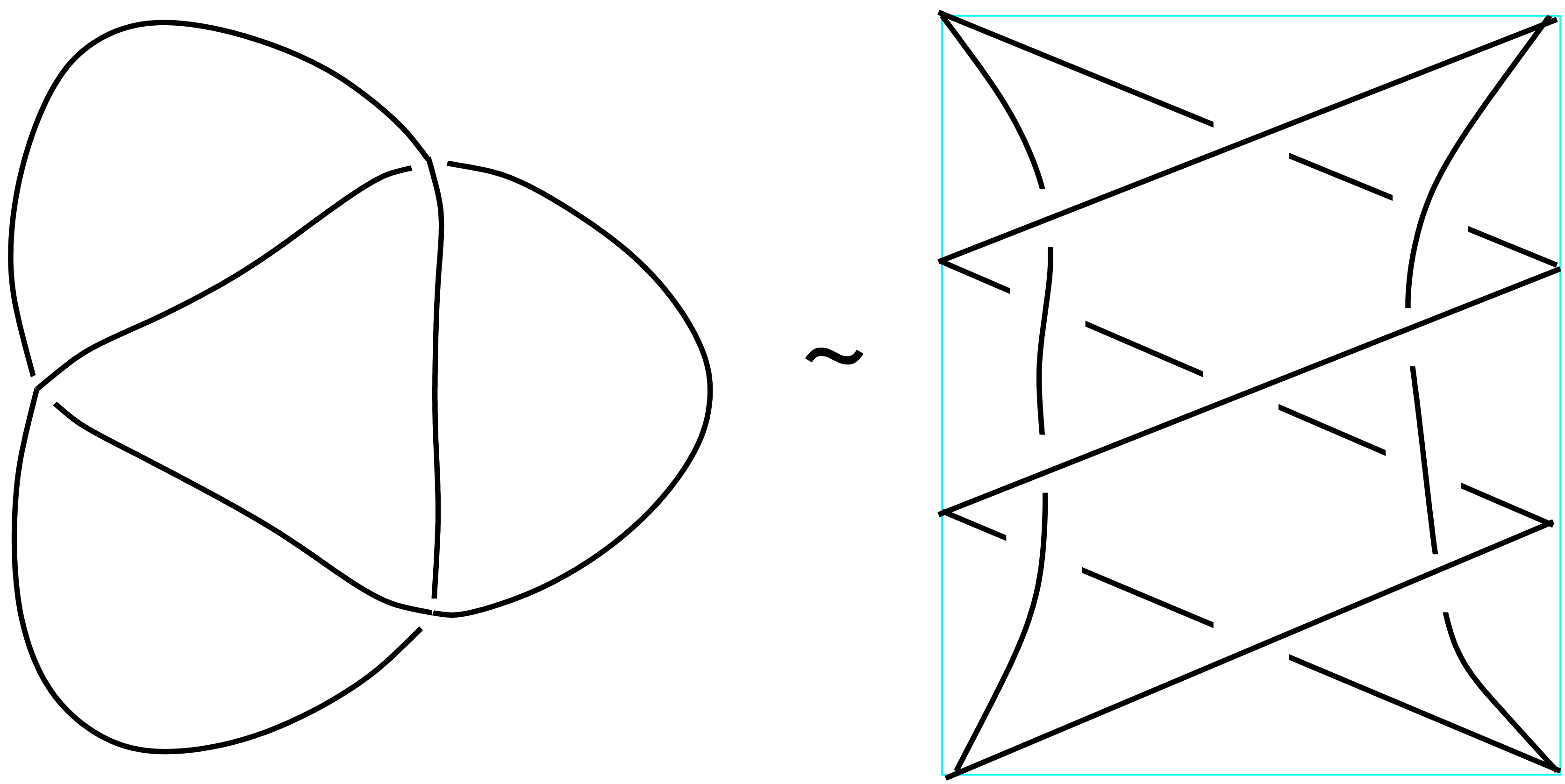




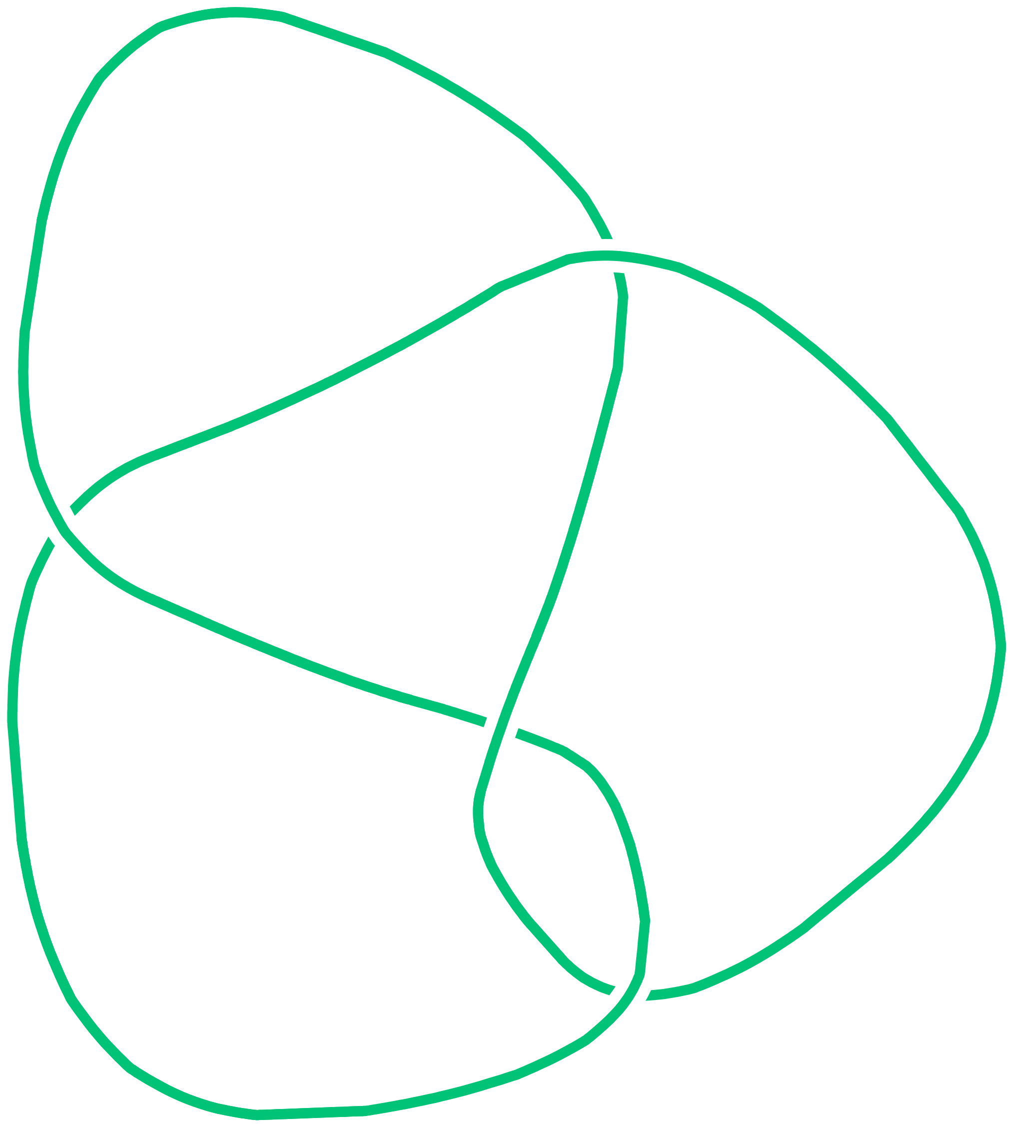
$\sim$

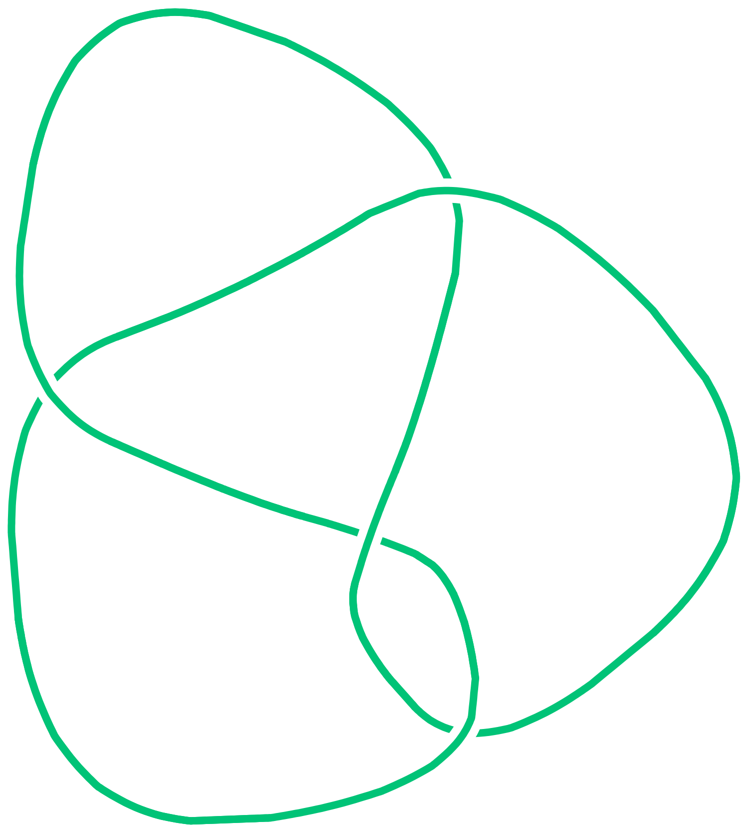




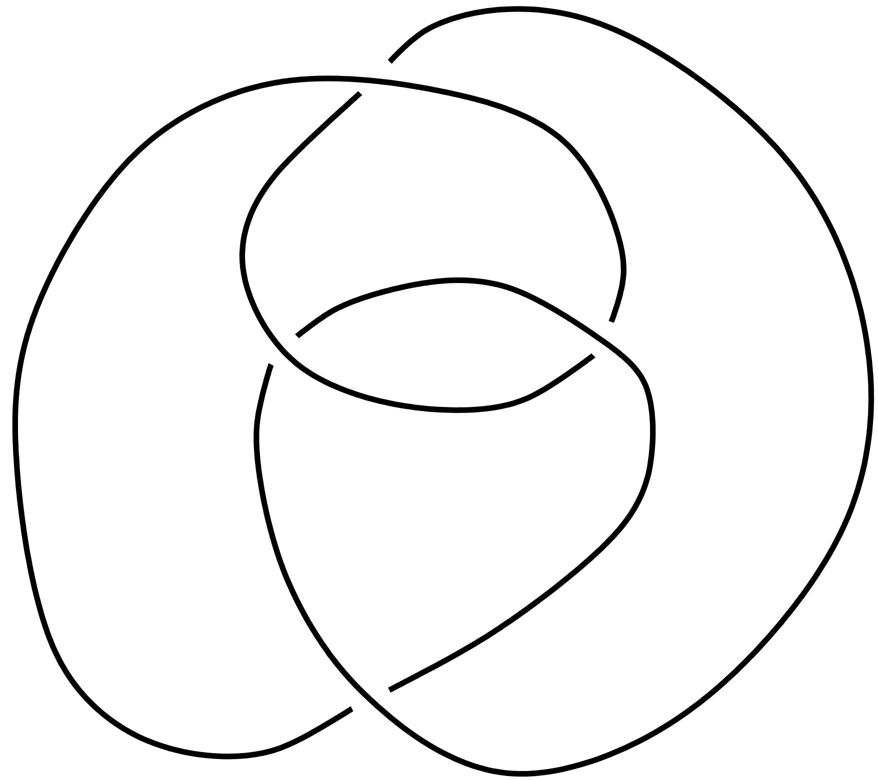


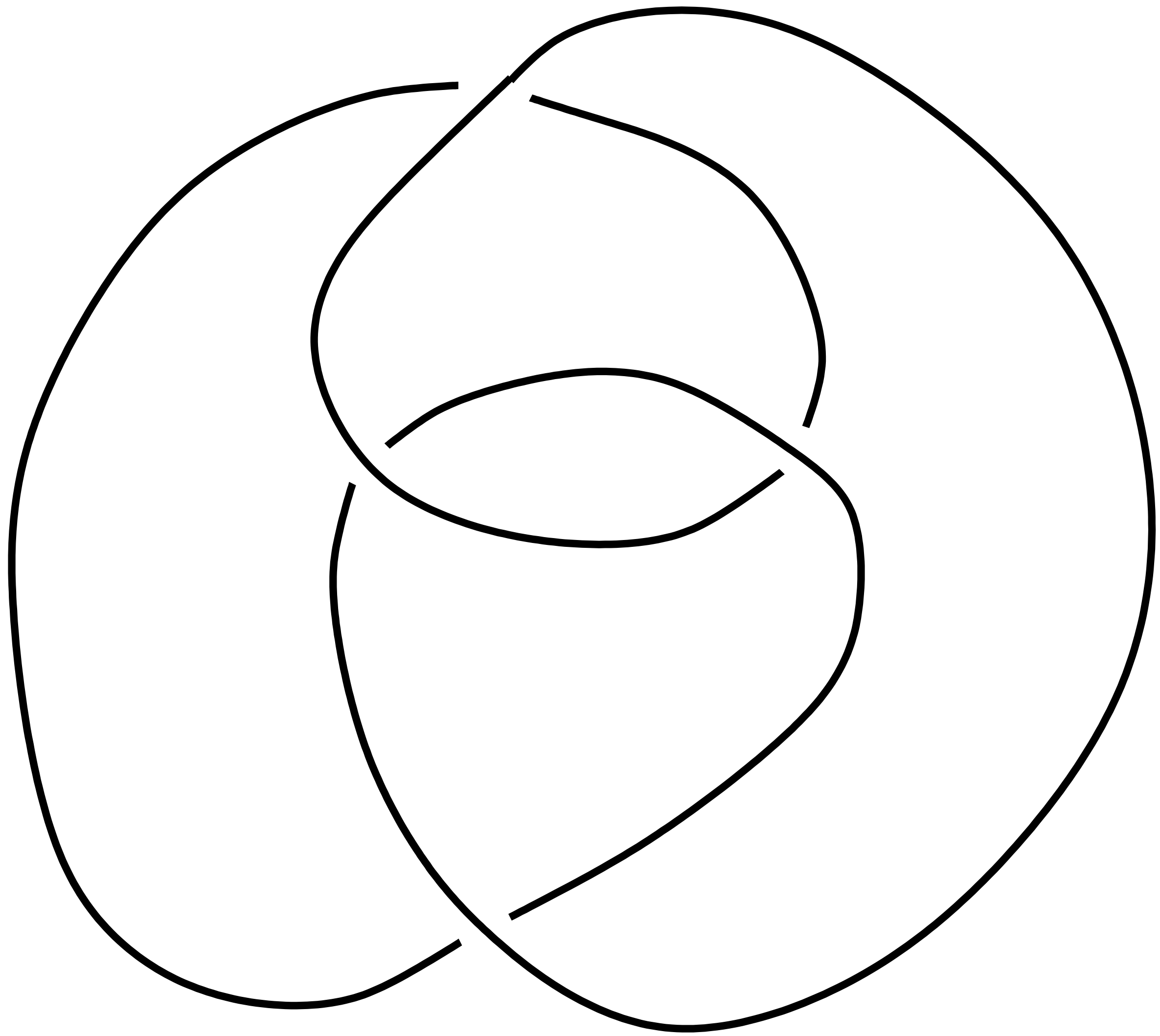
El nudo con figura de ocho ($=$ el ocho $= 4_1$)



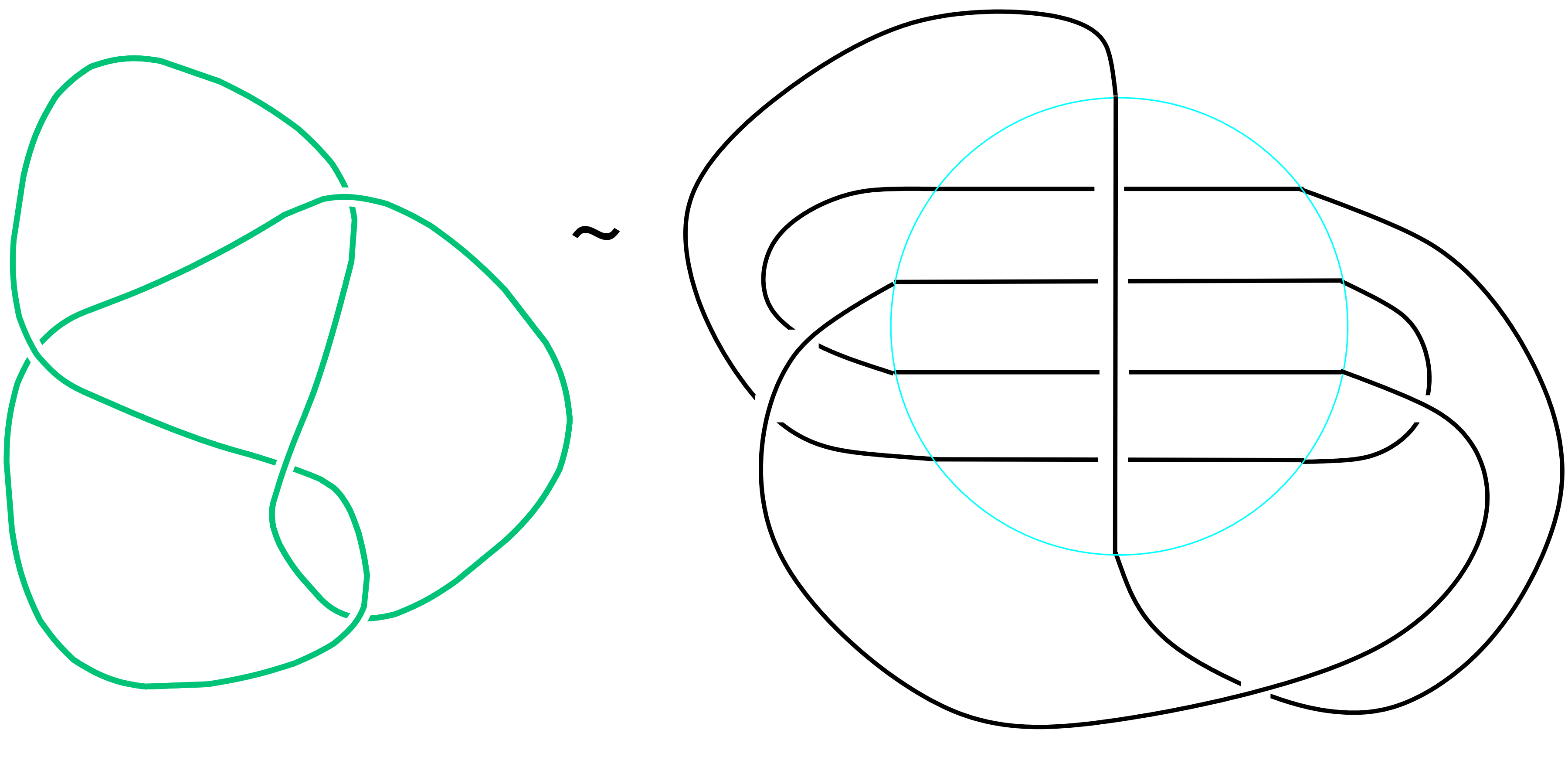


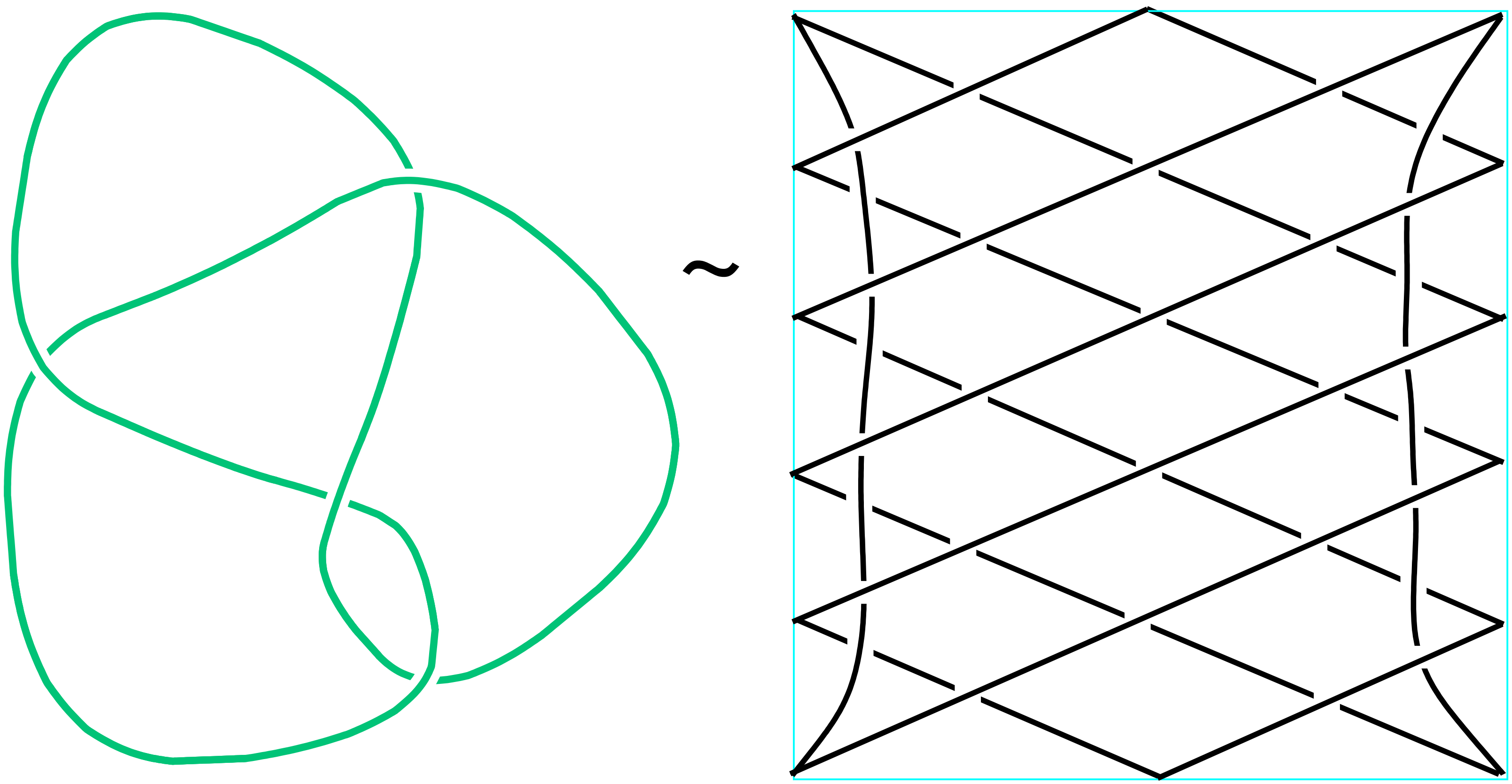
$\sim$

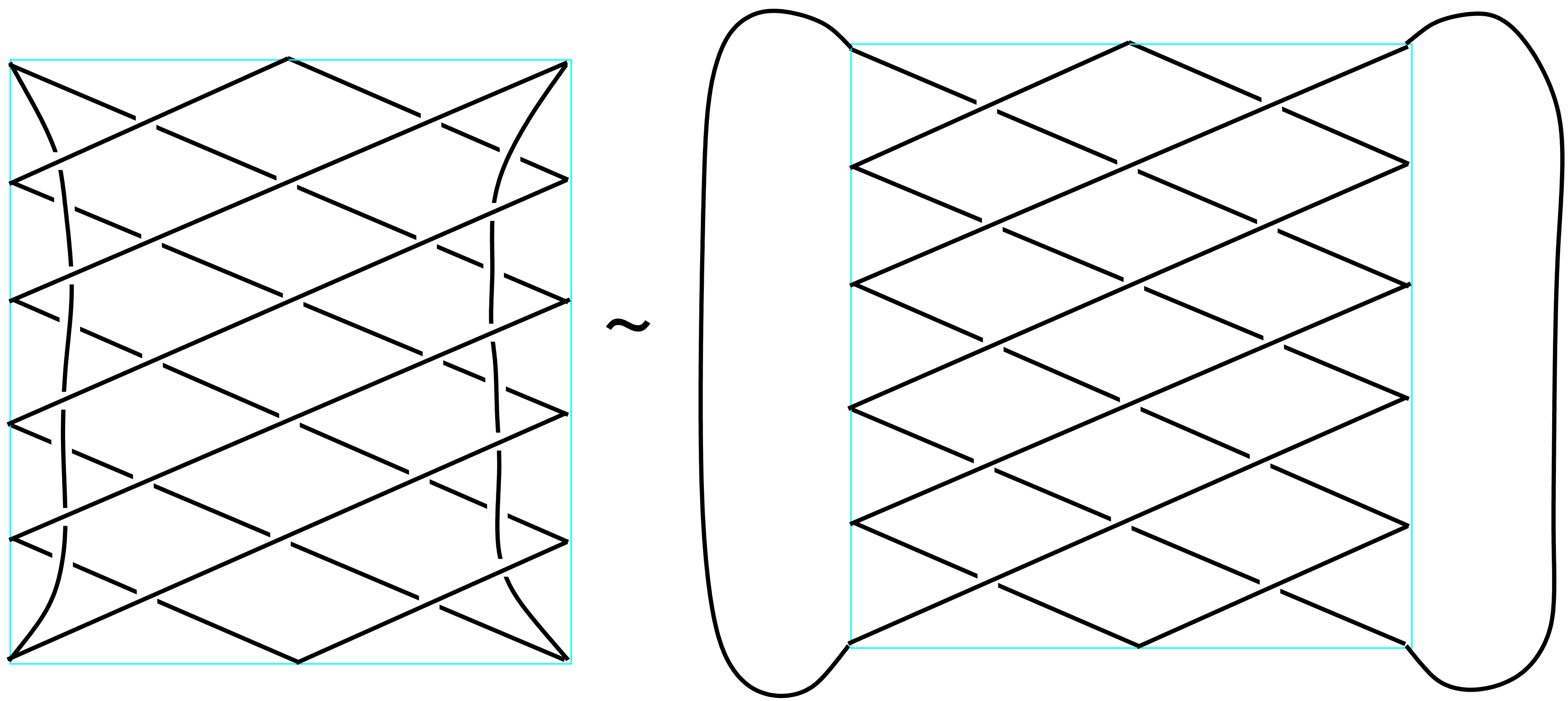




¿qué nudo es éste?

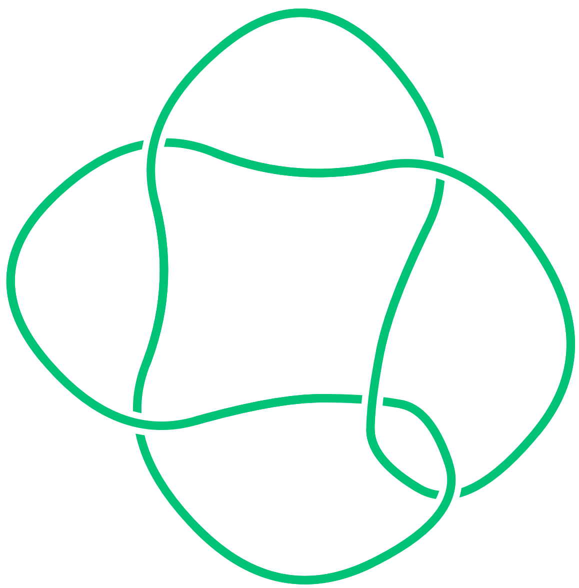


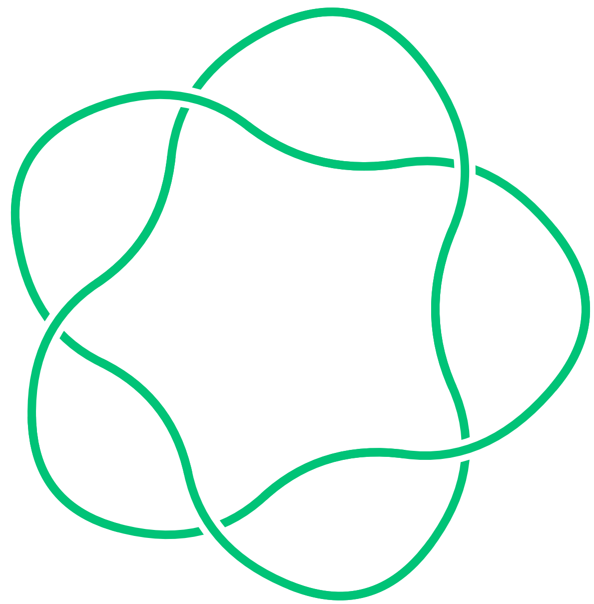




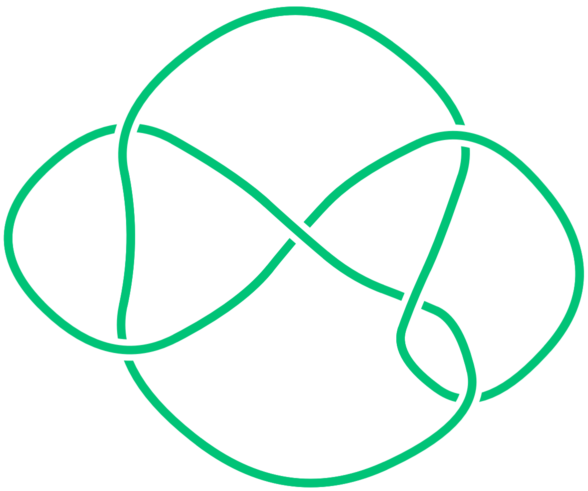
Todos los nudos

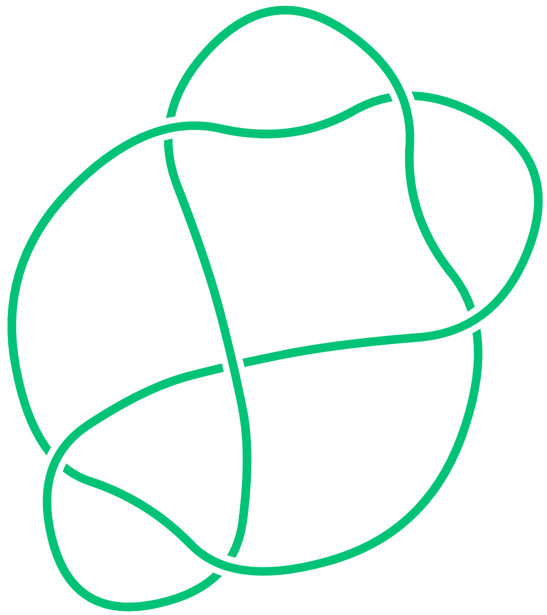
Cinco cruces

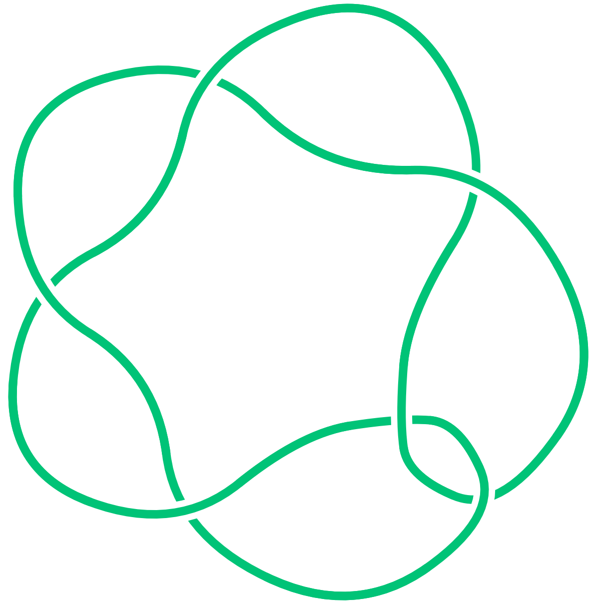




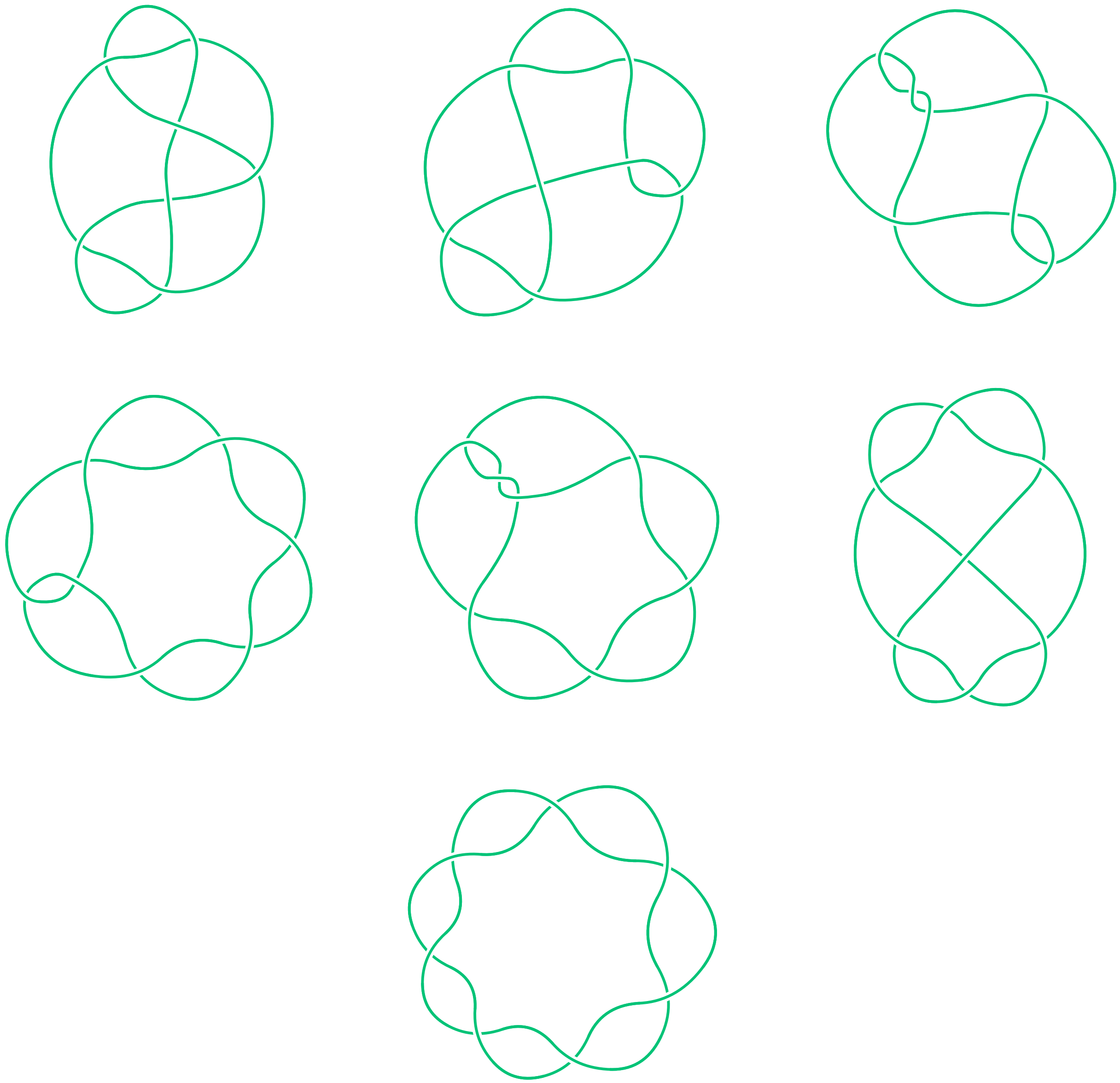
Seis cruces



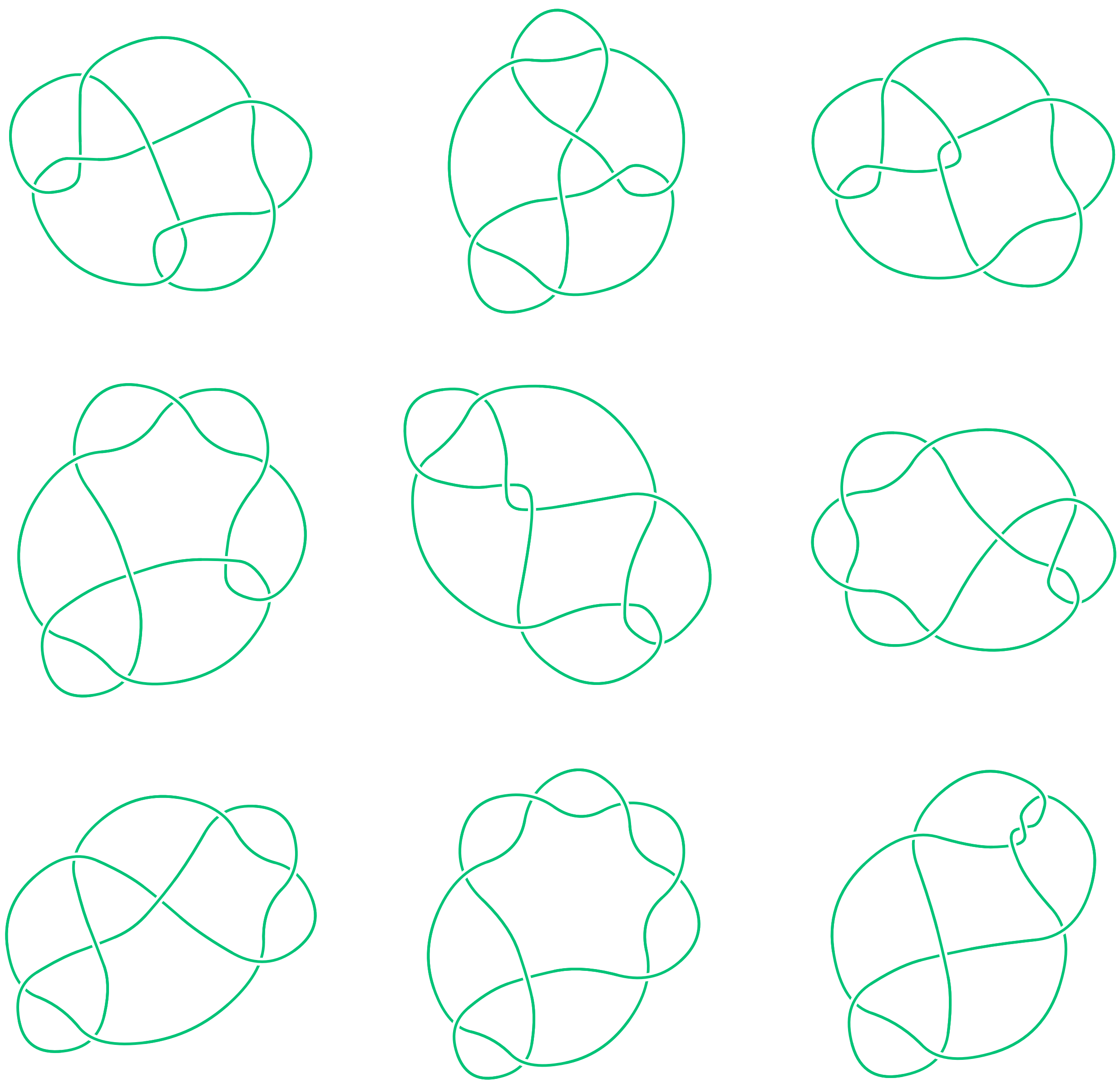




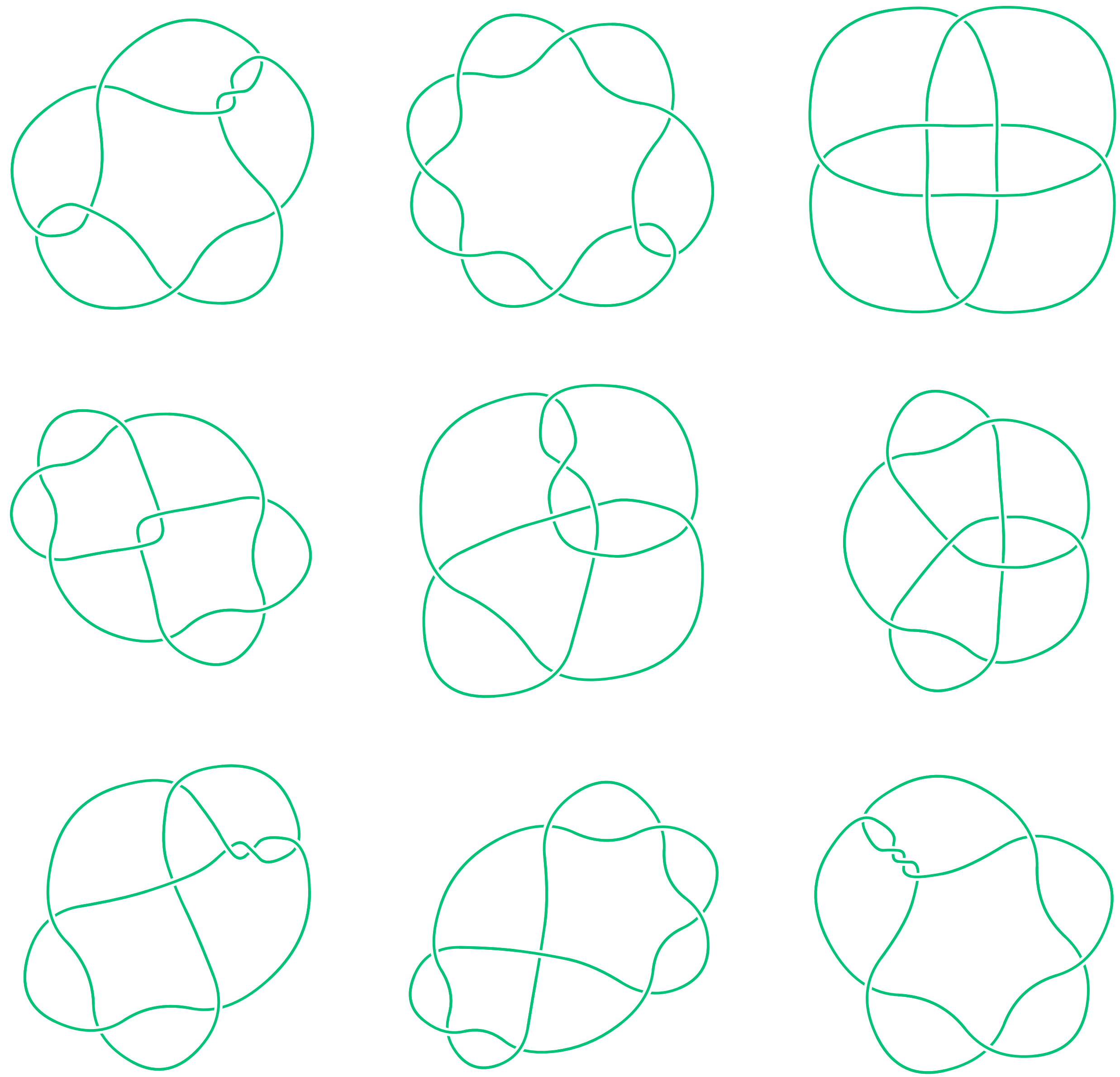
Siete cruces



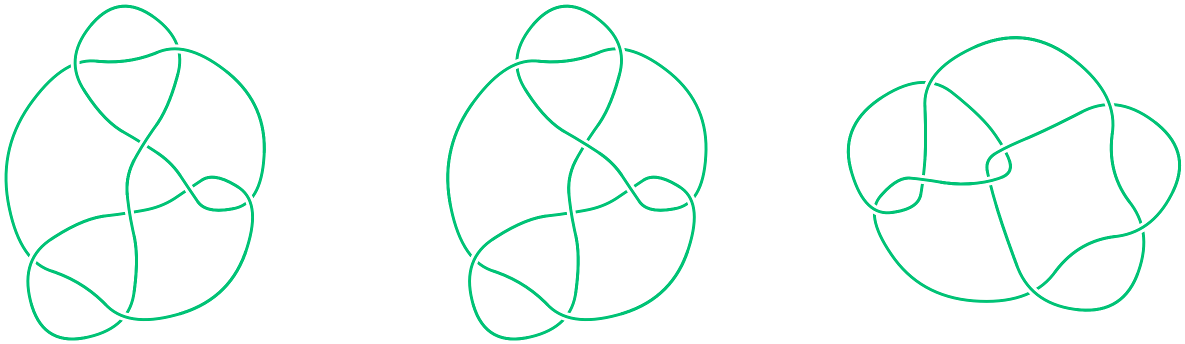
Ocho cruces



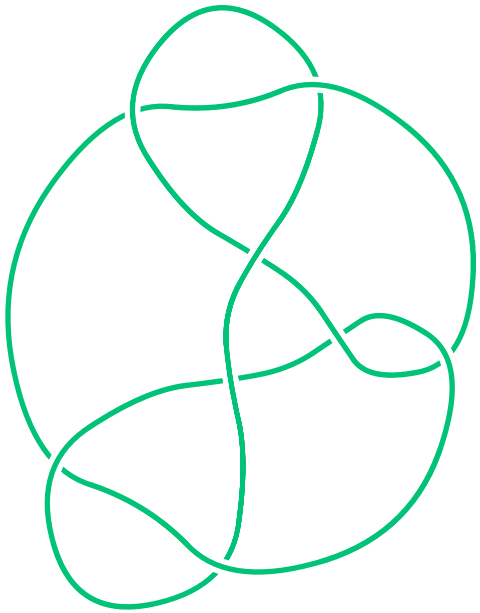
Ocho cruces

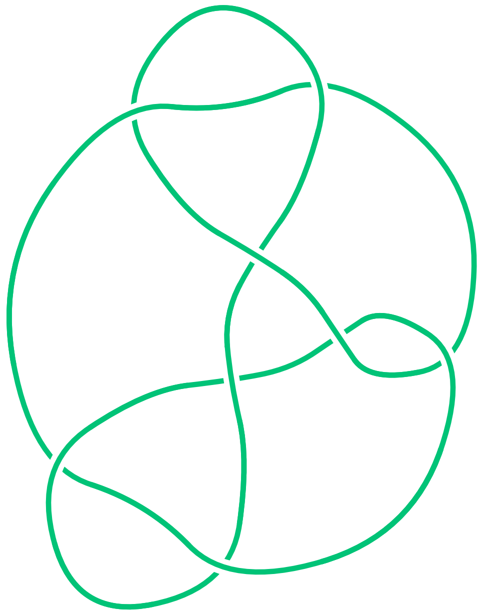


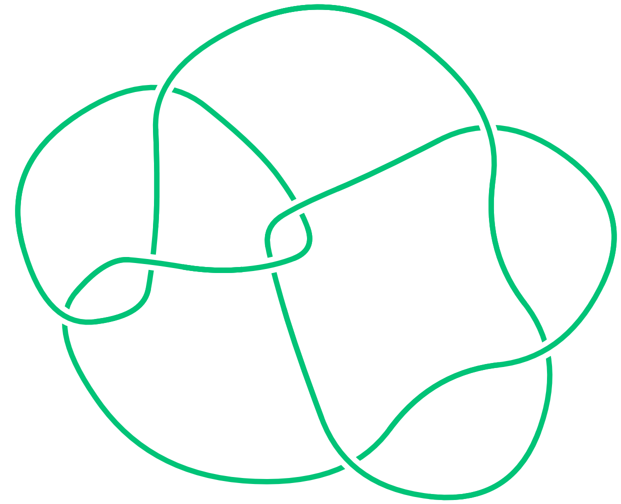
Ocho cruces



Ocho cruces no alternantes







etcétera

¡Vamos a construir nudos!

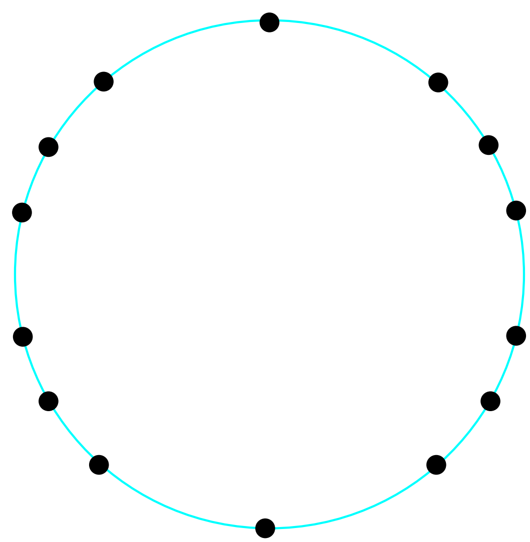
Tomamos dos números enteros.

Tomamos dos números enteros p y q de tal manera que la fracción $\frac{p}{q}$ esté reducida. (En este caso se dice que los números p y q son primos relativos.)

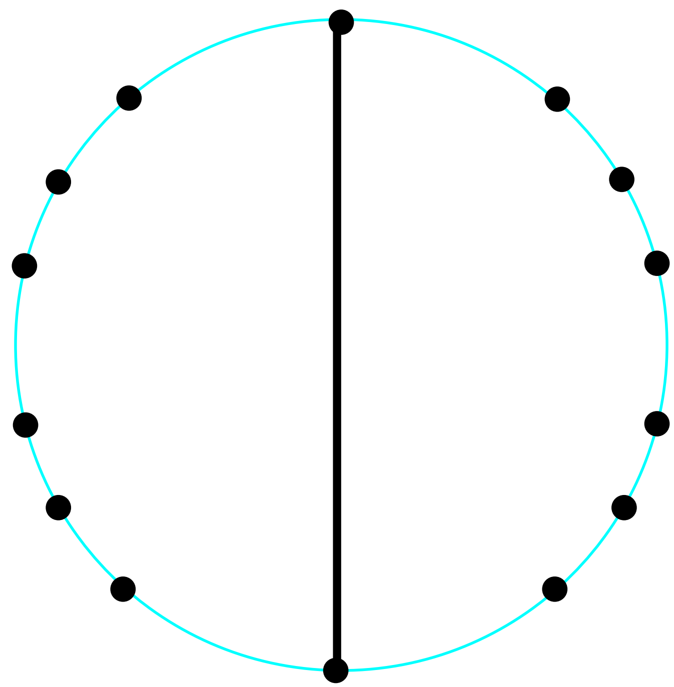
Por ejemplo, el 7 y el 3.

En una circunferencia marcamos $2p$ puntos.

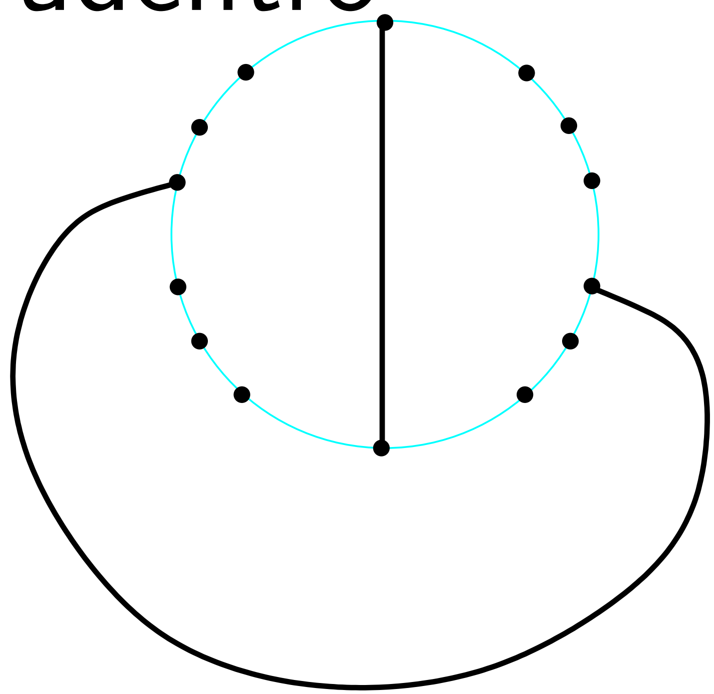
Para nuestro ejemplo, de 7 y 3, marcamos $14 = 2 \times 7$ puntos.



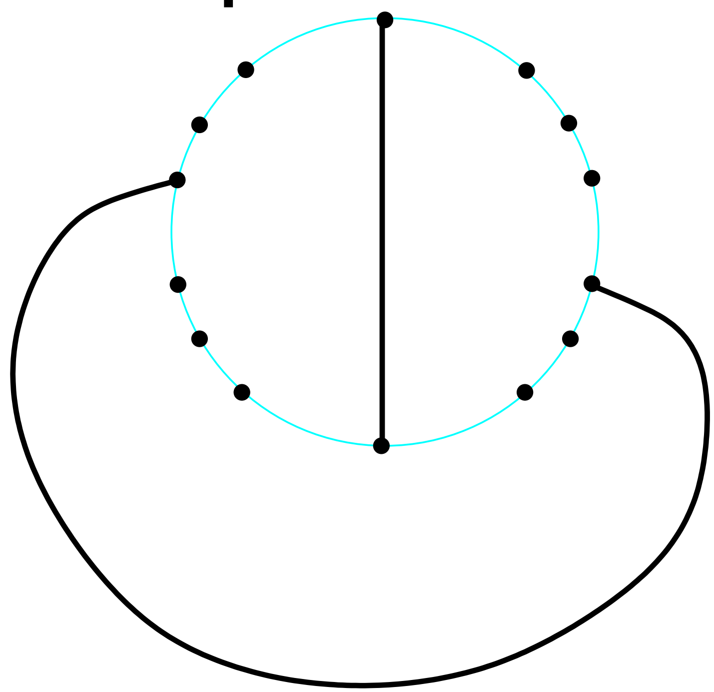
Dentro de la circunferencia trazamos una bisectriz, digamos, una vertical.



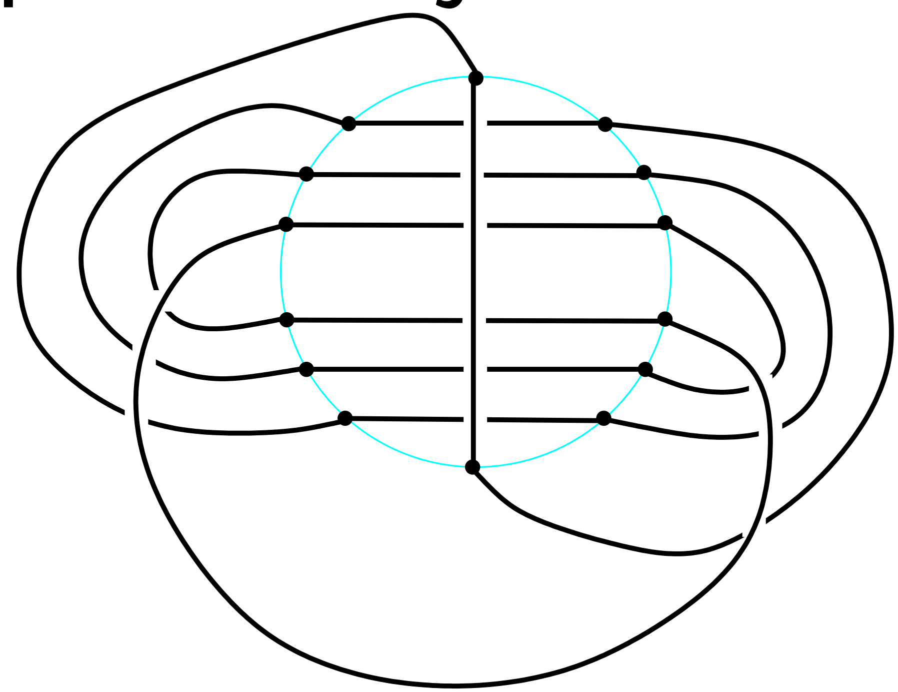
Fuera de la circunferencia trazamos otra bisectriz que empiece en el punto número q (el q-ésimo), con respecto a la bisectriz de adentro



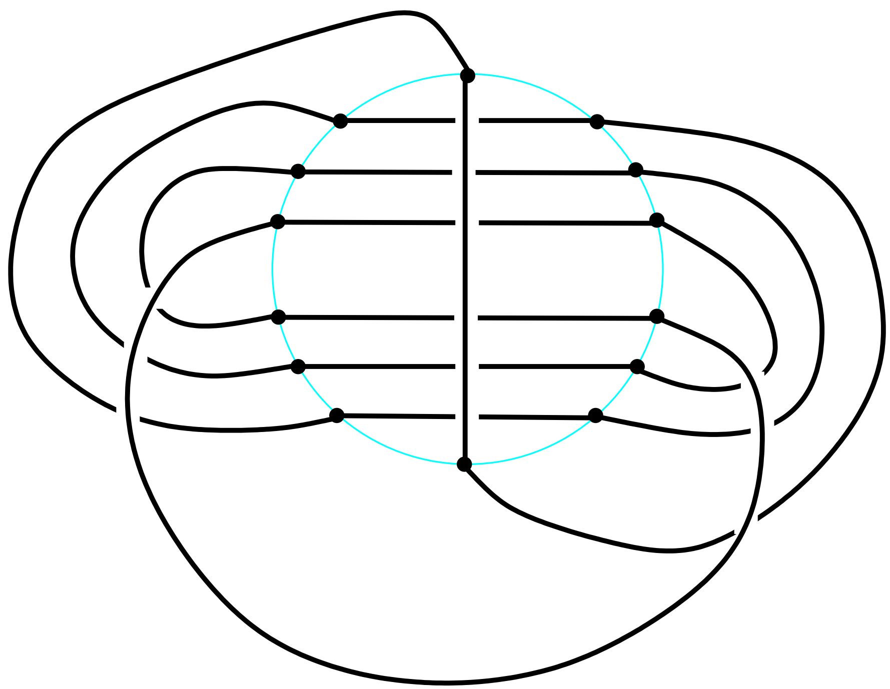
Dentro y fuera de la circunferencia, nos fijamos en las parejas de puntos equi-distantes con respecto a las bisectrices



Conectamos los puntos equidistantes (los que aún no estén conectados) con arcos que pasen por debajo de las bisectrices.



El nudo resultante se llama el nudo $c(p, q)$



El nudo $c(7, 3)$

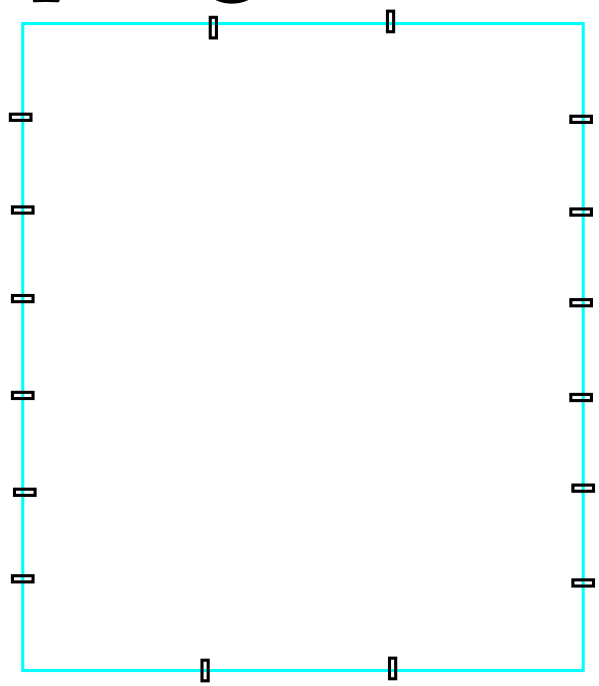
Muchos nudos

[3, 1], [5, 1], [5, 3], [7, 1], [7, 3], [7, 5], [9, 1],
[9, 5], [9, 7], [11, 1], [11, 3], [11, 5], [11, 7], [11, 9],
[13, 1], [13, 3], [13, 5], [13, 7], [13, 9], [13, 11],
[15, 1], [15, 7], [15, 11], [15, 13], [17, 1], [17, 3],
[17, 5], [17, 7], [17, 9], [17, 11], [17, 13], [17, 15],
[19, 1], [19, 3], [19, 5], [19, 7], [19, 9], [19, 11],
[19, 13], [19, 15], [19, 17]

Tomamos dos números enteros p y q de tal manera que la fracción $\frac{p}{q}$ esté reducida.

Por ejemplo, 7 y 3 otra vez.

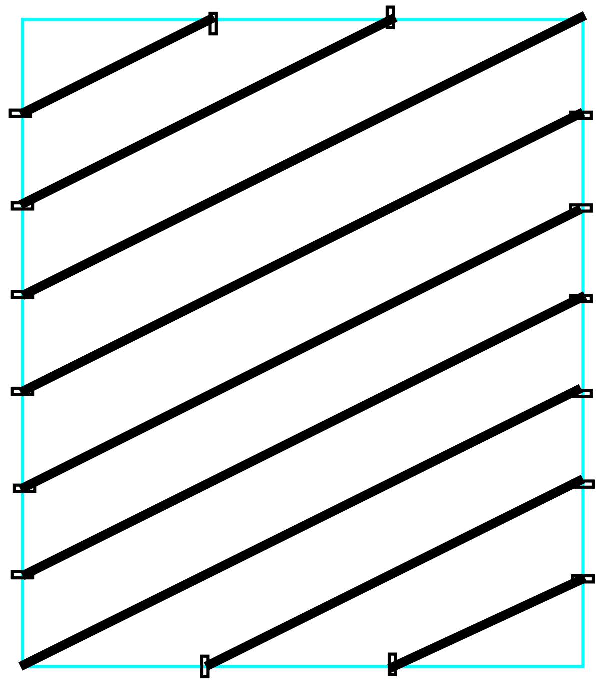
En un rectángulo dividimos los lados verticales en p segmentos y los lados horizontales en q segmentos.



En la parte de enfrente, conectamos los puntos marcados con segmentos de recta de inclinación $\frac{p}{q}$.

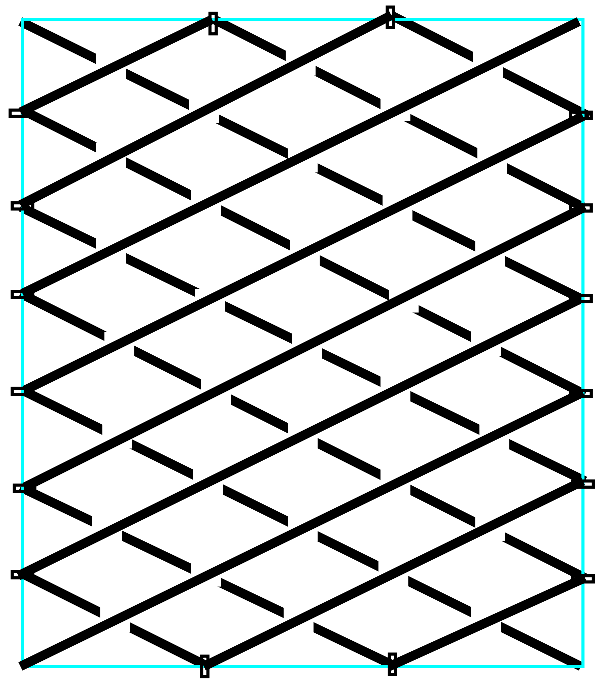
(Por ejemplo, si $\frac{p}{q}$ es positivo, conectamos los puntos más cercanos comenzando por la esquina superior izquierda. Si $\frac{p}{q}$ es negativo, comenzamos en la esquina superior derecha.)

Para nuestro ejemplo de 7 y 3.

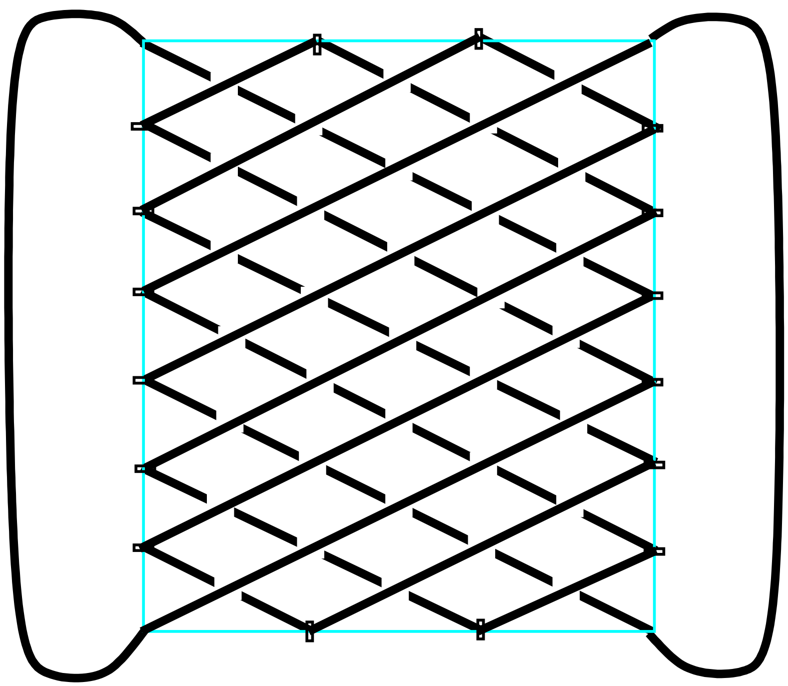


Ahora, en la parte de atrás, conectamos los puntos con segmentos de la inclinación contraria (o sea, $-\frac{p}{q}$). Estos segmentos van debajo de los segmentos ya dibujados.

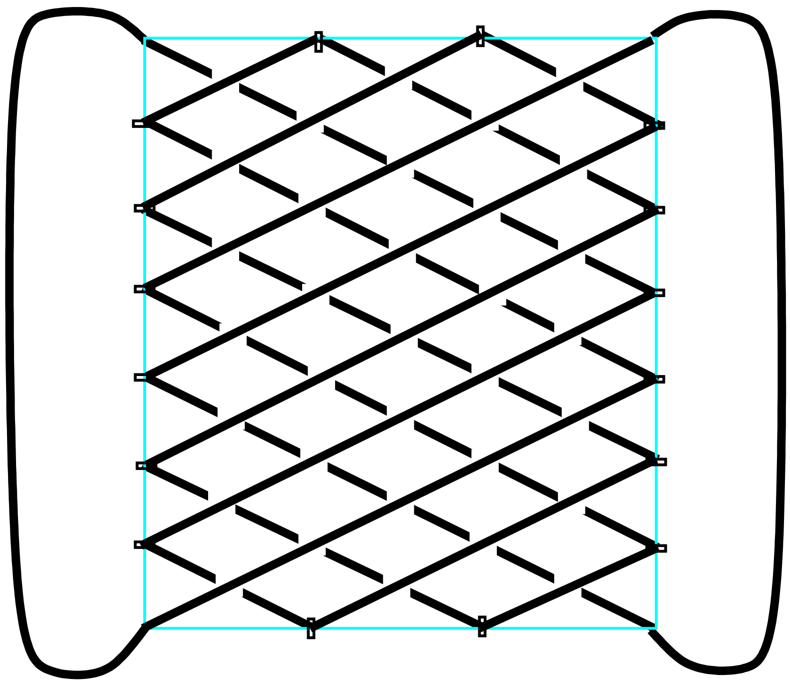
Para 7 y 3.



Finalmente conectamos las esquinas con dos "segmentos verticales"



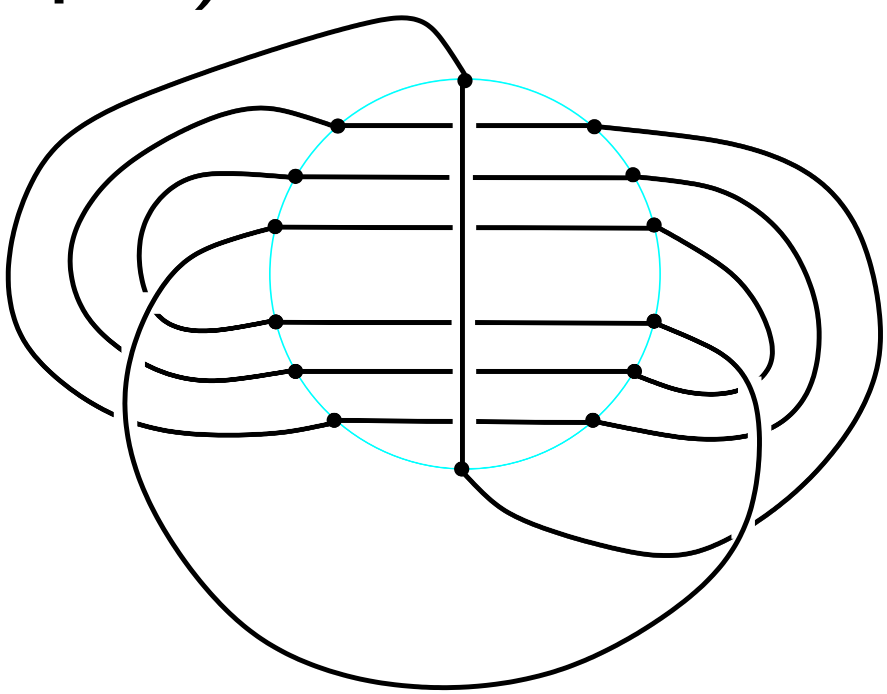
El nudo resultante se llama el nudo $m(p, q)$

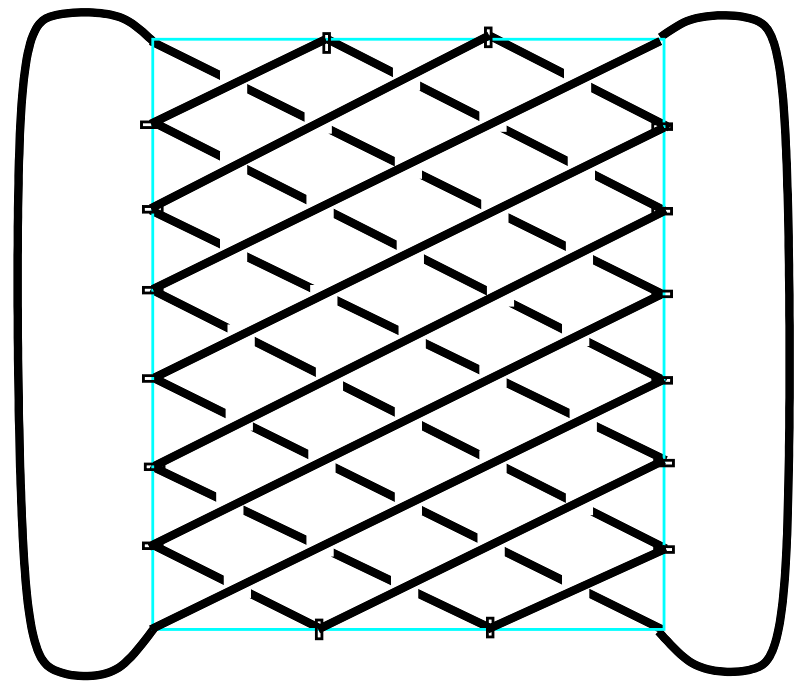


El nudo $m(7, 3)$

¿Qué tiene que ver el nudo $c(p,q)$ con el nudo $m(p,q)$?

(¿qué onda con el $c(7,3)$ y el $m(7,3)$? por ejemplo)





Muchos nudos

[3, 1], [5, 1], [5, 3], [7, 1], [7, 3], [7, 5], [9, 1],
[9, 5], [9, 7], [11, 1], [11, 3], [11, 5], [11, 7], [11, 9],
[13, 1], [13, 3], [13, 5], [13, 7], [13, 9], [13, 11],
[15, 1], [15, 7], [15, 11], [15, 13], [17, 1], [17, 3],
[17, 5], [17, 7], [17, 9], [17, 11], [17, 13], [17, 15],
[19, 1], [19, 3], [19, 5], [19, 7], [19, 9], [19, 11],
[19, 13], [19, 15], [19, 17]

Tomamos dos números enteros p y q de tal manera que la fracción $\frac{p}{q}$ esté reducida.

Por ejemplo, 7 y 3 otra vez.

Escribimos $\frac{p}{q}$ como fracción continua

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_k}}}$$

Por ejemplo $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ (o $\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}}$)

Todavía más nudos

¿...?

Definición. Para números enteros no nulos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ vamos a definir por inducción el símbolo $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$:

1. $[a_1] = a_1$.

2. Si $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ ya está definido, definimos

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}] = a_1 + \frac{1}{[a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}]}$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
[a_1] &= a_1 \\
[a_1, a_2] &= a_1 + \frac{1}{a_2} \\
[a_1, a_2, a_3] &= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} \\
[a_1, a_2, a_3, a_4] &= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4}}}
\end{aligned}$$

etcétera.

La expresión (el número) $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ se llama la <u>fracción continua</u> con cocientes parciales $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Tomamos dos números enteros p y q con $q \neq 0$. Entonces el número $\frac{p}{q}$ tiene una expansión como fracción continua.

Proposición. *Si a, b son enteros y $a \neq 0$, entonces existen únicos enteros q y r tales que $b = aq + r$ y $0 \leq r < |a|$.*

1er. caso: $a > 0$. Consideremos el conjunto

$$S = \{y \in \mathbb{N} | \exists x \in \mathbb{Z} \text{ tal que } y = b - xa\}.$$

Si $b \geq 0$, entonces $b = b - 0 \cdot a \in S$; si $b < 0$, entonces $b - ba \in S$. Así que $S \neq \emptyset$. Luego S tiene un elemento más chico $r \in S$. Podemos escribir $r = b - qa$ para cierto $q \in \mathbb{Z}$.

Como $r - a = b - (q + 1)a < r$ (pues $a > 0$) y r es el mínimo de S, se sigue que $r - a < 0$; o sea, $r < a$.

Unicidad:

Ahora si $qa + r = q'a + r'$ con $0 \leq r, r' < a$, entonces $r = r'$, pues si, digamos, $r < r'$, entonces $(q - q')a = r' - r > 0$; así que $q > q'$ y $r' - r \geq a$, pero esto es una contradicción (luego no es cierto que $r < r'$). Si suponemos que $r > r'$, obtenemos una contradicción de manera similar.

Debemos concluir que $r = r'$ y, por lo tanto $q = q'$.

2do. caso: $a < 0$. ¡Ejercicio!

Tomamos dos números enteros p y q con $q \neq 0$. Podemos escribir

$$
\begin{aligned}
p &= a_1 q + r_1 \quad \text{con } 0 \leq r_1 < |q| \\
q &= a_2 r_1 + r_2 \quad \text{con } 0 \leq r_2 < |r_1| \\
r_1 &= a_3 r_2 + r_3 \quad \text{con } 0 \leq r_3 < |r_2| \\
&\vdots \\
r_k &= a_{k+2} r_{k+1} + r_{k+2} \quad \text{con } 0 \leq r_{k+2} < |r_{k+1}| \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Teorema (Euclides) *La sucesión anterior termina; es decir, $r_k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$.*

$$\begin{aligned}
p &= a_1 q + r_1 \qquad \text{con } 0 \le r_1 < |q| \\
q &= a_2 r_1 + r_2 \qquad \text{con } 0 \le r_2 < |r_1| \\
r_1 &= a_3 r_2 + r_3 \qquad \text{con } 0 \le r_3 < |r_2| \\
&\vdots \\
r_{k-3} &= a_{k-1} r_{k-2} + r_{k-1} \qquad \text{con } 0 \le r_{k-1} < |r_{k-2}| \\
r_{k-2} &= a_k r_{k-1}
\end{aligned}$$

Si re-escribimos

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= a_1 + \frac{r_1}{q} \\
\frac{q}{r_1} &= a_2 + \frac{r_2}{r_1} \\
\frac{r_1}{r_2} &= a_3 + \frac{r_3}{r_2} \\
&\vdots \\
\frac{r_{k-3}}{r_{k-2}} &= a_{k-1} + \frac{r_{k-1}}{r_{k-2}} \\
\frac{r_{k-2}}{r_{k-1}} &= a_k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= a_1 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}} \\
&= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}} \\
\frac{q}{r_1} &= a_2 + \frac{r_2}{r_1} \\
\frac{r_1}{r_2} &= a_3 + \frac{r_3}{r_2} \\
&\vdots \\
\frac{r_{k-3}}{r_{k-2}} &= a_{k-1} + \frac{r_{k-1}}{r_{k-2}} \\
\frac{r_{k-2}}{r_{k-1}} &= a_k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= a_1 + \frac{1}{\dfrac{q}{r_1}} \\
&= a_1 + \frac{1}{a_2 + \dfrac{r_2}{r_1}} \\
&= a_1 + \frac{1}{a_2 + \dfrac{1}{\dfrac{r_2}{r_1}}} \\
&\;\vdots \\
&= a_1 + \frac{1}{a_2 + \dfrac{1}{a_3 + \cdots + \dfrac{1}{a_k}}} \\
&= [a_1, a_2, \ldots, a_k]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{7}{5} &= 1 + \frac{2}{5} \\
&= 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} \\
&= [1, 2, 2]
\end{aligned}
$$

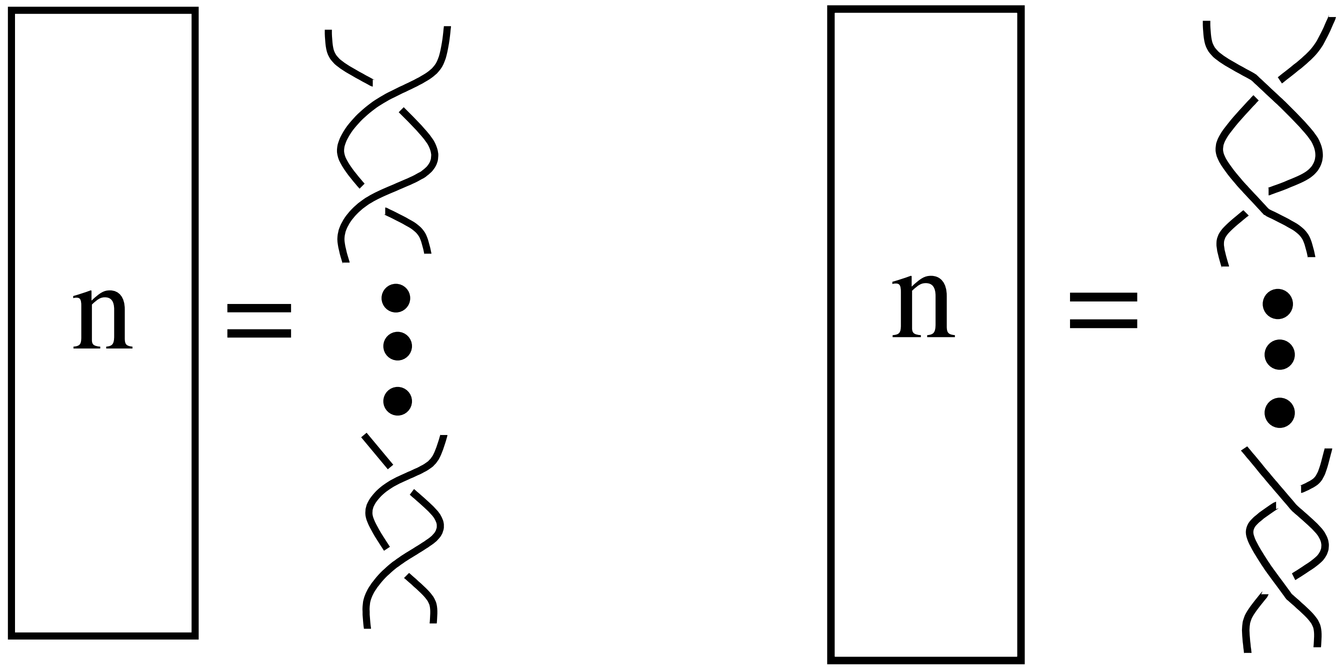
$$
\begin{aligned}
\frac{225}{157} &= 1+\frac{68}{157}\\
&= 1+\frac{1}{\frac{157}{68}}\\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{21}{68}}\\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{68}{21}}}\\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{5}{21}}}
\end{aligned}
$$

$$= \quad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{\frac{21}{5}}}}$$

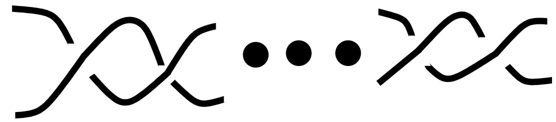
$$= \quad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{5}}}}$$

$$\frac{225}{157} = [1, 2, 3, 4, 5]$$

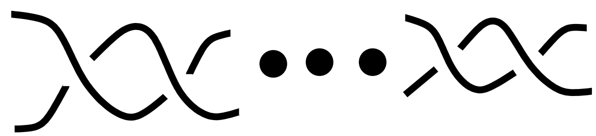
Ahora vamos a dibujar



$n>0$ $n<0$

$\boxed{\quad n \quad} =$ 

n>0

$\boxed{\quad n \quad} =$ 

n<0

Tomamos dos números enteros p y q de tal manera que la fracción $\frac{p}{q}$ esté reducida.

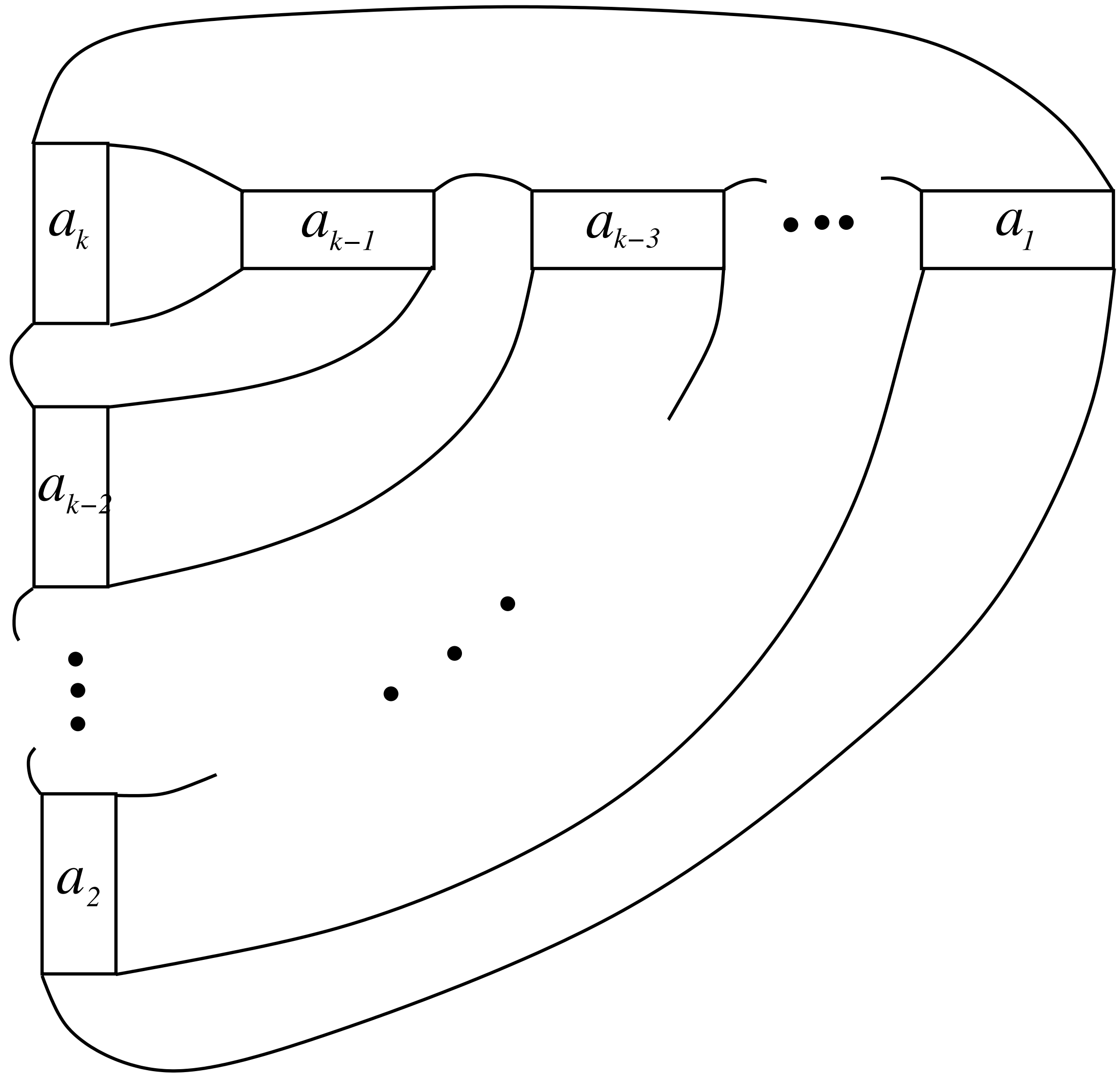
Por ejemplo, 7 y 3 otra vez.

Escribimos $\frac{p}{q}$ como fracción continua

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_k}}}$$

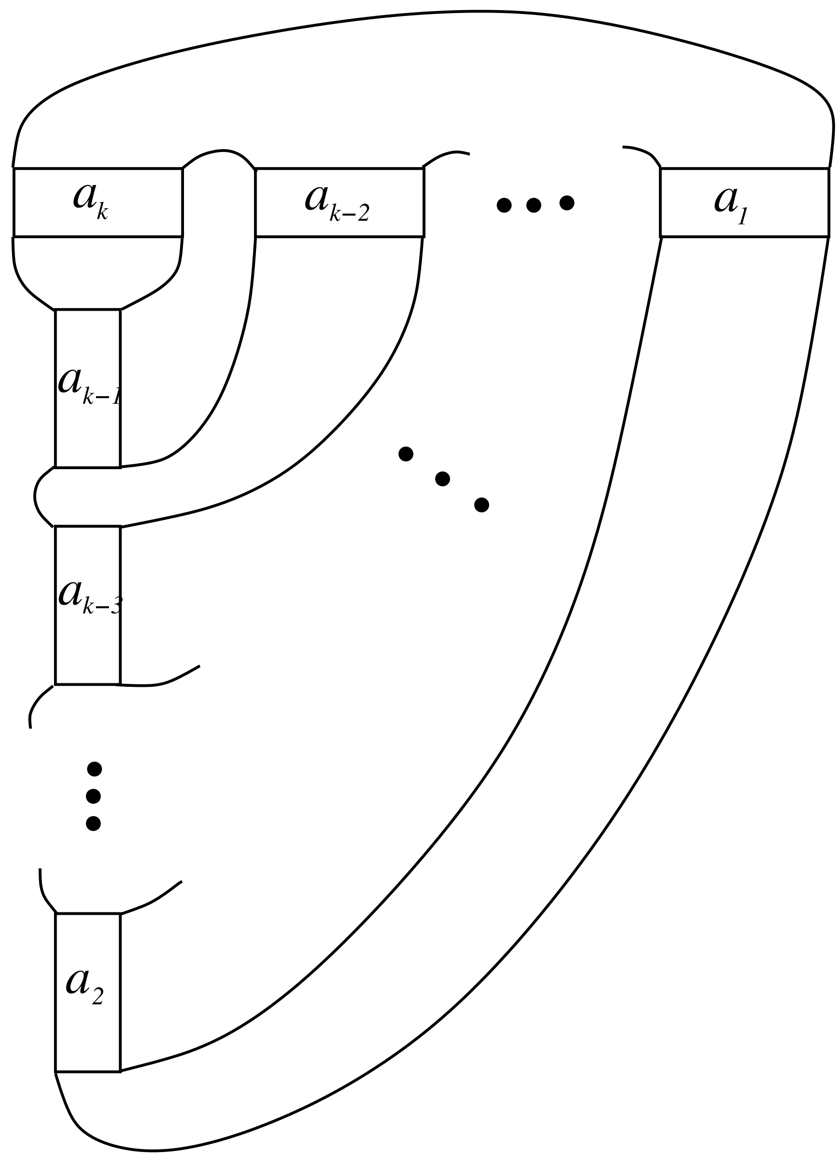
Por ejemplo $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$

Dibujamos (k par)



k par

Dibujamos (k impar)

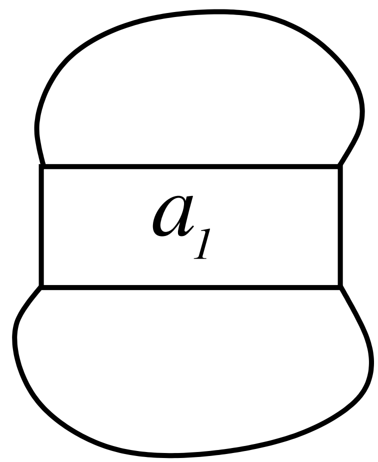


k impar

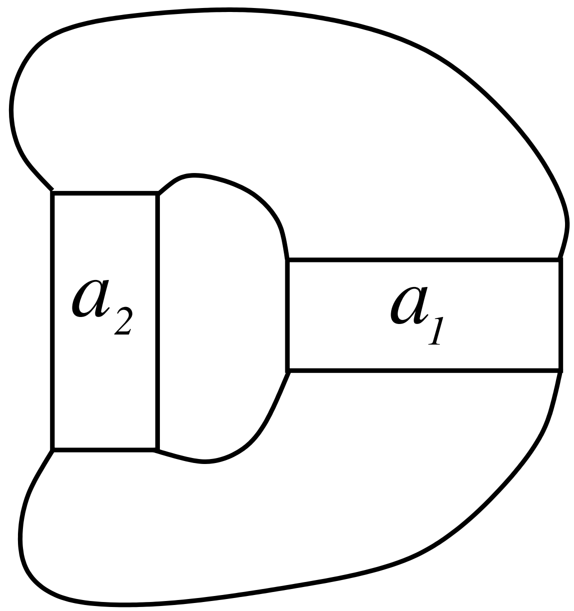
El nudo resultante se llama:

el <u>nudo racional</u> $\ell(p, q)$

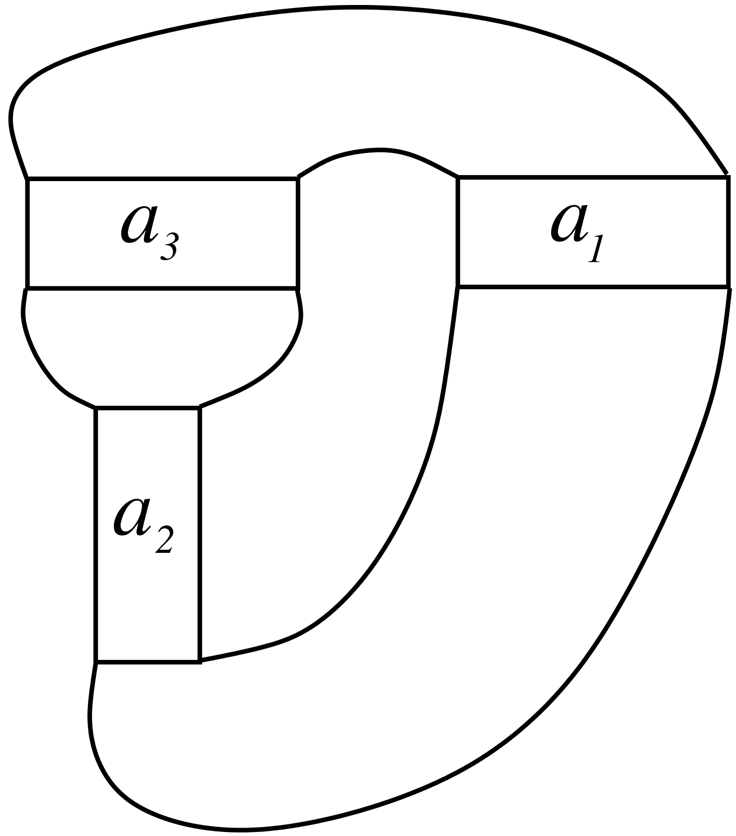
Dibujamos ($k = 1$)



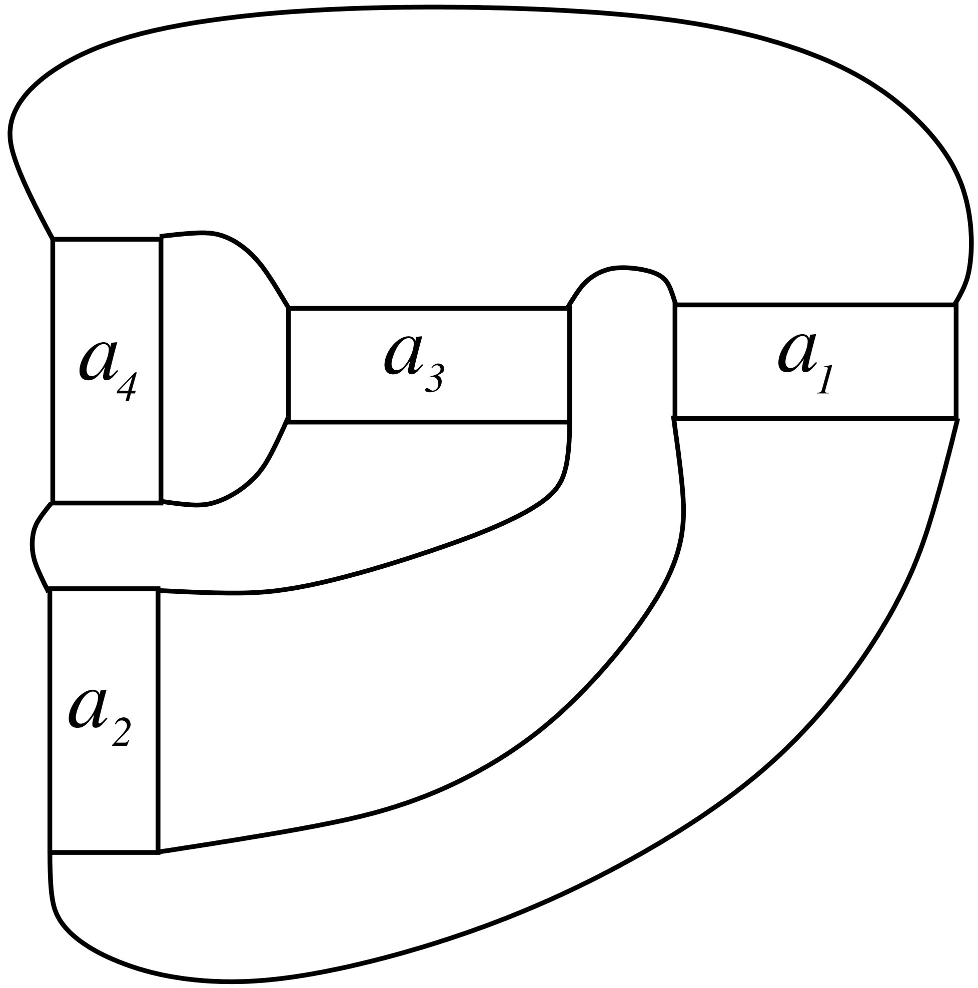
Dibujamos ($k = 2$)



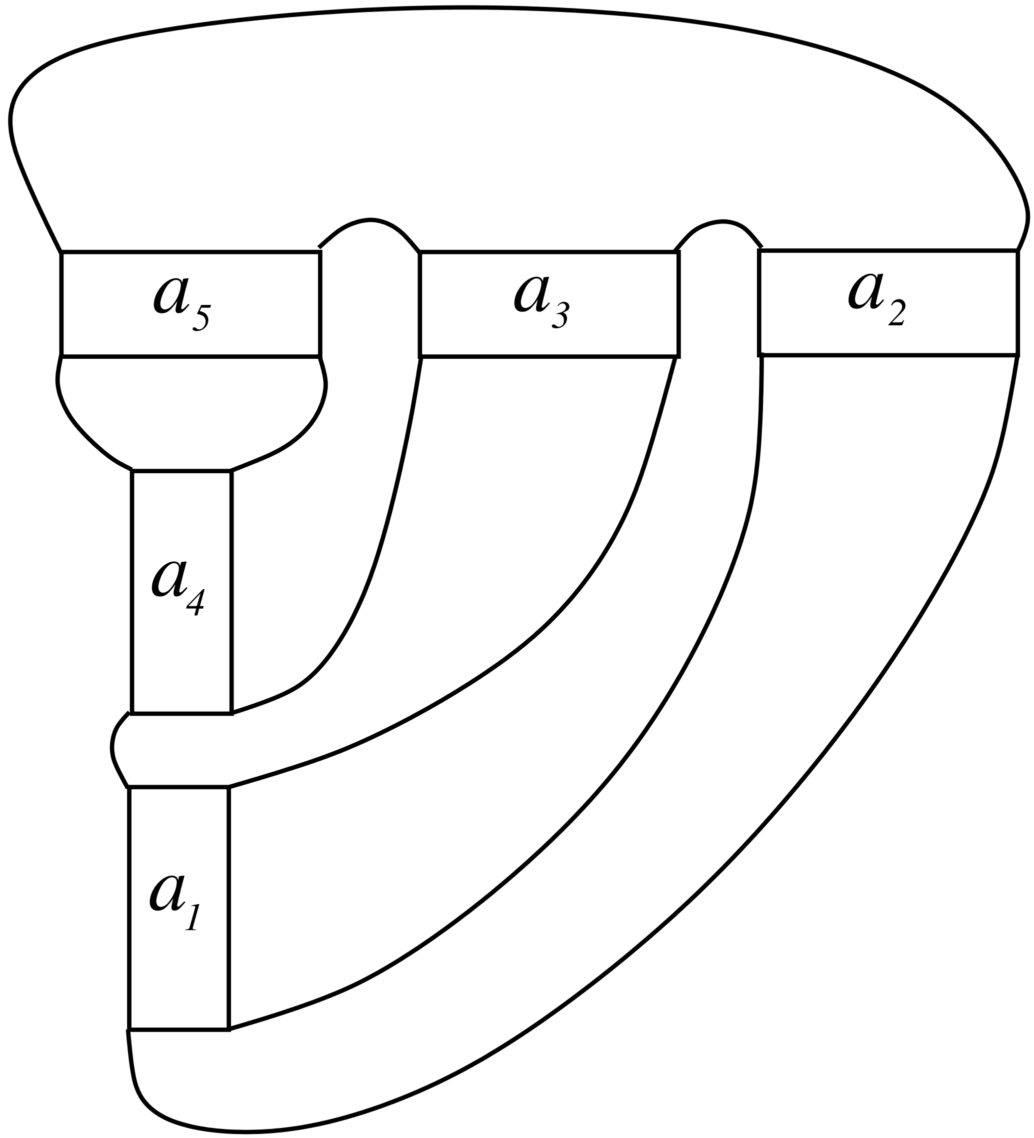
Dibujamos ($k = 3$)



Dibujamos ($k = 4$)

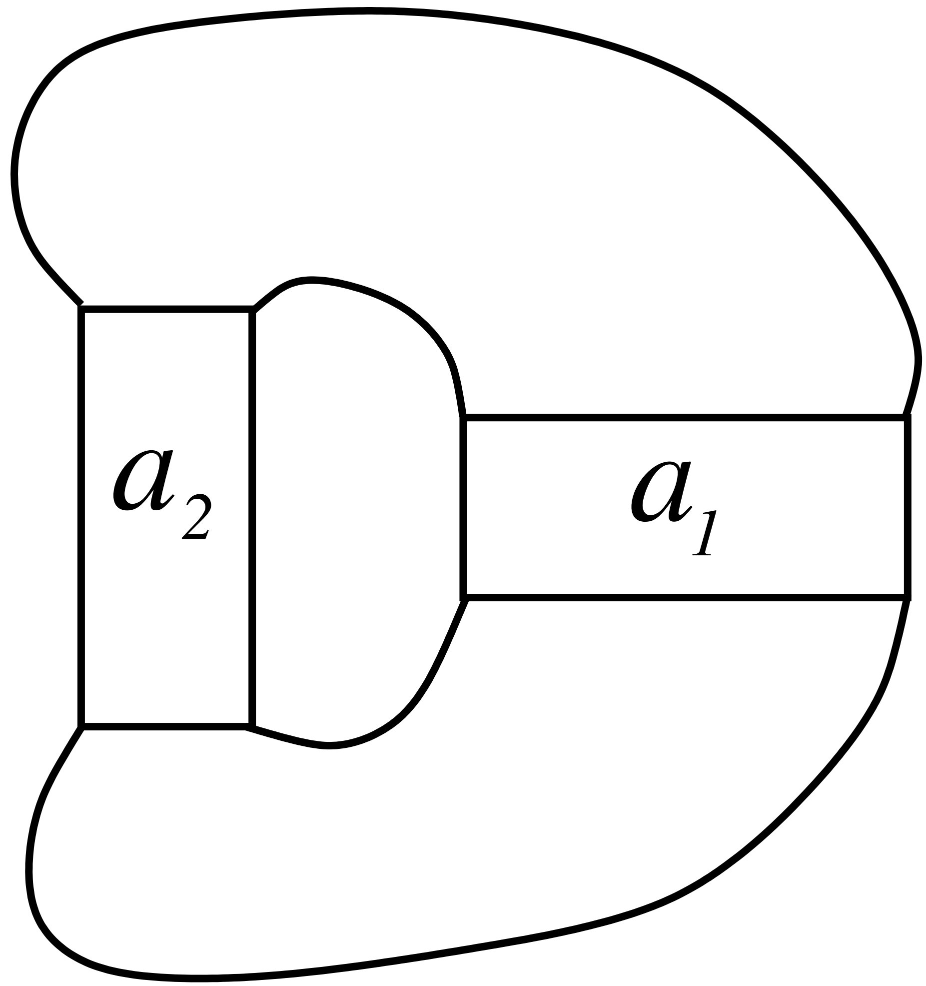


Dibujamos ($k = 5$)

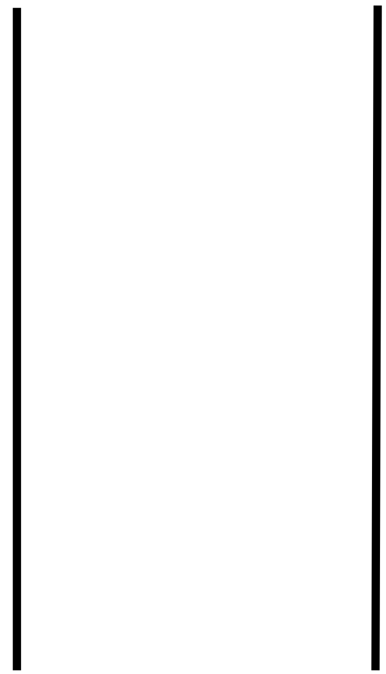


$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = [2, 3]$$

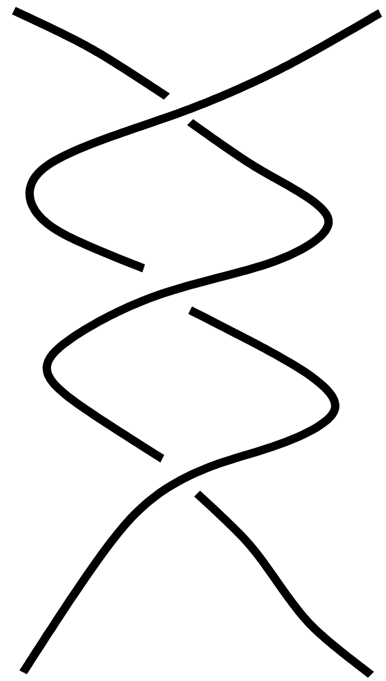
$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = [2, 3]$$



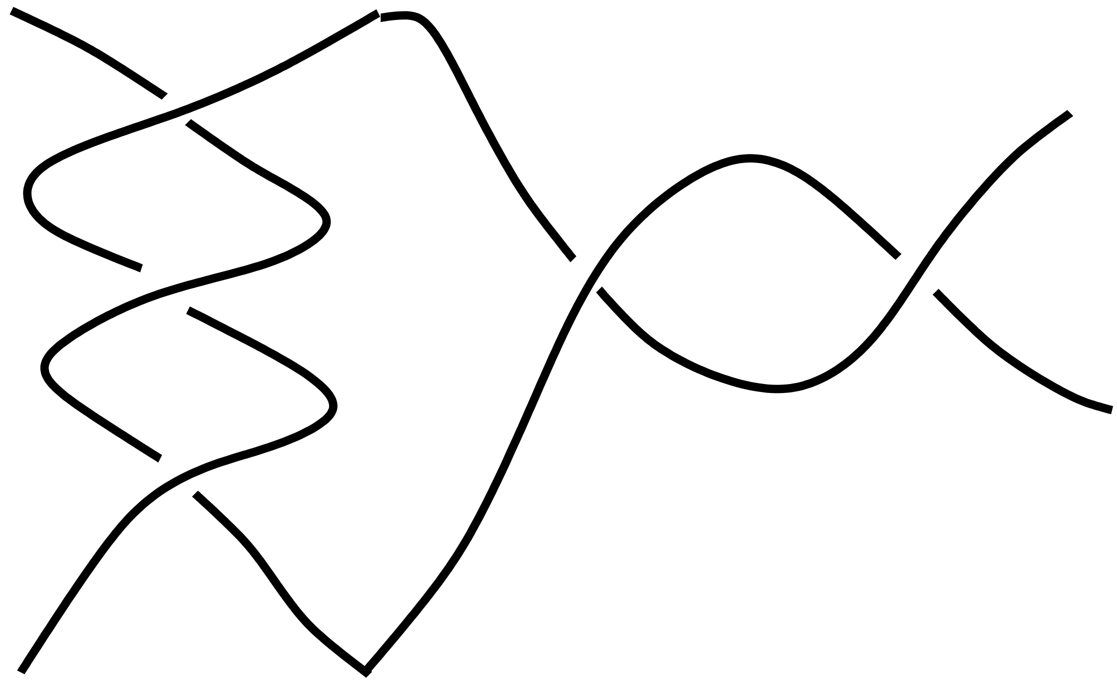
$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = [2, 3]$$



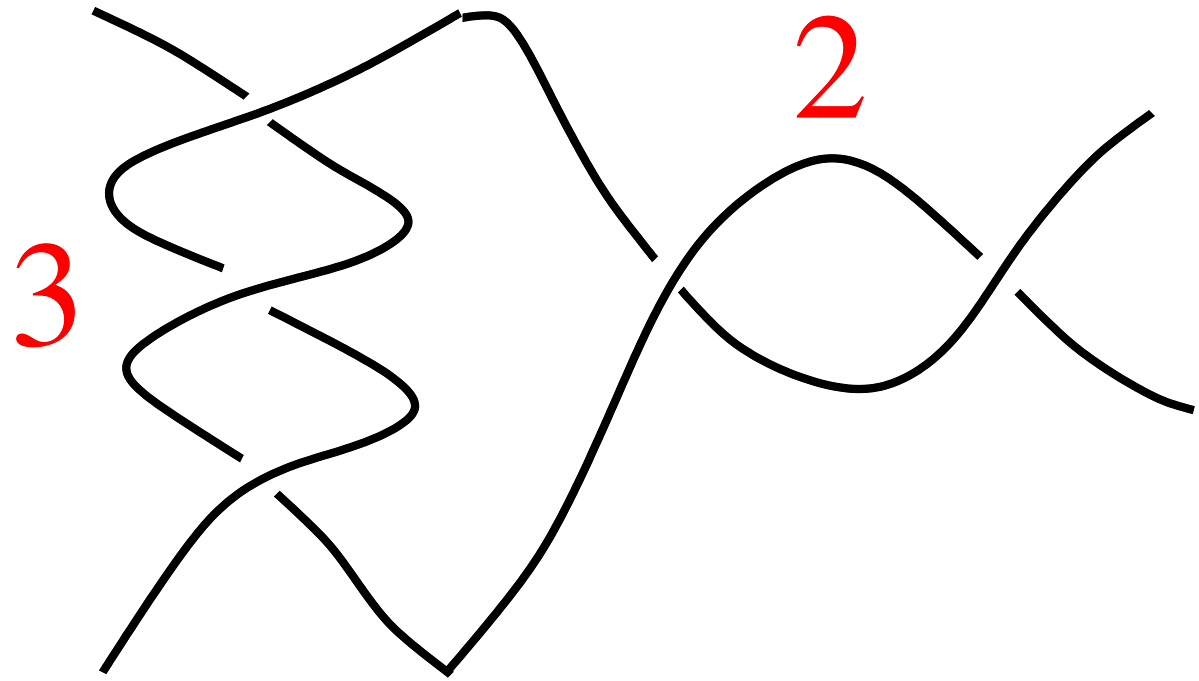
$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = [2, 3]$$



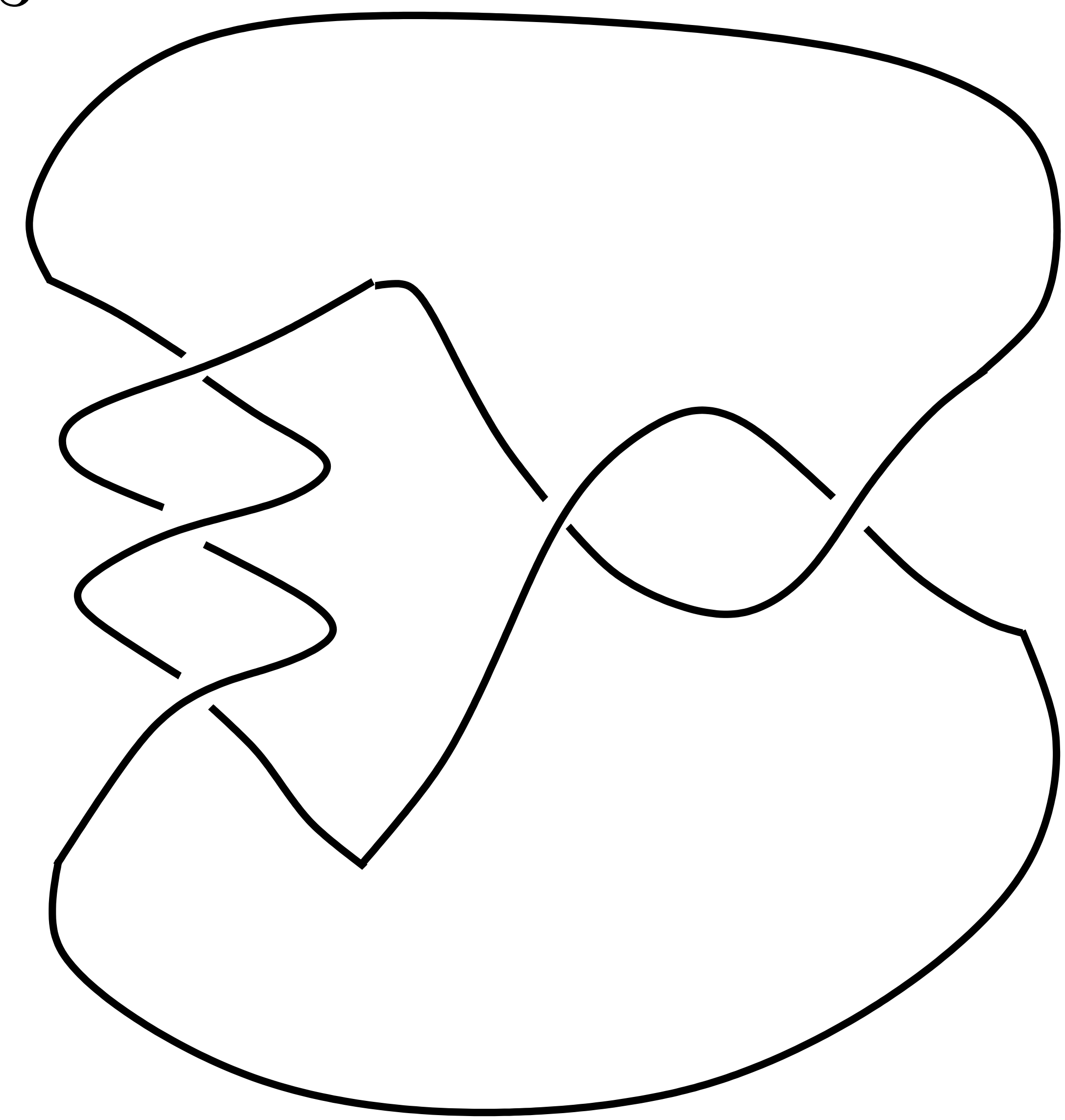
$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = [2, 3]$$



$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = [2, 3]$$

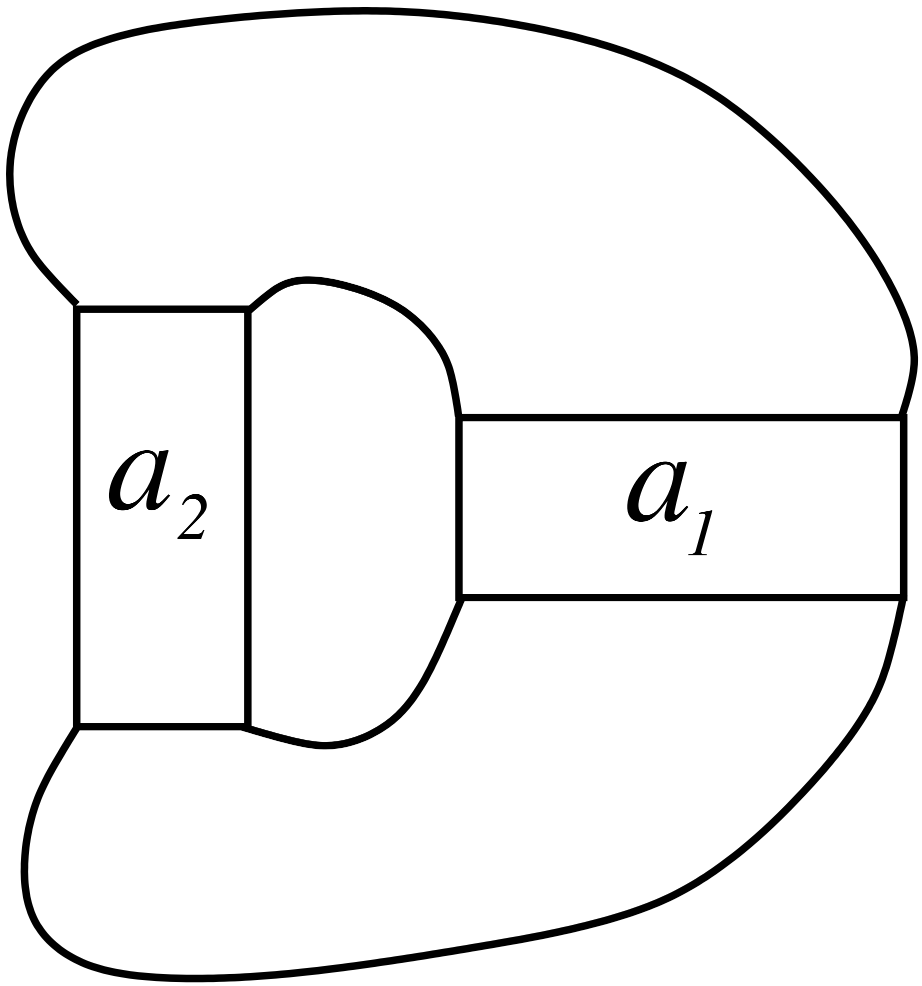


$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = [2, 3]$$



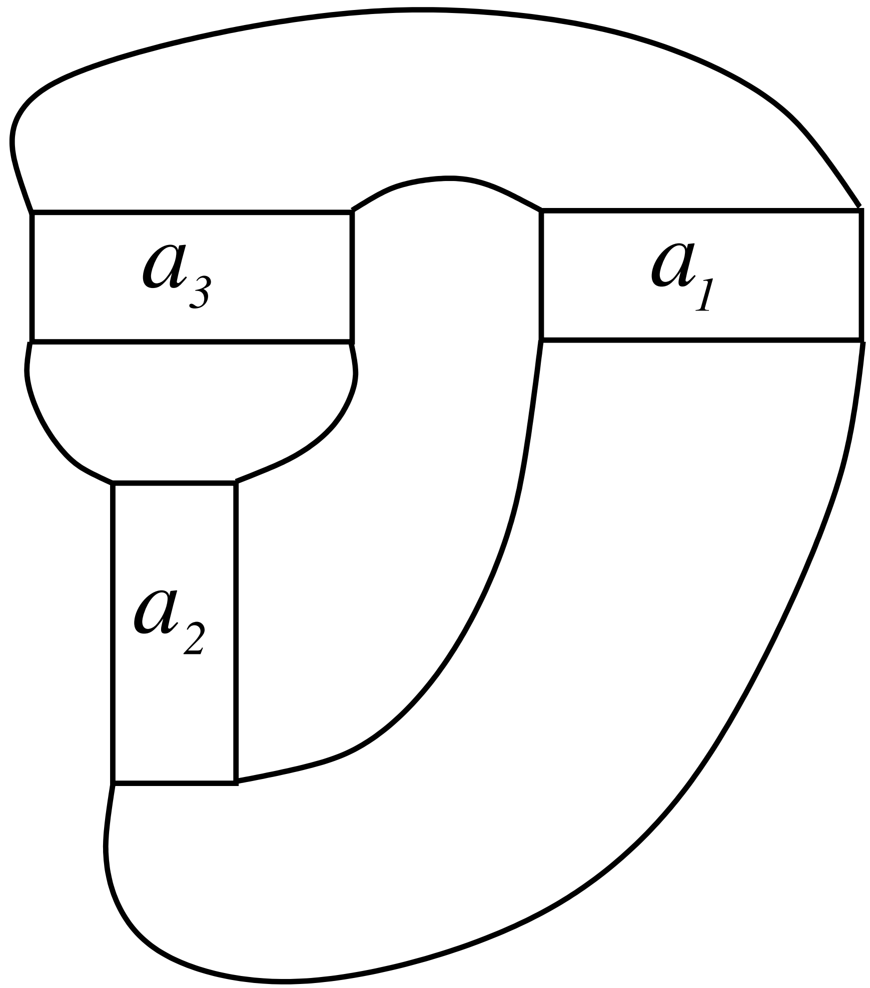
$\ell(7,3)$

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = [2, 3]$$



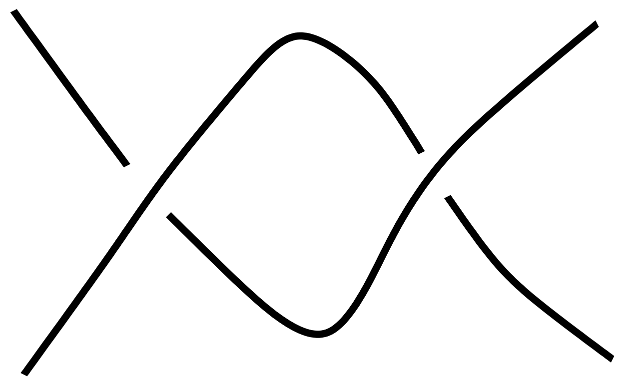
$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = [1, 2, 2]$$

$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = [1, 2, 2]$$

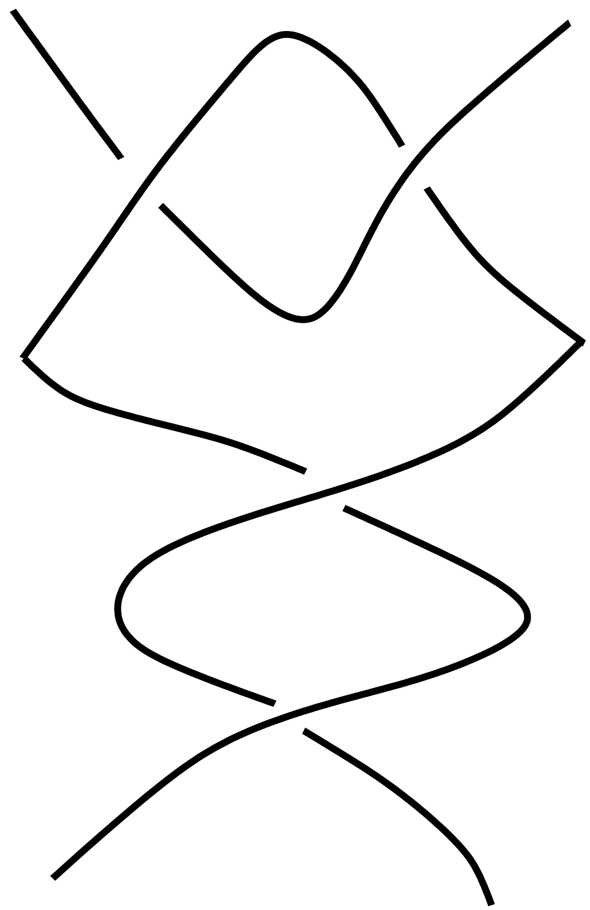


$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = [1, 2, 2]$$

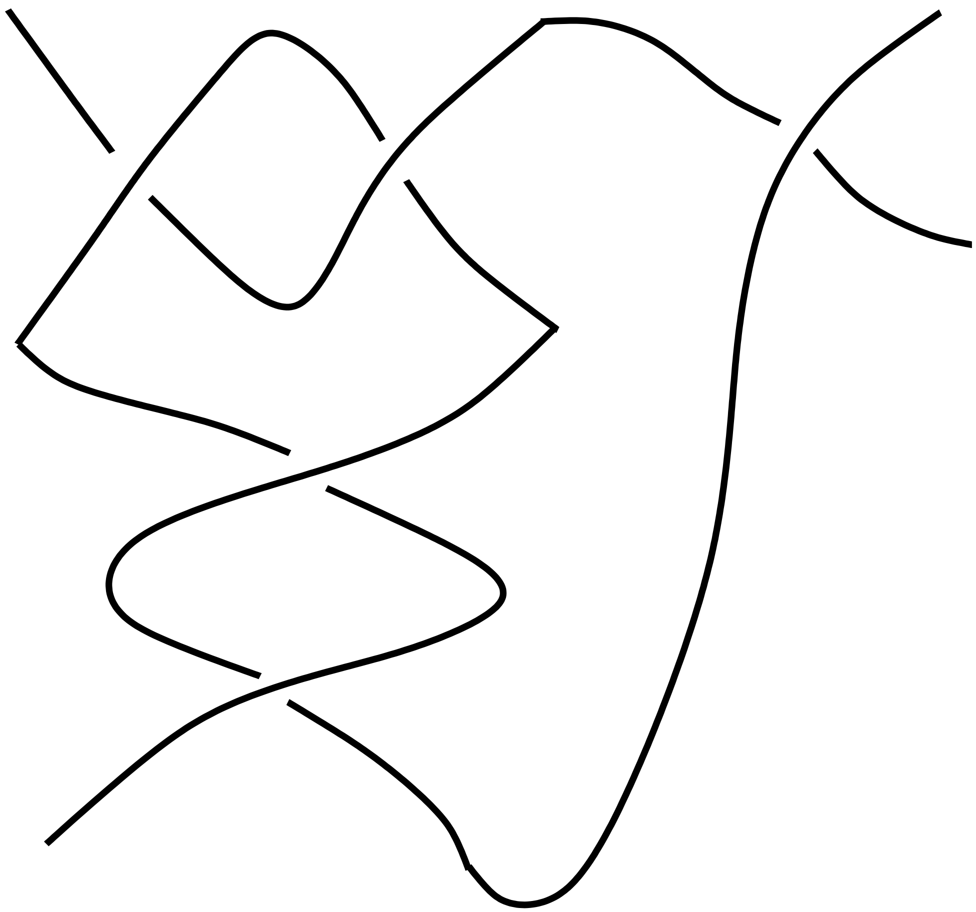
$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = [1, 2, 2]$$



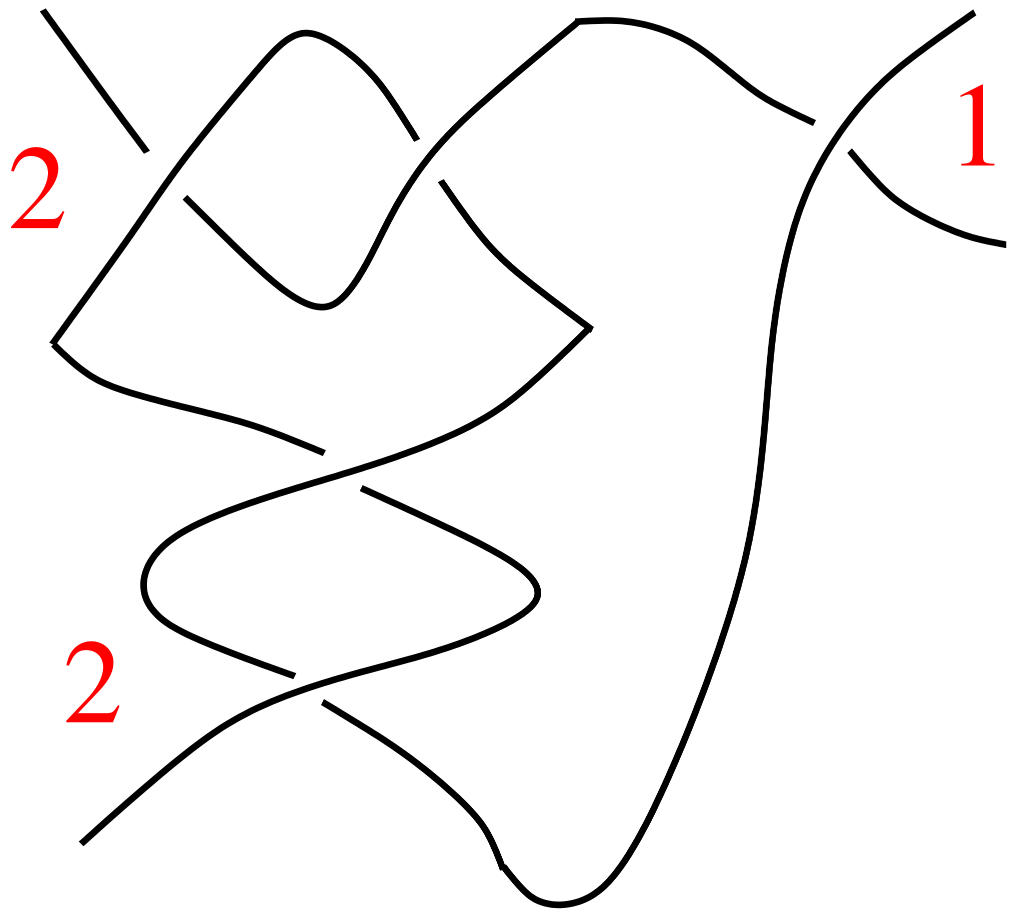
$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = [1, 2, 2]$$



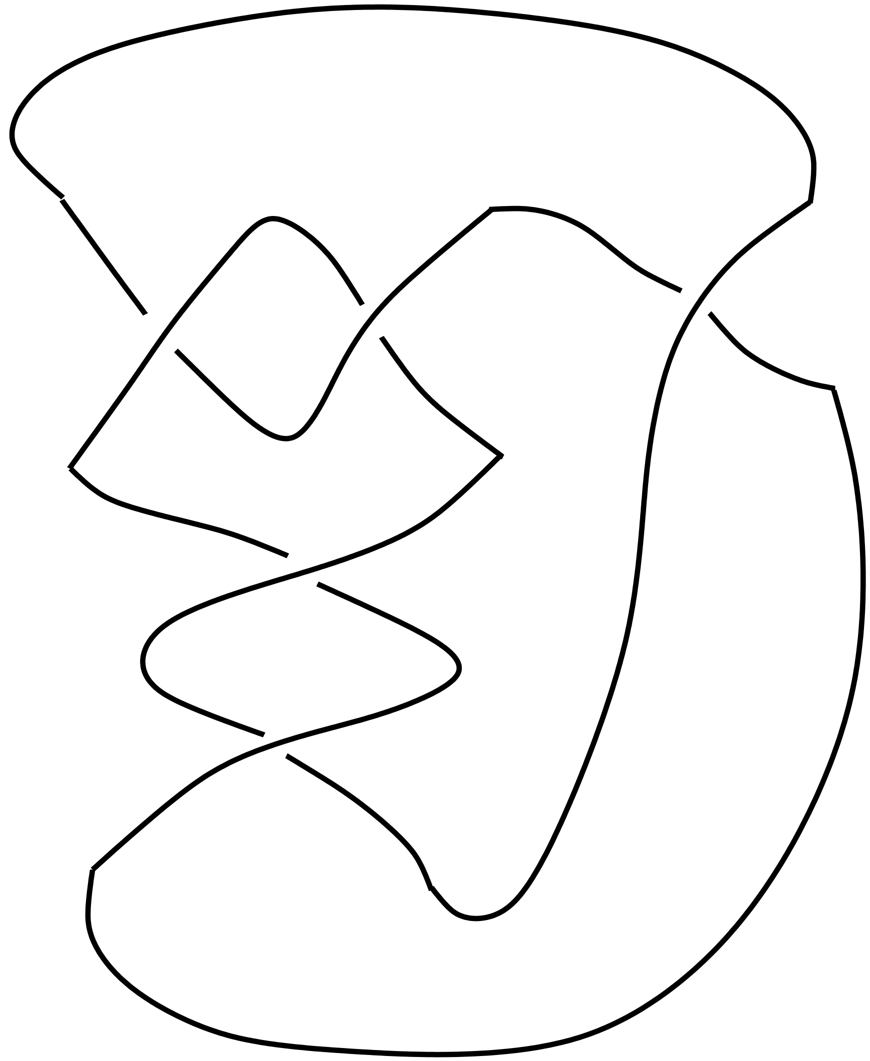
$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = [1, 2, 2]$$



$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = [1, 2, 2]$$

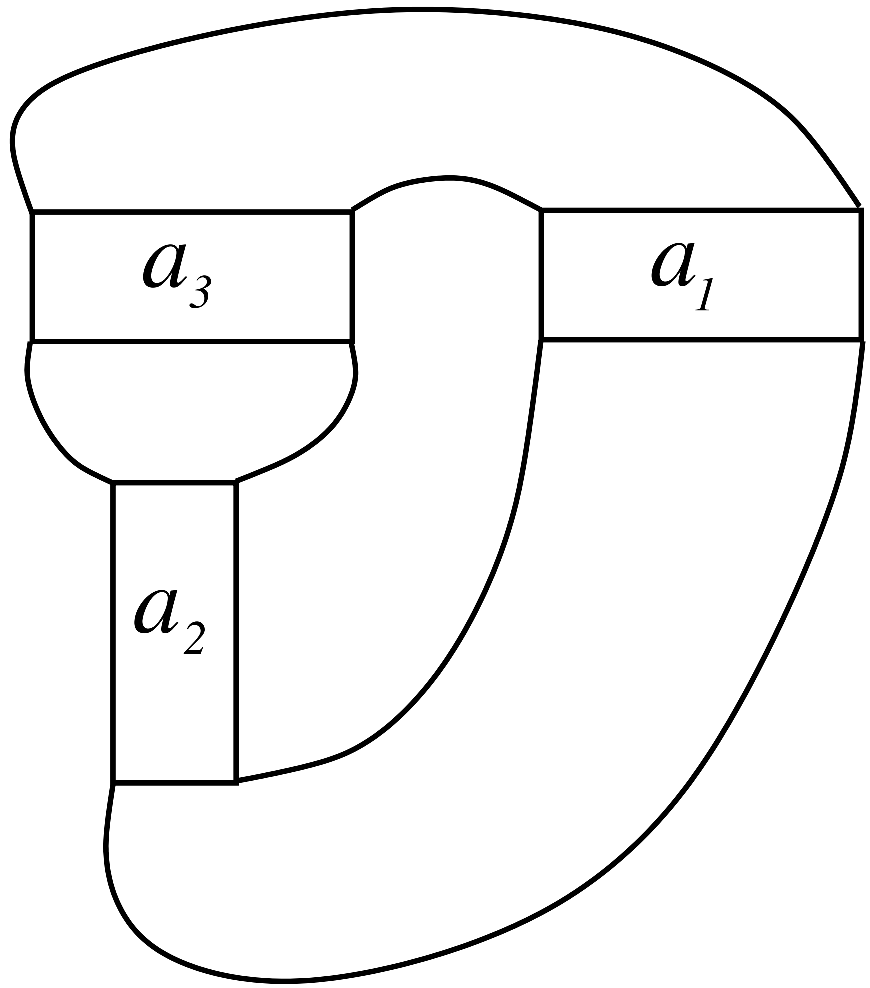


$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = [1, 2, 2]$$



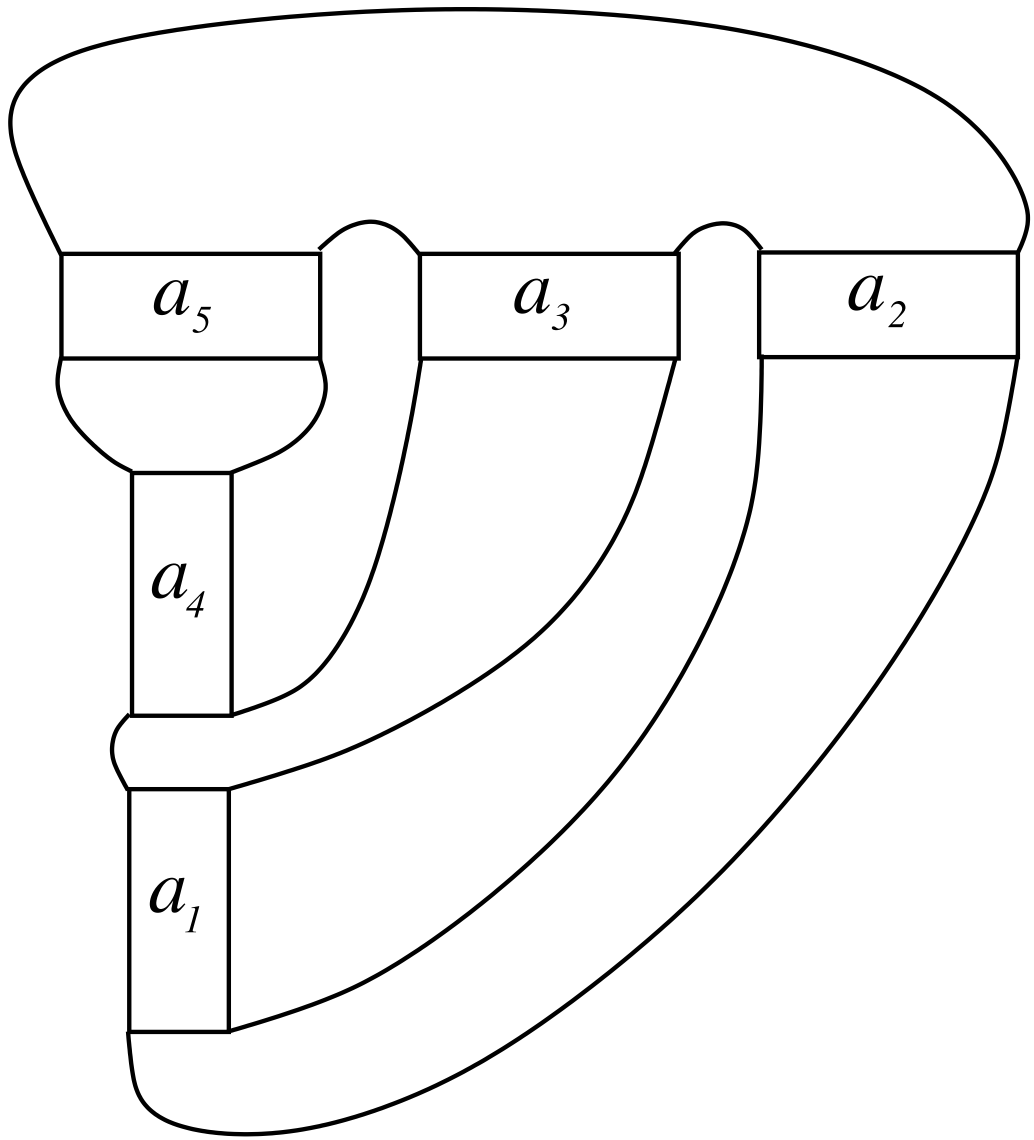
$\ell(7, 5)$

$(k = 3)$

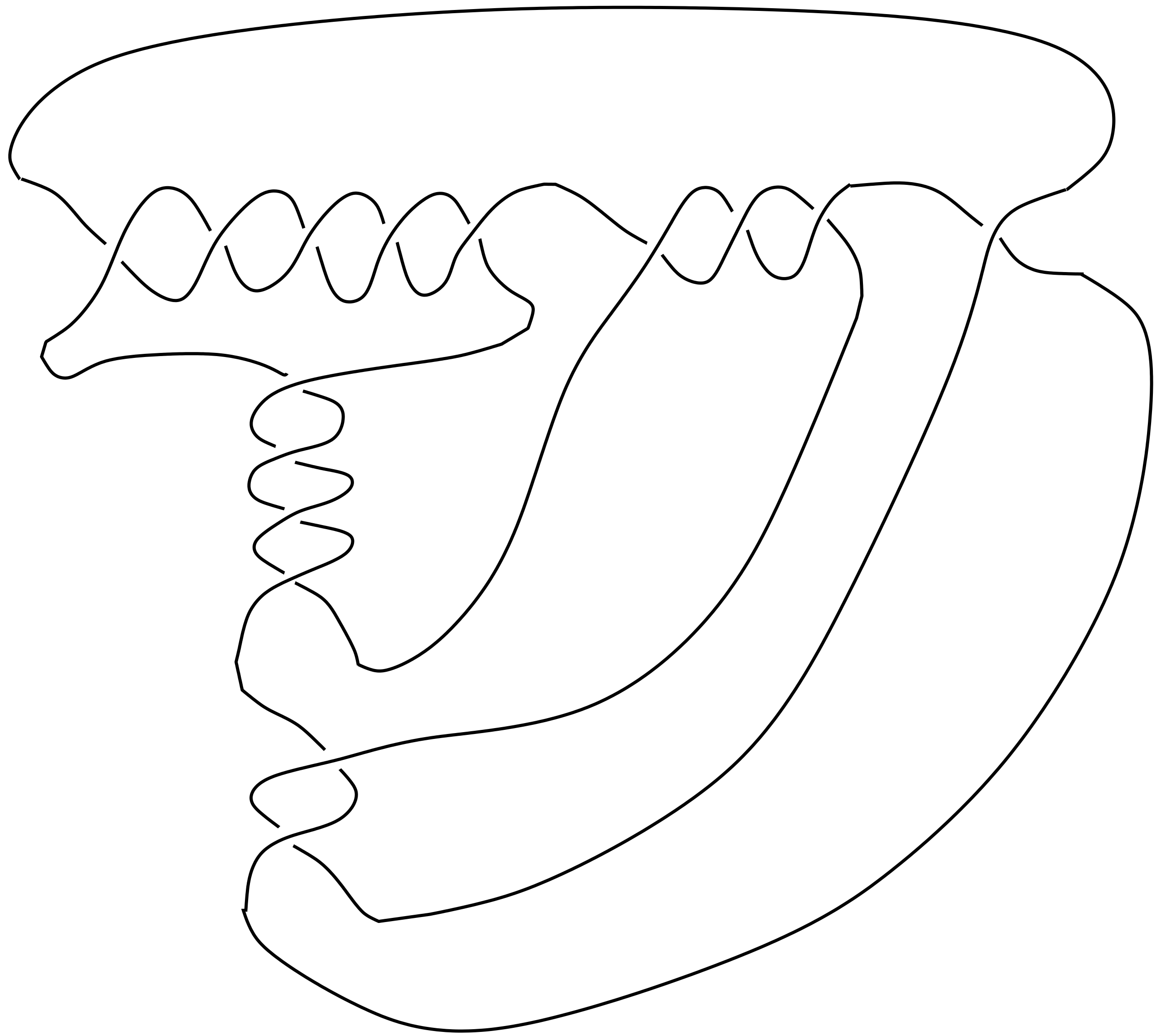


$$\frac{225}{157} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{5}}}} = [1, 2, 3, 4, 5]$$

$$\frac{225}{157} = [1, 2, 3, 4, 5]$$



$\frac{225}{157} = [1, 2, 3, 4, 5]$



$\ell(225, 157)$

Nótese que esto está mal definido.

Sabemos que

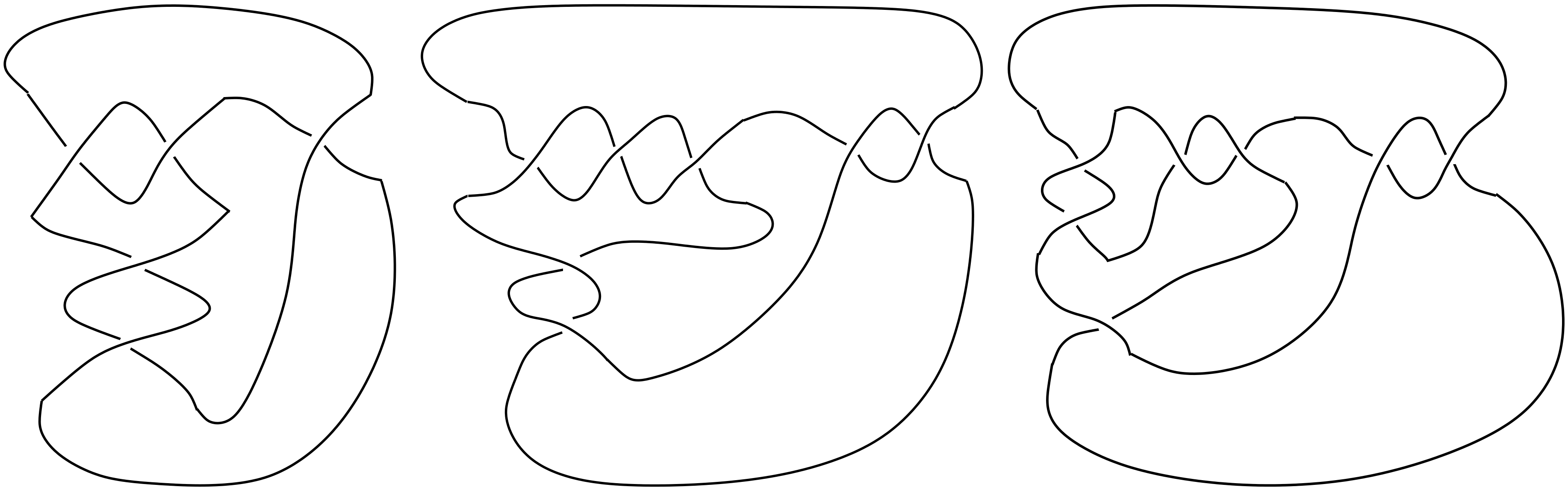
$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}},$$

pero...

$$
\begin{aligned}
\frac{7}{5} &= 2-\frac{3}{5} \\
&= 2+\frac{1}{\frac{-5}{3}} \\
&= 2+\frac{1}{-1-\frac{2}{3}} \\
&= 2+\frac{1}{-1+\frac{1}{\frac{-3}{2}}} \\
&= 2+\frac{1}{-1+\frac{1}{-2+\frac{1}{2}}} \\
&= [2,-1,-2,2]
\end{aligned}
$$

O bien

$$\begin{aligned}
\frac{7}{5} &= 2 - \frac{3}{5} \\
&= 2 + \frac{1}{\frac{-5}{3}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{-2 + \cfrac{1}{3}} \\
&= [2, -2, 3]
\end{aligned}$$



$$\frac{7}{5} = [1,2,2] = [2,-2,3] = [2,-1,-2,2]$$

Muchos nudos

[3, 1], [5, 1], [5, 3], [7, 1], [7, 3], [7, 5], [9, 1],
[9, 5], [9, 7], [11, 1], [11, 3], [11, 5], [11, 7], [11, 9],
[13, 1], [13, 3], [13, 5], [13, 7], [13, 9], [13, 11],
[15, 1], [15, 7], [15, 11], [15, 13], [17, 1], [17, 3],
[17, 5], [17, 7], [17, 9], [17, 11], [17, 13], [17, 15],
[19, 1], [19, 3], [19, 5], [19, 7], [19, 9], [19, 11],
[19, 13], [19, 15], [19, 17]

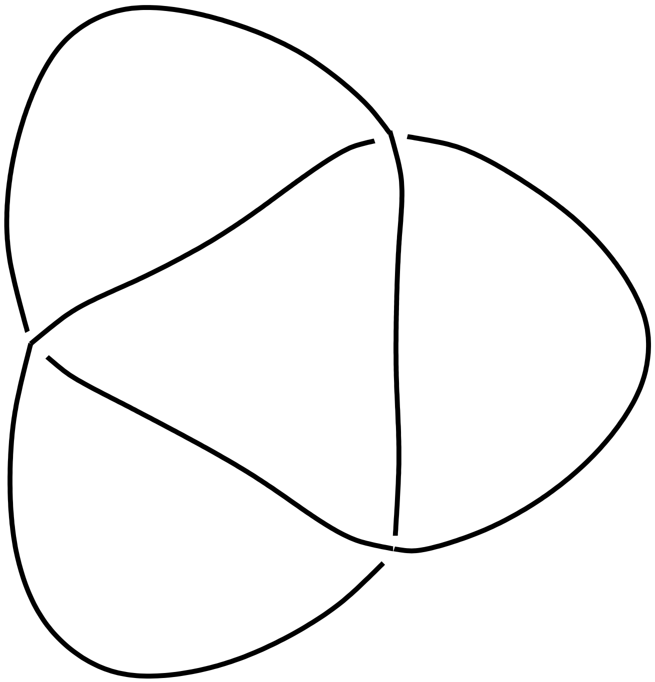
Un resumen

Vimos lo que es un nudo, la noción de equivalencia de nudos, lo que es un diagrama de un nudo y sabemos cómo probar que dos diagramas representan al mismo nudo: Sólo hay que encontrar una sucesión de movidas de Reidemeister que lleven un diagrama al otro.

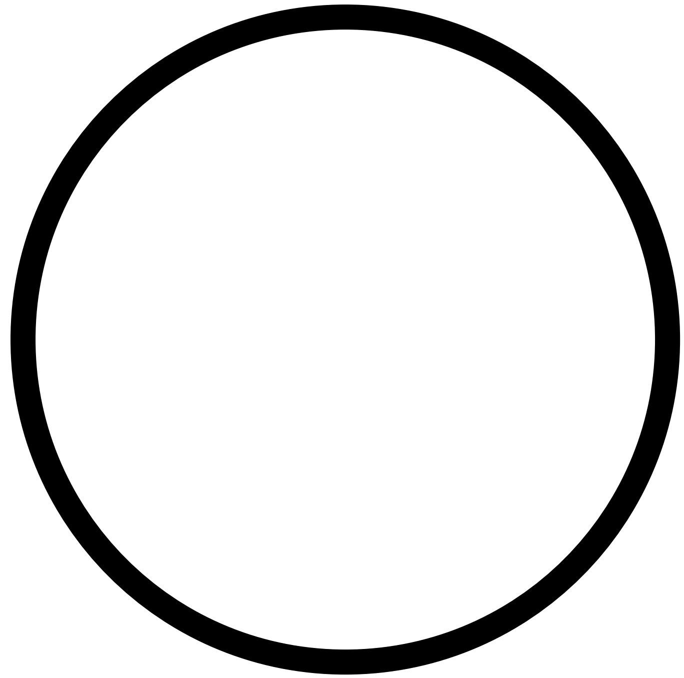
Sabemos cómo probar que dos nudos son el mismo.

¿Pero cómo le hacemos para probar que dos nudos no son el mismo?

¿Cómo sé que



$\nsim$



?

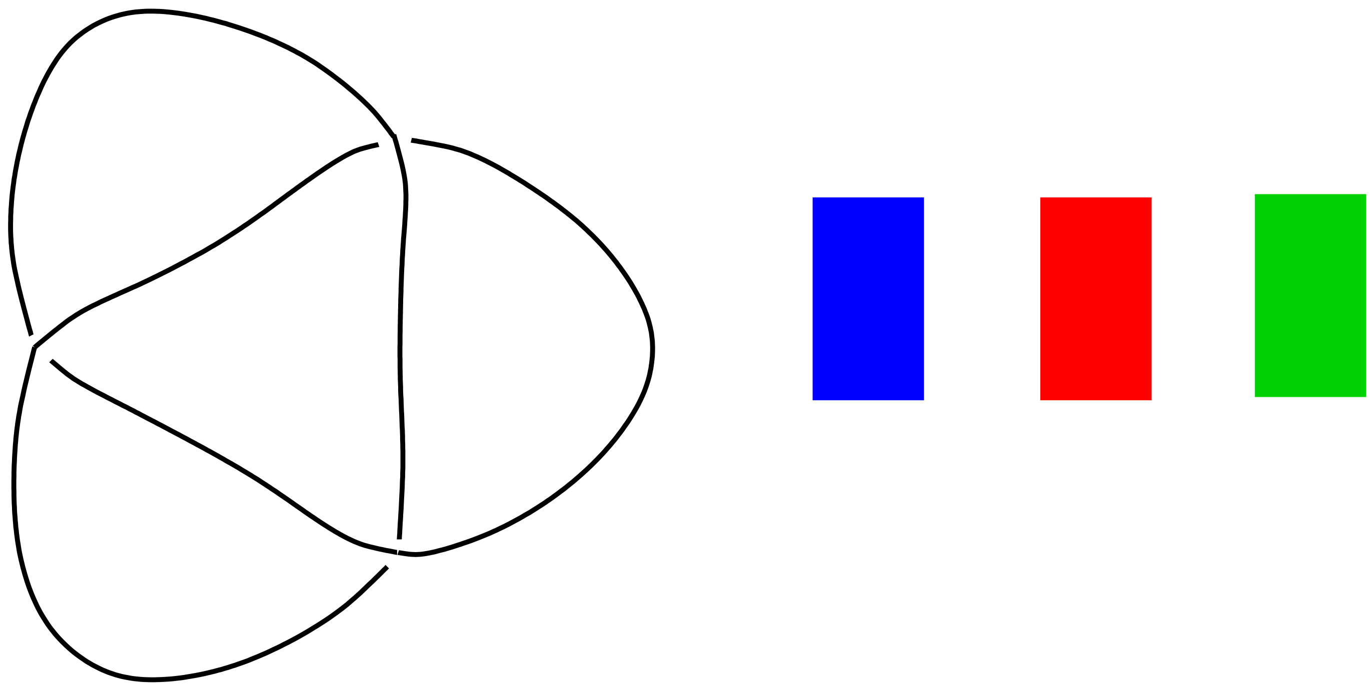
Tendría qué probar que, por más que deforme al trebol (sin romperlo), no lo voy a poder desanudar.

O sea, tendría que probar que ninguna sucesión de movidas de Reidemeister me puede llevar del diagrama del trébol al “no nudo”.

¿Qué se hace en estos casos?

Vamos a ver un truco de matemáticos

Tomemos el diagrama de un nudo k y pensemos en tres colores.



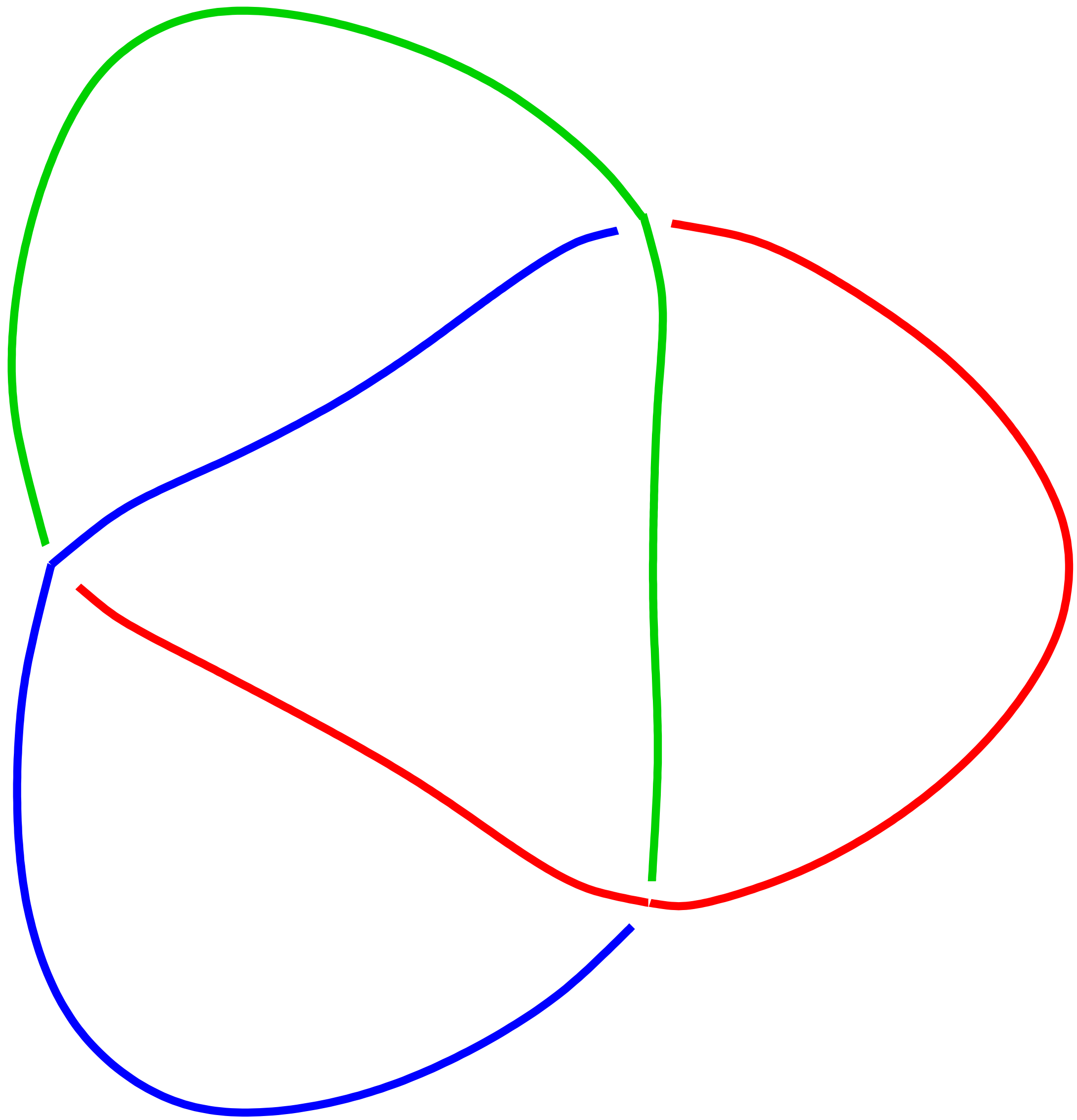
Decimos que este diagrama de k se puede tricolorear, si podemos pintar cada arco del diagrama con un color de tal manera que

1) En cada punto de cruce hay exactamente un color o hay exactamente tres colores distintos.

2) Se usan los tres colores (todos).

Hmmm... ¿el trébol se puede tricolorear?

Colores



Tenemos el siguiente resultado:

Teorema. Tomemos un nudo k y un diagrama D de k. Si D se puede tricolorear, entonces todos los diagramas de k se pueden tricolorear.

¿...?

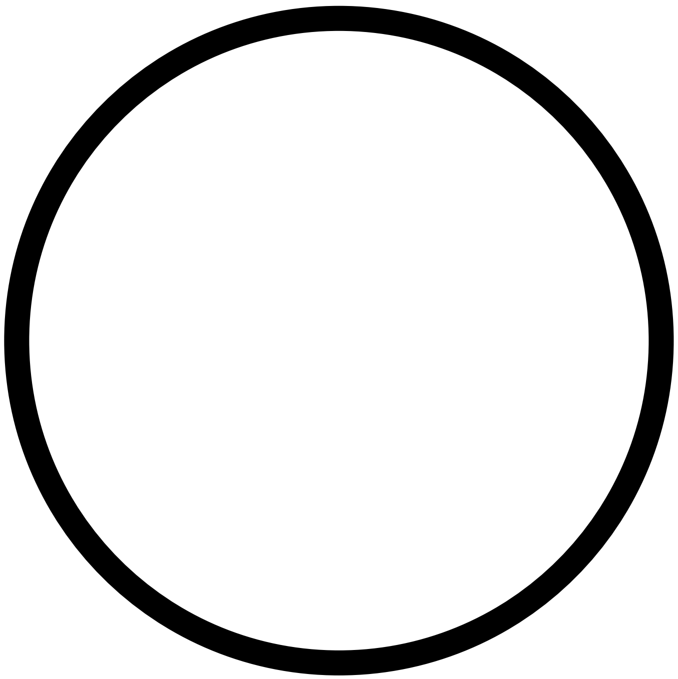
Primero, ahora podemos hablar de "nudos tricoloreables", no sólo de "diagramas tricoloreables".

Definición. Un nudo k se llama tricoloreable, si algún diagrama de k se puede tricolorear.

Segundo, resulta que ahora sabemos lo siguiente:

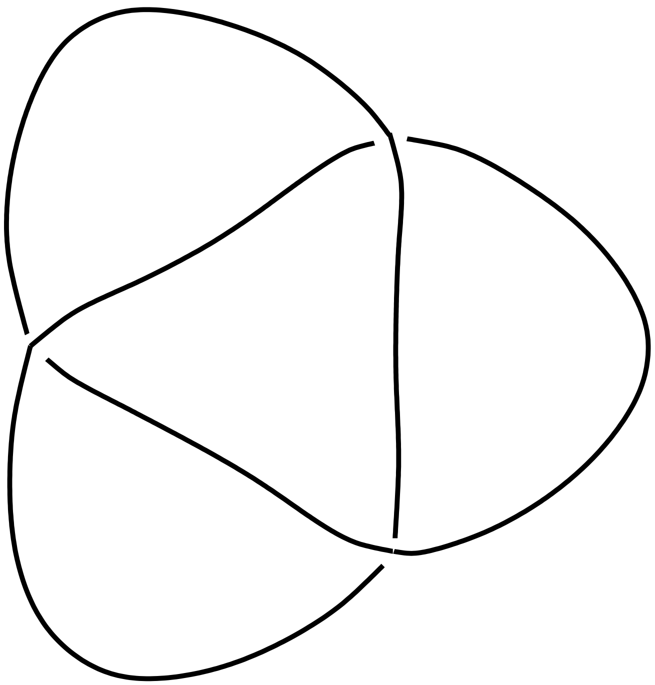
Si dos nudos k y ℓ son equivalentes y, digamos, k es tricoloreable, entonces ℓ también es tricoloreable.

Si nos fijamos que

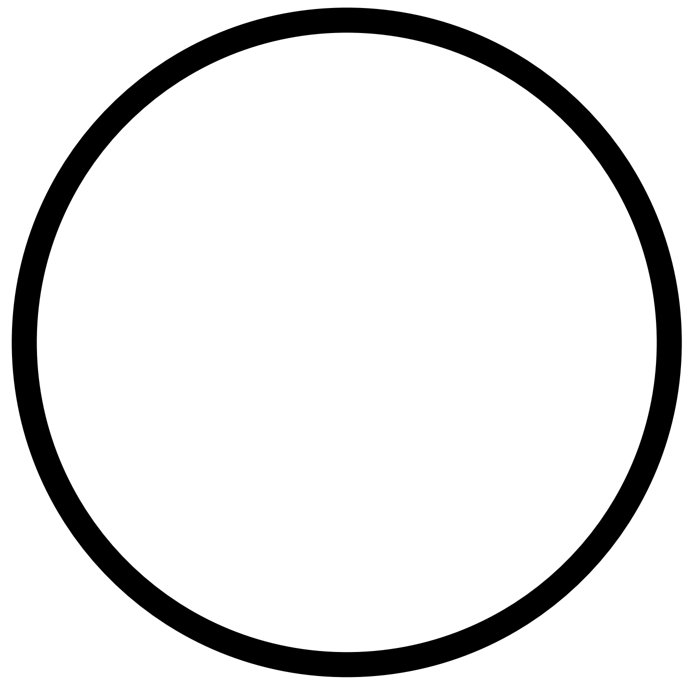


no se puede tricolorear

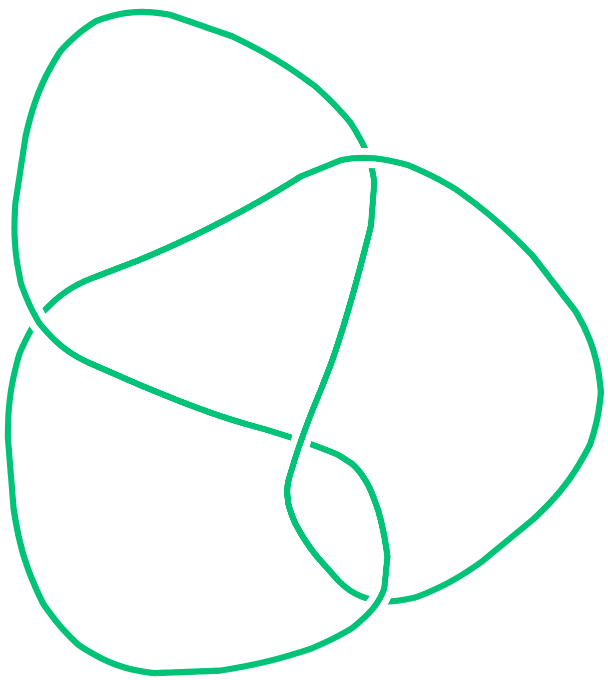
concluimos que



$\nsim$



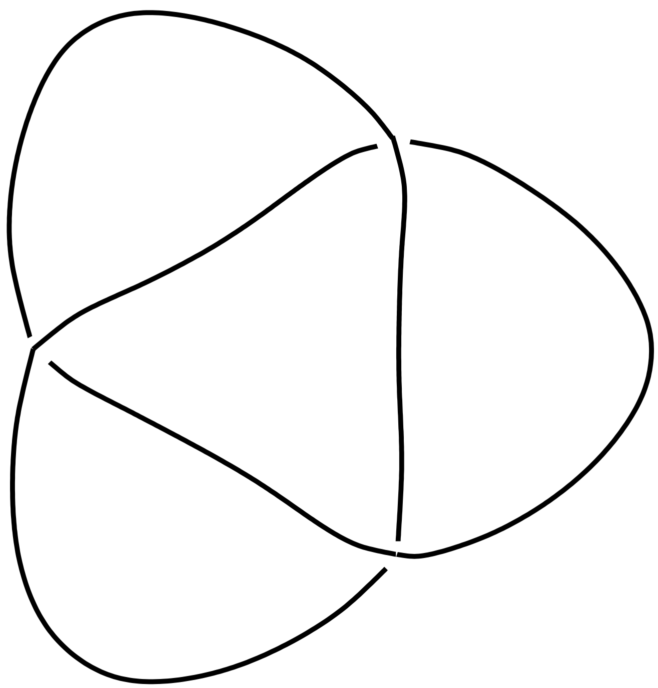
Pero, por ejemplo, el ocho,



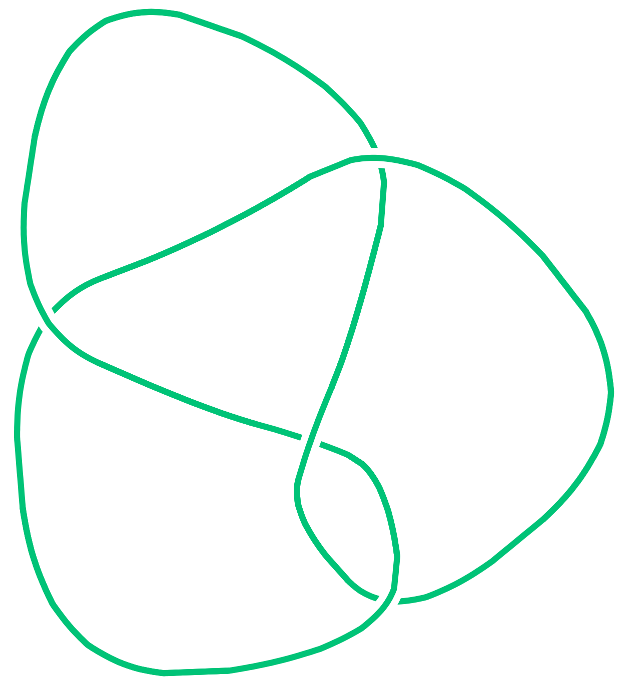
tampoco se puede tricolorear.

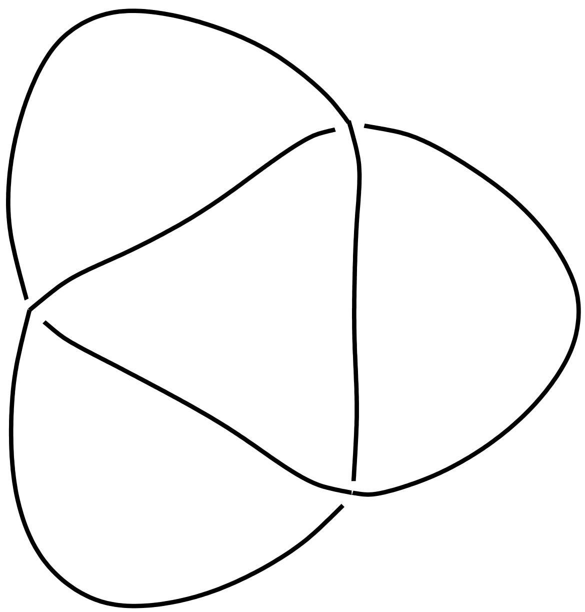
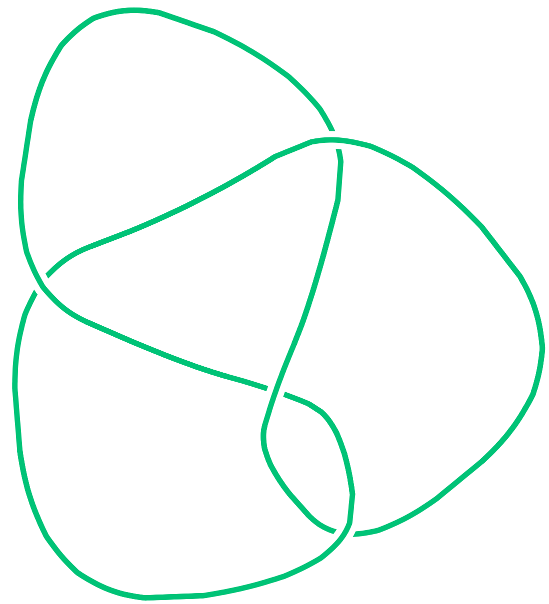
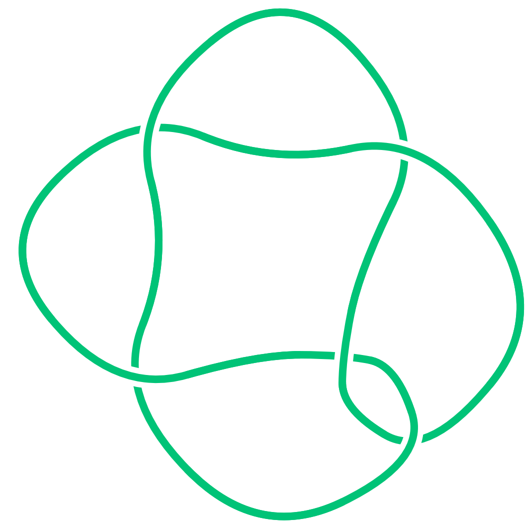
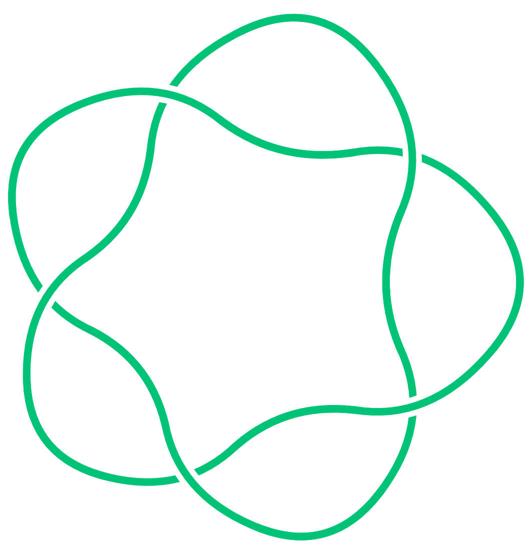
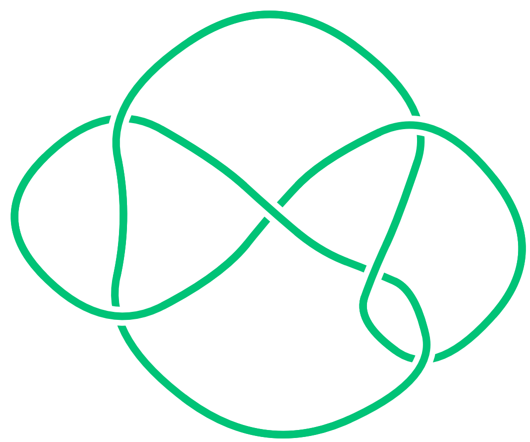
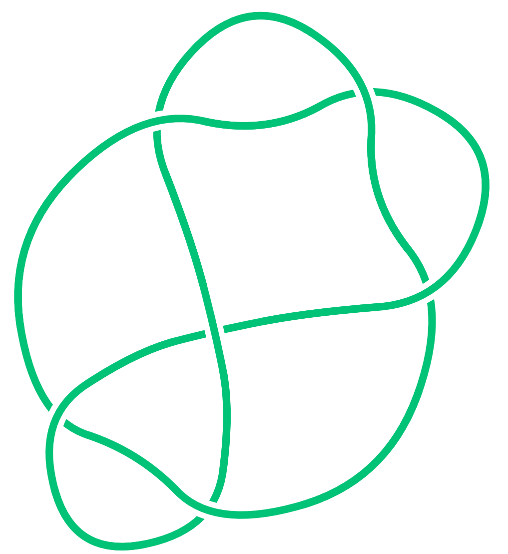
¿...?

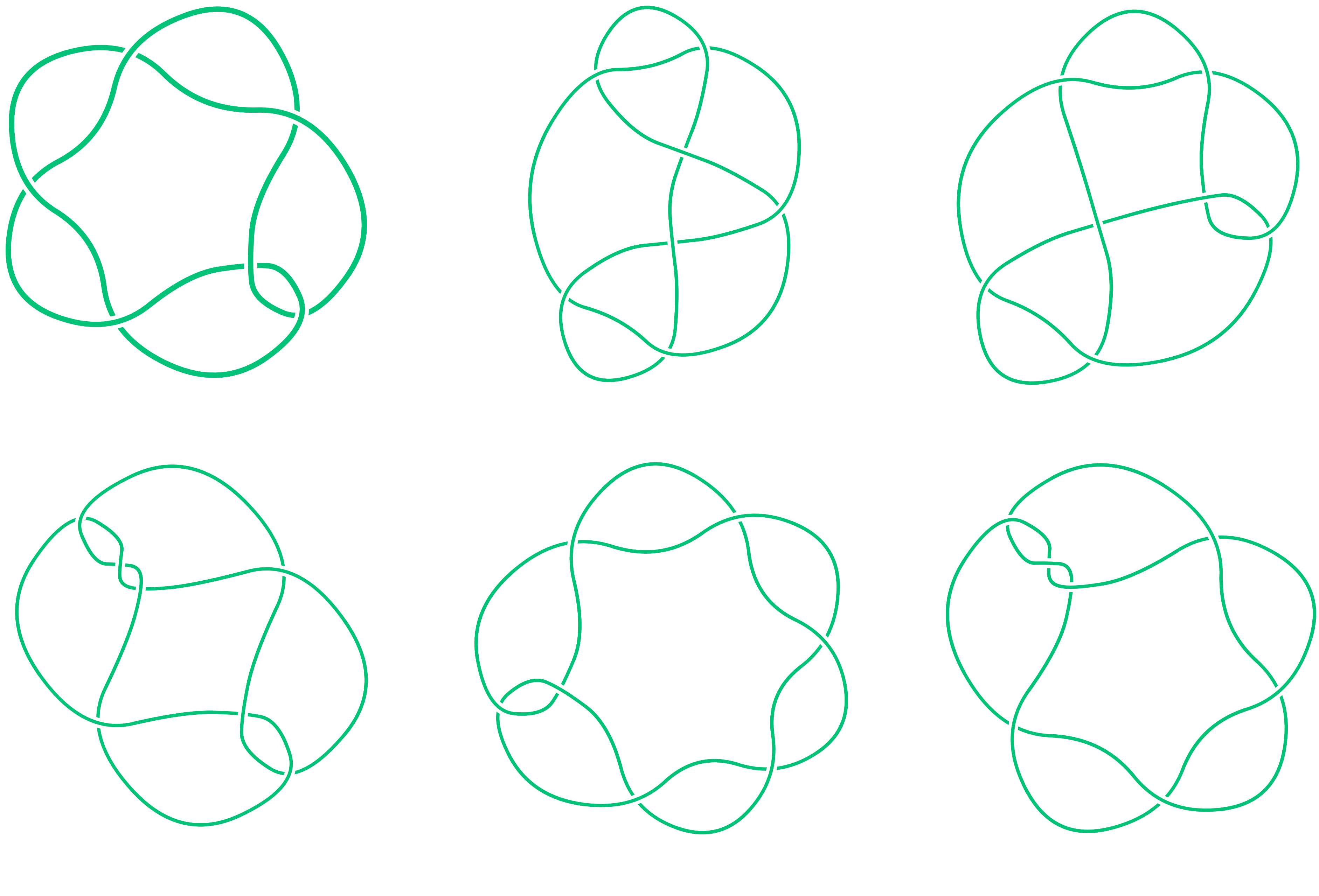
Así que podemos concluir que

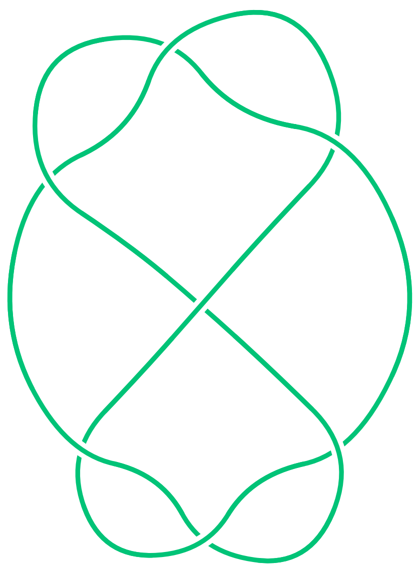
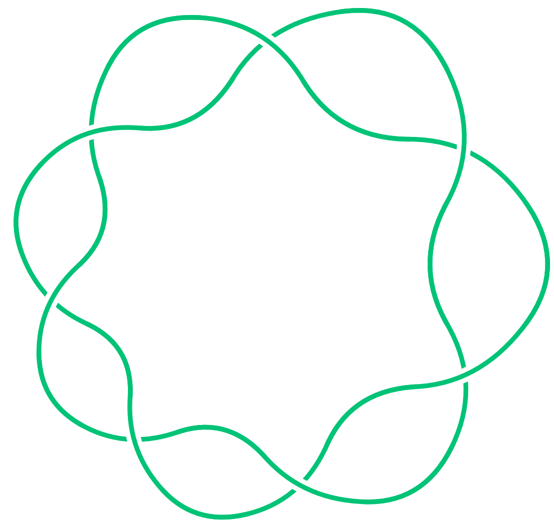
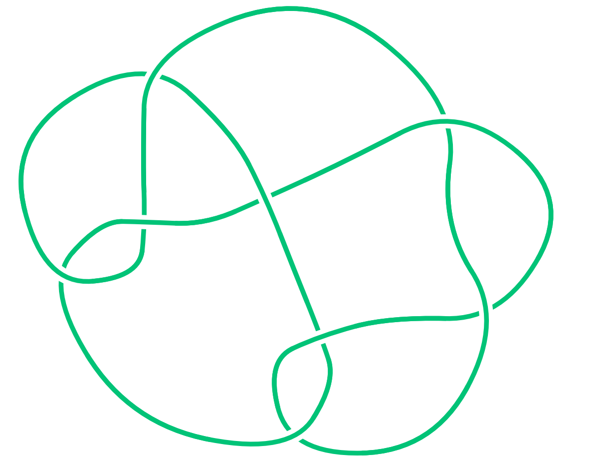
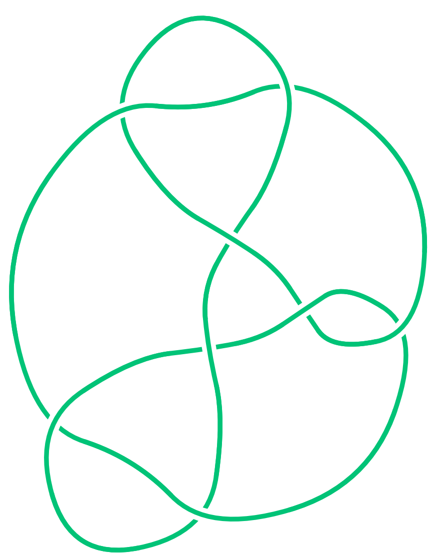
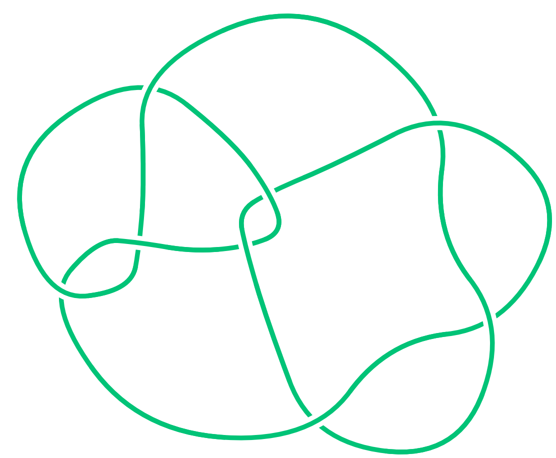
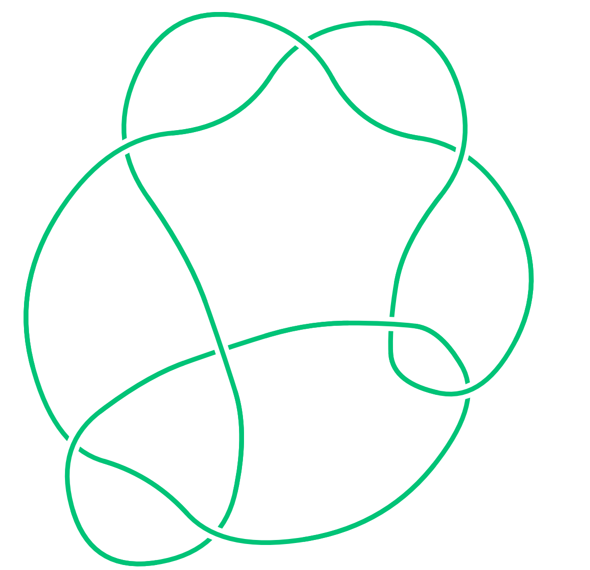


$\not\sim$





Sabemos, entonces, que hay dos tipos de nudos

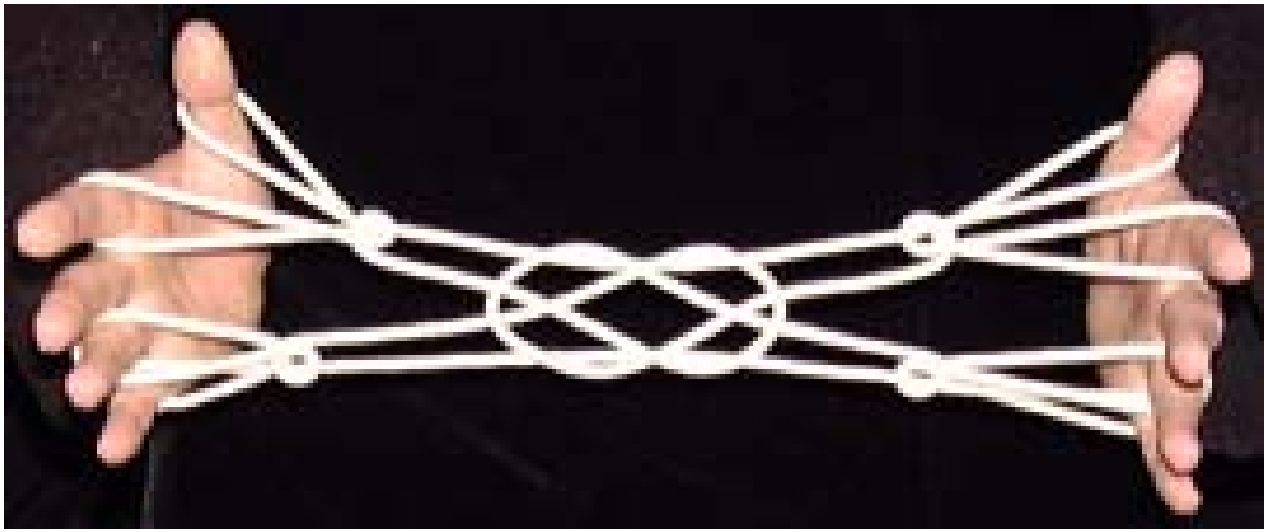
(los tricoloreables y los no tricoloreables)

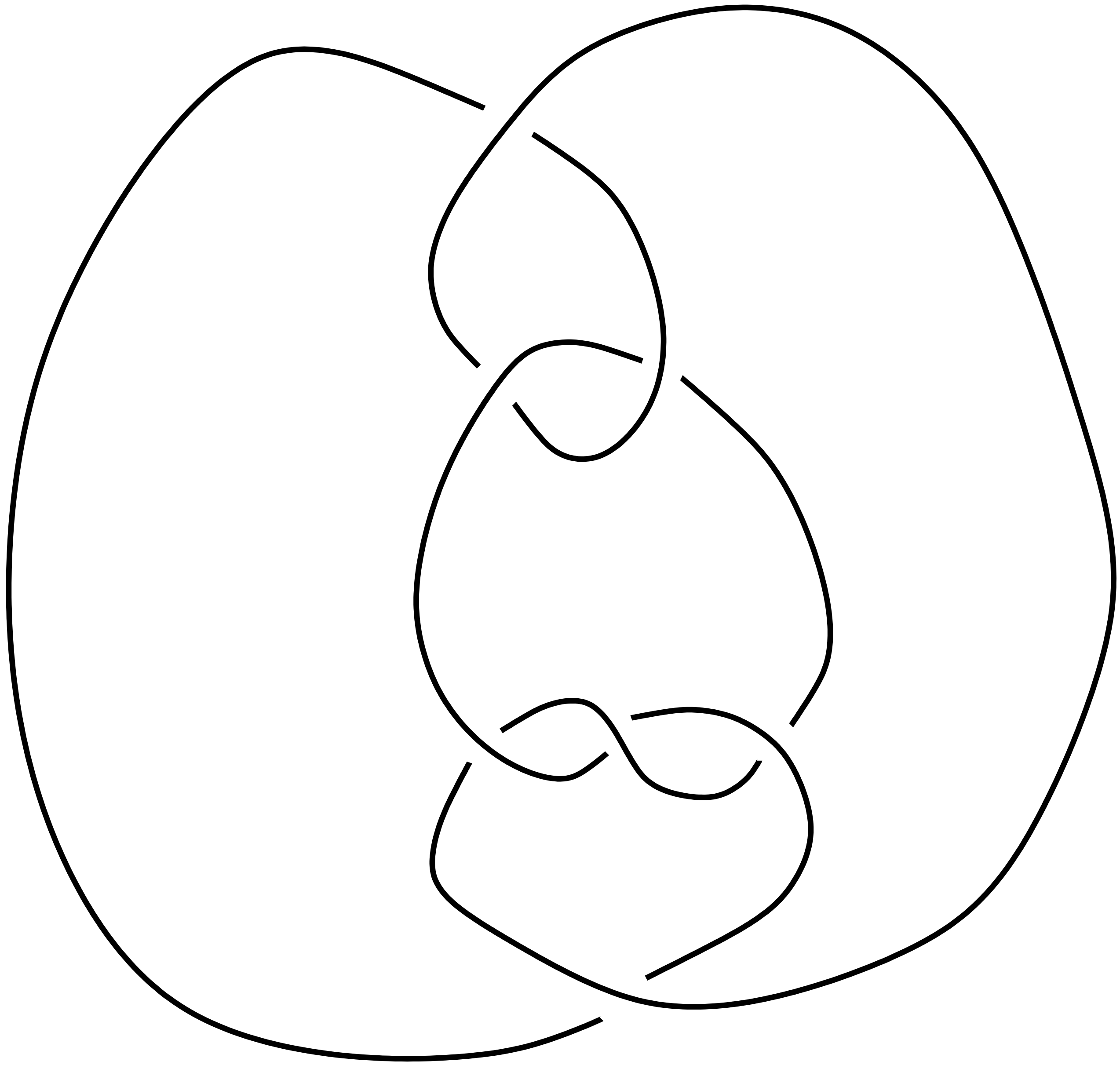
Pero no sabemos (todavía) si el nudo ocho se puede desanudar.

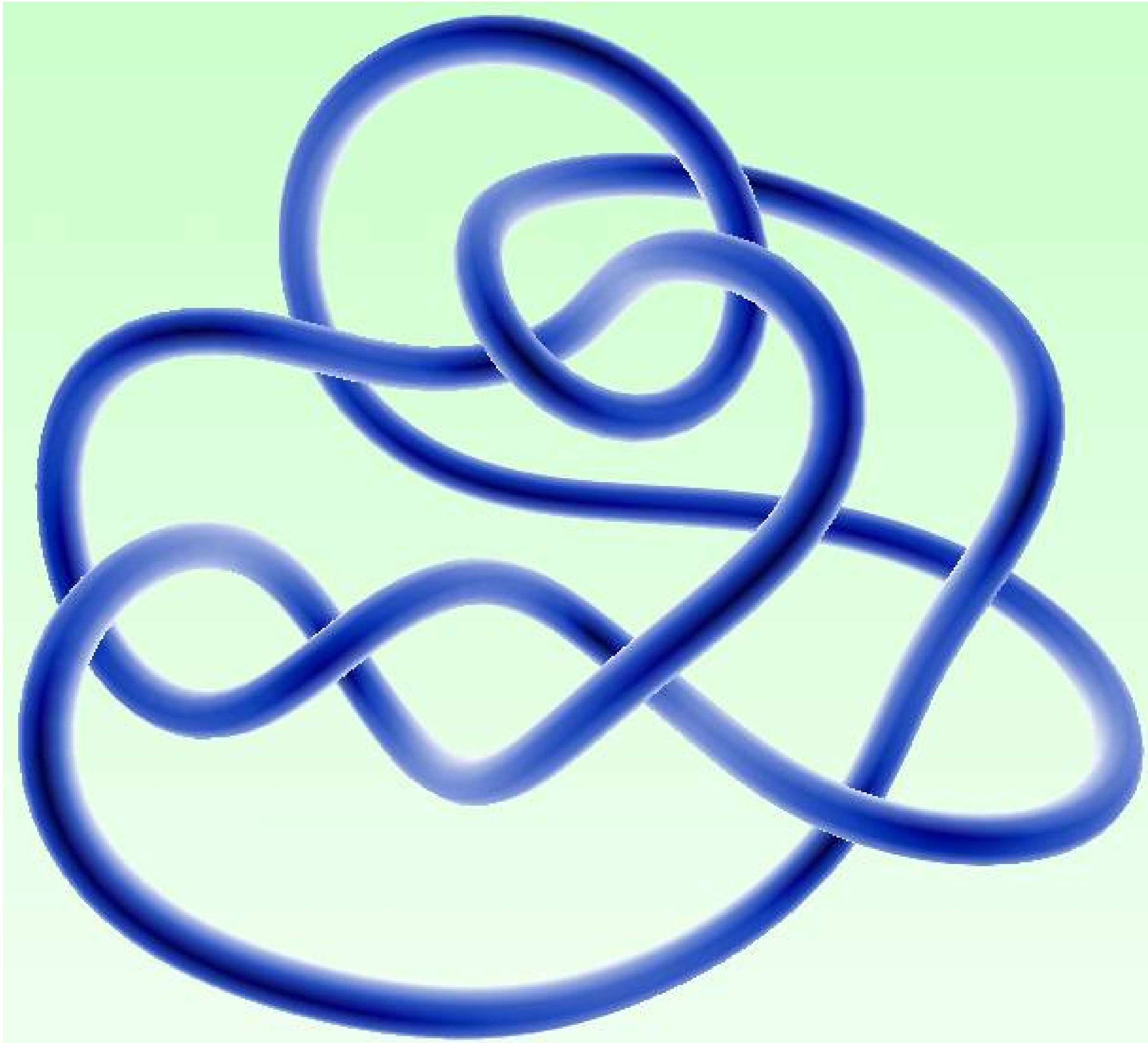
Claro que <u>es claro</u> que al nudo ocho no lo podemos desanudar, ¿qué no?

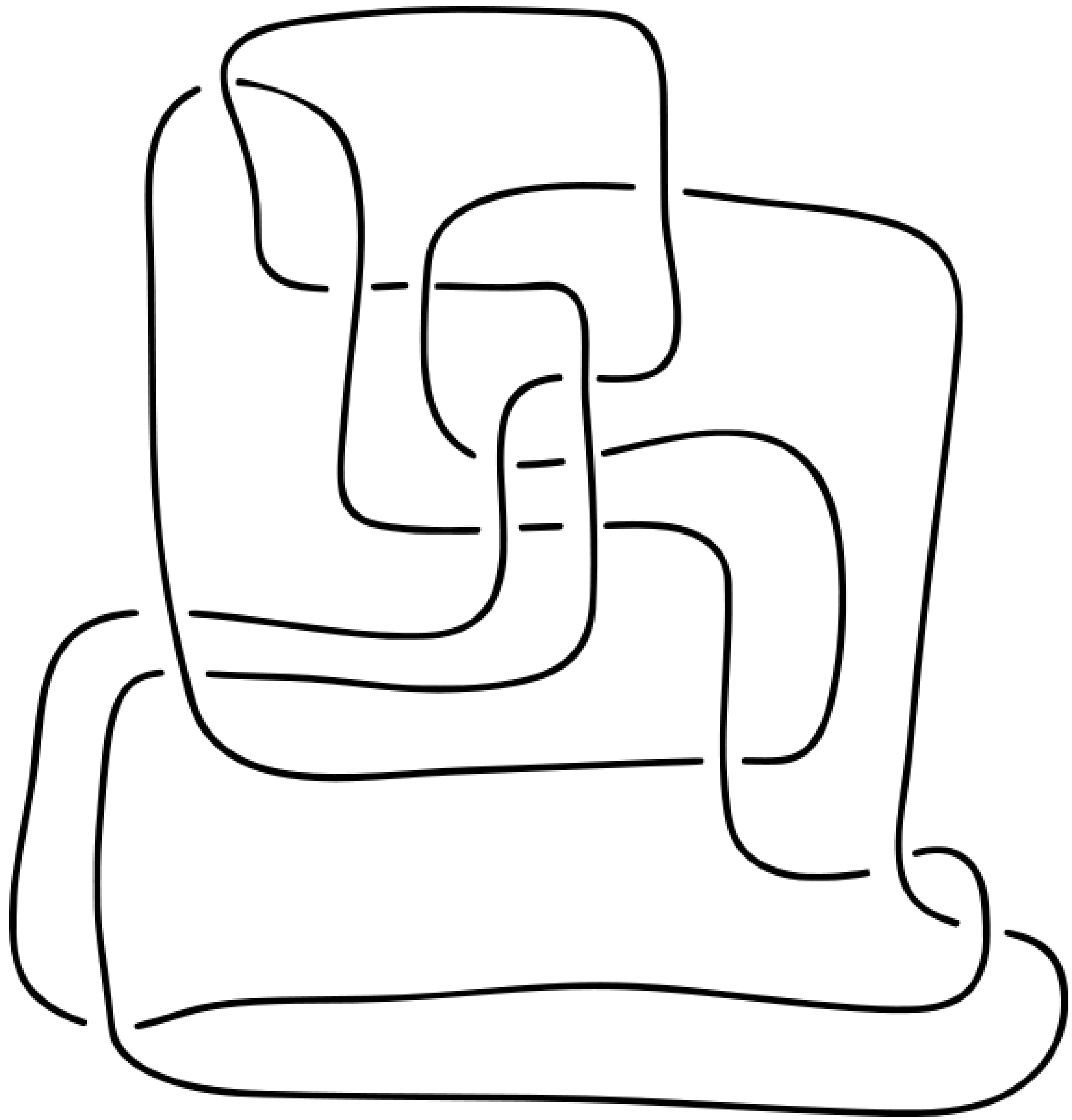
pero NO estamos seguros de que al nudo ocho no lo podemos desanudar

(¿cosas de matemáticos?)









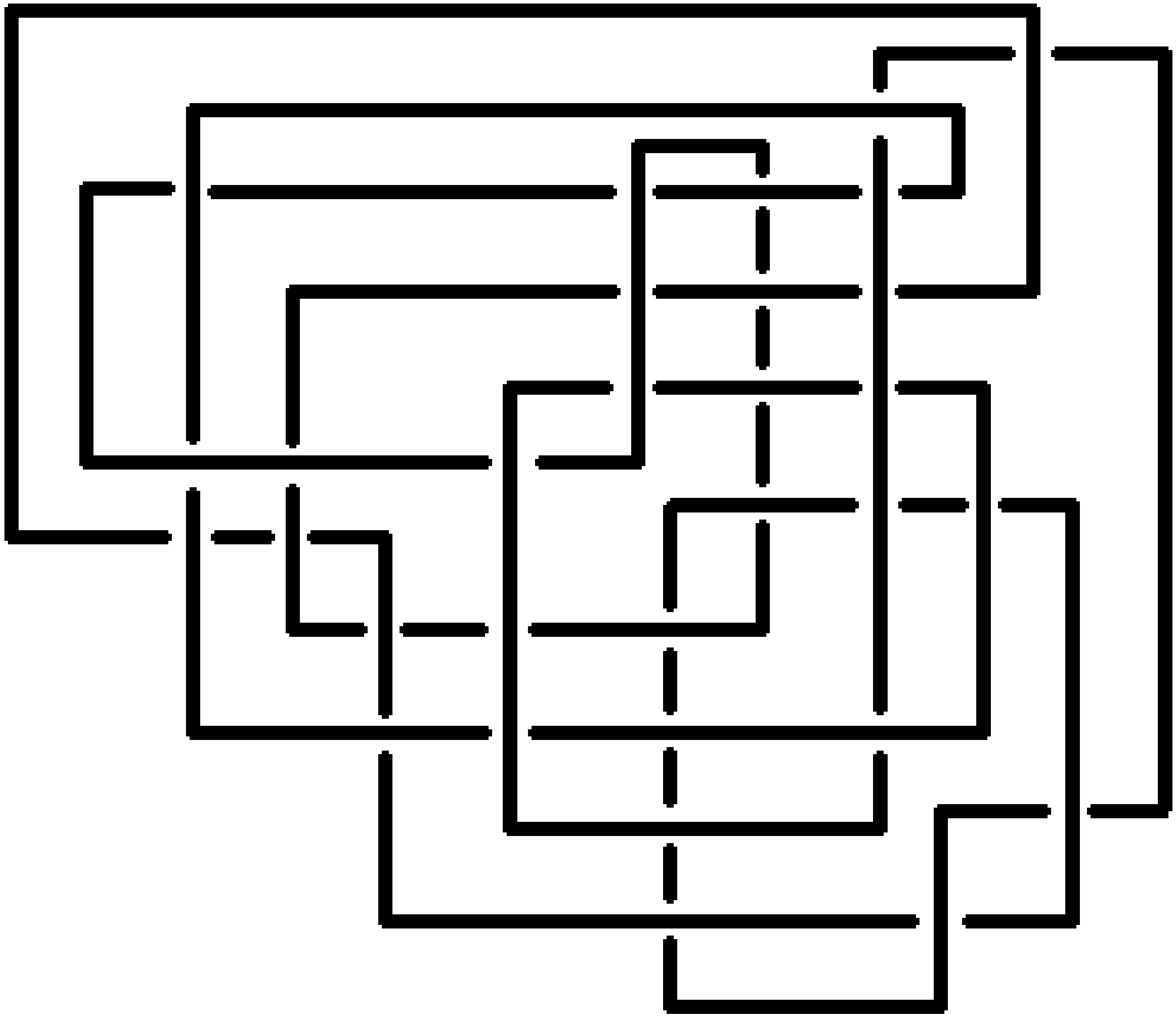
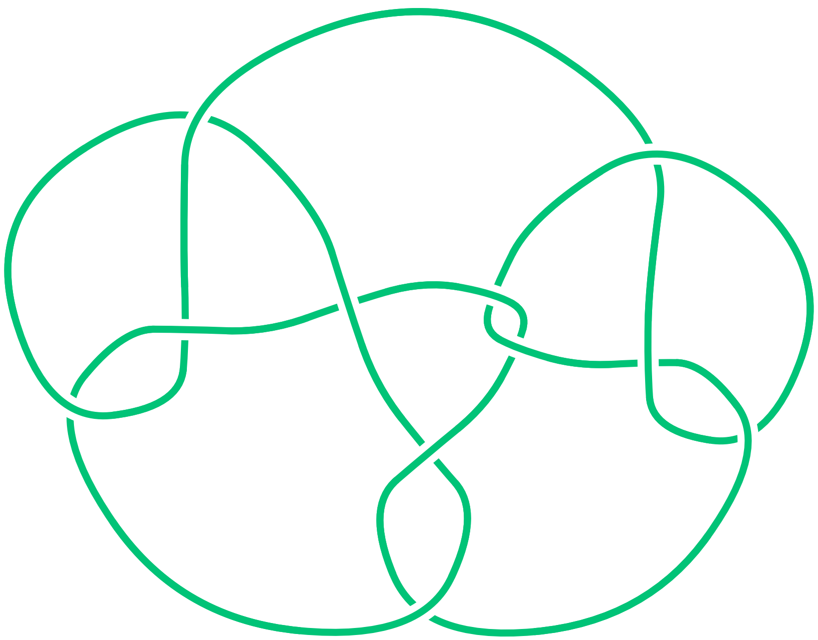


Figure 3.5. Wolfgang Haken's "Gordian knot."

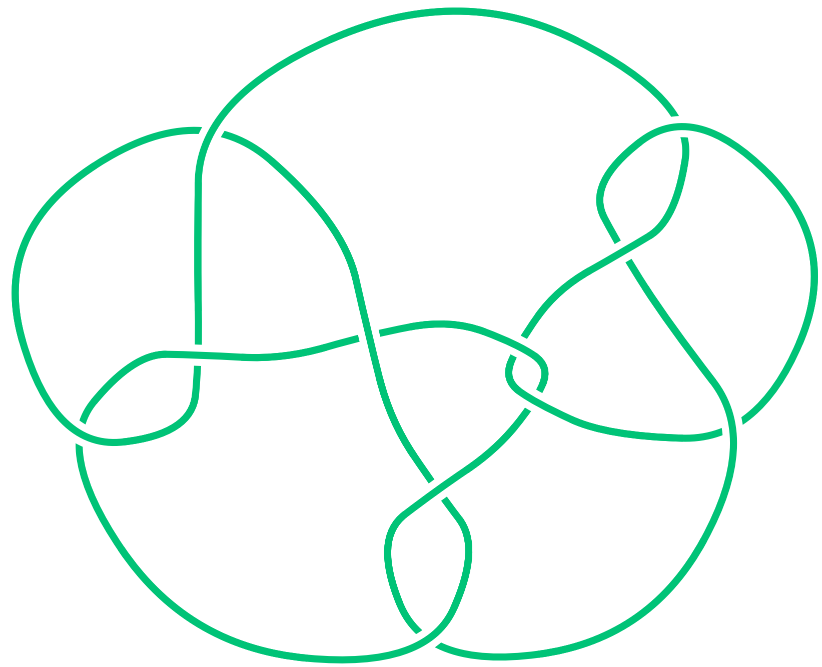
Pero, insisto, si dos nudos están anudados, ¿cómo sé si son el mismo nudo o no?

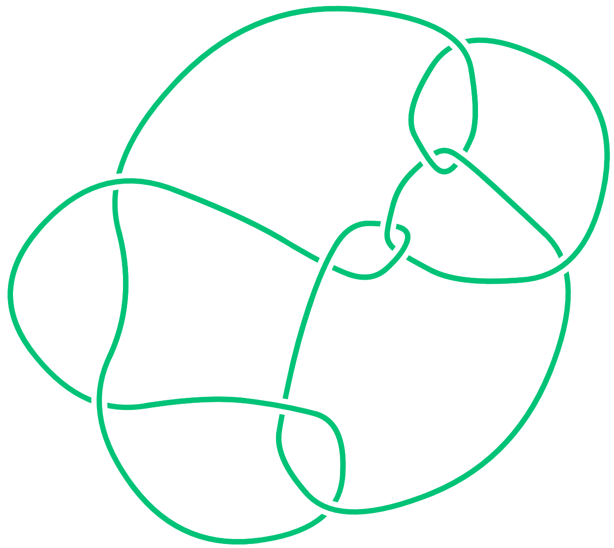
Para saber si dos nudos son el mismo, debo transformar (deformar) un diagrama en el otro.

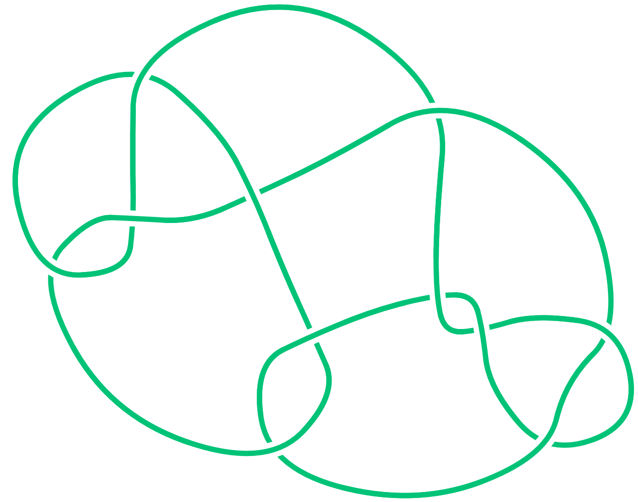
(es la única herramienta que tenemos)

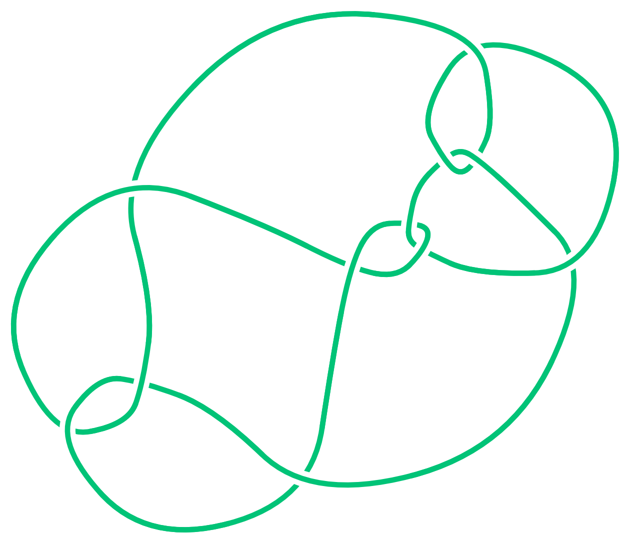


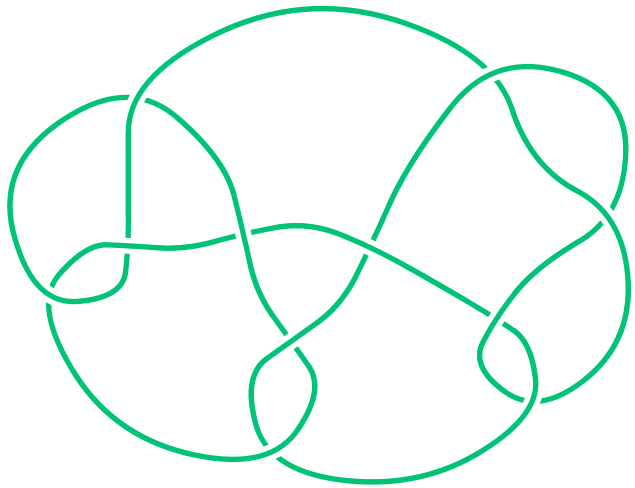
$\sim$

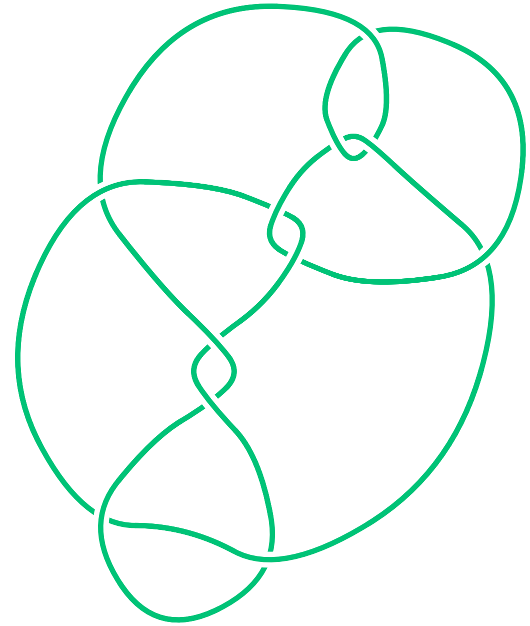


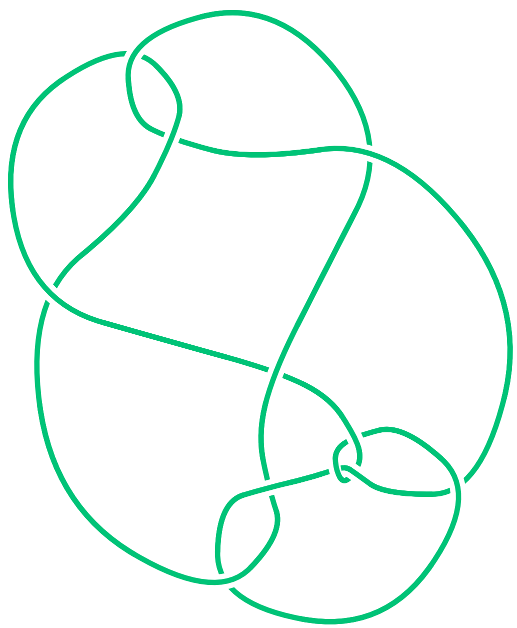


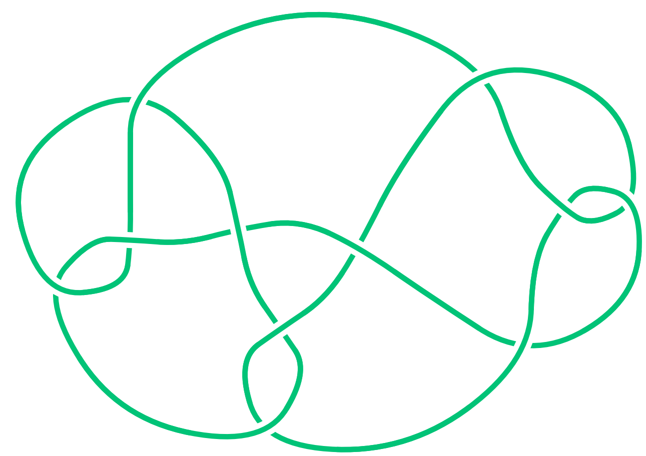










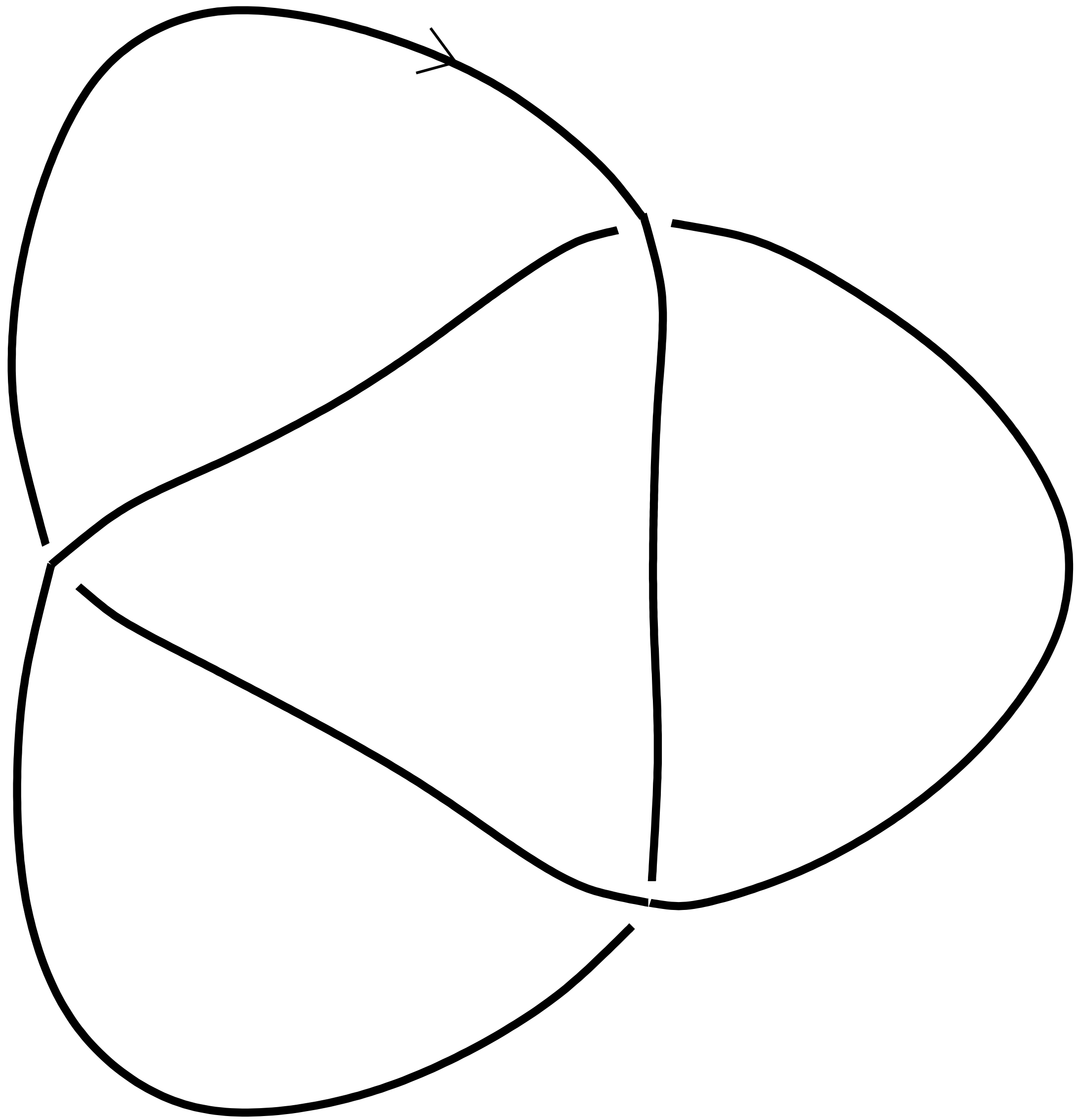


Pero, para distinguir dos nudos...

Tomamos un diagrama D de un nudo k y marcamos una "orientación" de k en el diagrama.

(o sea, una dirección en la que se recorre la curva k)

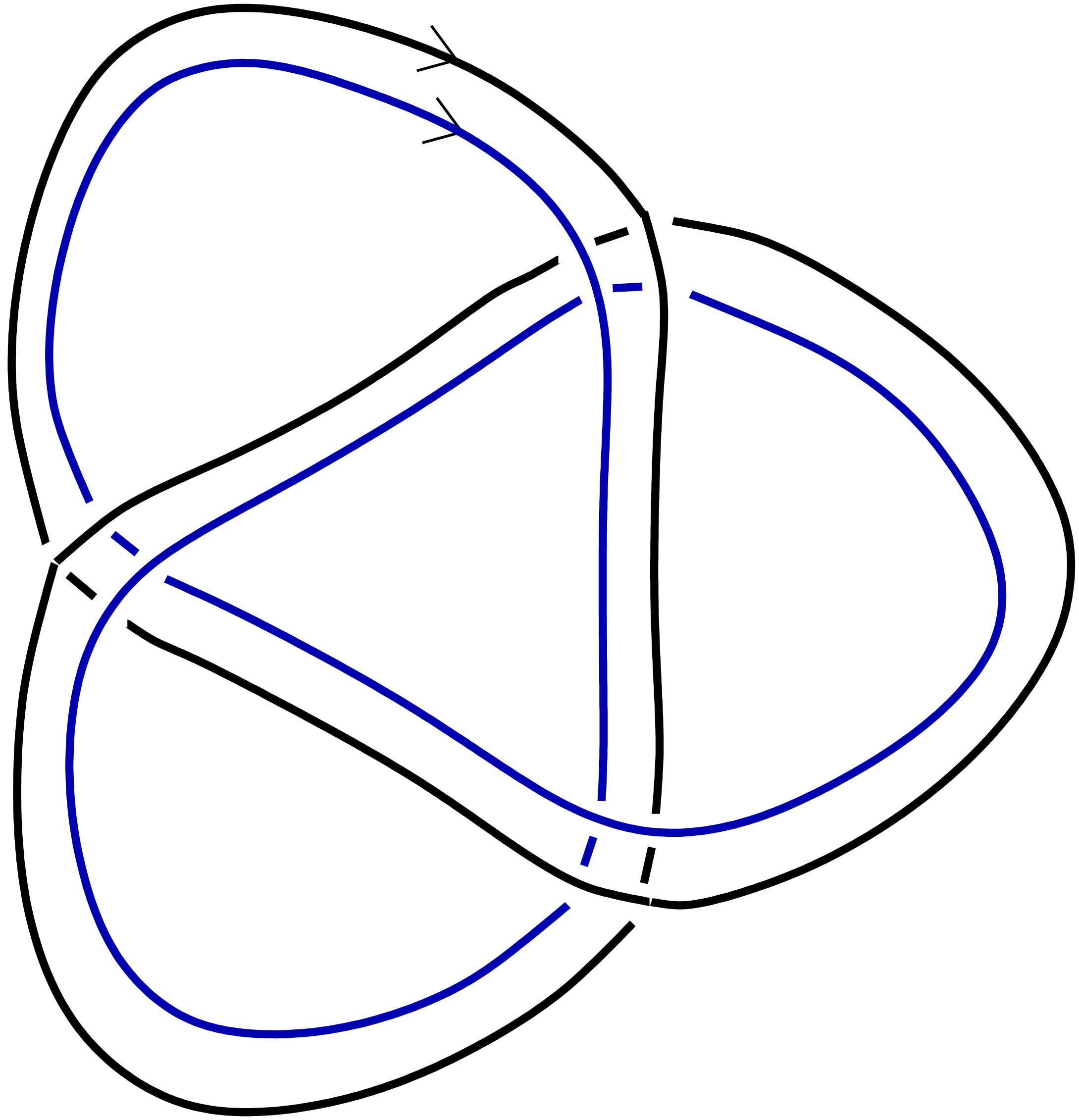
writhe



Dibujamos sobre el diagram D una curva “paralela” al nudo que sea “idéntica”.

Obtenemos así un nuevo diagrama D' que contiene dos curvas paralelas.

writhe

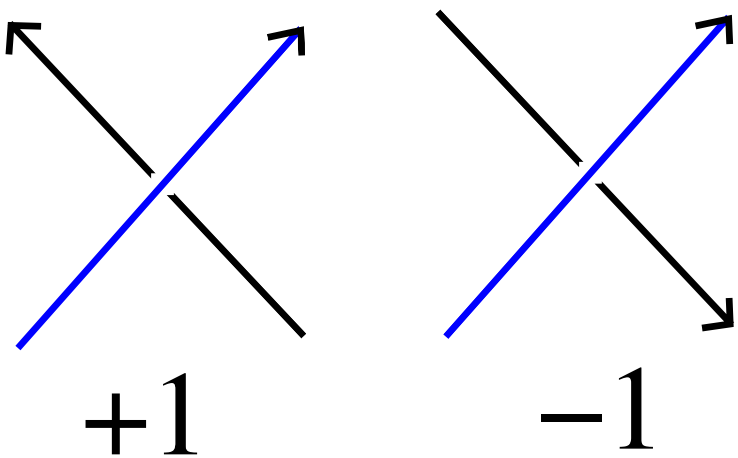


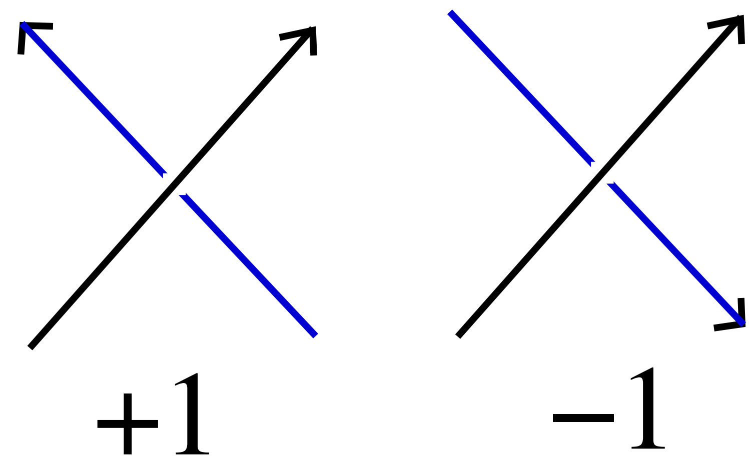
Este nuevo diagrama tiene el doble de cruces que el original.

writhe

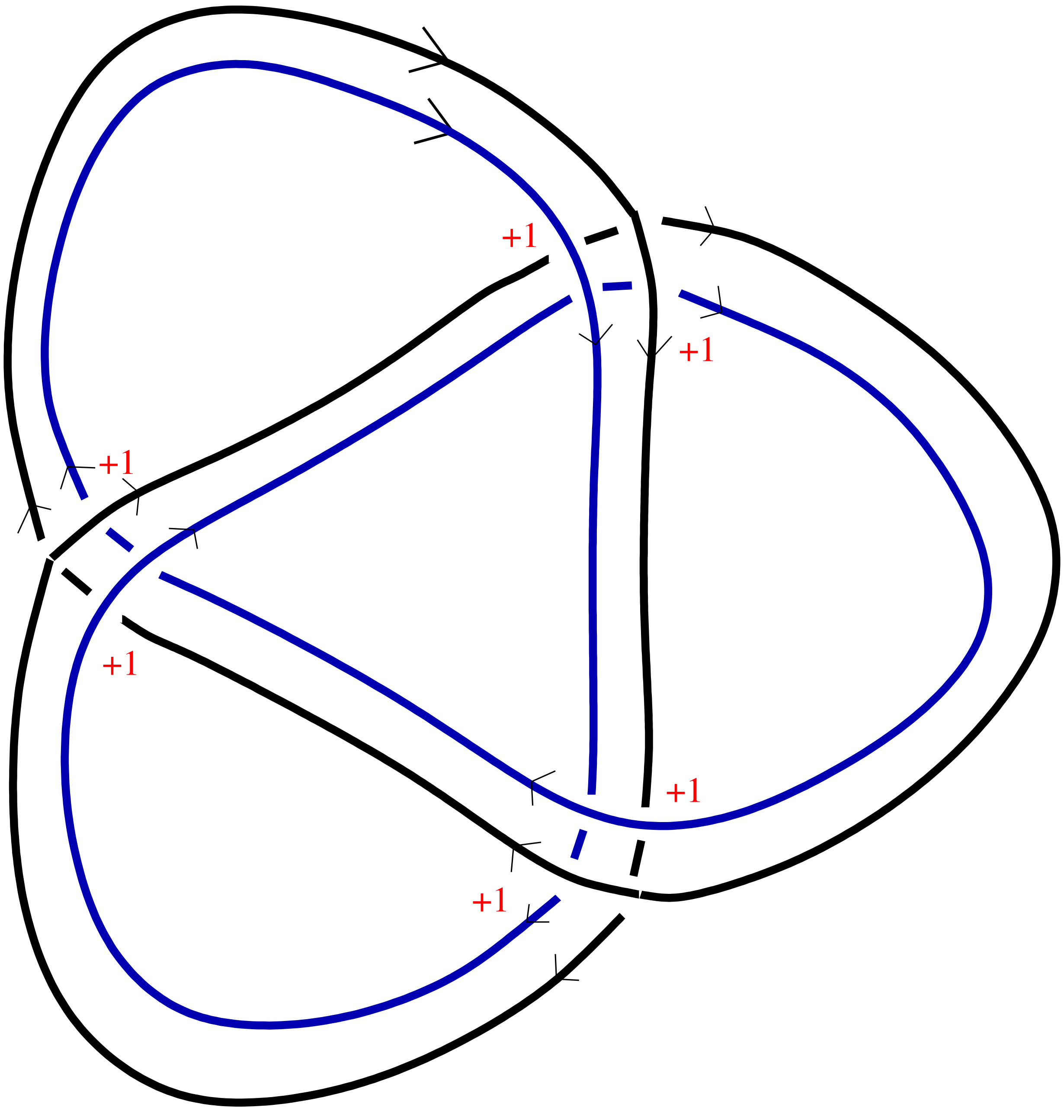
Vamos a considerar sólo los cruces entre el nudo original y su copia.

Por cada cruce "positivo" de una componente con la otra contamos 1; y por cada cruce "negativo" contamos -1:





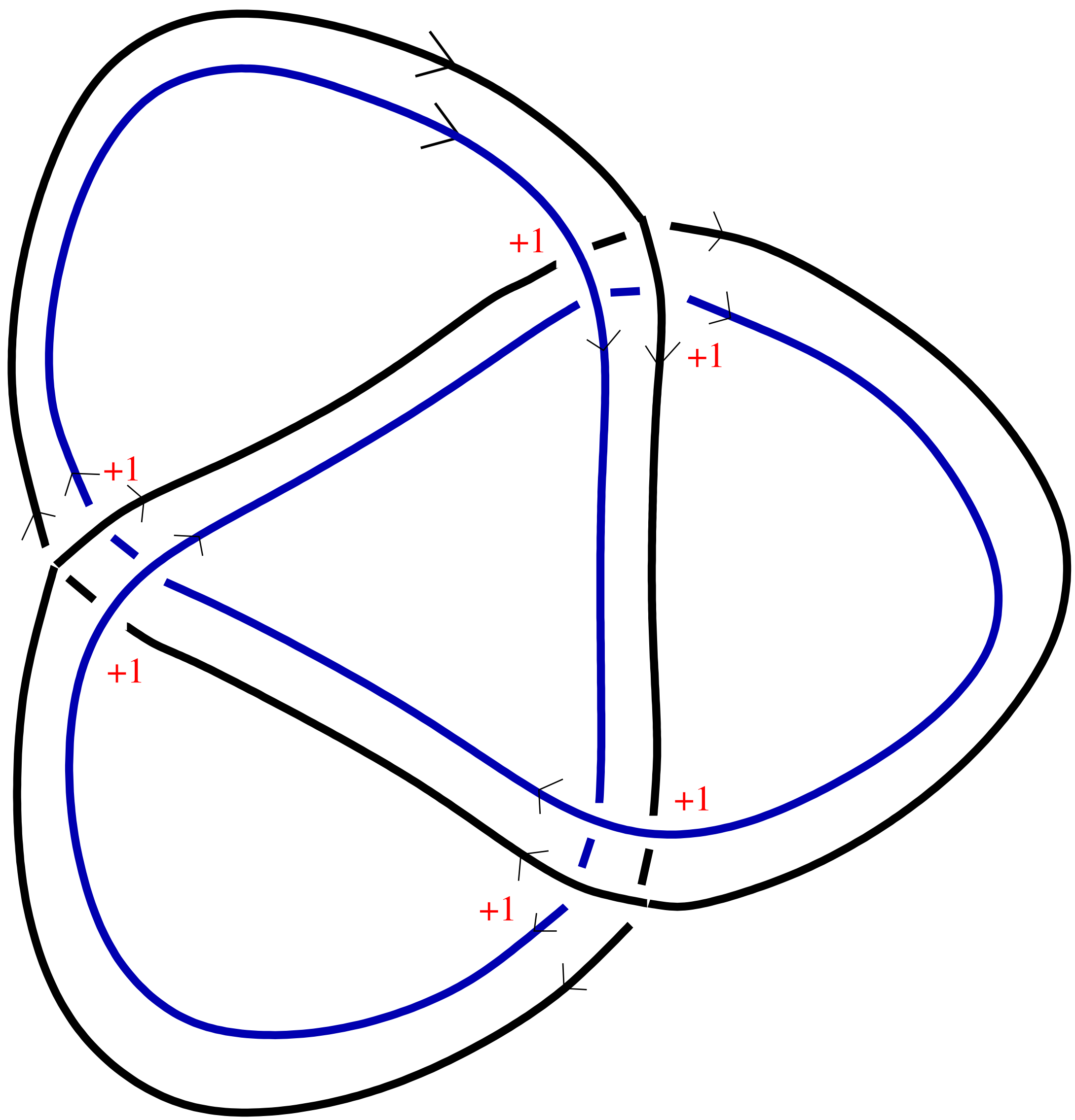
writhe



writhe

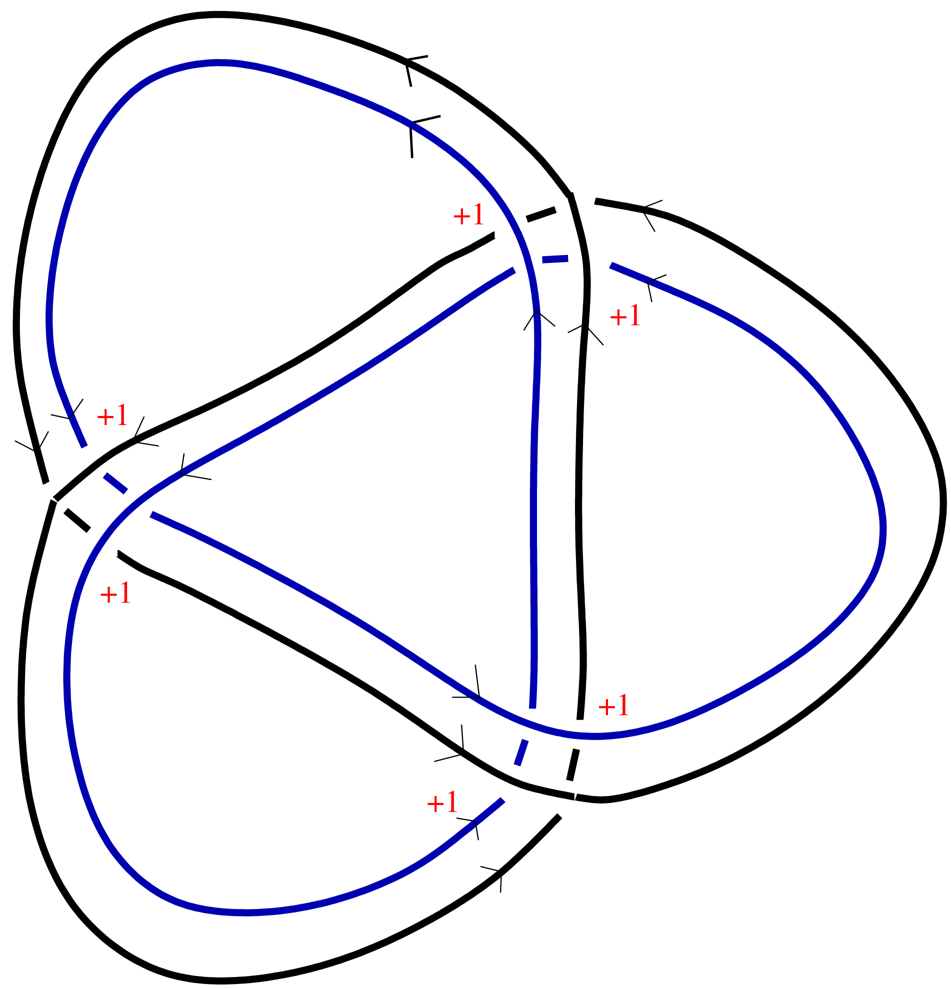
A la mitad del resultado de sumar todos los unos y menos unos lo llamamos el número de retorcimiento de D (el writhe de D).

writhe



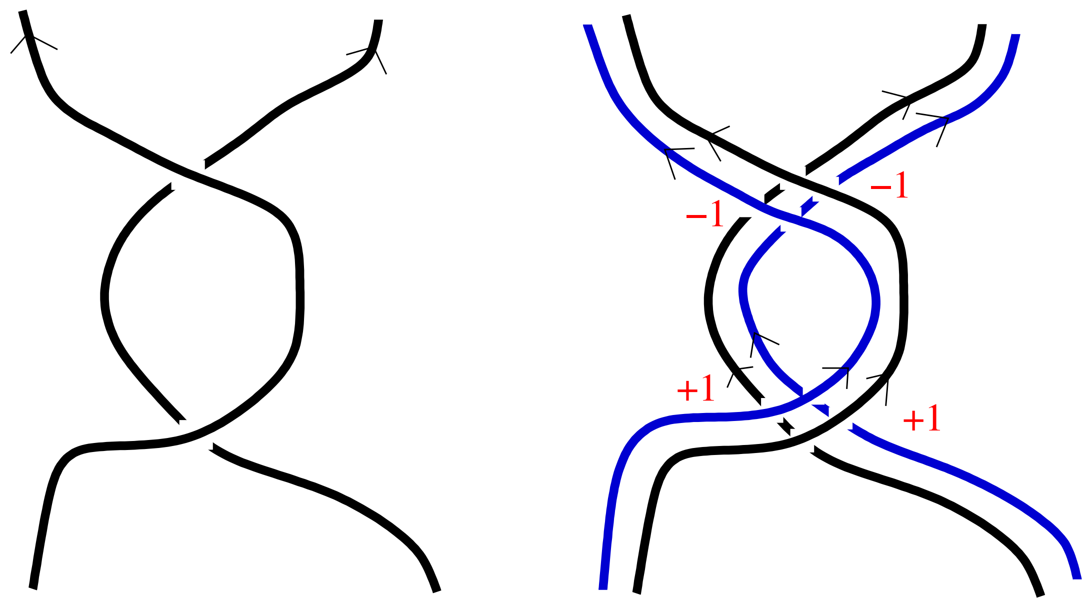
En este ejemplo tenemos writhe$= 6/2 = 3$.

(Si hubiéramos orientado el nudo al revés, obtendríamos el mismo resultado)

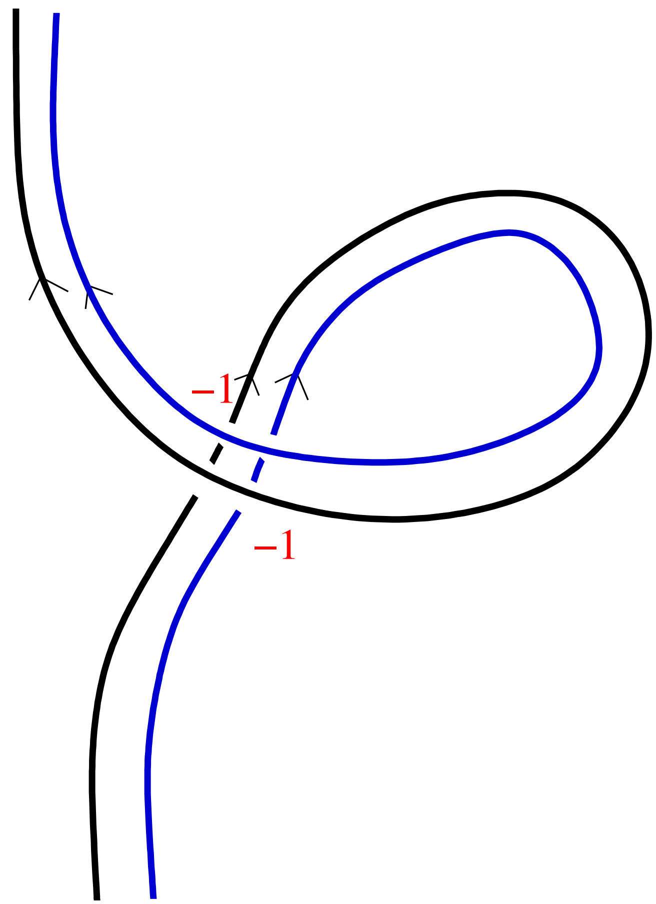


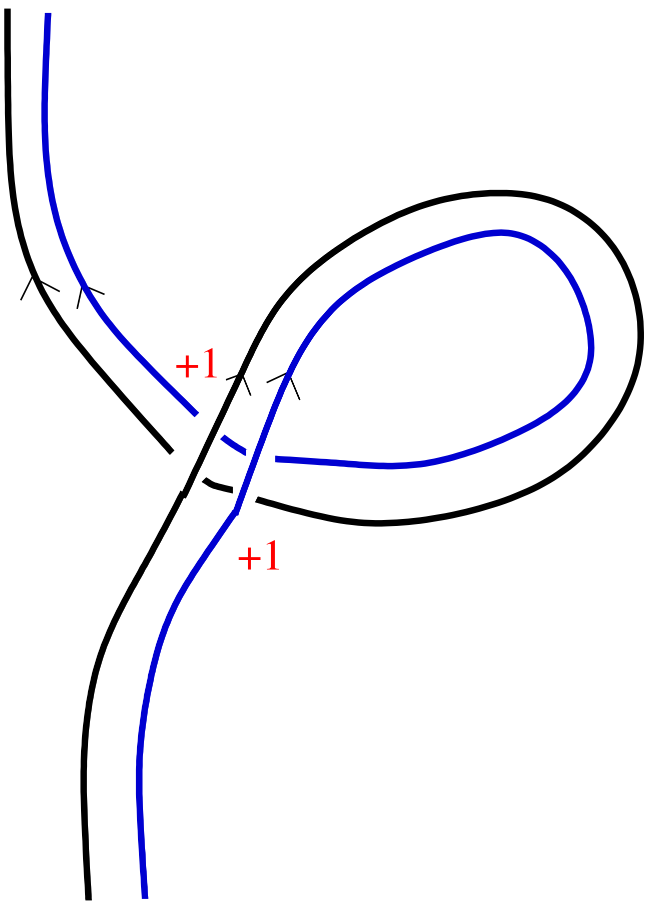
No es difícil convencerse de que el writhe de un diagrama no cambia con las movidas de Reidemeister II y III.

Por ejemplo:



Pero la movida de Reidemeister I cambia el writhe en ± 1.



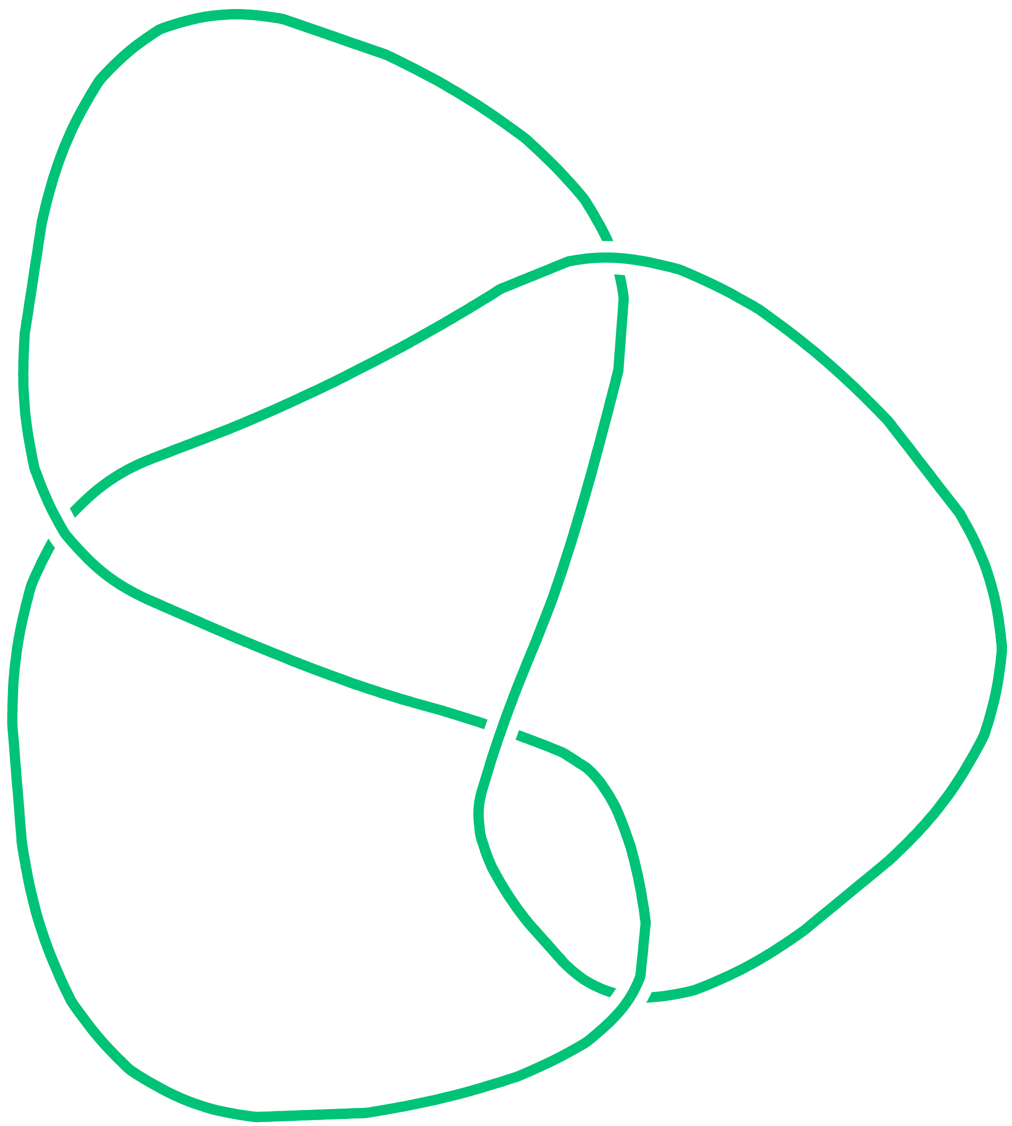


writhe

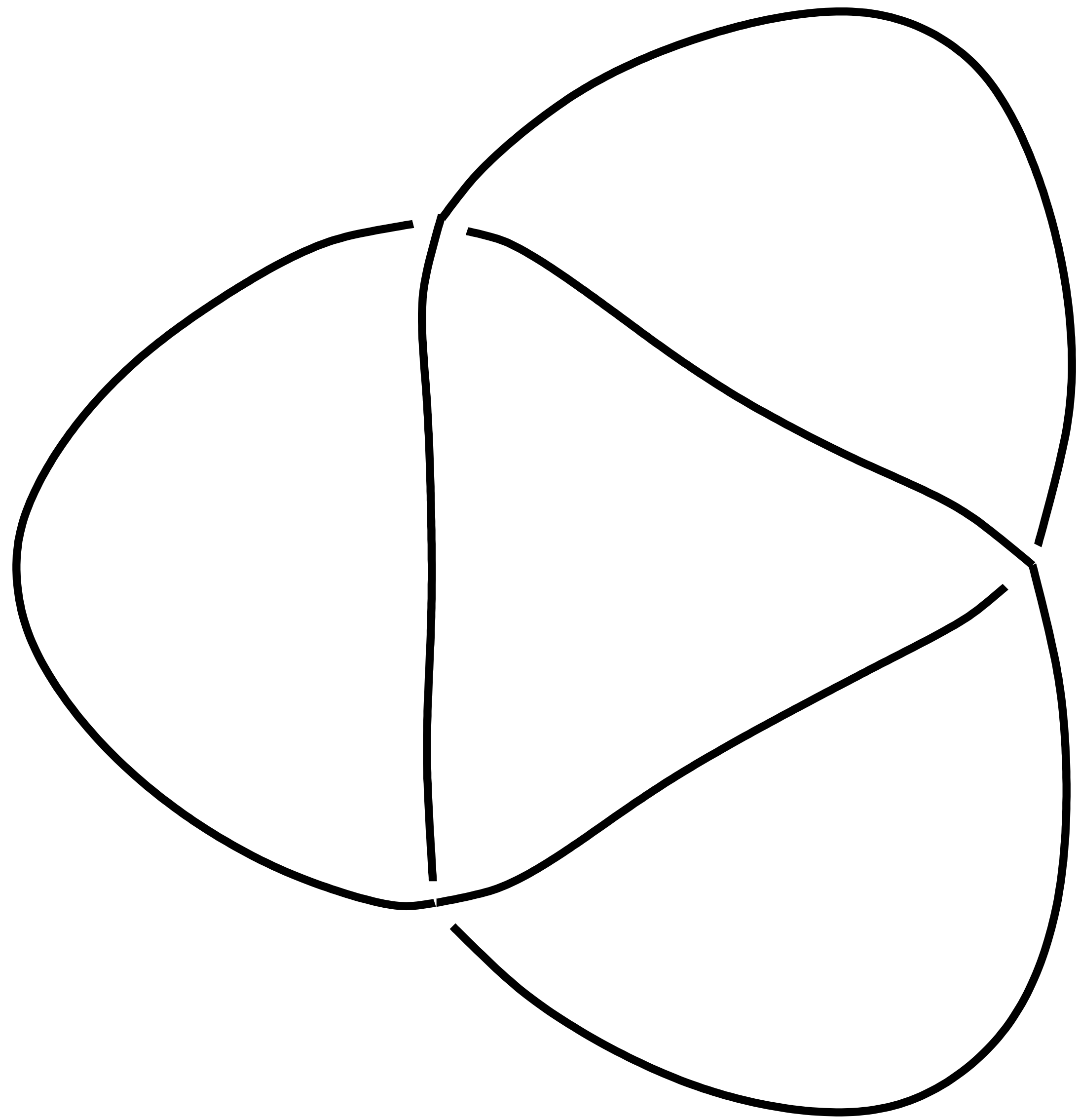
No obtuvimos un invariante.

Pero este writhe va a ser muy útil.

Calcula el writhe del ocho:



Calcula el writhe de la imagen en un espejo del trébol:



Kauffman

Kauffman

A cada diagrama D de un nudo k vamos a asociarle una expresión algebraica (un polinomio).

Estos polinomios van a tener (de momento) tres variables x, y y z.

$$k \mapsto \text{ polinomio}$$

Para un diagrama D de un nudo k, vamos a escribir su polinomio como

$$[D] = [D](x, y, z).$$

Para calcular el polinomio paréntesis, primero declaramos que

1) $[\mathrm{circu}] = 1$

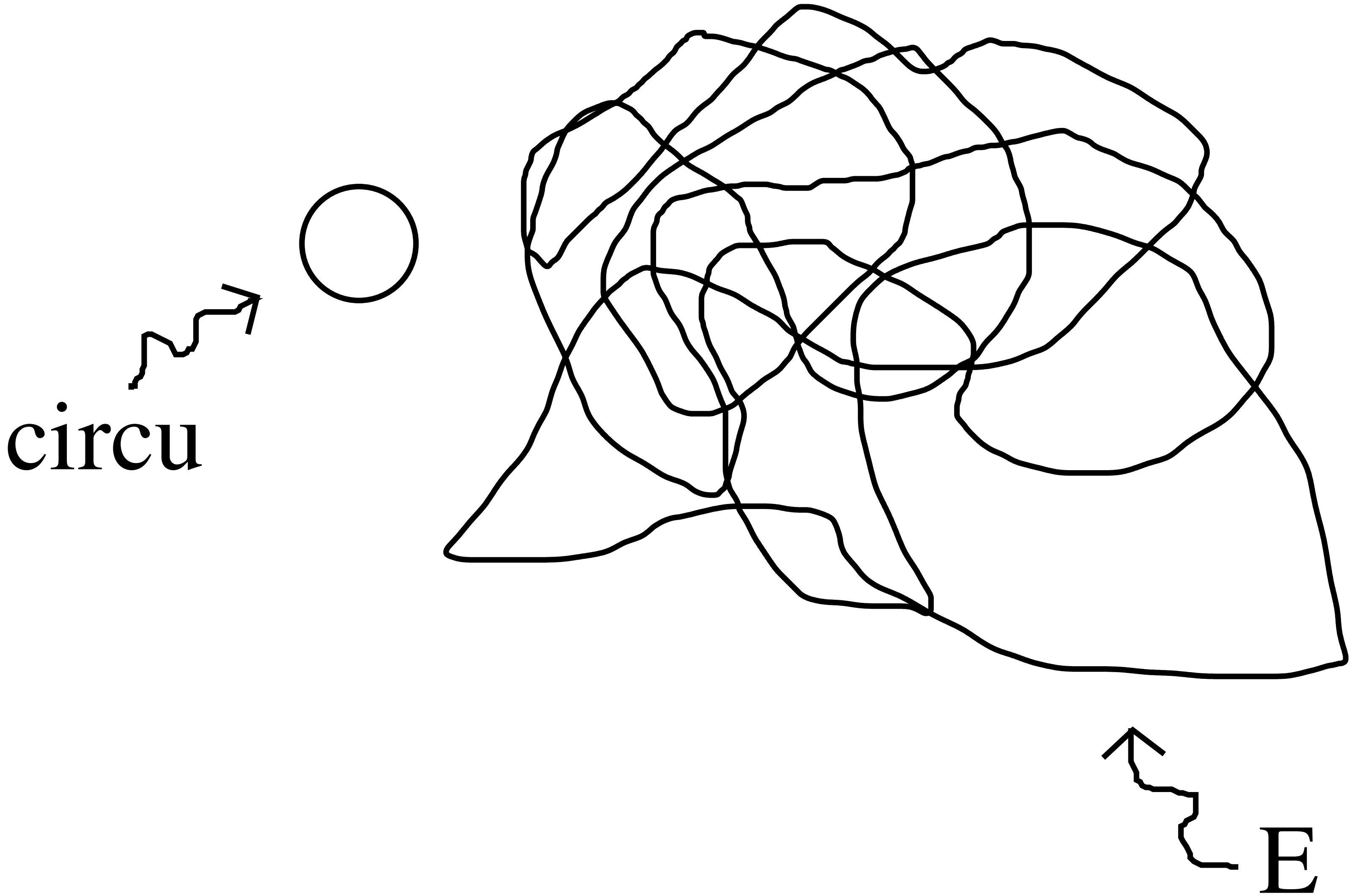
donde circu es el diagrama del no-nudo sin cruces.

(este "1" es el polinomio constante 1)

Si tenemos un diagrama D con una circunferencia (un no-nudo) que está alejada del resto del diagrama, escribimos

$$D = \mathrm{circu} \cup E$$

donde E es lo que queda del diagrama D después de borrar la circunferencia.

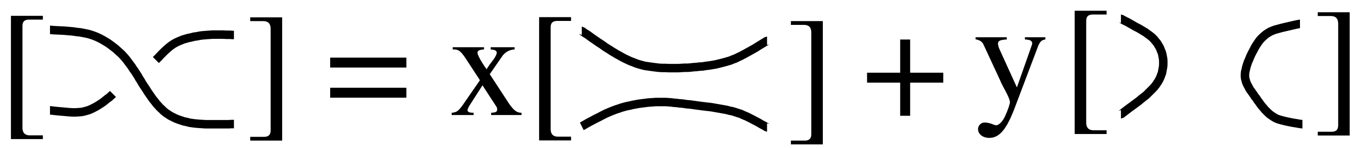


El diagrama $D = \mathrm{circu} \cup E$

Declaramos ahora que

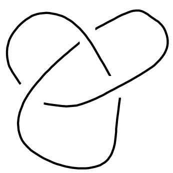
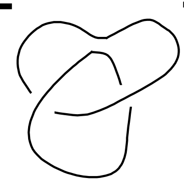
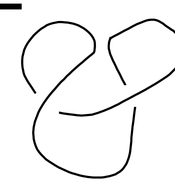
2) $[\mathrm{circu} \cup E] = z \cdot [E]$.

Finalmente declaramos que

3) 

O sea, si en un cruce de un diagrama hacemos los cambios indicados, los polinomios paréntesis de los diagramas involucrados están relacionados como dice (3).

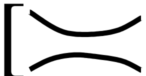
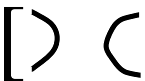
Ejemplo

[] = x [] + y []

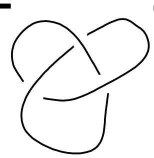
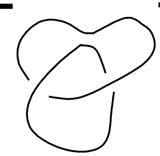
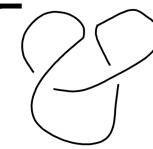
Axiomas de Kauffman

1) $[\text{circu}] = 1$

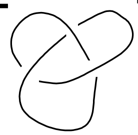
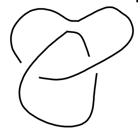
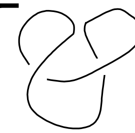
2) $[\text{circu} \cup E] = z \cdot [E]$.

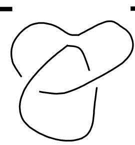
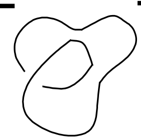
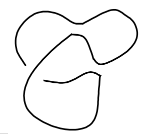
3) [] = x[] + y[]

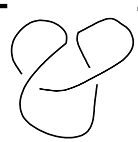
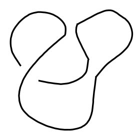
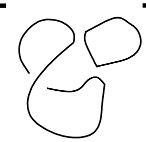
Ejemplo

[] = x [] + y []

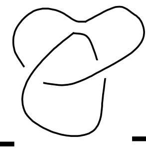
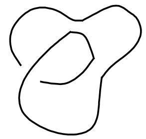
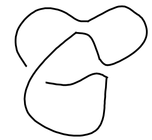
Ejemplo

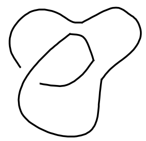
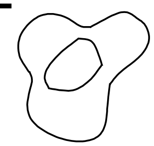
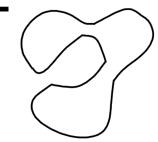
[] = x [] + y []

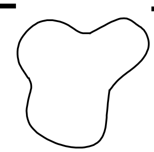
[] = x [] + y []

[] = x [] + y []

Ejemplo

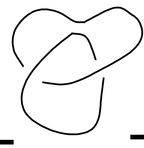
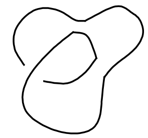
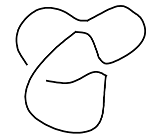
[] $= x$ [] $+ y$ []

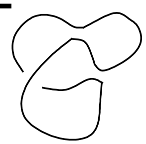
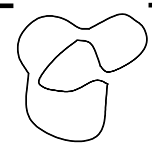
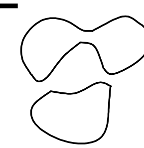
[] $= x$ [] $+ y$ []

$= xz$ [] $+ y$

$$= xz + y$$

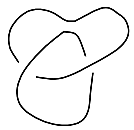
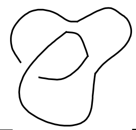
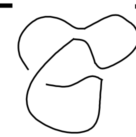
Ejemplo

[] $= x$ [] $+ y$ []

[] $= x$ [] $+ y$ []

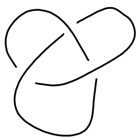
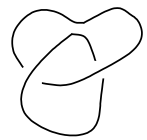
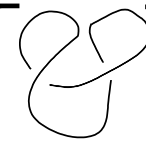
$= x + yz$

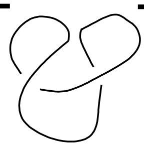
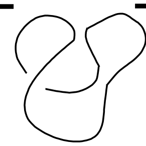
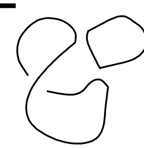
Ejemplo

[] $= x$ [] $+ y$ []

$$= x(xz+y)+y(x+yz)$$

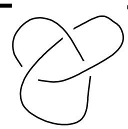
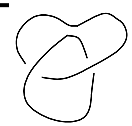
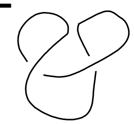
Ejemplo

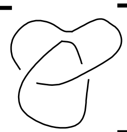
[] = x[]+y[]

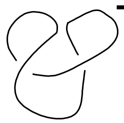
[]=x[]+y[]

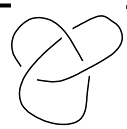
$$=x(x+yz)+yz(x+yz)$$

Ejemplo

[] $= x[$$] + y[$$]$

[] $= x(xz+y)+y(x+yz)$

[] $= x(x+yz)+yz(x+yz)$

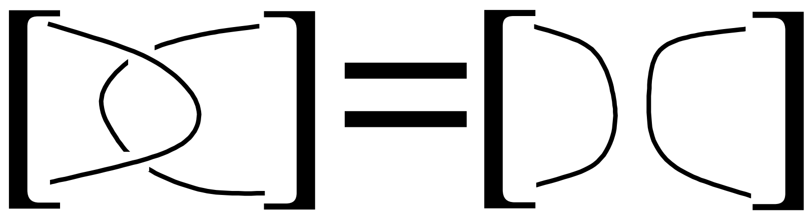
[] $= x(x(xz+y)+y(x+yz)) + y(x(x+yz)+yz(x+yz))$

$$= x^3z + 3x^2y + 3xy^2z + y^3z^2$$

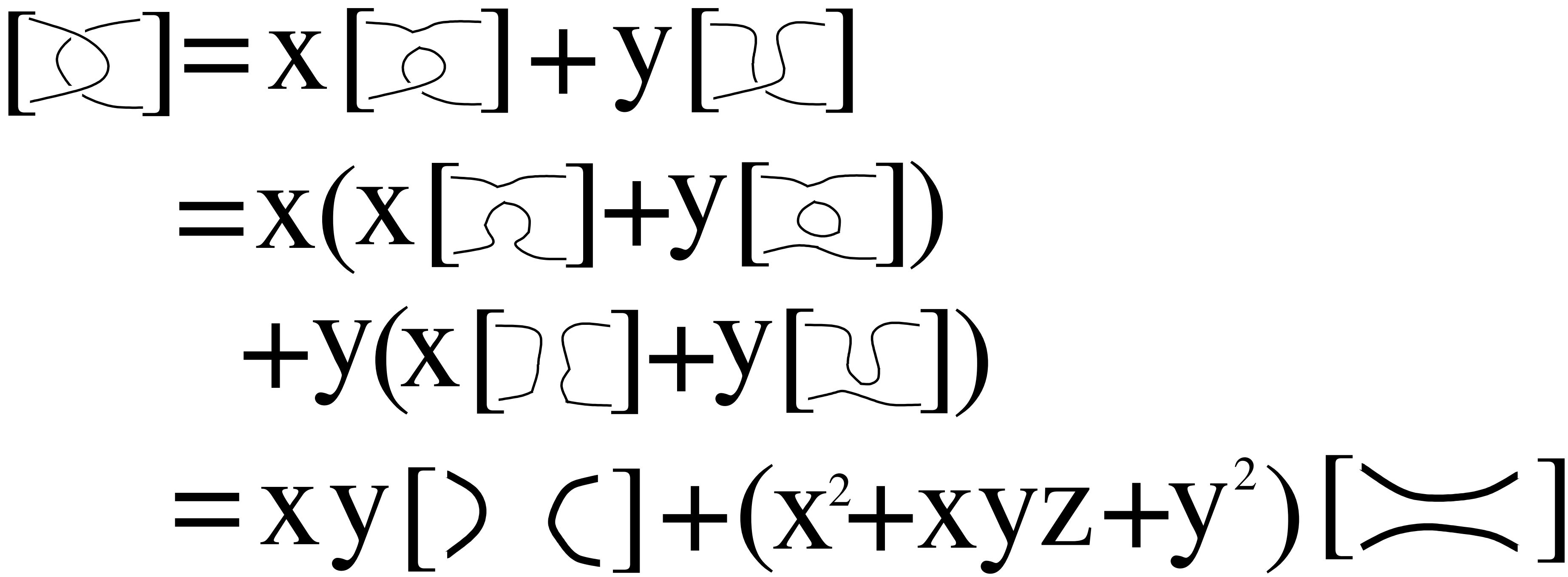
Bueno.

Nos gustaría mucho que este polinomio paréntesis se comportara bien con las movidas de Reidemeister.

Por ejemplo, quisiéramos que



Veamos:



Nos estorban los coeficientes xy y $x^2 + xyz + y^2$.

Pues, los quitamos.

Vamos a declarar que $xy = 1$ y $x^2 + xyz + y^2 = 0$.

Esto lo hacemos para que nos salgan las cuentas.

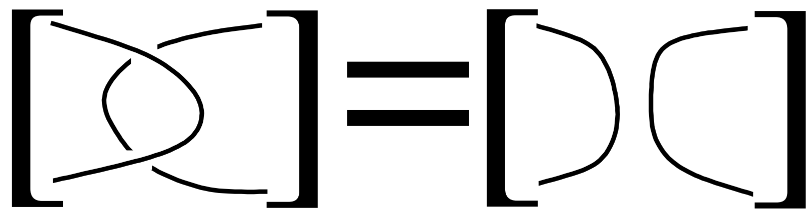
Obtenemos

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

y

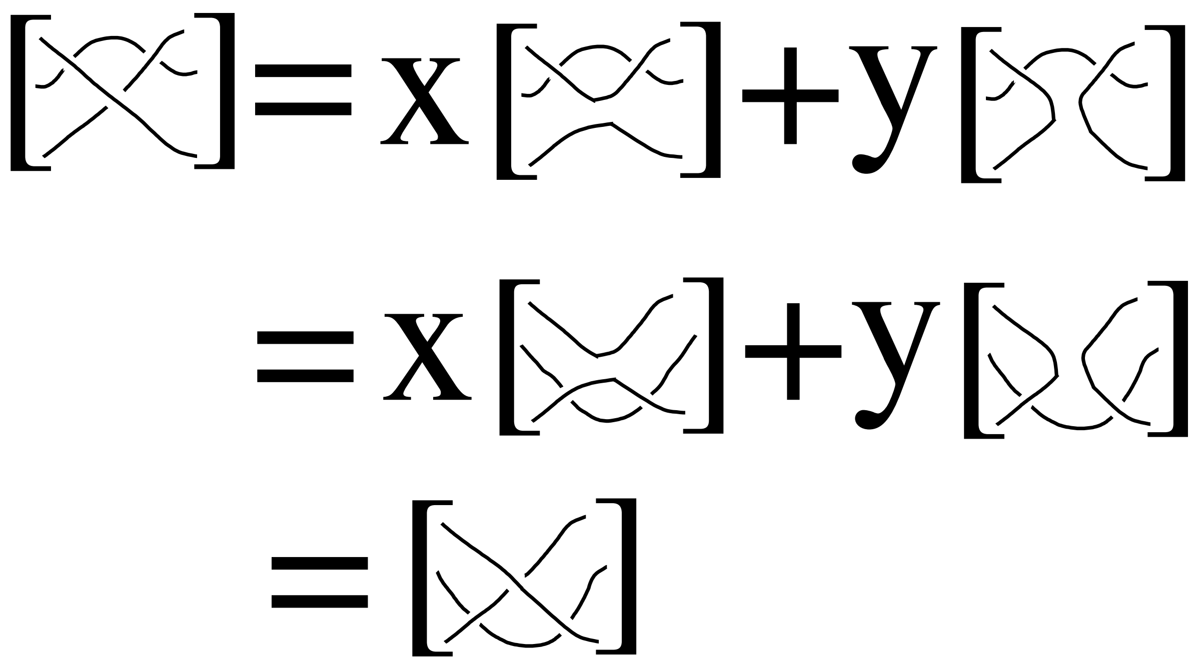
$$z = -x^2 - x^{-2}.$$

Con estos nuevos valores para y y z, el polinomio paréntesis se vuelve un polinomio en una sola variable x y (lo más importante) ahora se cumple que



Además

$$(y=x^{-1})$$

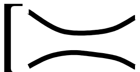
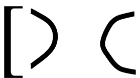


¡La movida III sale gratis!

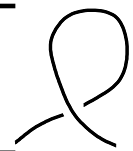
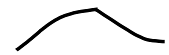
Con el cambio $y = x^{-1}$ y $z = -x^2 - x^{-2}$, los axiomas de Kauffman se ven como

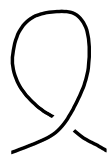
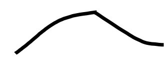
1) $[\text{circu}] = 1$

2) $[\text{circu} \cup E] = (-x^2 - x^{-2})[E]$.

3) [] = x[]+ x^{-1}[]

Pero, si hacemos los cálculos para la movida I:

[] $= -X^{3}$ []

[] $= -X^{-3}$ []

De nuevo no nos queda un invariante...

Pero a Kauffman se le ocurrió hacer lo siguiente:

Tomamos un diagrama D de un nudo k y escribimos el siguiente polinomio

$$f_k(x) = (-x)^{-3(\mathrm{writhe}(D))}[D]$$

Y ¡resulta!

(writhe(D) es el retorcimiento de D)

Queda ver (como ejercicio fácil) que el polinomio f de un diagrama no cambia con las movidas de Reidemeister.

O sea, tenemos

Teorema. Si los nudos k y ℓ son equivalentes, entonces sus polinomios (calculados en cualesquiera diagramas) resultan

$$f_k(x) = f_\ell(x).$$

Si recordamos

$$[\text{trébol}] = x^3z + 3x^2y + 3xy^2z + y^3z^2$$

Hacemos los cambios $y = x^{-1}$ y $z = -x^2 - x^{-2}$

$$\begin{aligned}[\text{trébol}] &= x^3(-x^2 - x^{-2}) + 3x^2(x^{-1}) + 3x(x^{-1})^2(-x^2 - x^{-2}) \\ &\quad + (x^{-1})^3(-x^2 - x^{-2})^2 \\ &= -x^5 - x^{-3} + x^{-7}\end{aligned}$$

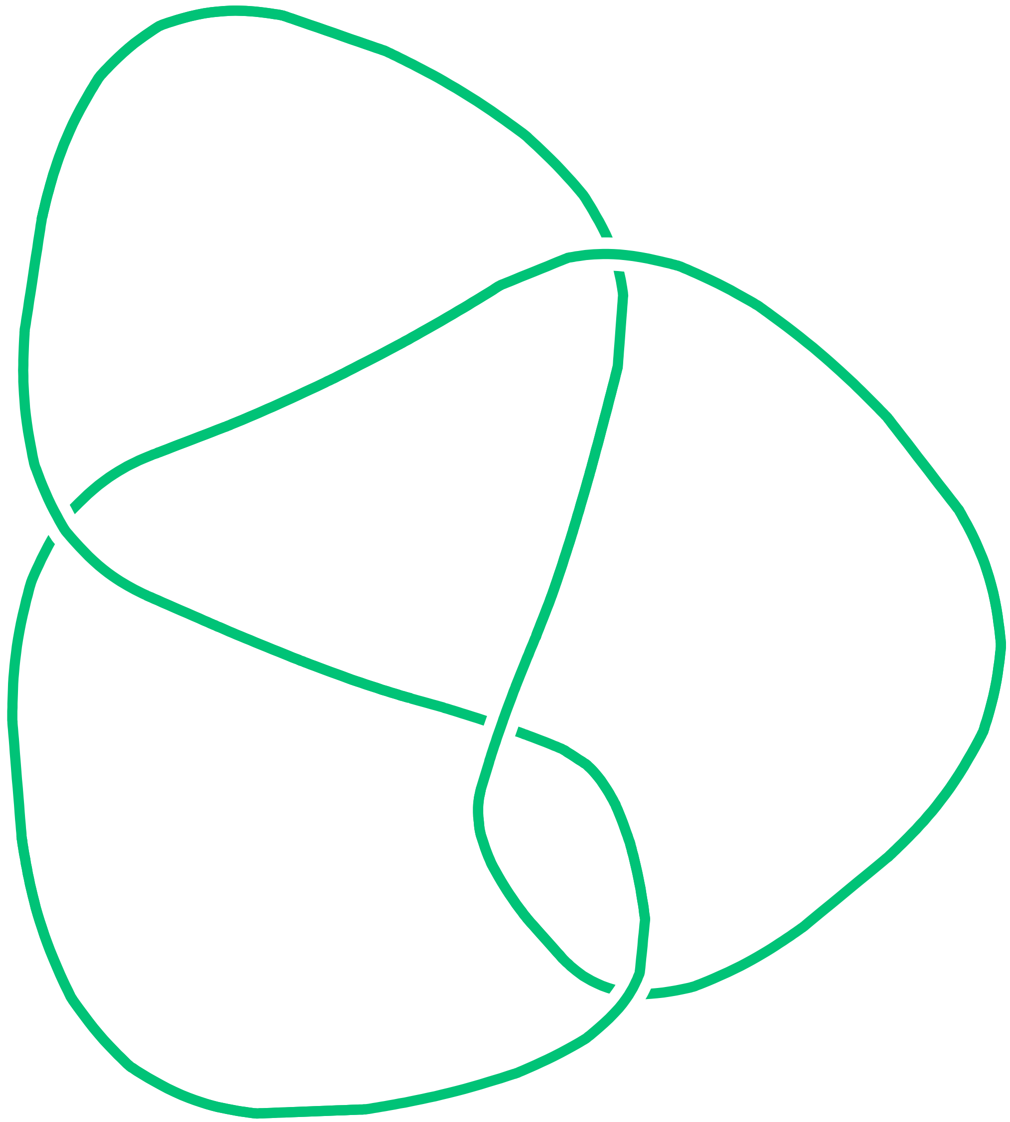
Ya sabemos que el writhe de este dibujo es 3.

Entonces el polinomio

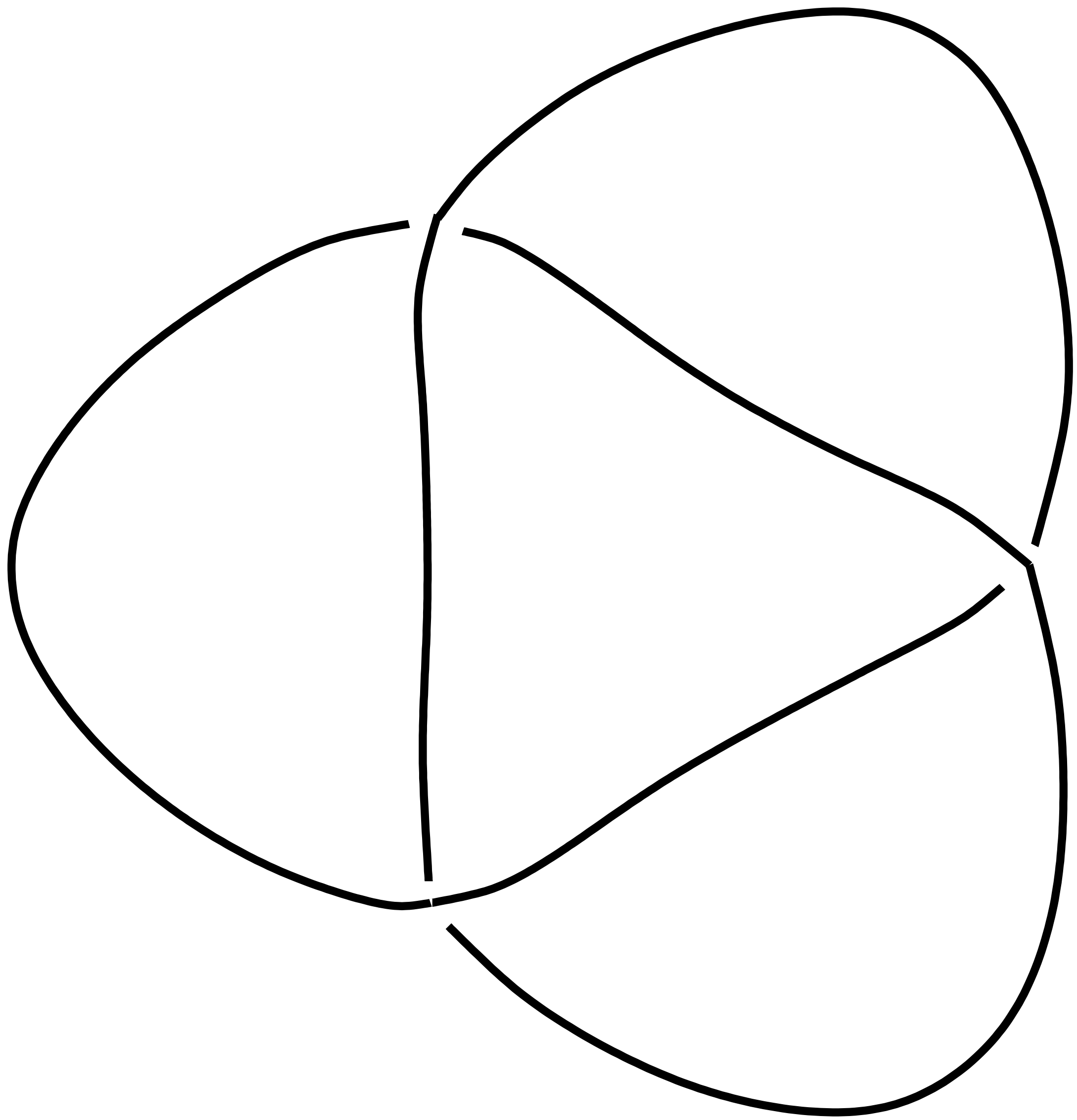
$$f_{\text{trébol}}(x) = (-x)^{-3\text{writhe(trébol)}}[\text{trébol}] = -x^{-9}[\text{trébol}]$$

$$= x^{-4} + x^{-12} - x^{-16}$$

Calcula el polinomio f del ocho:

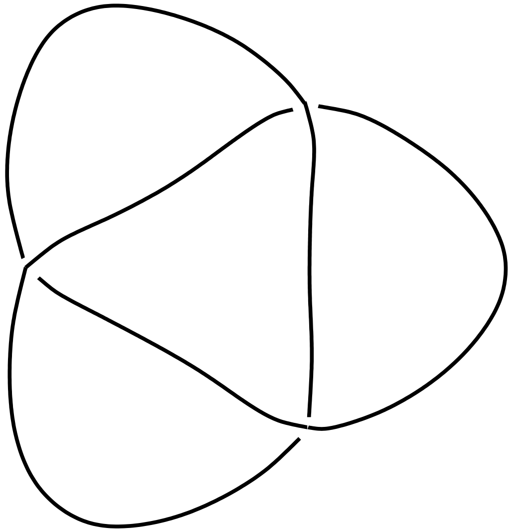


Calcula el polinomio f de la imagen en un espejo del trébol:

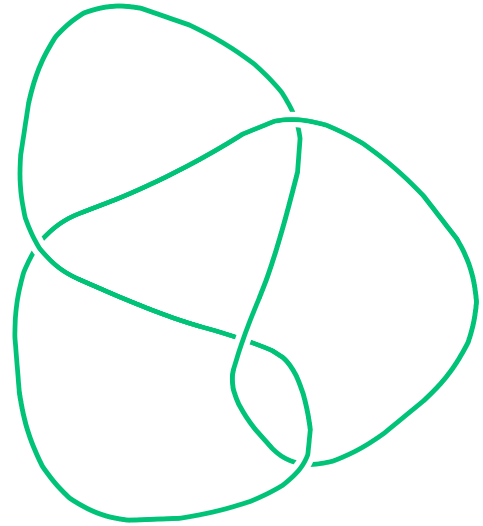


Nota: Se puede probar lo siguiente:

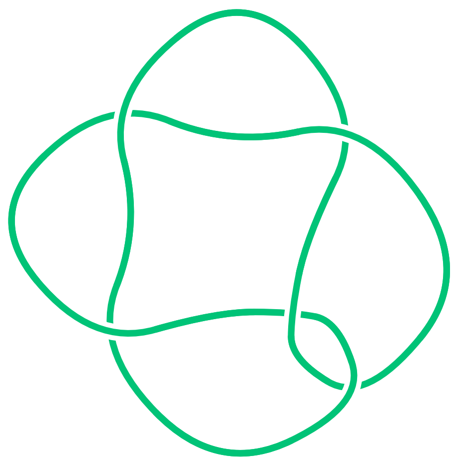
Teorema. Tomamos un nudo k y su reflejado en un espejo k^*. Entonces $[k](x) = [k^*](x^{-1})$ y $f_k(x) = f_{k^*}(x^{-1})$.



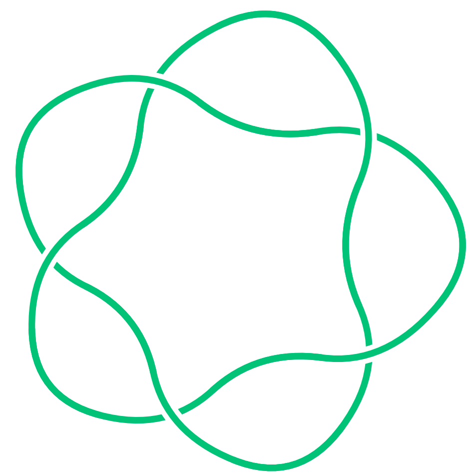
$x^{-4} + x^{-12} - x^{-16}$



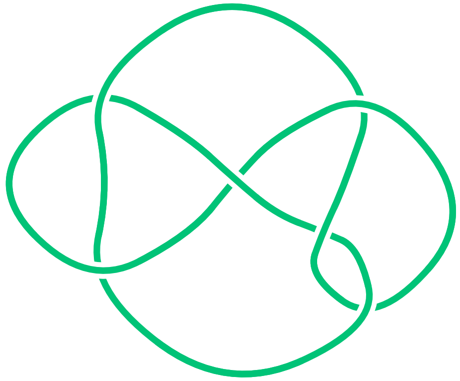
$x^{8} - x^{4} + 1 - x^{-4} + x^{-8}$



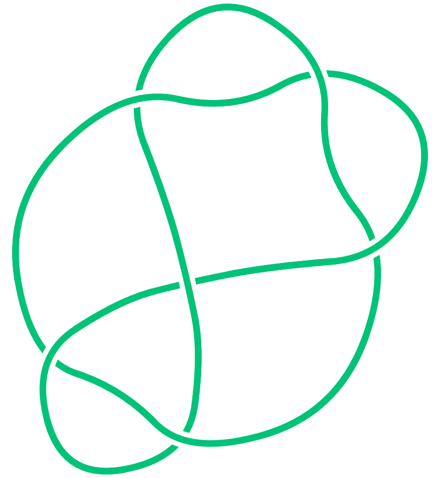
$x^{-4} - x^{-8} + 2x^{-12} - x^{-16} + x^{-24} - x^{-28}$



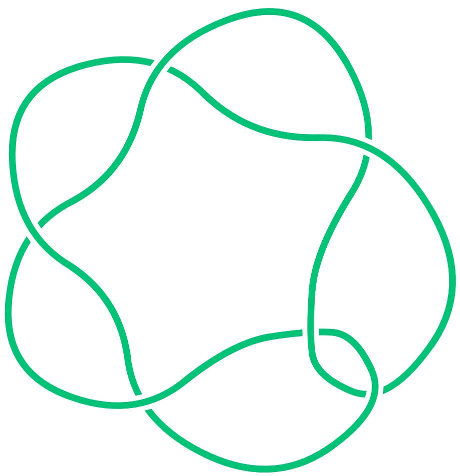
$-x^{-8} + x^{-16} - x^{-20} + x^{-24} - x^{-28}$



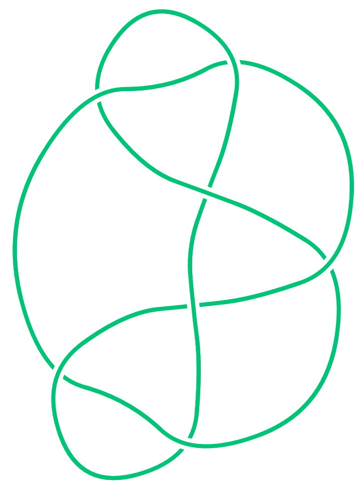
$$-x^{12} + 2x^{8} - 2x^{4} + 3 - 2x^{-4} + 2x^{-8} - x^{-12}$$



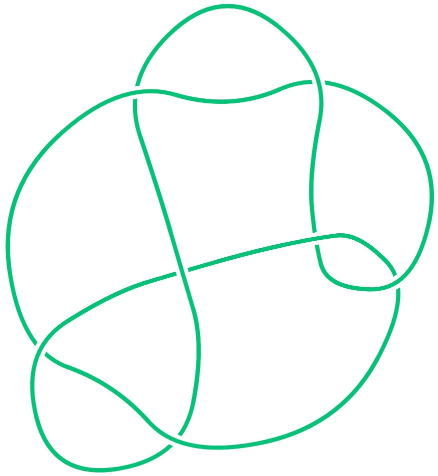
$$x^{4} - 1 + 2x^{-4} - 2x^{-8} + 2x^{-12} - 2x^{-16} + x^{-20}$$



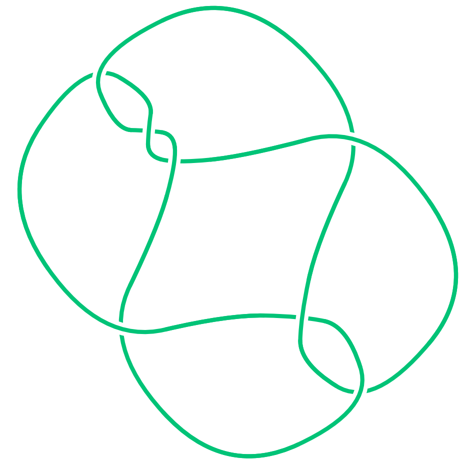
$$x^{8} - x^{4} + 2 - 2x + x^{-4} - x^{-12} + x^{-16}$$



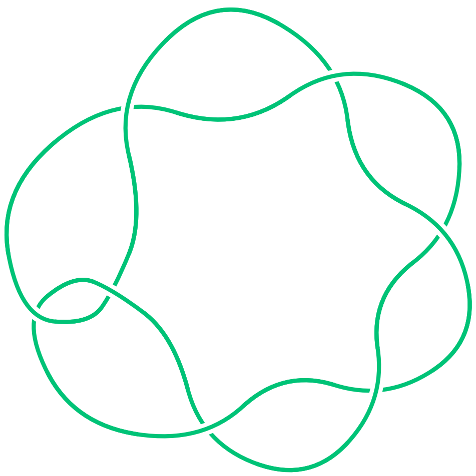
$$x^{16} - 2x^{12} + 3x^{8} - 4x^{4} + 4 - 3x^{-4} + 3x^{-8} - x^{-12}$$



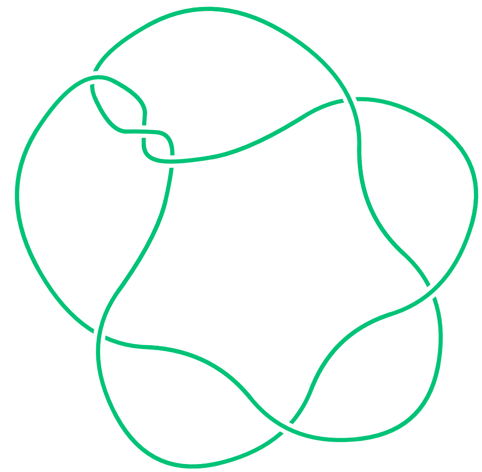
$x^4 - 2 + 3x^{-4} - 3x^{-8} + 4x^{-12} - 3x^{-16} + 2x^{-20} - x^{-24}$



$x^2 - x^3 + 3x^4 - 3x^5 + 3x^6 - 3x^7 + 2x^8 - x$



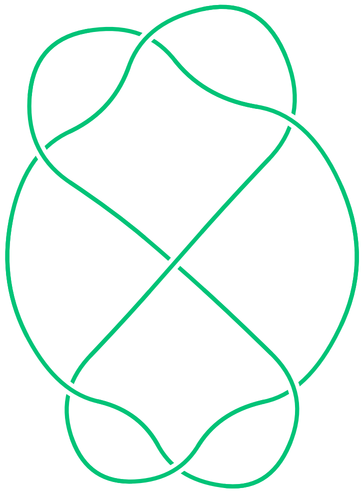
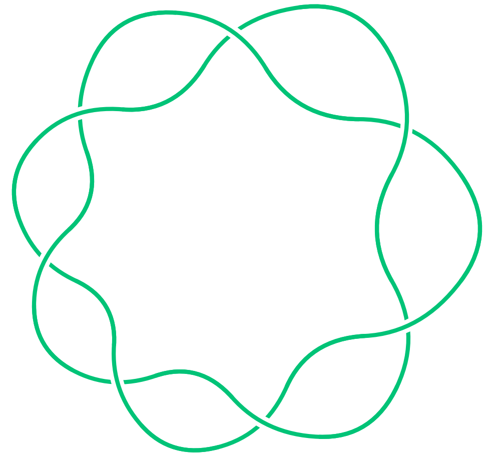
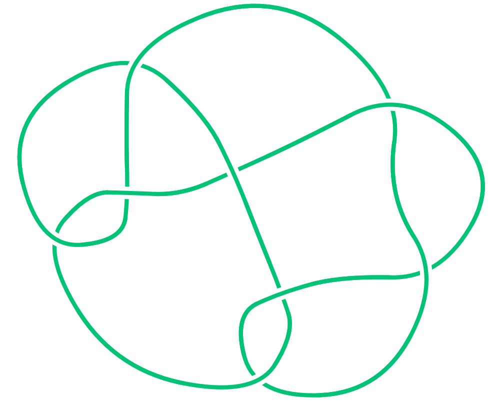
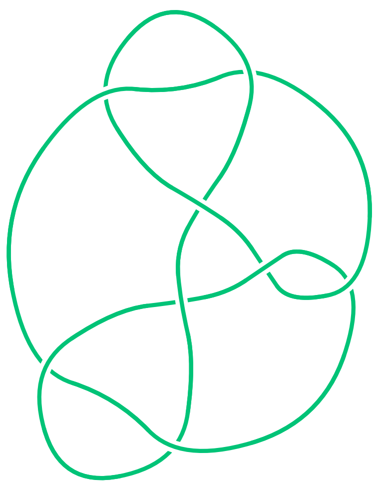
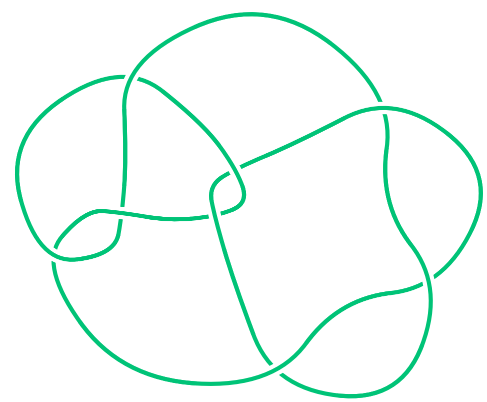
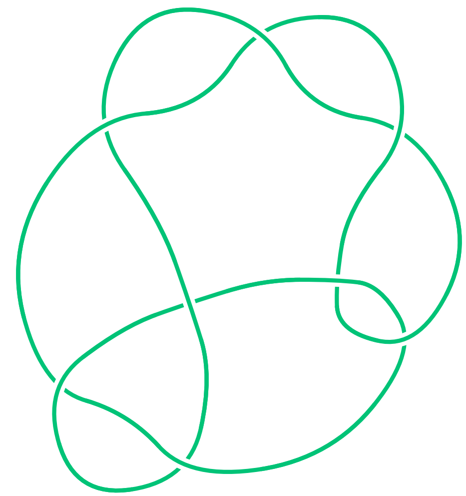
$x^{-4} - x-8 + 2x^{-12} - 2x^{-16} + 2x^{-20} - x^{-24} + x^{-28} - x^{-32}$



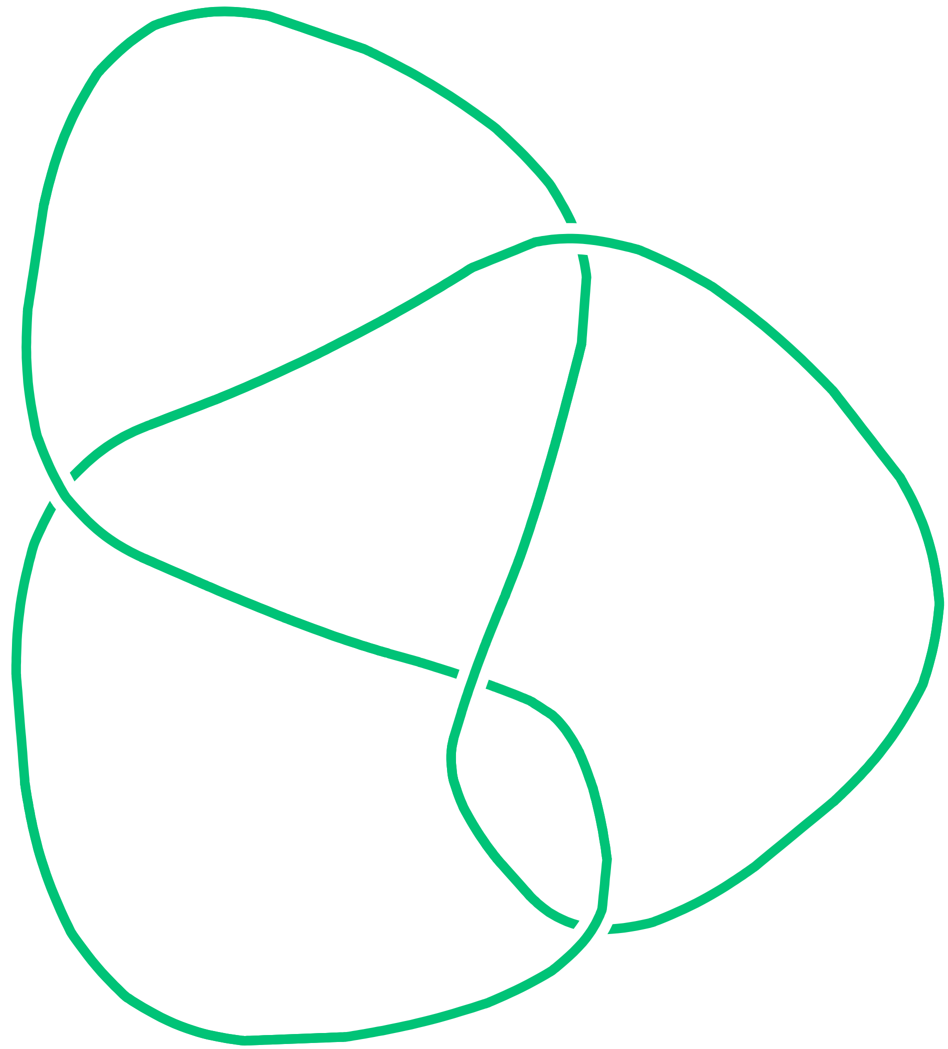
$x^{-8} - x^{-12} + 2x^{-16} - 2x^{-20} + 3x^{-24} - 2x^{-28} + x$

Notación

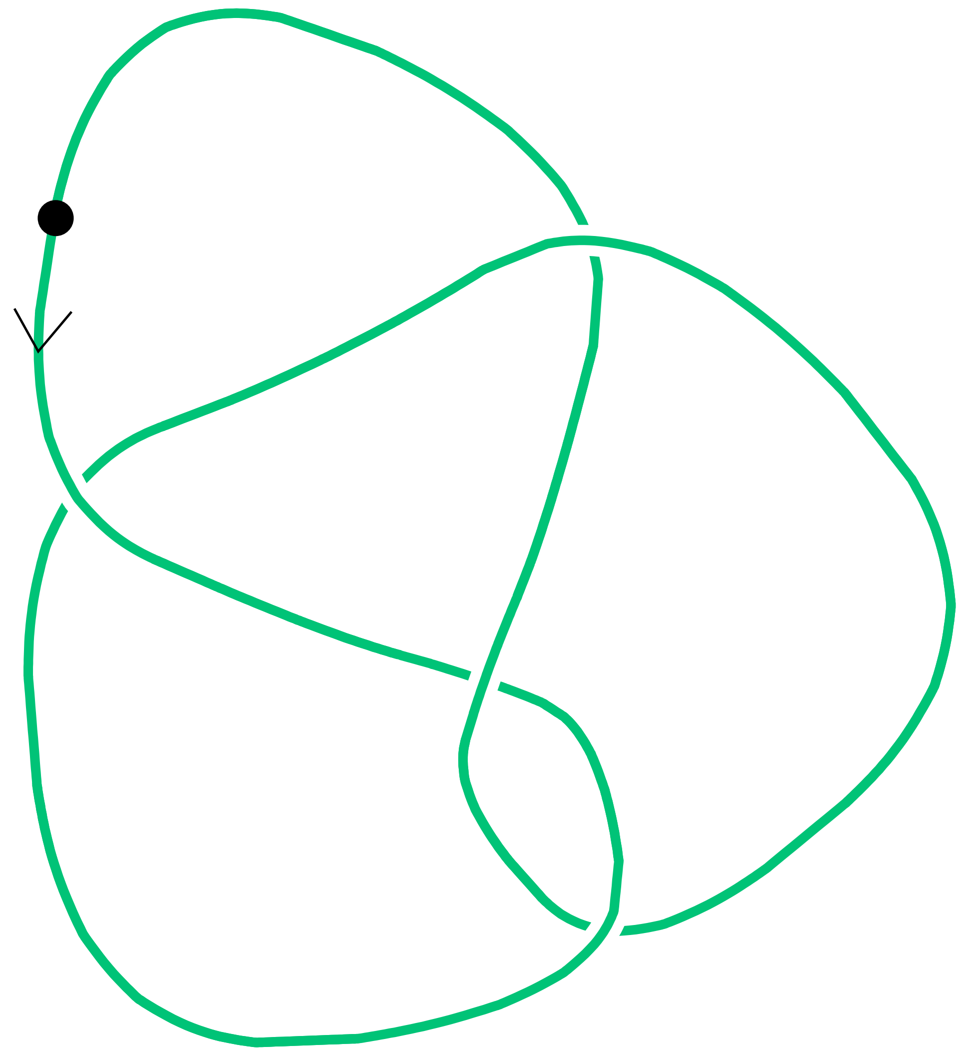
3	1	1	4	1	0	1	−1				
4	1	−2	2	1	−1	1	−1	1			
5	1	1	6	1	−1	2	−1	1	−1		
5	2	2	7	1	0	1	−1	1	−1		
6	1	−3	3	−1	2	−2	3	−2	2	−1	
6	2	−1	5	1	−1	2	−2	2	−2	1	
6	3	−2	4	1	−1	2	−2	1	−1	1	
7	1	−4	3	1	−2	3	−4	4	−3	3	−1
7	2	−1	6	1	−2	3	−3	4	−3	2	−1
7	3	2	9	1	−1	3	−3	3	−3	2	−1
7	4	1	8	1	−1	2	−2	2	−1	1	−1
7	5	2	9	1	−1	2	−2	3	−2	1	−1
7	6	1	8	1	−2	3	−2	3	−2	1	−1
7	7	3	10	1	0	1	−1	1	−1	1	−1

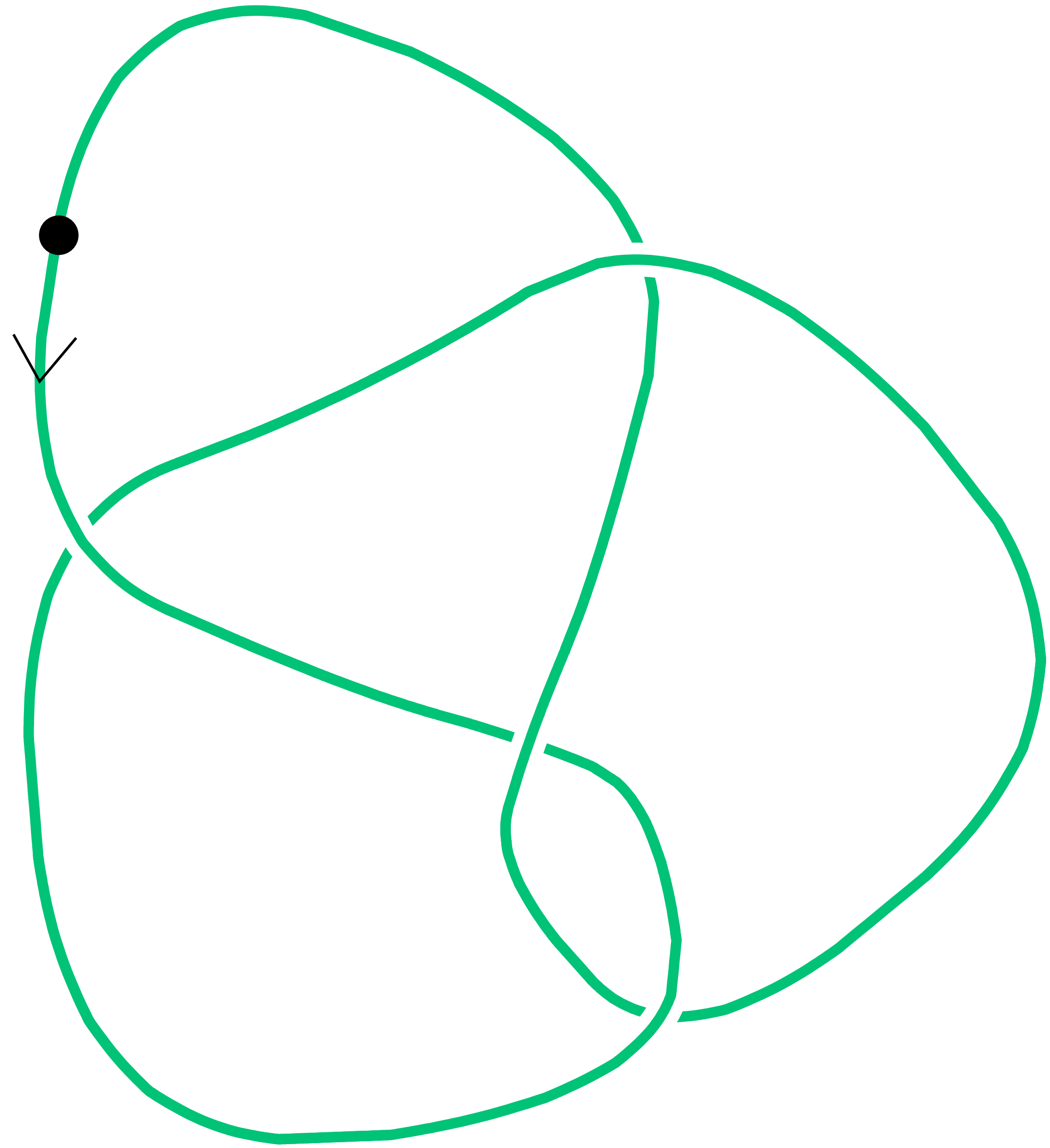
Comenzamos con un diagrama de un nudo.

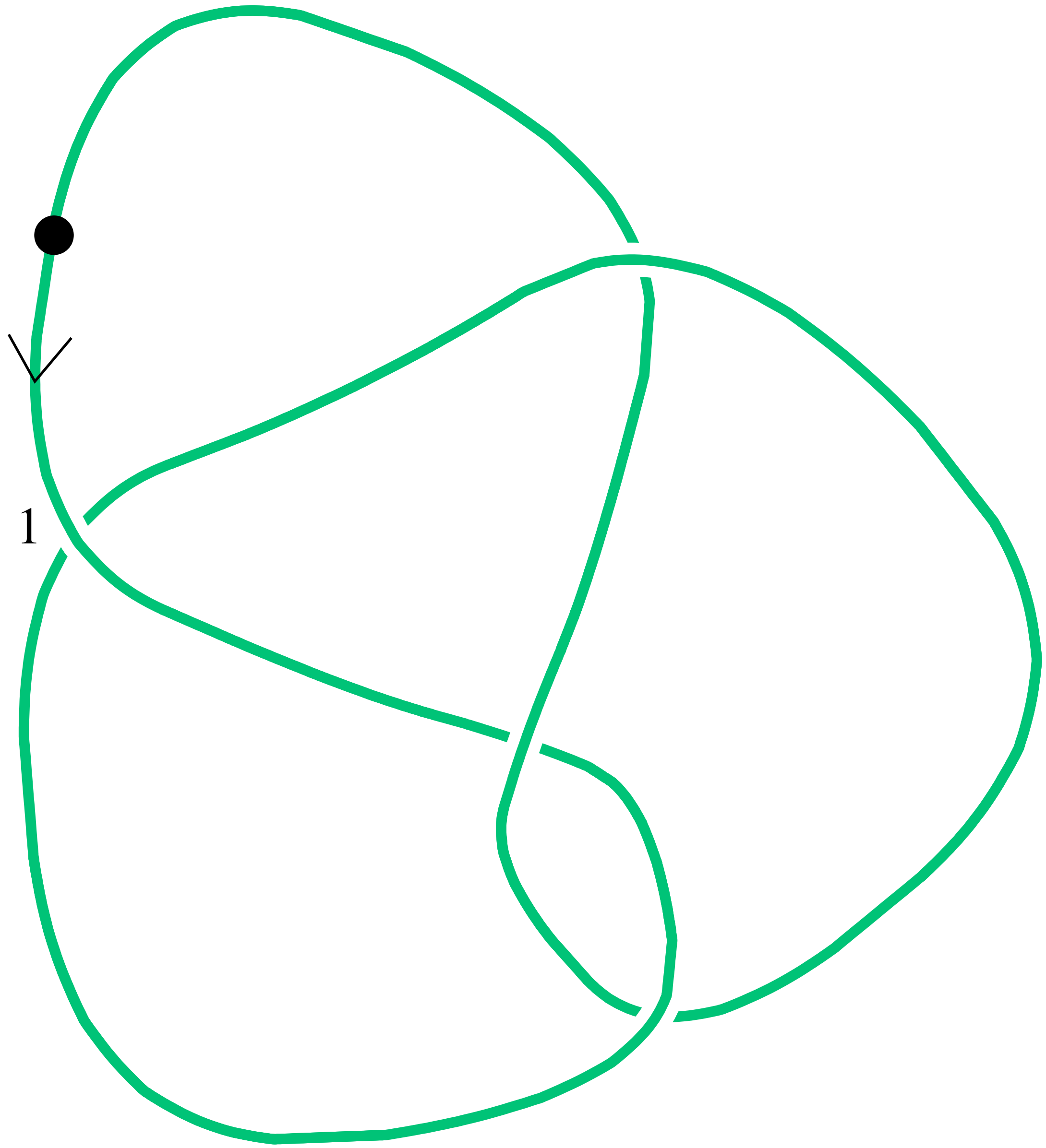


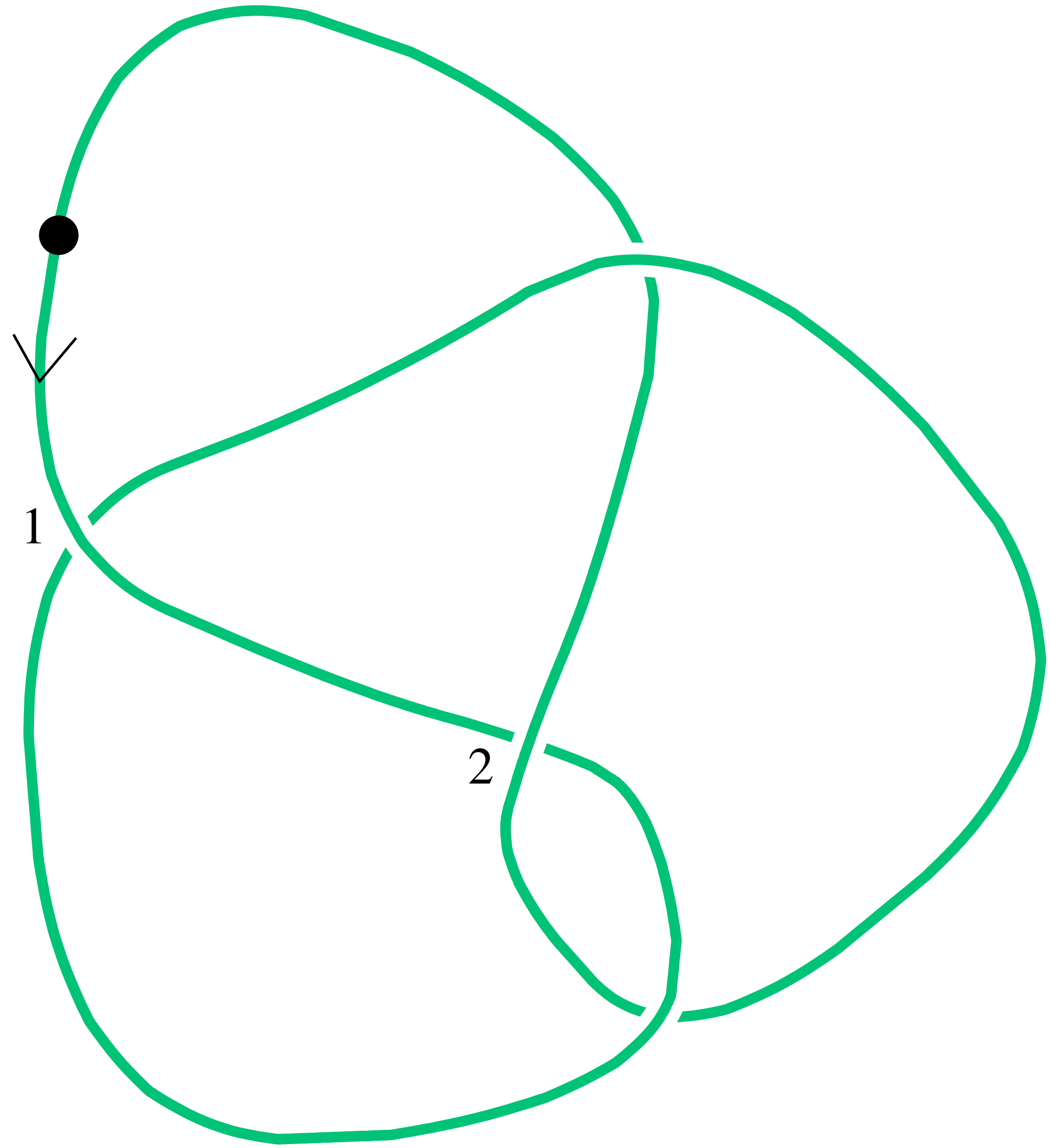
Marcamos un punto de inicio y una dirección sobre el nudo

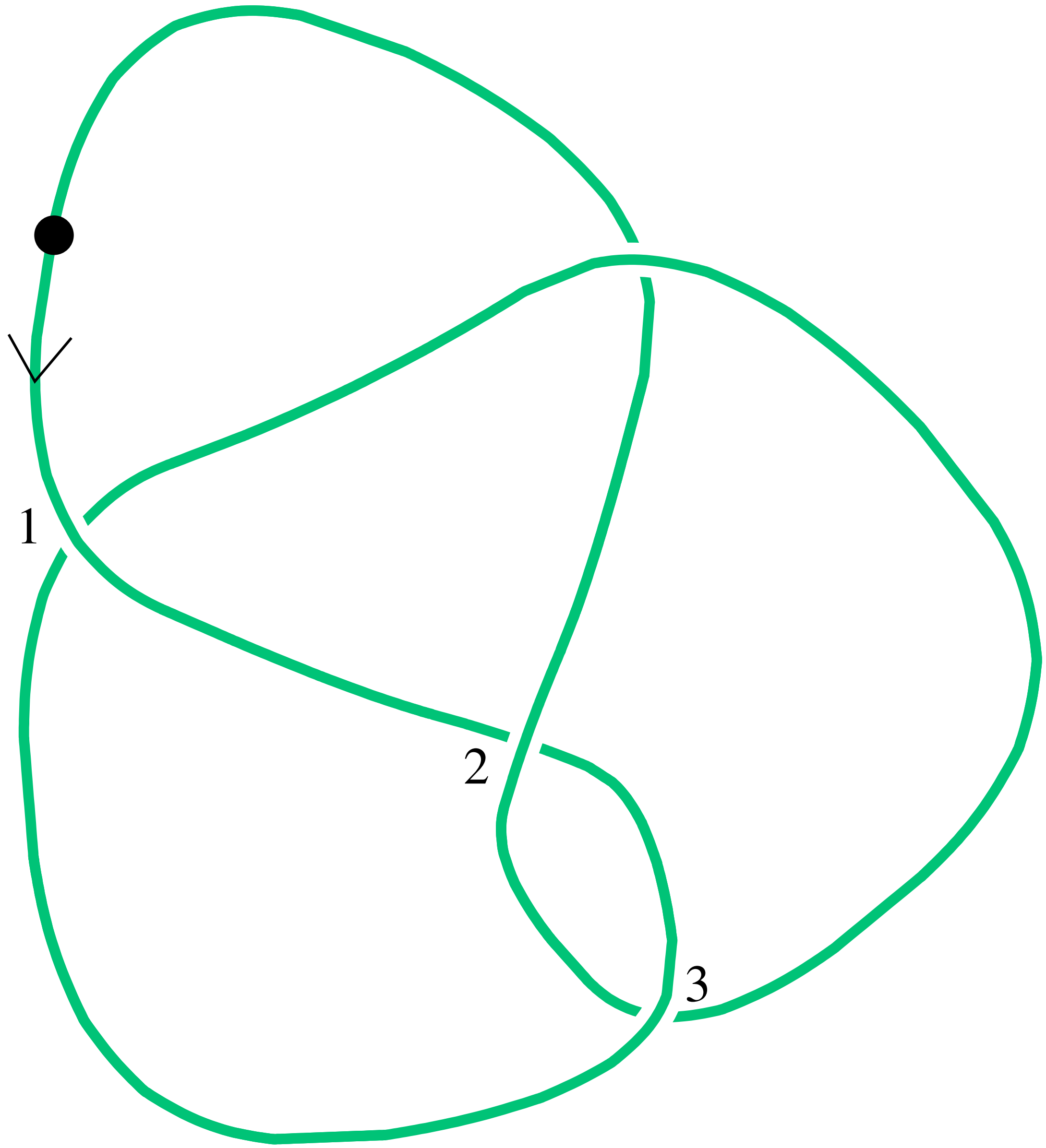


A partir del punto de inicio recorremos el nudo y numeramos los puntos de cruce que nos vayamos encontrando hasta que regresemos al punto base.

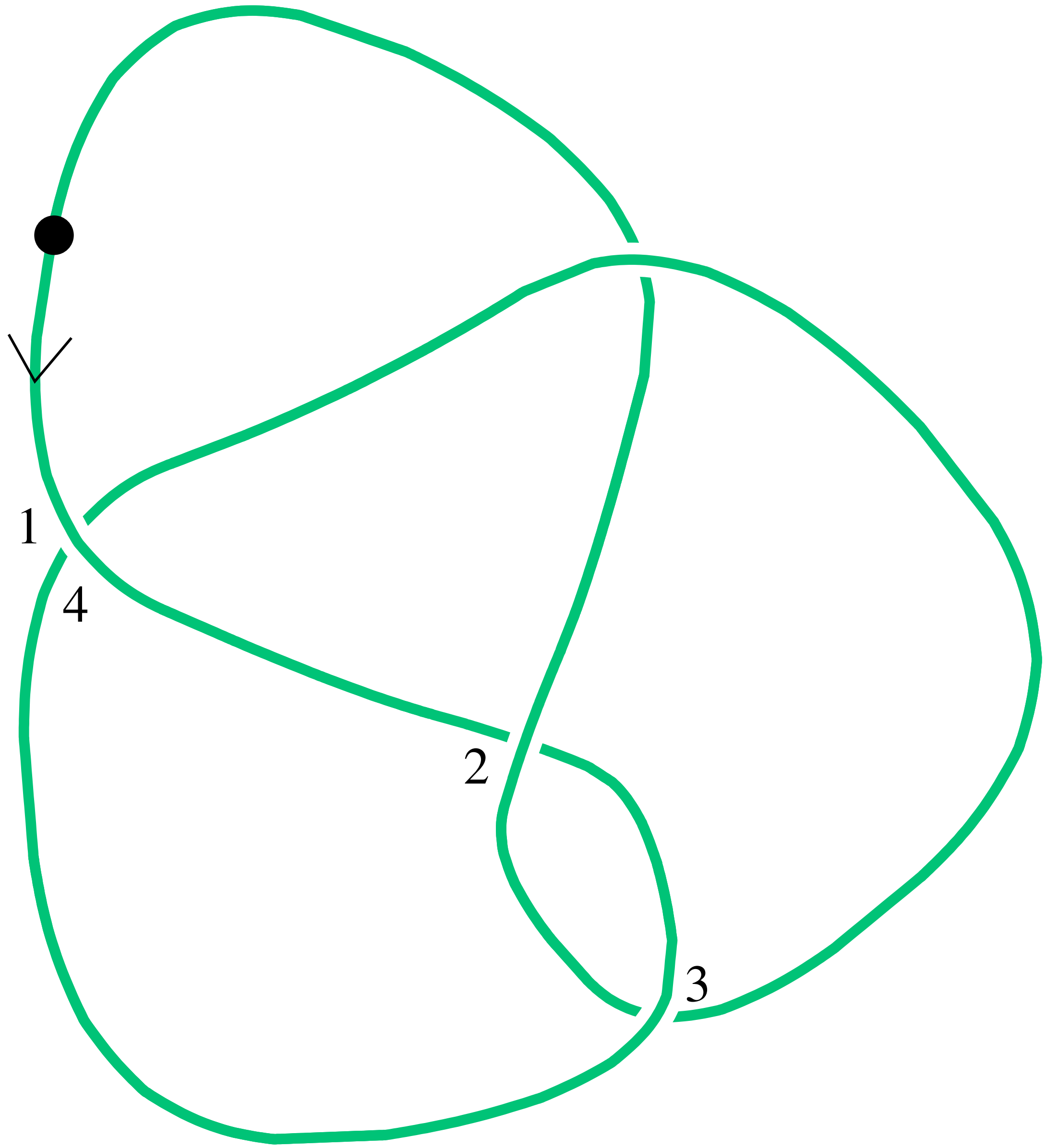



1

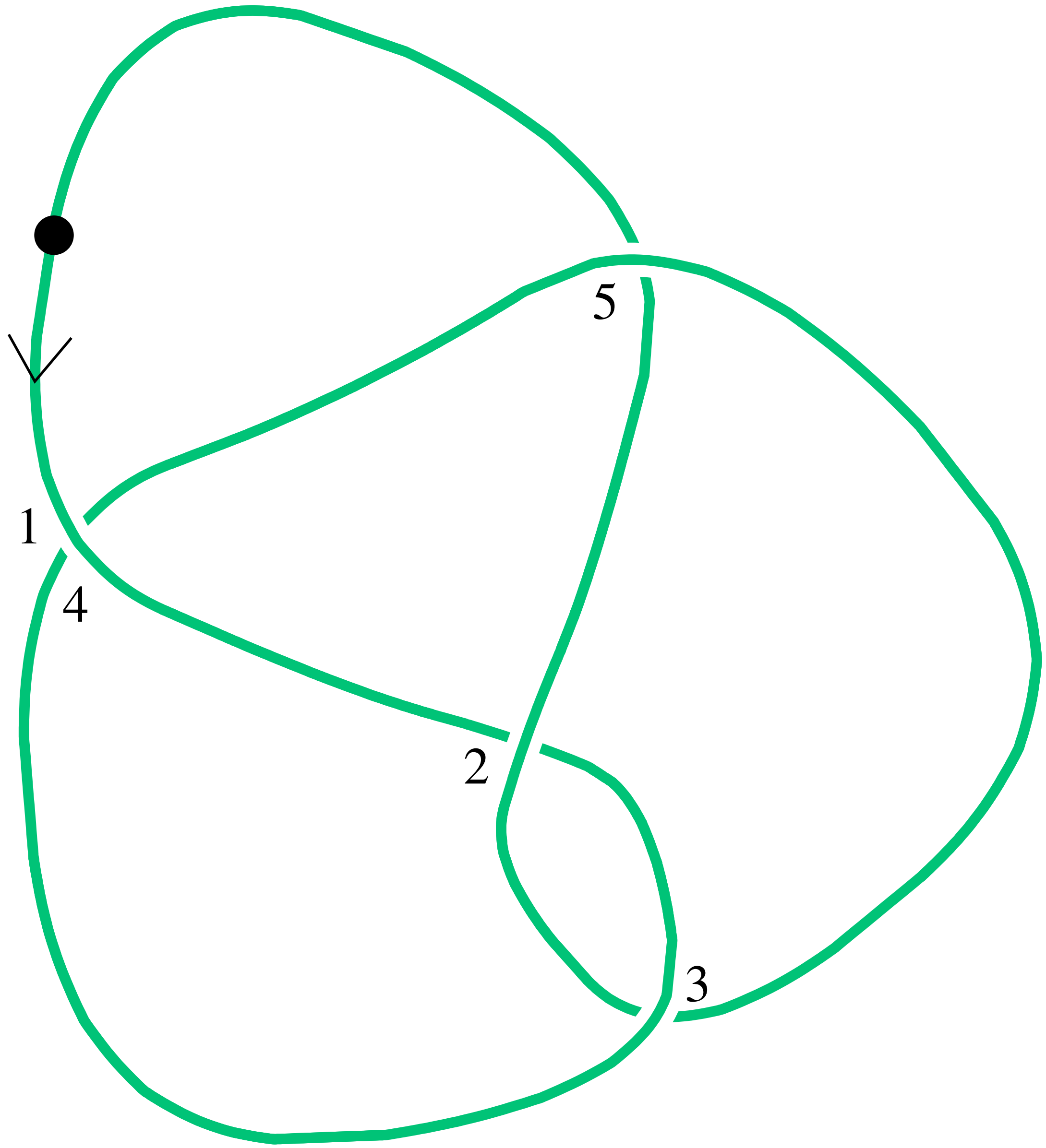

1
2

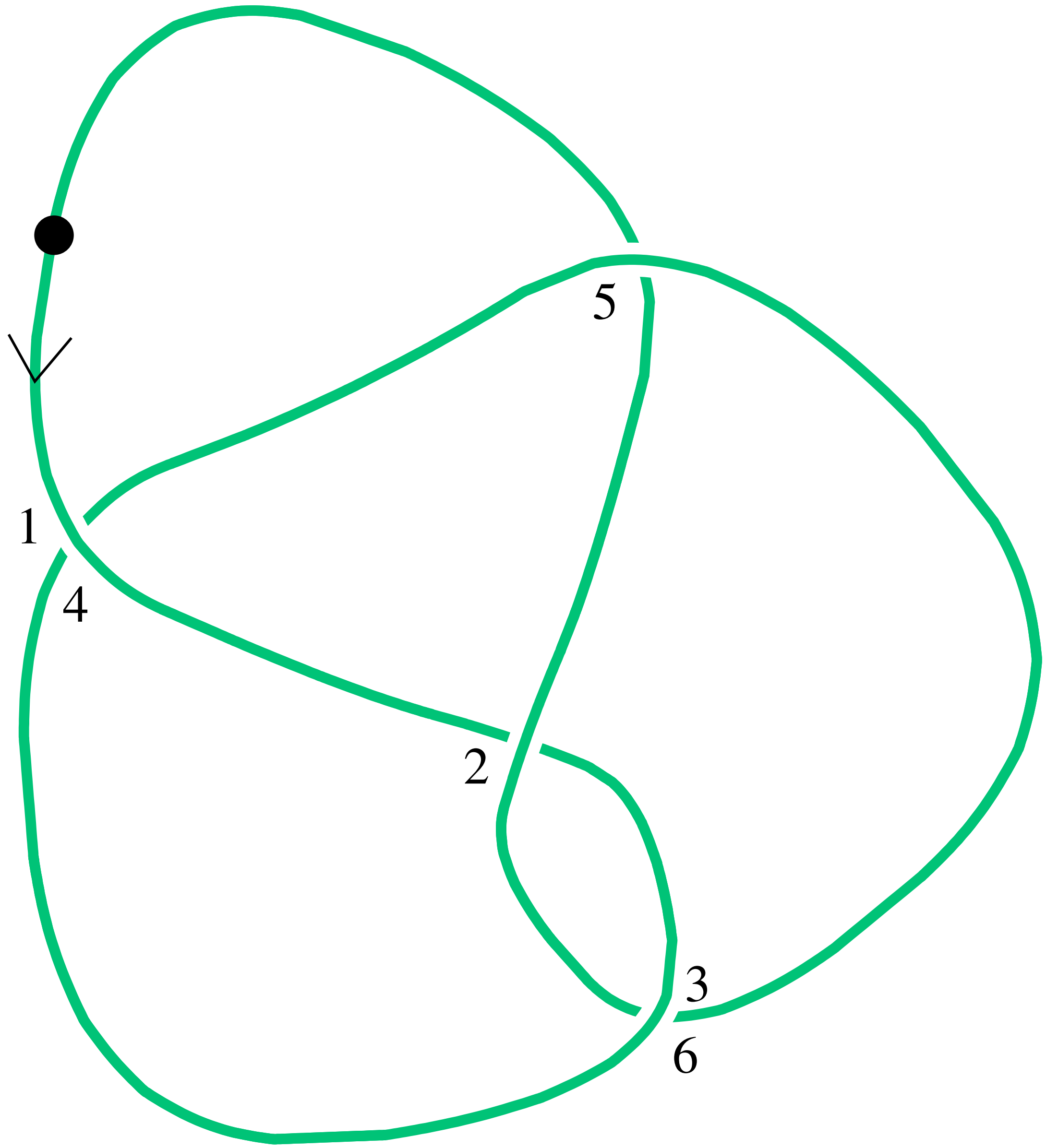


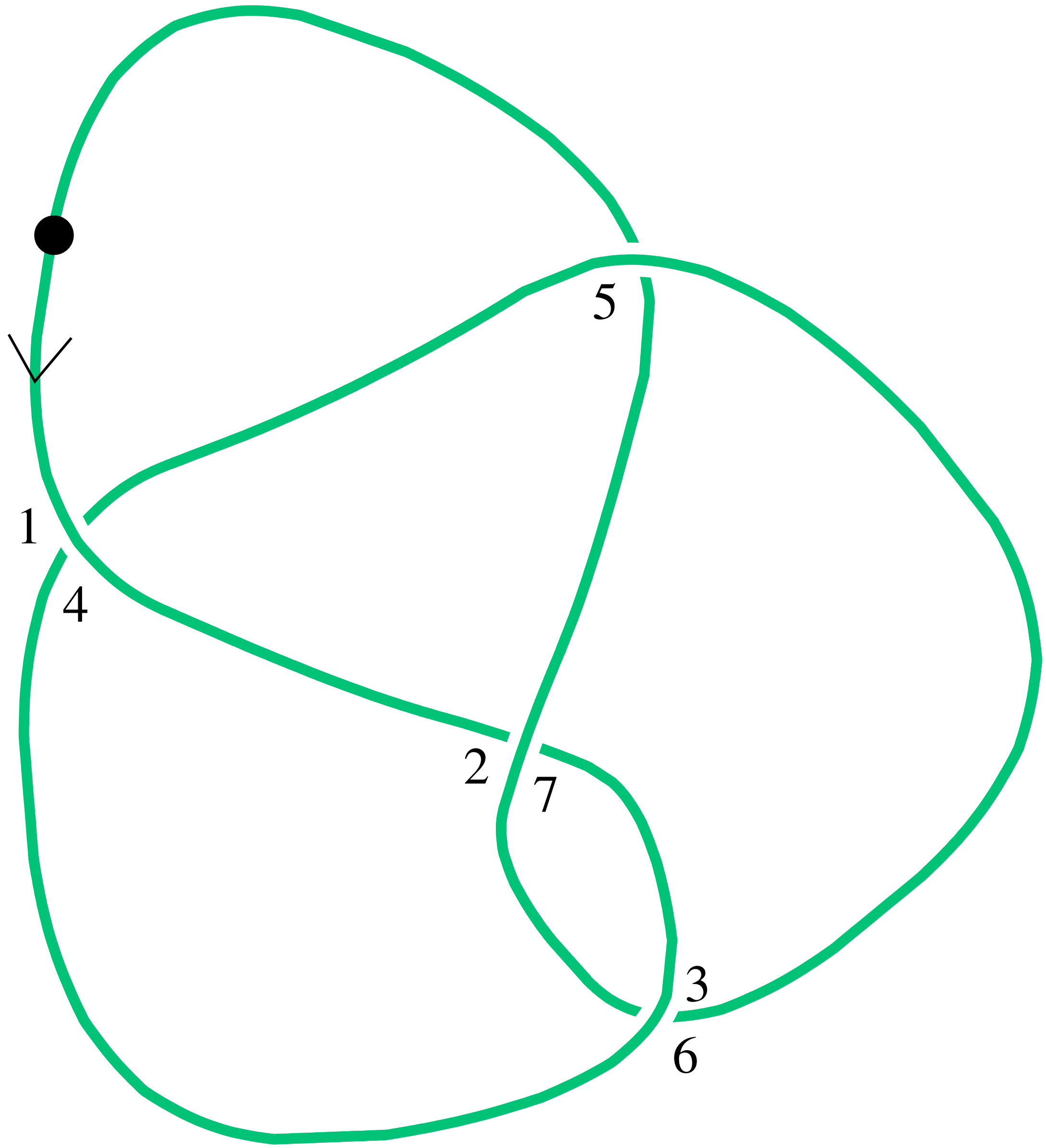
1
2
3

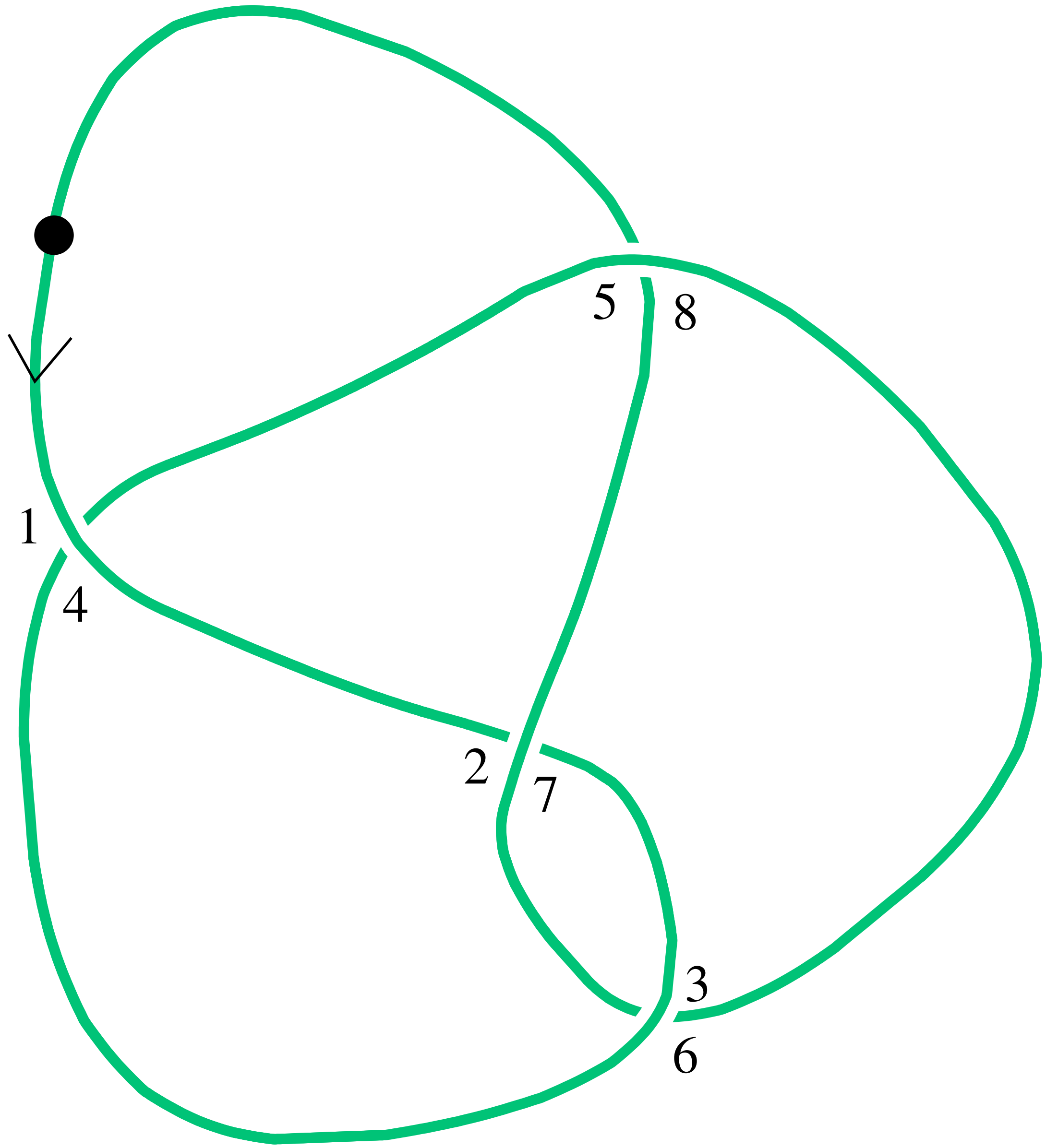


1
4
2
3


5
1
4
2
3

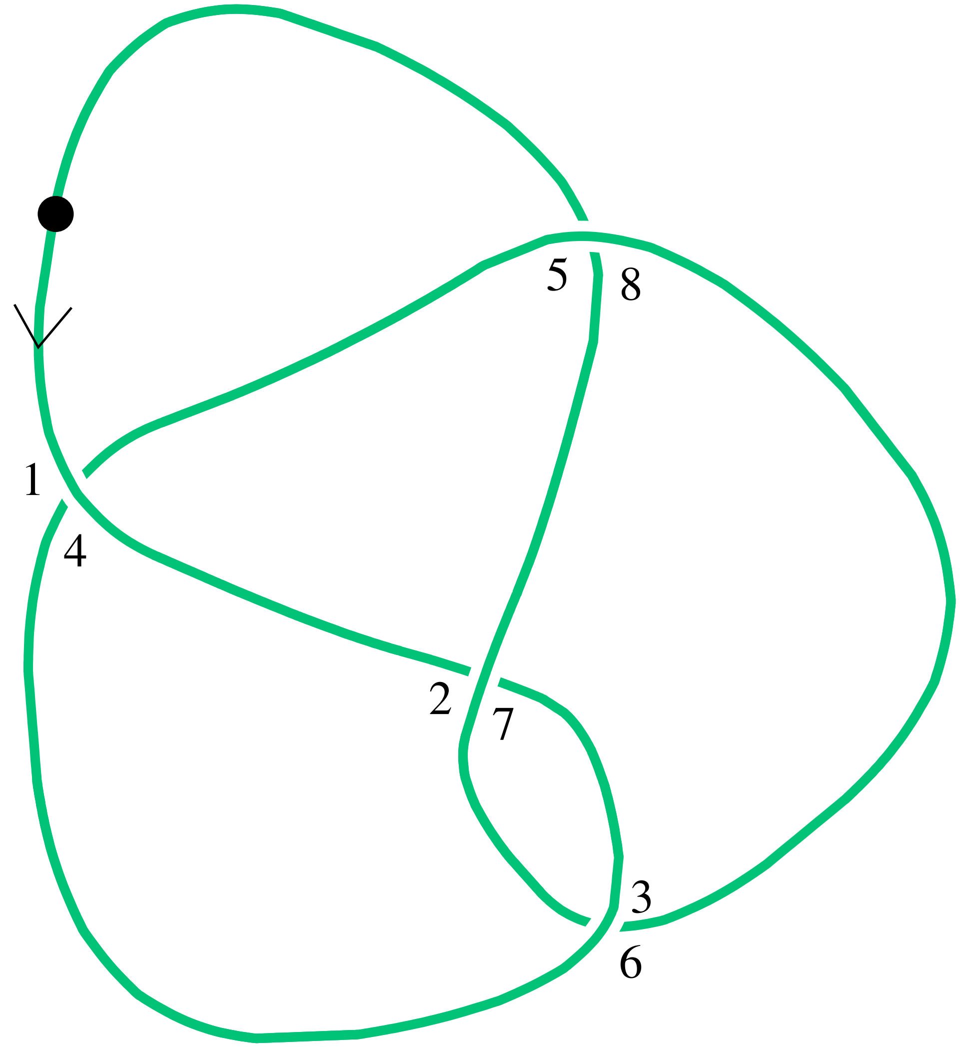

5
1
4
2
3
6


5
1
4
2
7
3
6

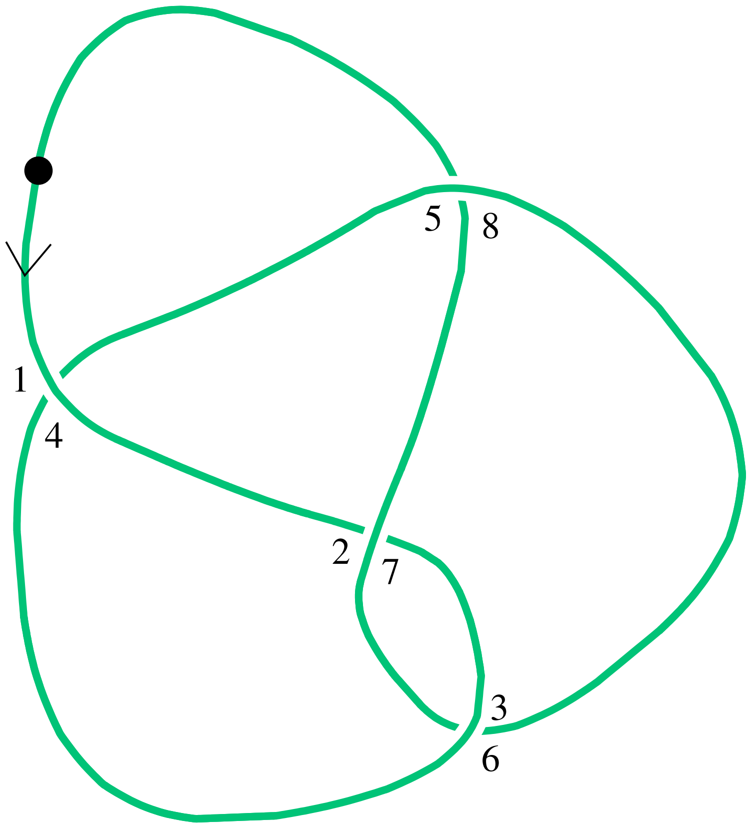


5
8
1
4
2
7
3
6

Cada punto de cruce recibe dos números: uno es par y el otro es impar.



Escribimos estas parejas de números en dos renglones, con los impares arriba y en orden:

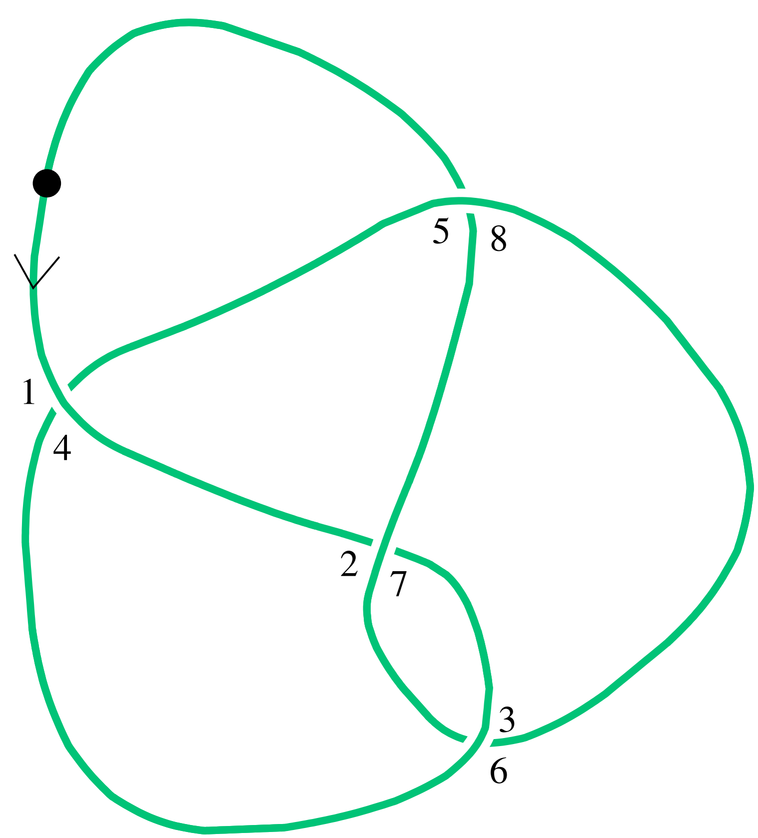


1	3	5	7
4	6	8	2

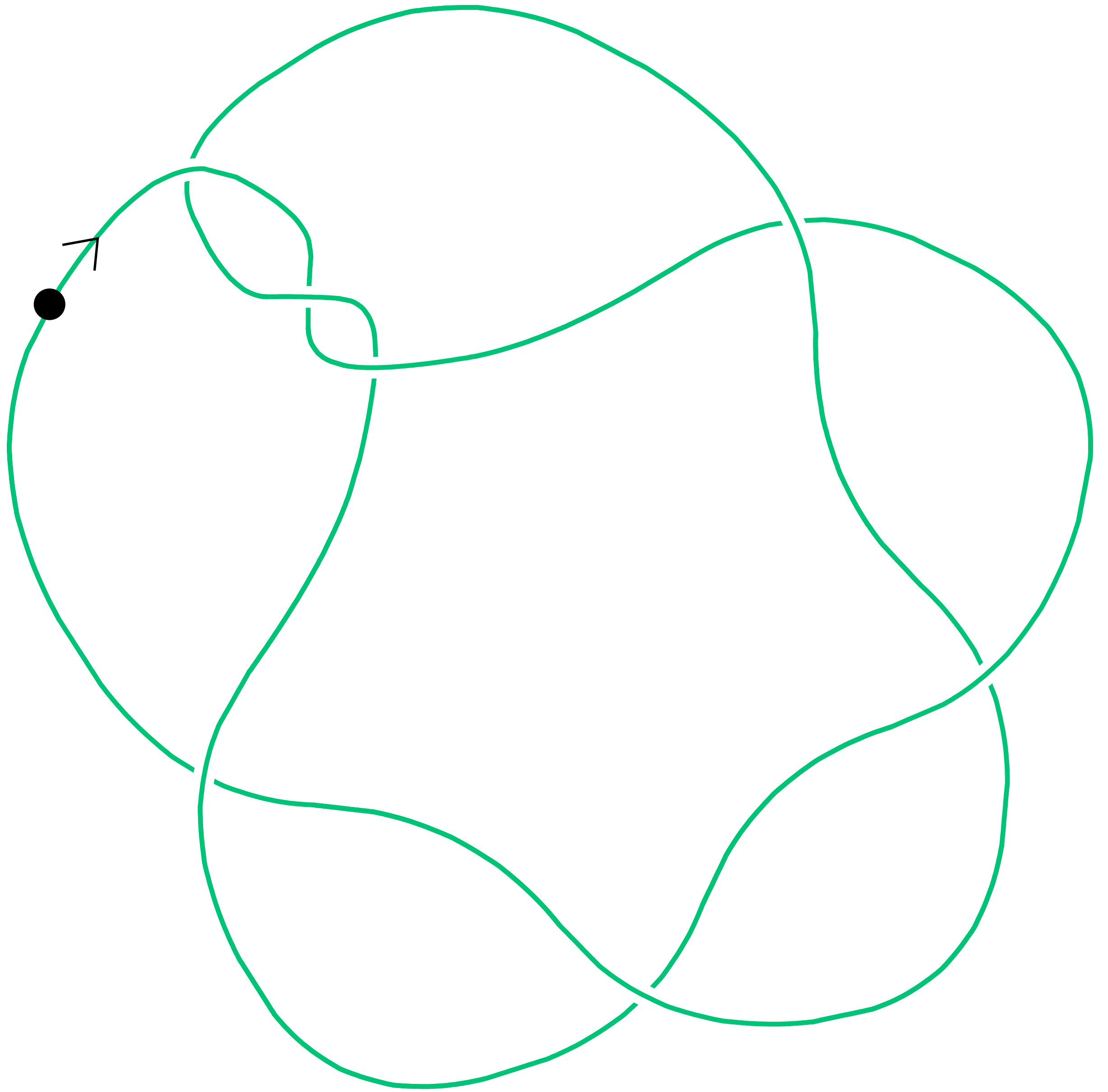
Nos quedamos sólo con los números pares (en el orden que tomaron)

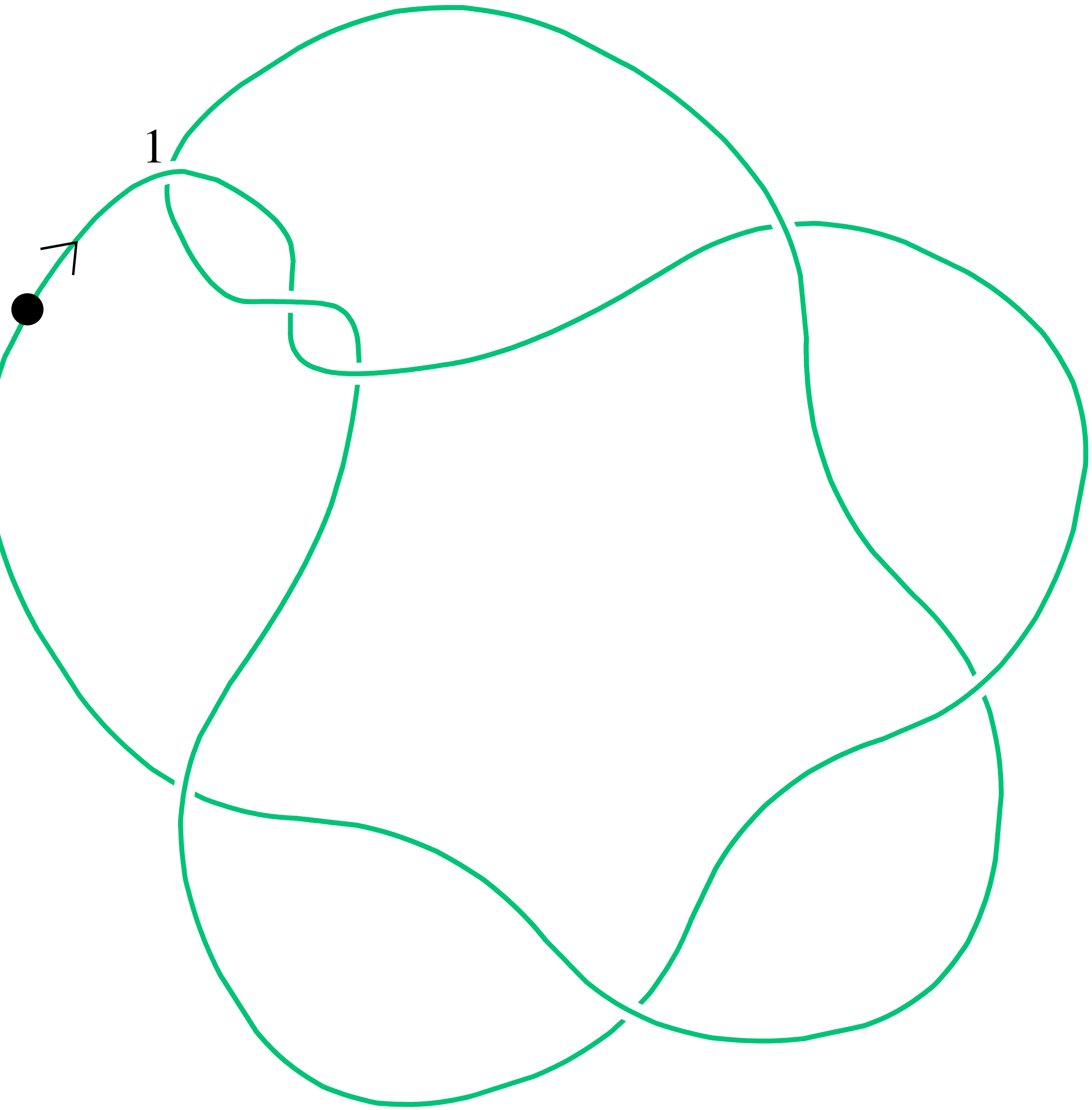
El código de este diagrama es

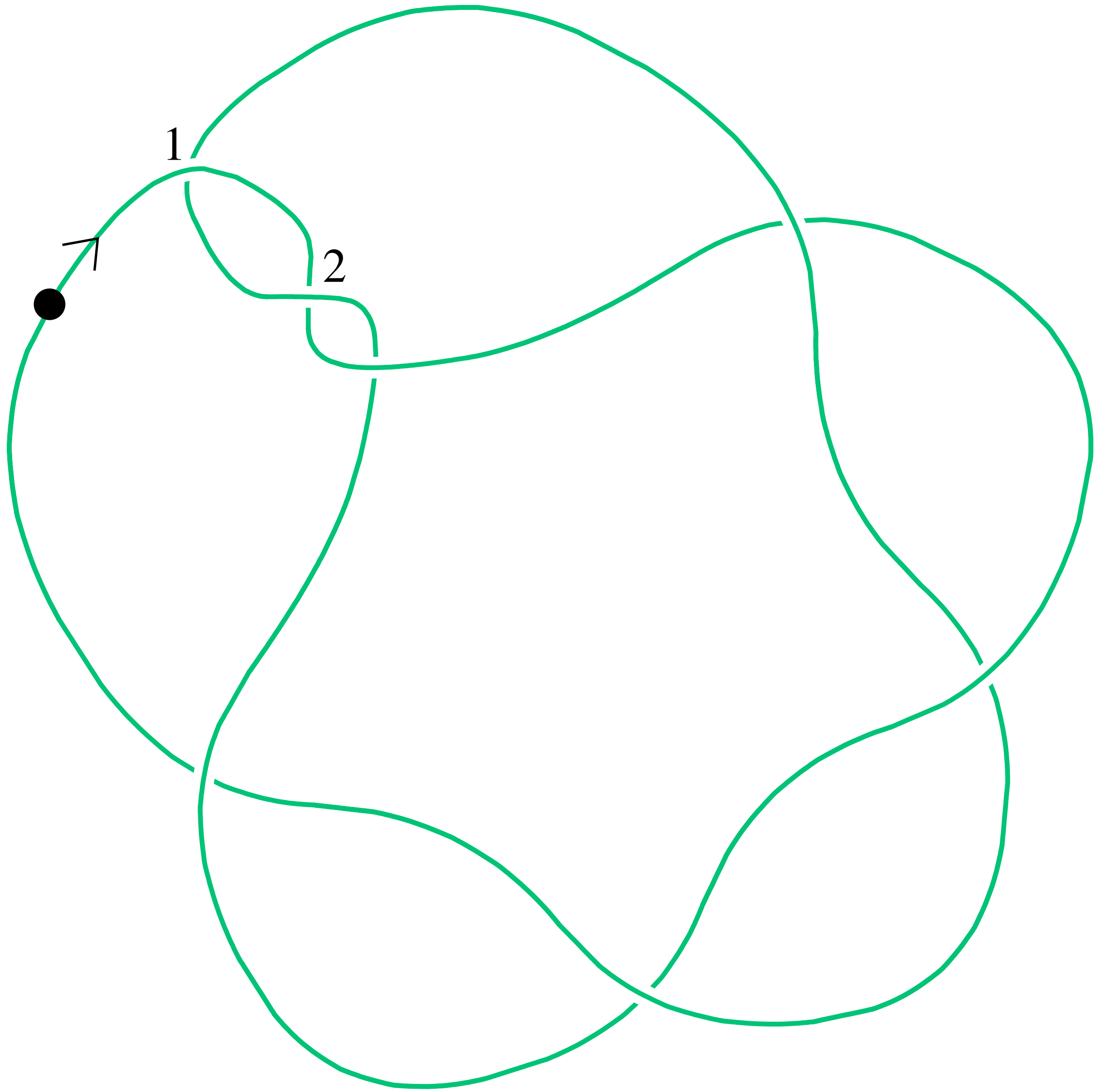
$$4 \quad 6 \quad 8 \quad 2$$

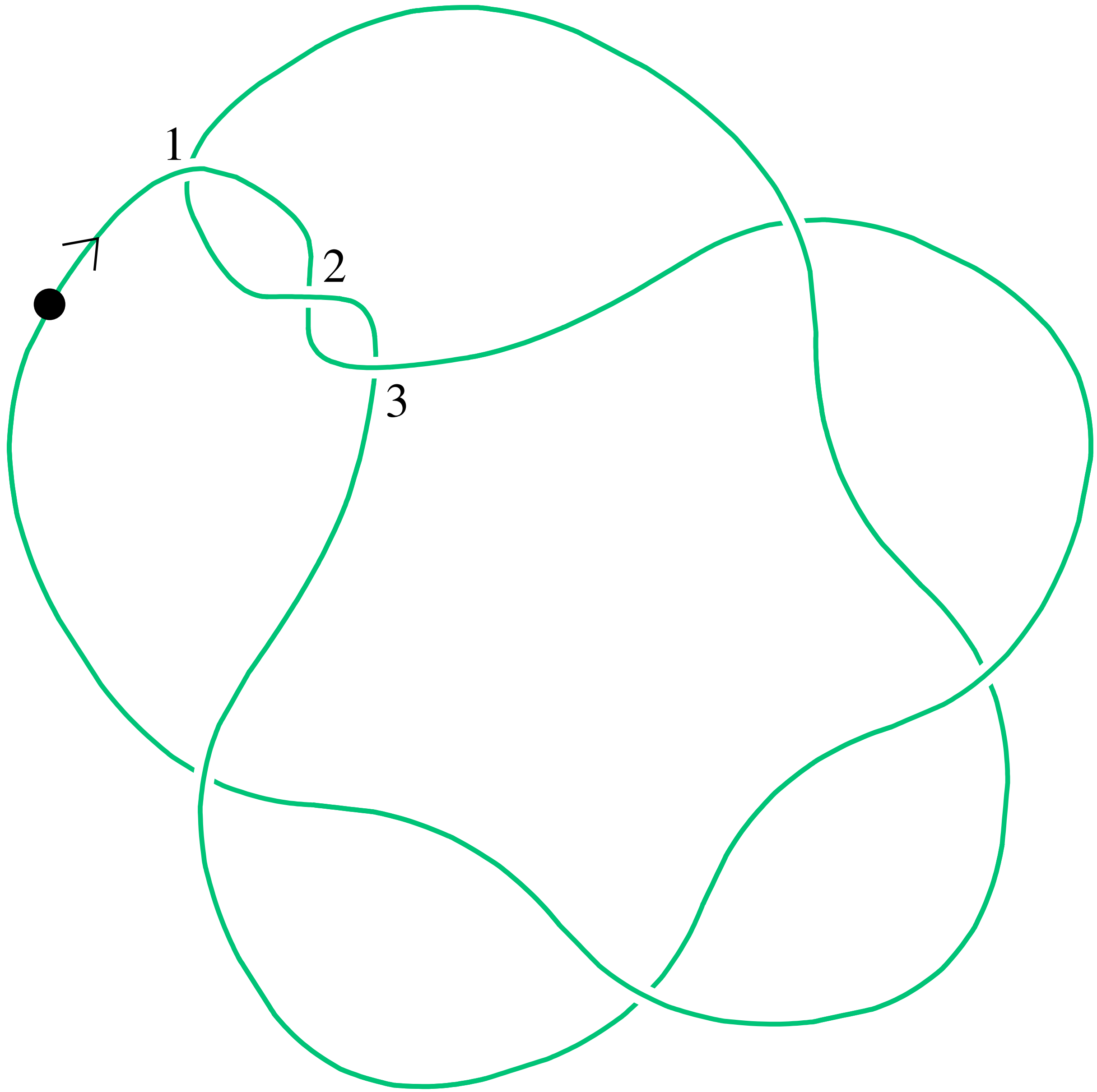


Otro ejemplo:

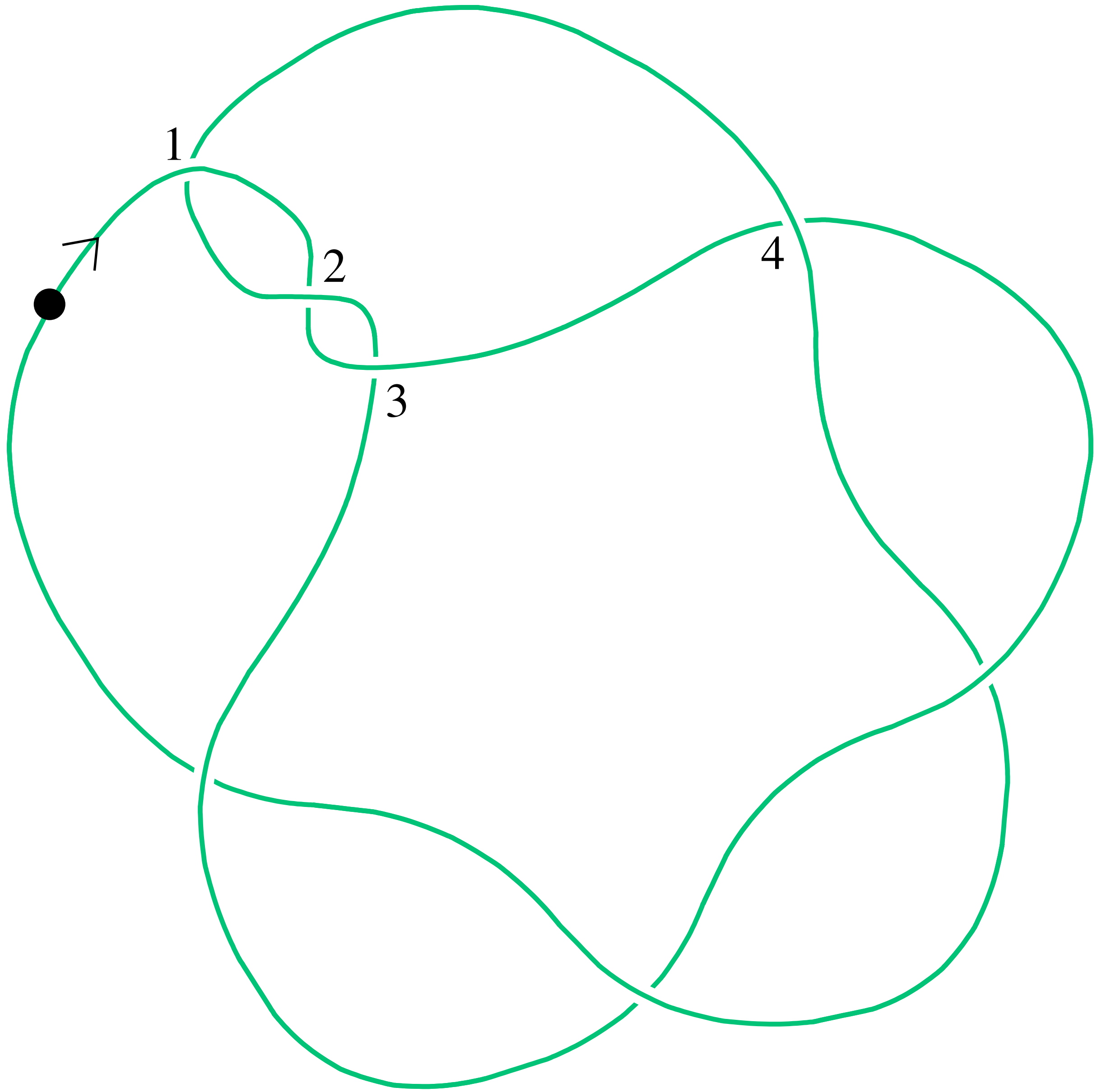


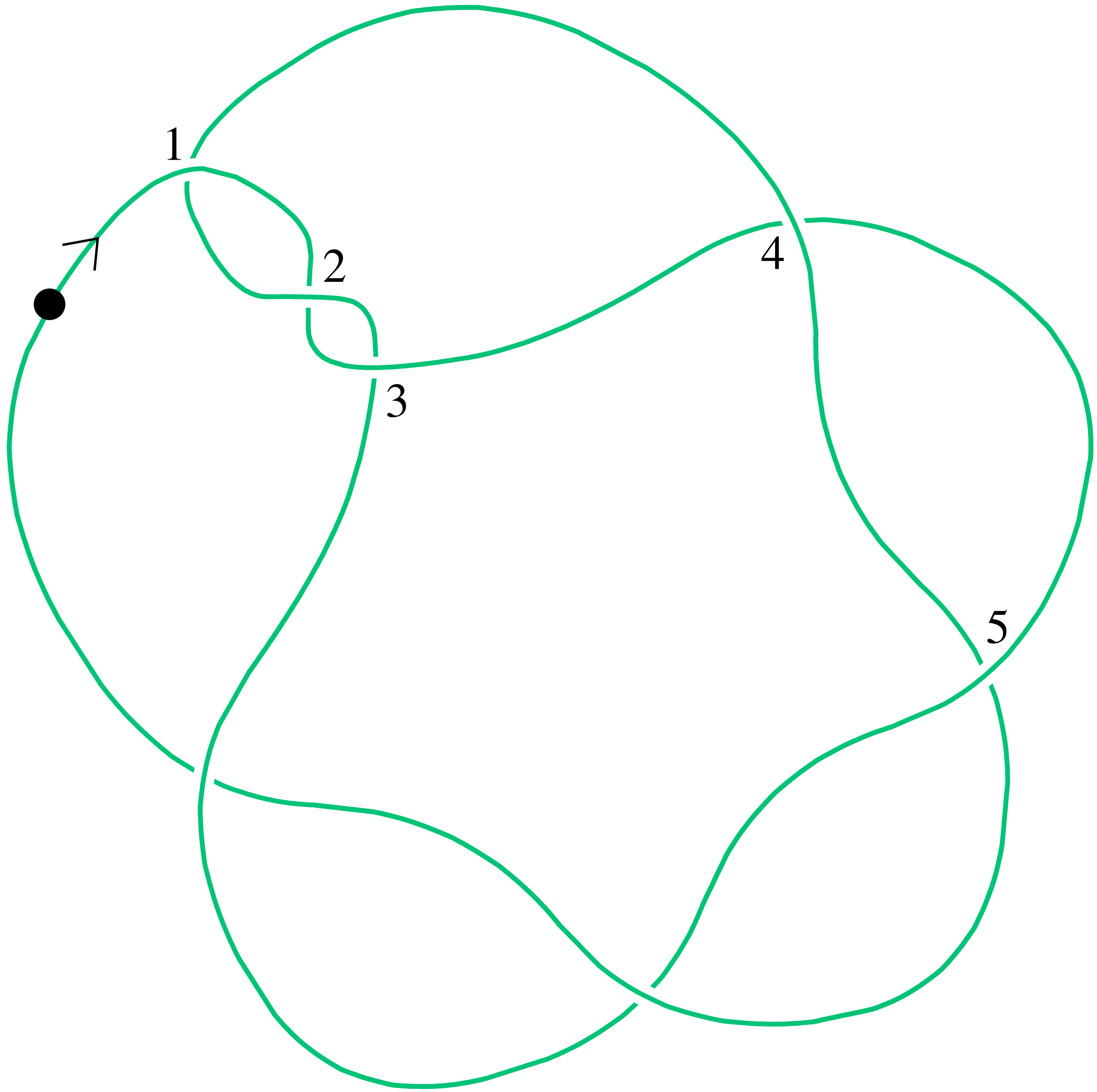

1

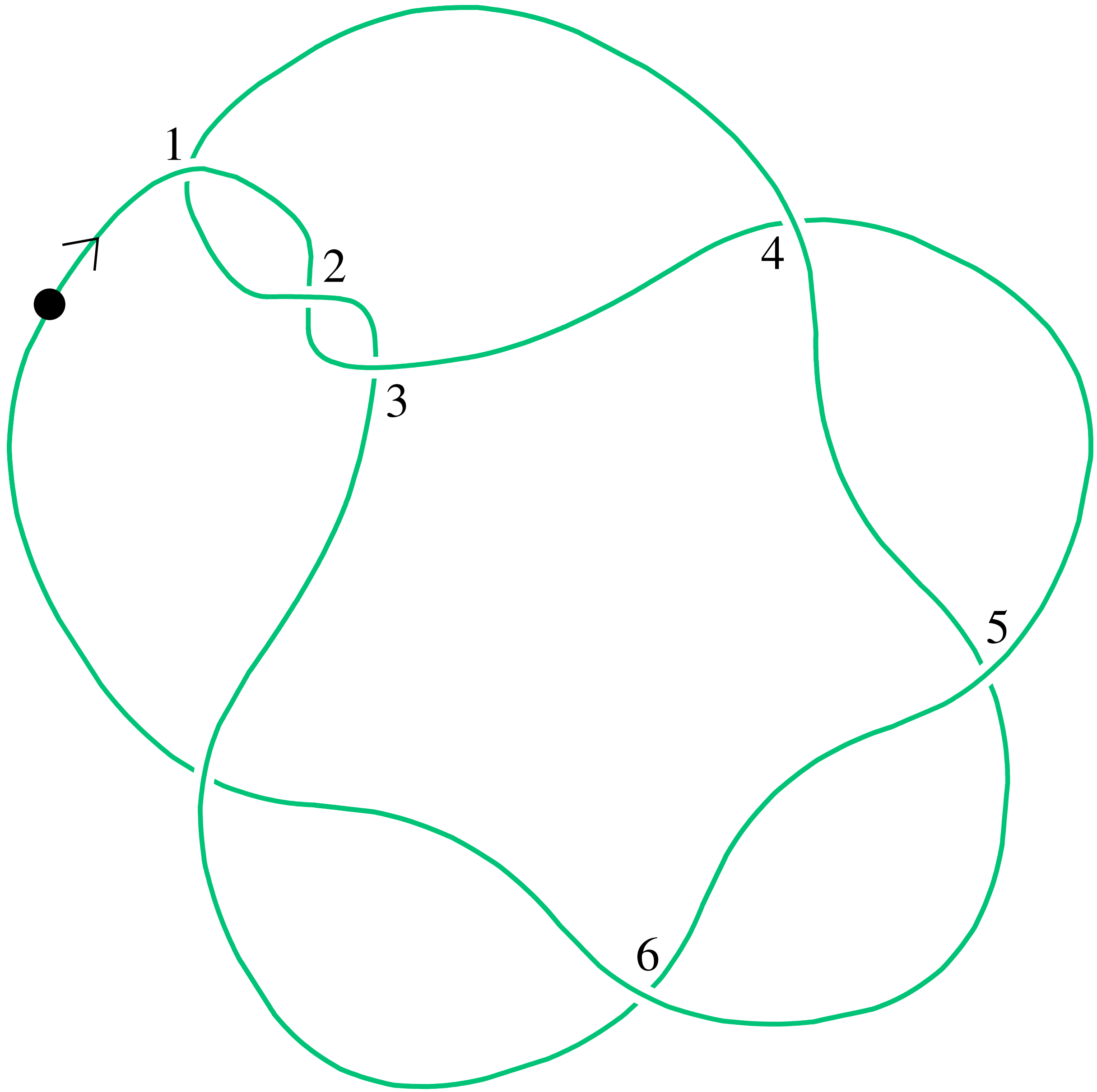

1
2

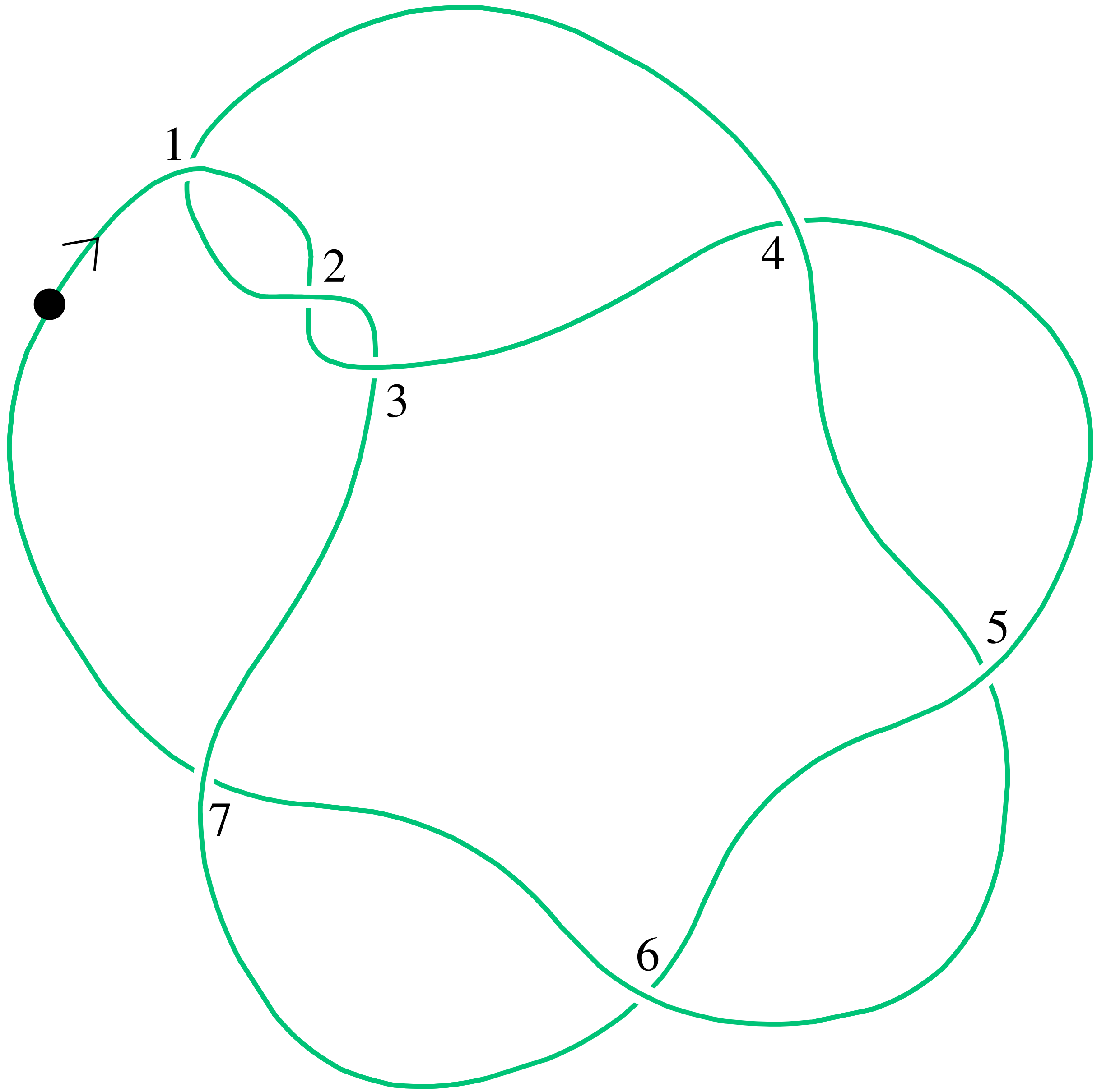


1
2
3

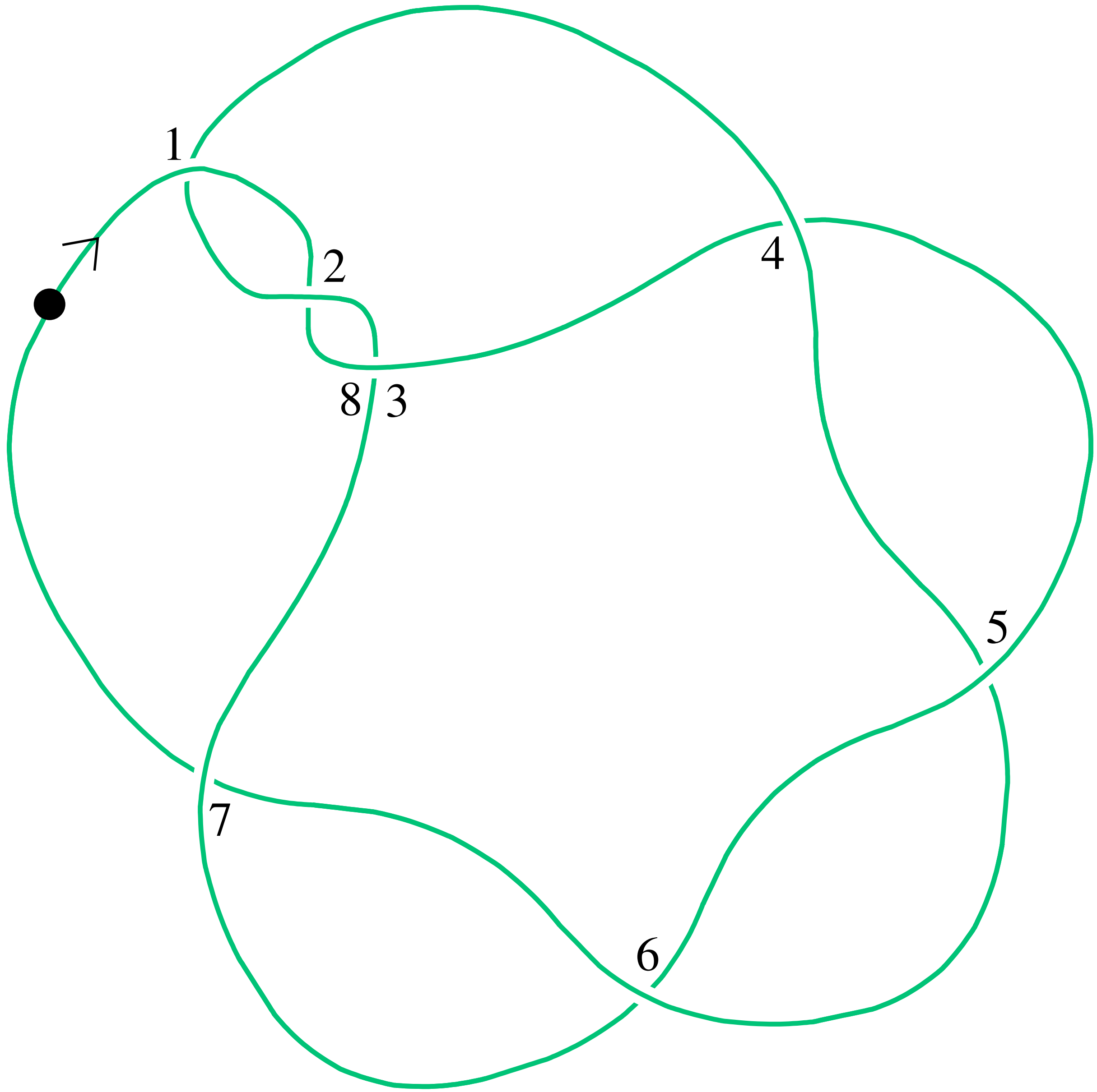

1
2
3
4


1
2
3
4
5

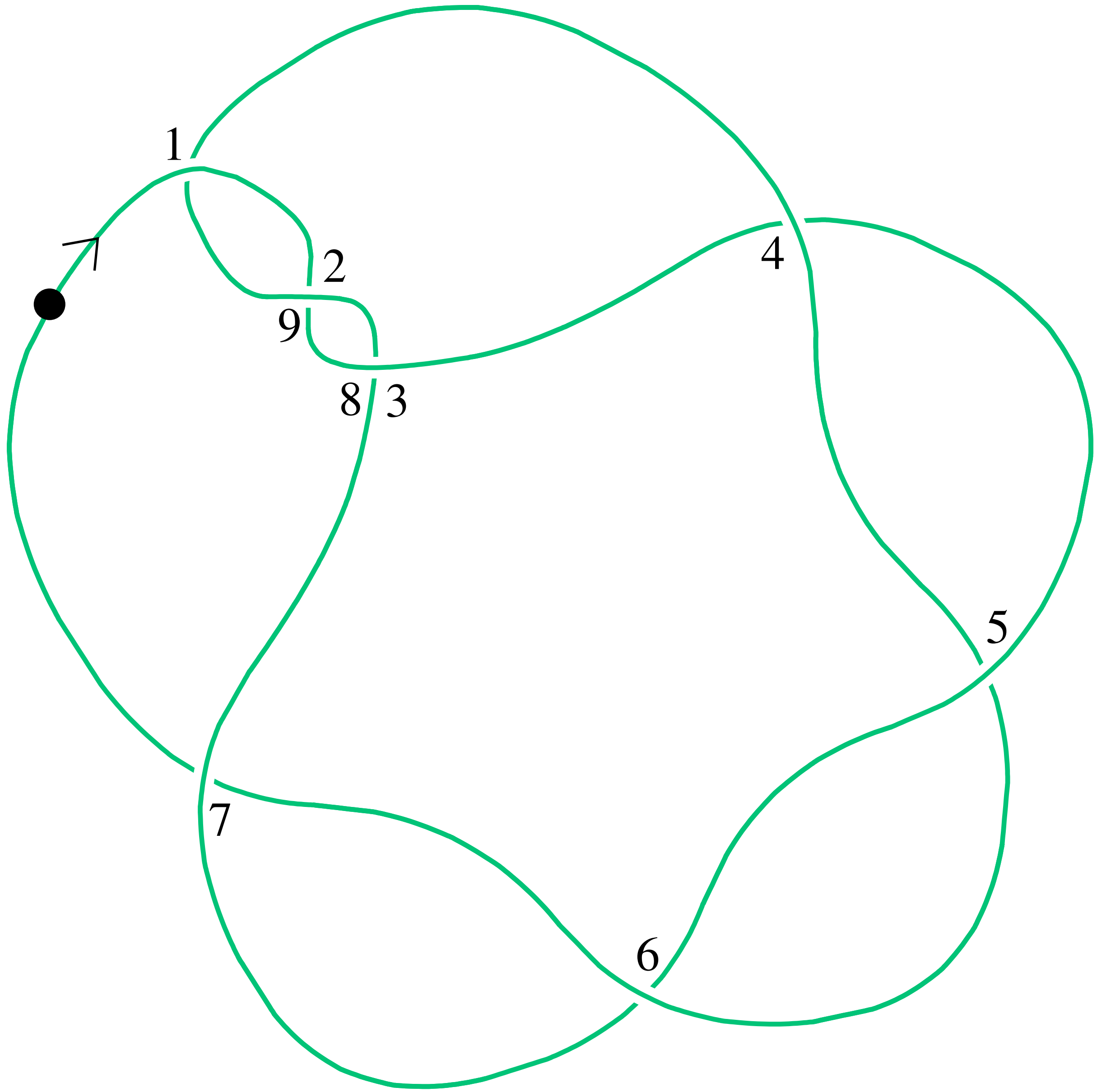

1
2
3
4
5
6



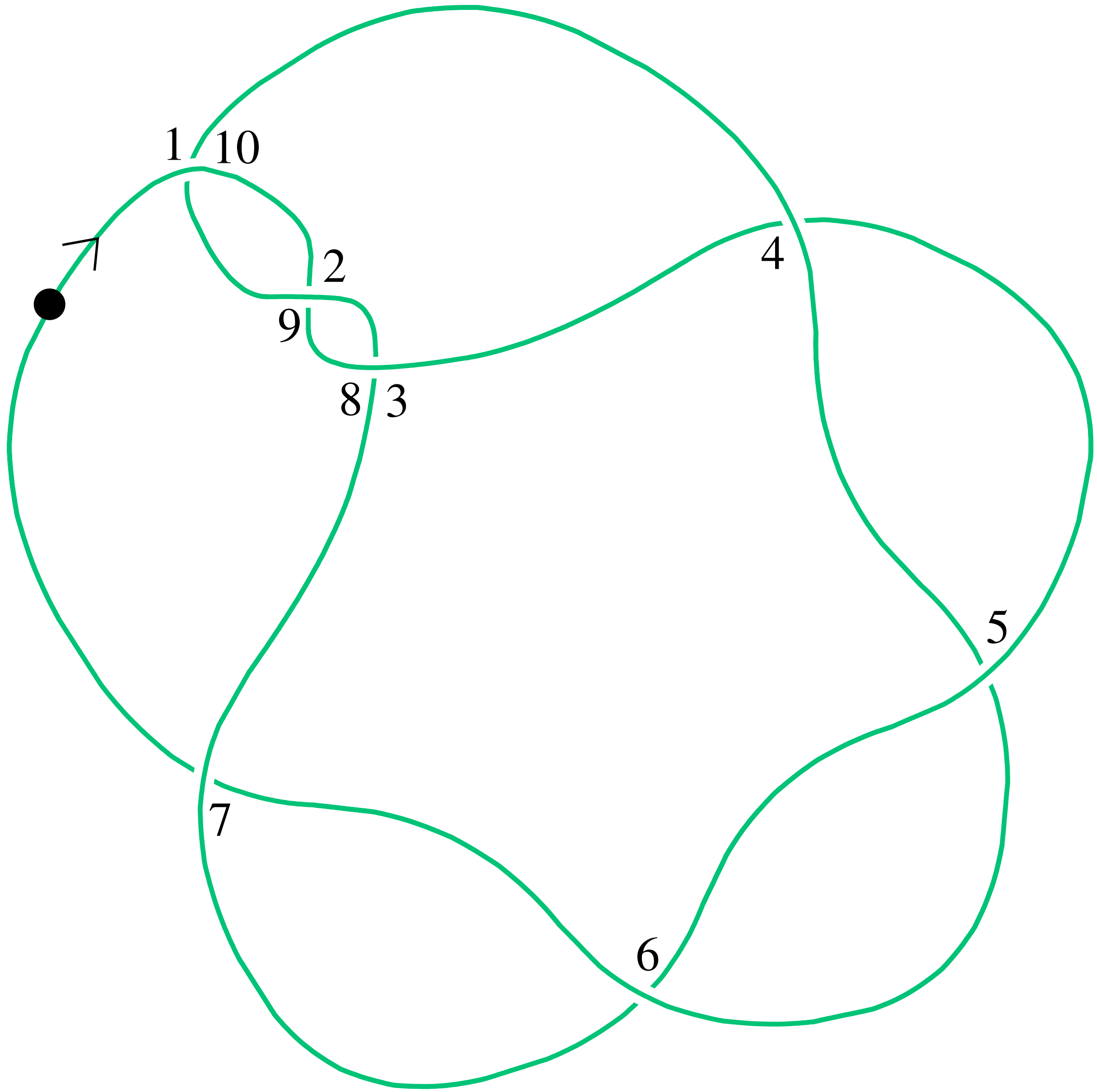
1
2
3
4
5
6
7



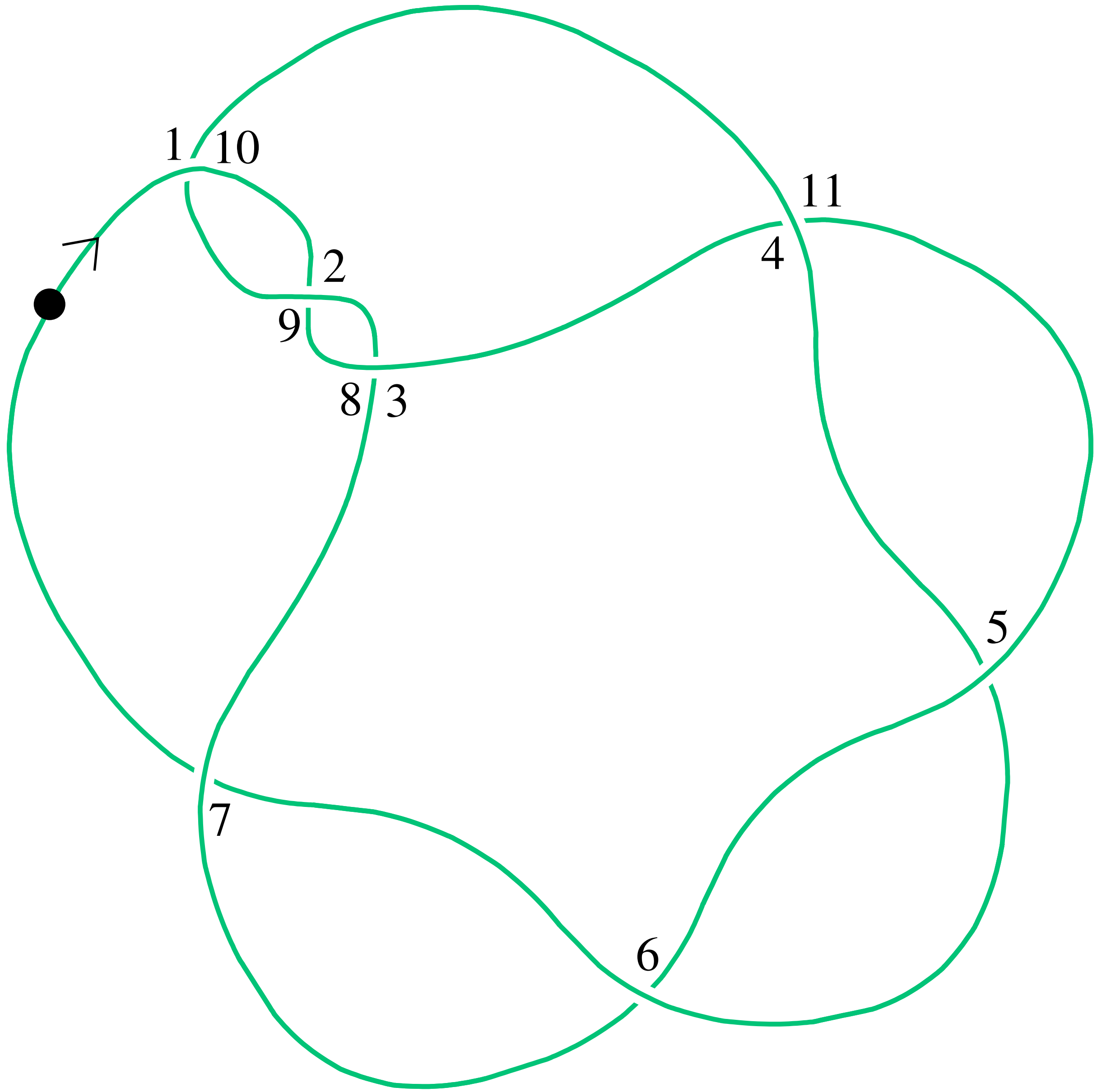
1
2
4
8
3
5
7
6

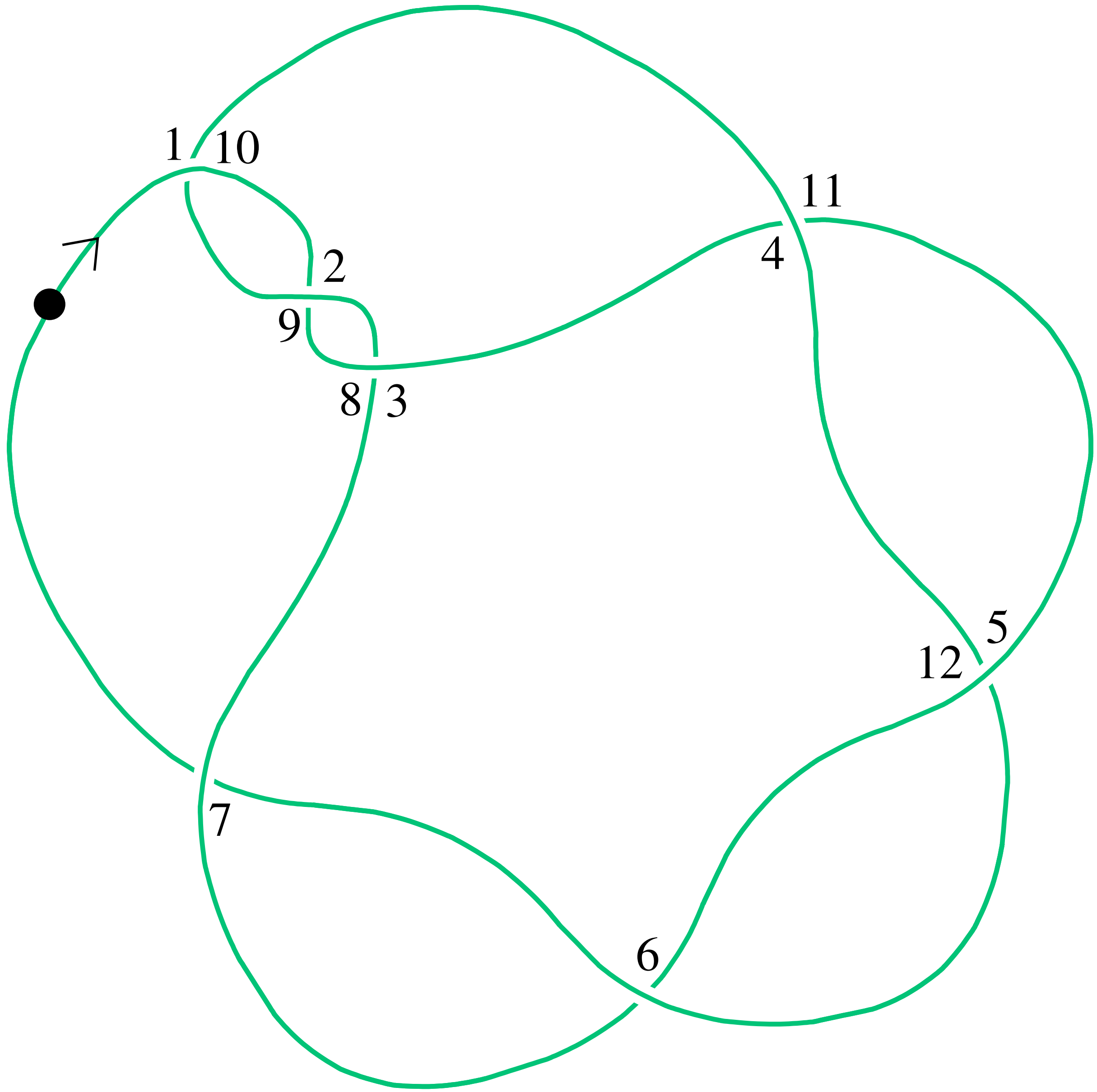


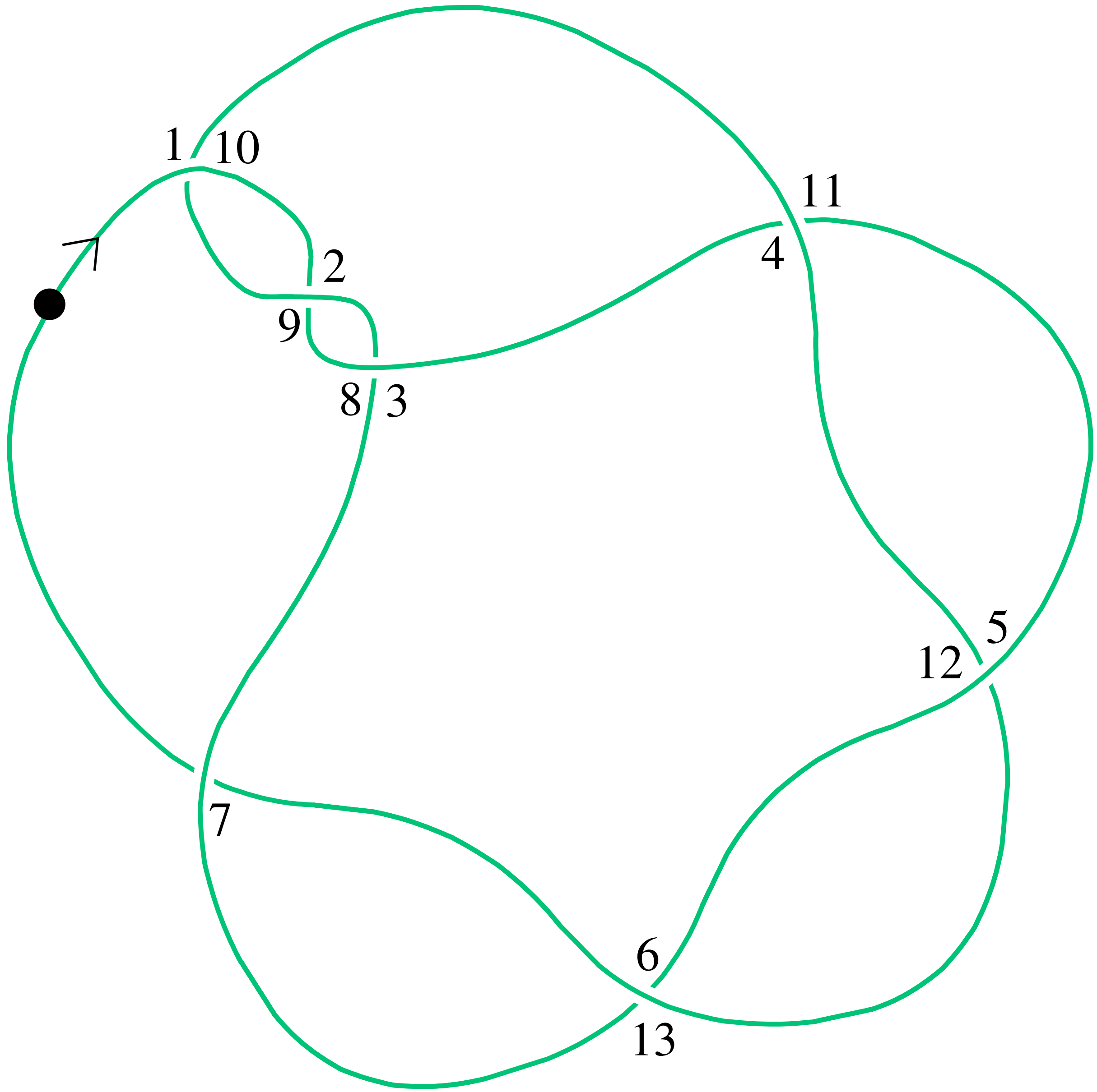
1
2
9
8
3
4
5
6
7

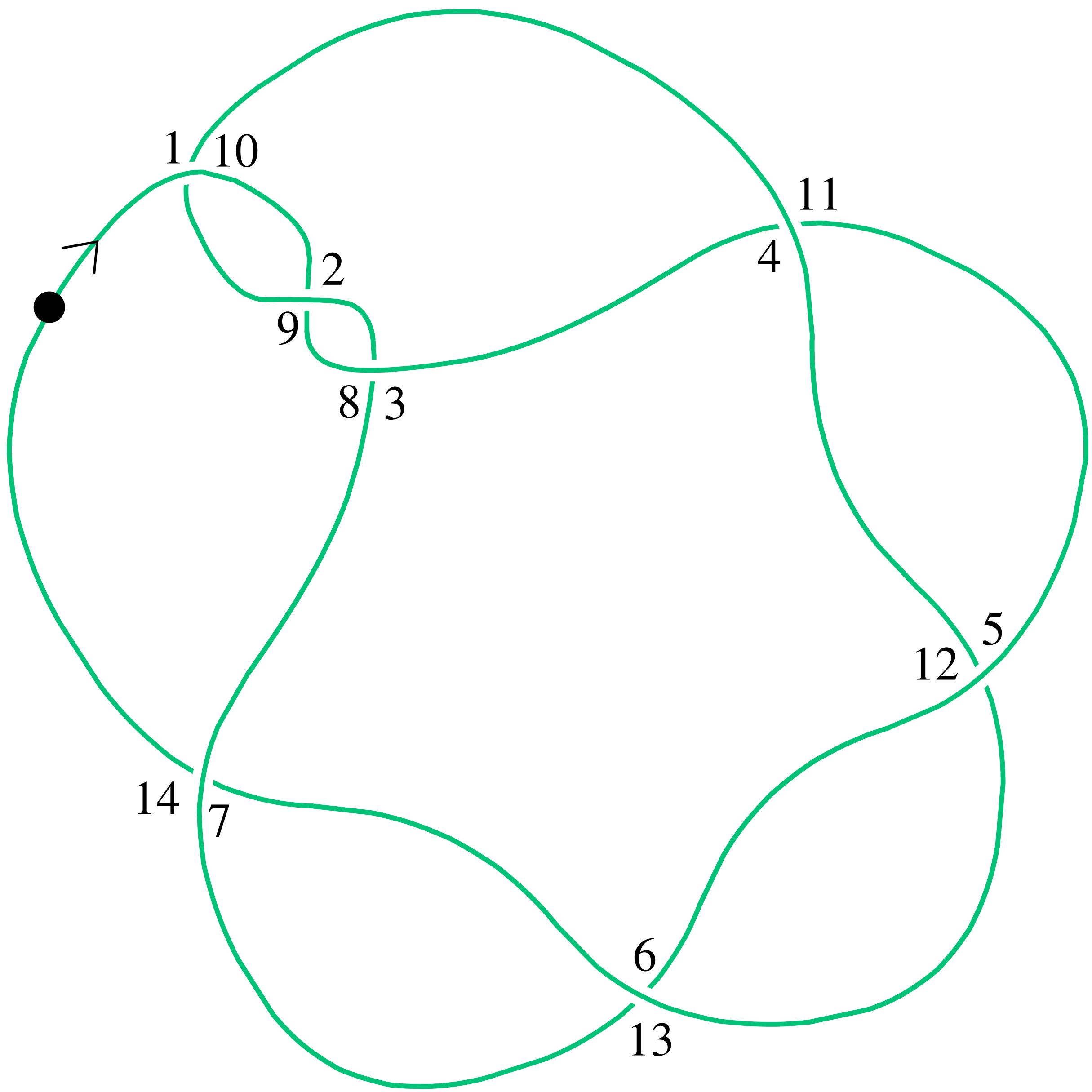


1
10
2
9
4
8
3
5
7
6


1
10
11
2
4
9
8
3
5
7
6

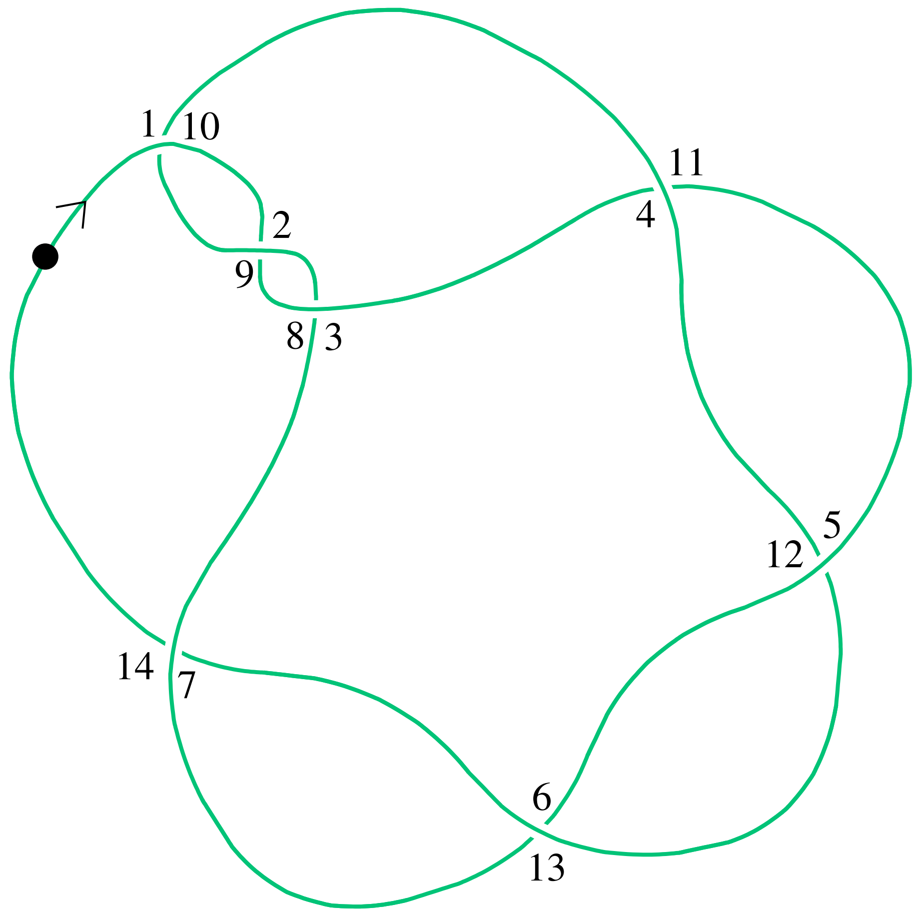

1
10
11
2
4
9
8
3
5
12
7
6


1
10
11
4
2
9
8
3
5
12
7
6
13



1
10
11
4
2
9
8
3
5
12
14
7
6
13

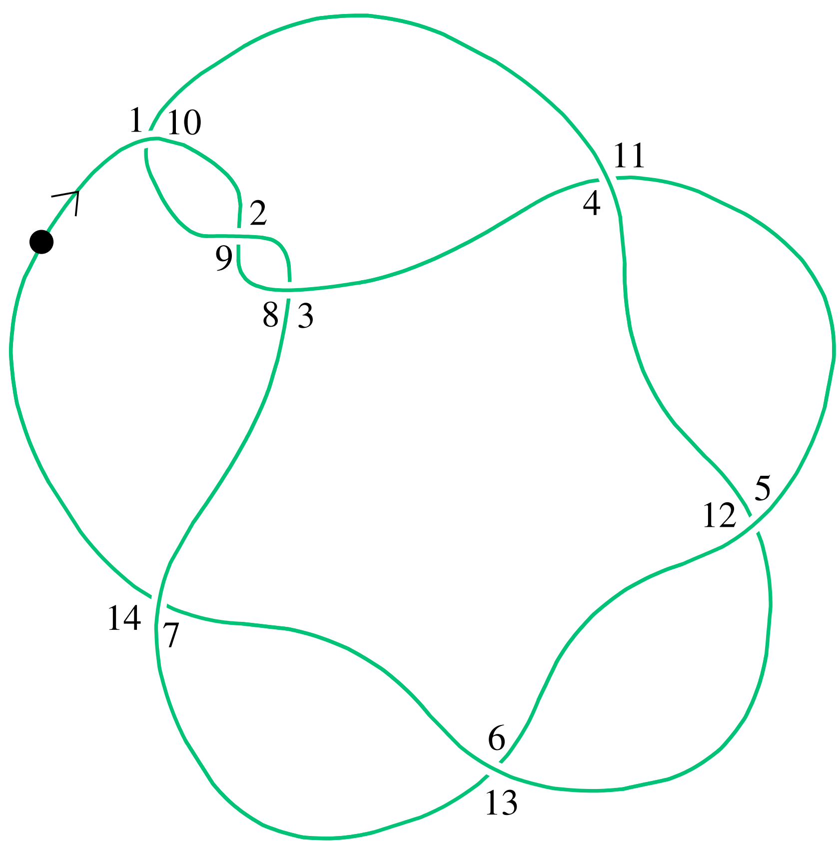
Terminamos con



1	3	5	7	9	11	13
10	8	12	14	2	4	6

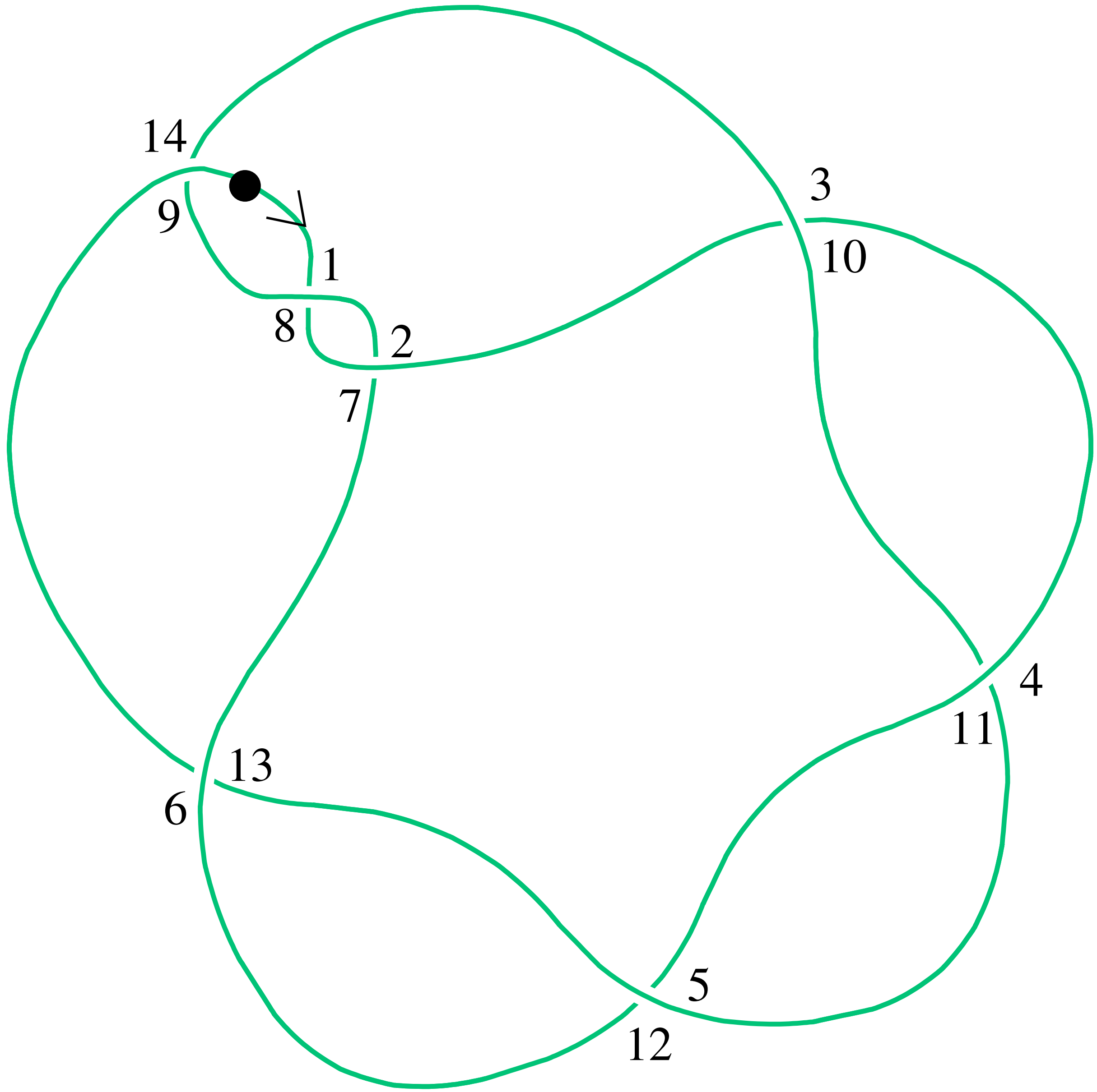
El código de este diagrama es

$$10 \quad 8 \quad 12 \quad 14 \quad 2 \quad 4 \quad 6$$

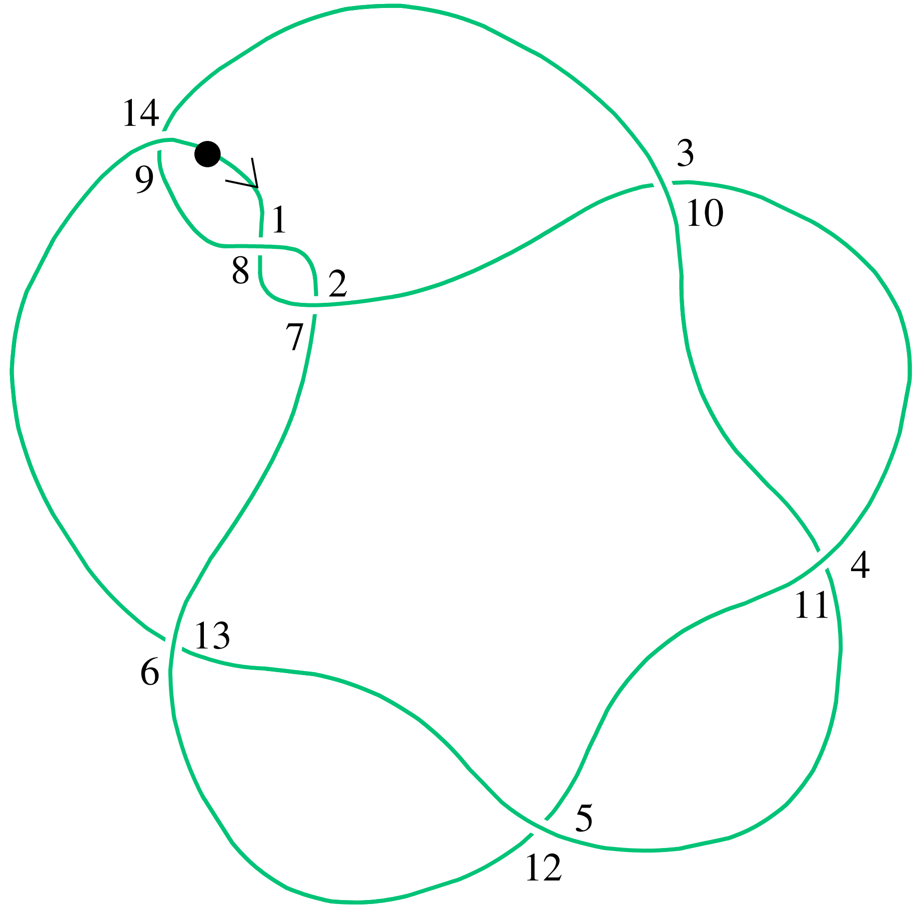


Tenemos varios problemas.

¿Qué tal si comenzamos en otro punto base?



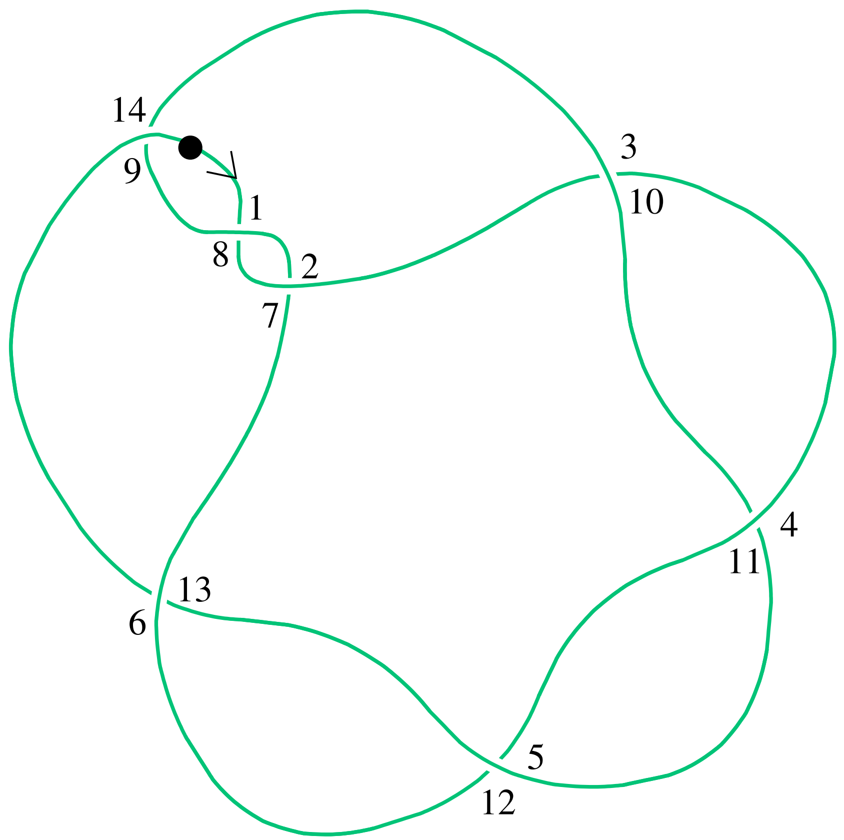
14
3
9
1
10
8
2
7
4
11
13
6
5
12



1	3	5	7	9	11	13
8	10	12	2	14	4	6

El código de este (mismo) diagrama es

$$8 \quad 10 \quad 12 \quad 2 \quad 14 \quad 4 \quad 6$$



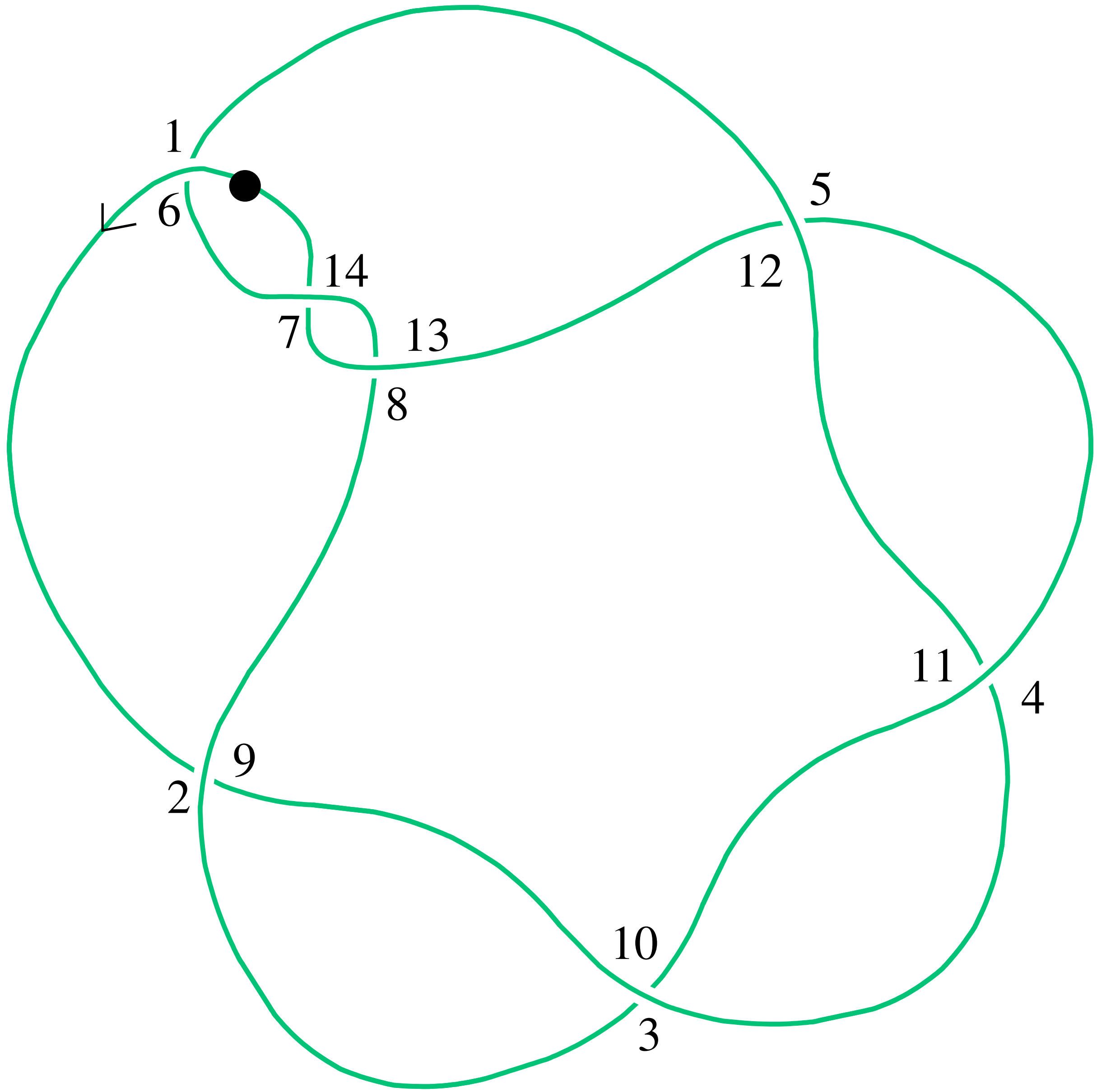
Antes fue

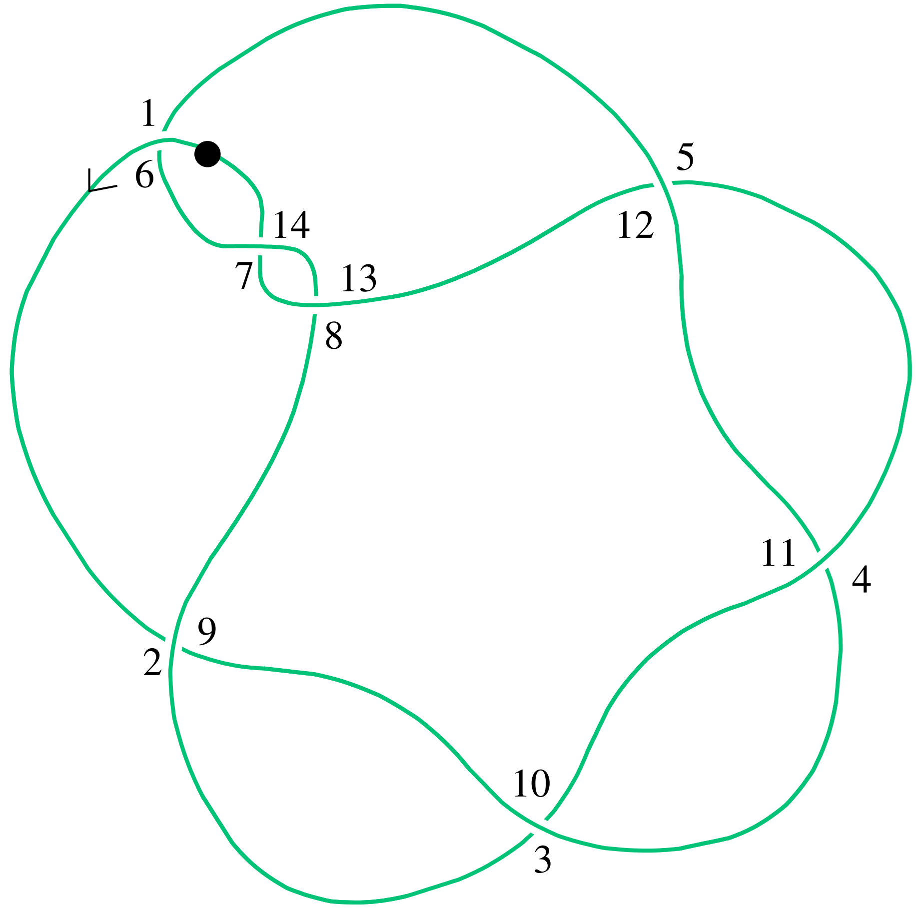
$$10 \quad 8 \quad 12 \quad 14 \quad 2 \quad 4 \quad 6$$

y ahora es

$$8 \quad 10 \quad 12 \quad 2 \quad 14 \quad 4 \quad 6$$

¿Y qué tal si escogemos otra orientación?

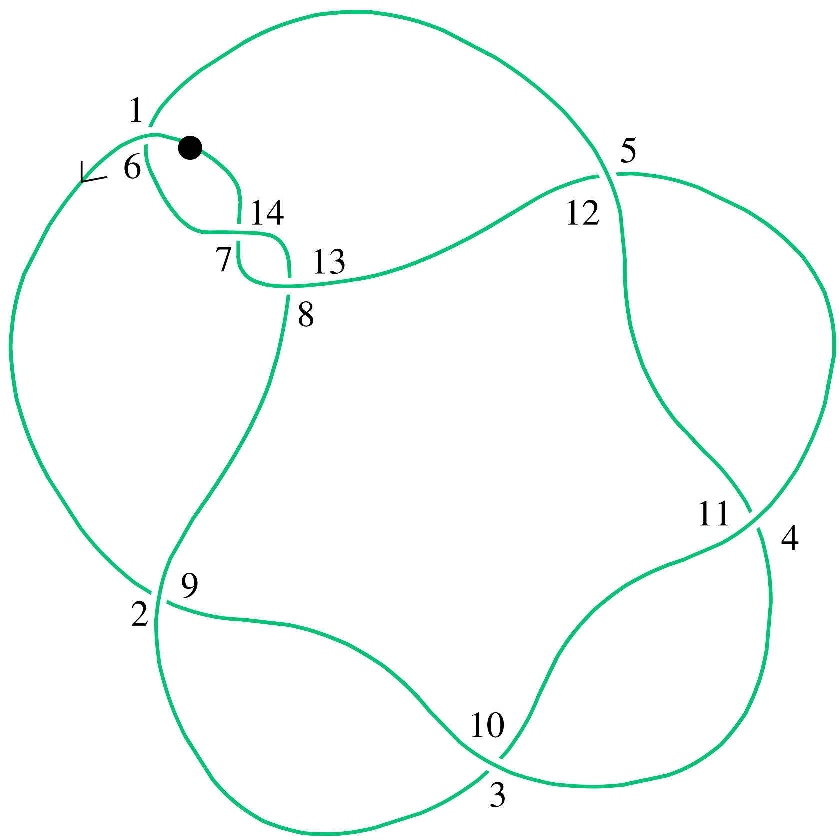

1
6
14
7
13
8
5
12
11
4
9
2
10
3



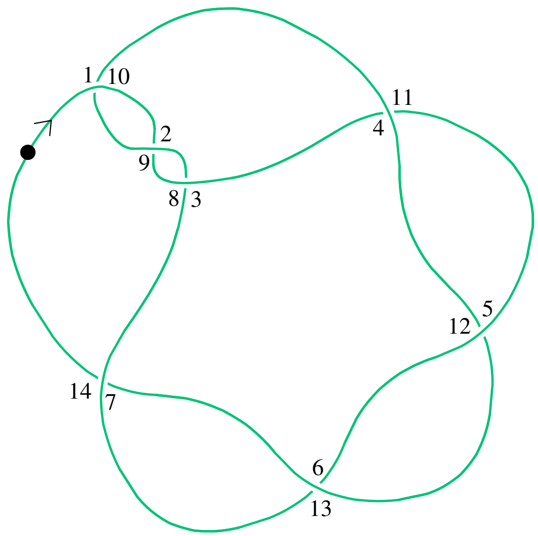
1	3	5	7	9	11	13
6	10	12	14	2	4	8

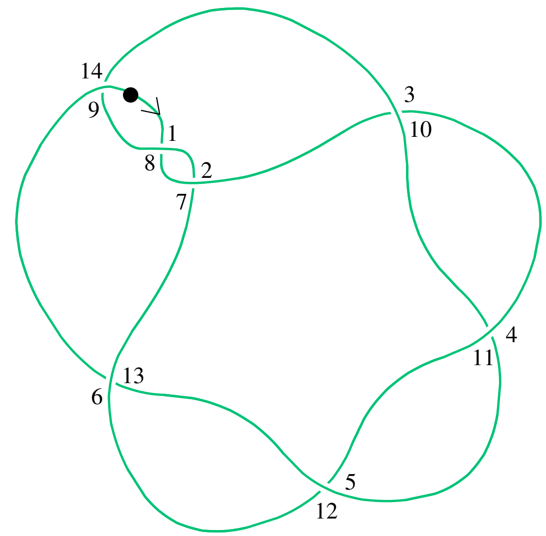
El código de este (mismo) diagrama es

$$6 \quad 10 \quad 12 \quad 14 \quad 2 \quad 4 \quad 8$$



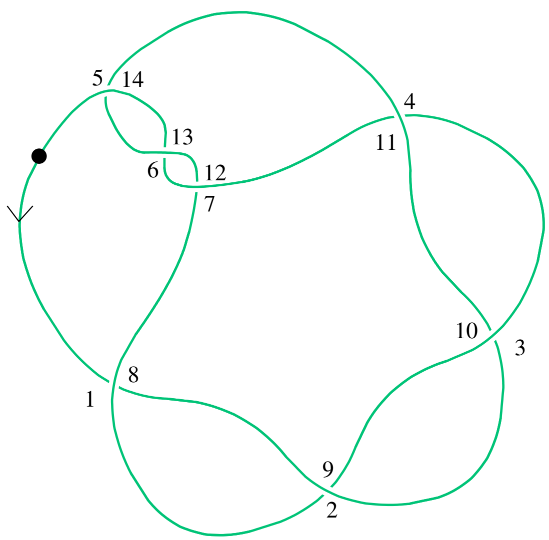
¿Qué tienen que ver estos códigos distintos?

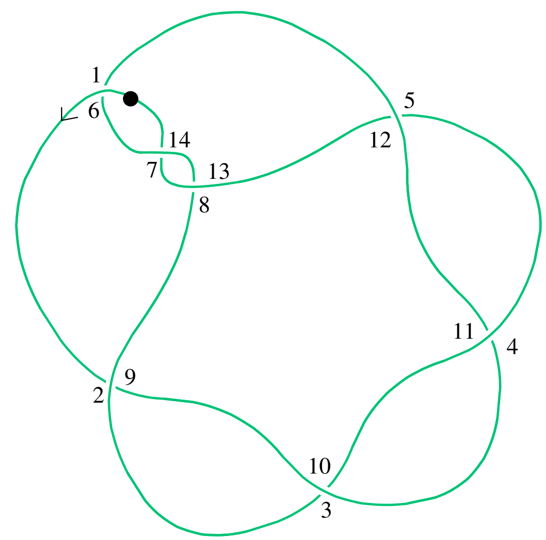




1	3	5	7	9	11	13
10	8	12	14	2	4	6

1	3	5	7	9	11	13
8	10	12	2	14	4	6





1	3	5	7	9	11	13
8	10	14	12	2	4	6

1	3	5	7	9	11	13
6	10	12	14	2	4	8

Sin dibujos se puede

1	3	5	7	9	11	13
10	8	12	14	2	4	6

1	3	5	7	9	11	13
8	10	12	2	14	4	6

1	3	5	7	9	11	13
8	10	14	12	2	4	6

1	3	5	7	9	11	13
6	10	12	14	2	4	8

$$\begin{matrix} 1+6=7 & 3+6=9 & 5+6=11 & 7+6=13 & 9+6=1 & 11+6=3 & 13+6=19 \\ 10+6=2 & 8+6=14 & 12+6=4 & 14+6=6 & 2+6=8 & 4+6=10 & 6+6=12 \end{matrix}$$

$$=$$

$$\begin{matrix} 7 & 9 & 11 & 13 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 14 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \end{matrix}$$

$$=$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \\ 8 & 10 & 12 & 2 & 14 & 4 & 6 \end{matrix}$$

Bueno.

¿Y esto pa qué sirve?

Ejemplo

$$6 \quad 12 \quad 14 \quad 18 \quad 16 \quad 4 \quad 2 \quad 10 \quad 8$$

¡Esto está muy bueno!

Pero vámonos despacito.

Comenzamos con un diagrama de un nudo.

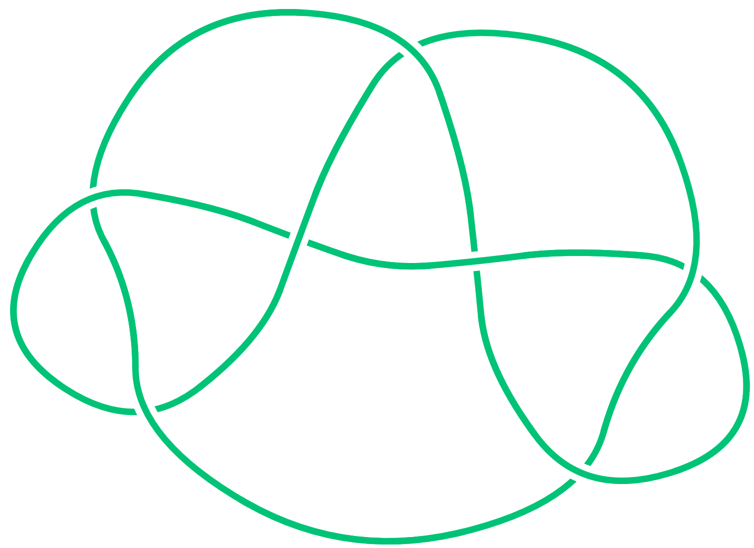
Marcamos un punto de inicio y una dirección sobre el nudo

A partir del punto de inicio recorremos el nudo y numeramos los puntos de cruce que nos vayamos encontrando hasta que regresemos al punto base.

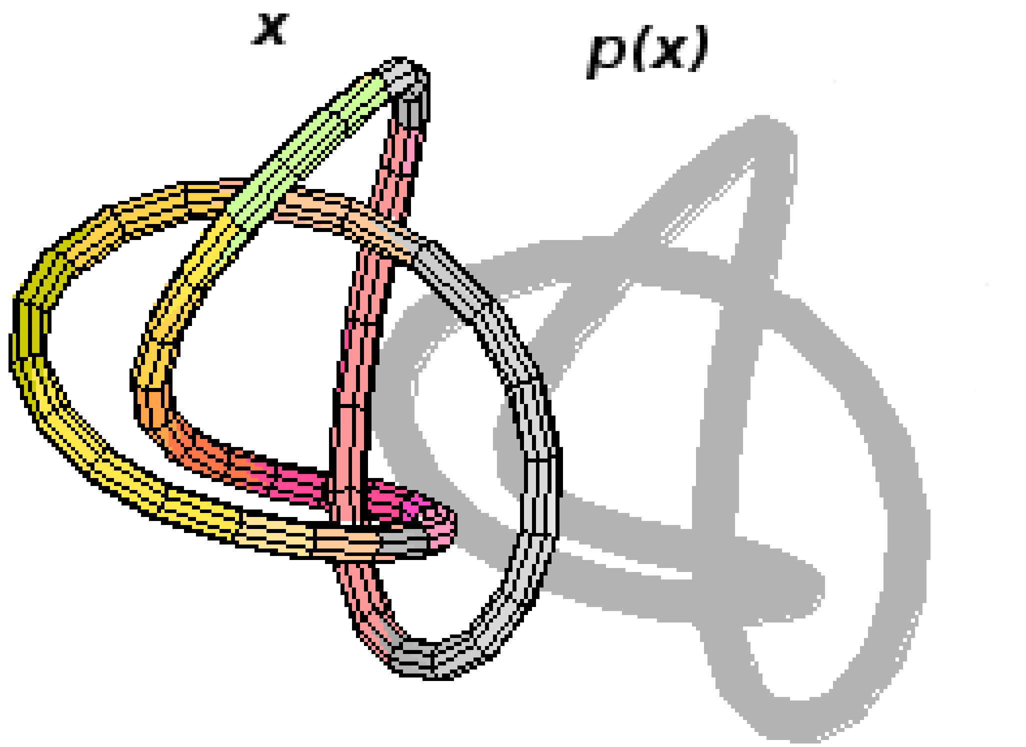
Cada punto de cruce del diagrama recibe dos números: uno es par y el otro es impar.

(¿…?)

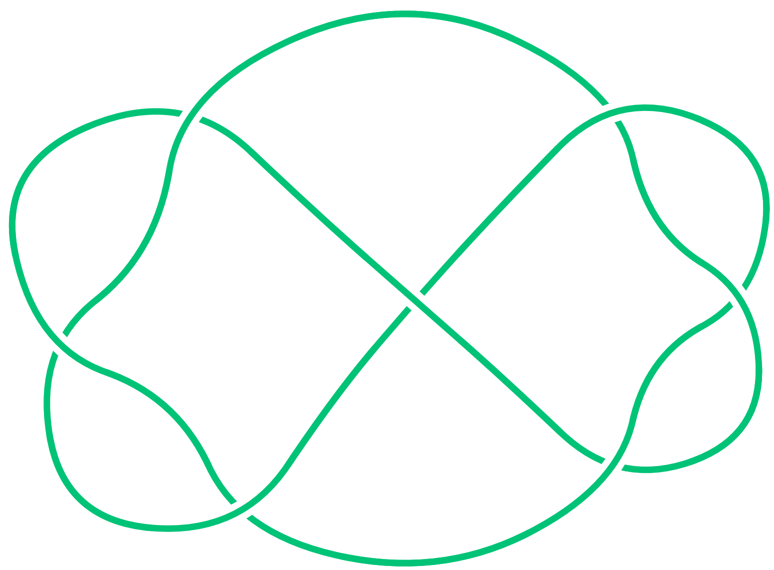
Si tenemos un nudo k en el espacio, entonces un diagrama D del nudo k consta de una proyección del nudo sobre un plano y de indicaciones en los puntos de cruce que nos dicen qué puntos pasan por arriba o por abajo.



Si tenemos un puntito x en el nudo k, vamos a escribir $p(x)$ para el punto de la proyección que corresponde a x

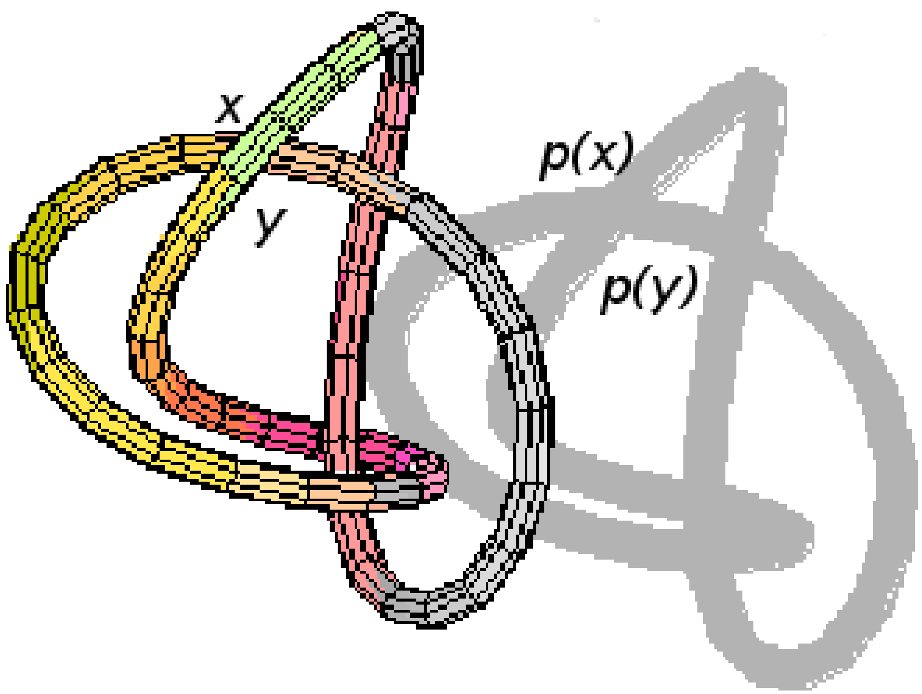


Como tenemos una proyección regular,
en el diagrama vemos arcos y puntos dobles únicamente
(los puntos dobles corresponden a los puntos de cruce)



Para cada punto doble z de la proyeccción, tenemos dos puntitos distintos x y y en el nudo k que se proyectan sobre z, o sea $p(x) = p(y) = z$

(pues sí; son puntos dobles)



Pensemos que nuestro diagrama tiene n puntos de cruce (puntos dobles).

Si recorremos el nudo k y numeramos los puntos de k que se proyectan en puntos dobles, tenemos una sucesión de puntos

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n}$$

O sea, x_1 es el primer punto que nos encontramos, x_2 el segundo punto que nos encontramos, etc., hasta que llegamos al último punto que se proyecta en un punto doble: x_{2n}.

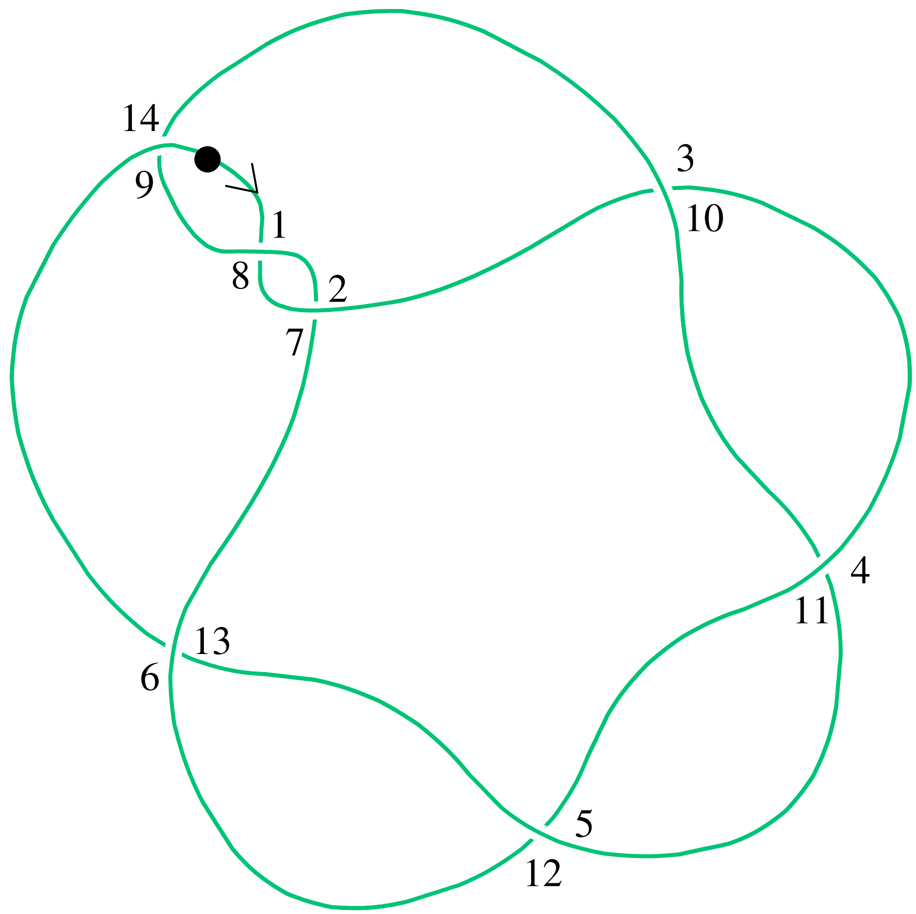
(Después nos volvemos a encontrar con x_1.)

¿Cómo se ven los puntos

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n}$$

en el diagrama?

Pues, se ven así:



Por ejemplo, el cruce donde está el 1 y el 8, es el punto donde se proyectaron los puntos x_1 y x_8 de k.

¿Correcto?

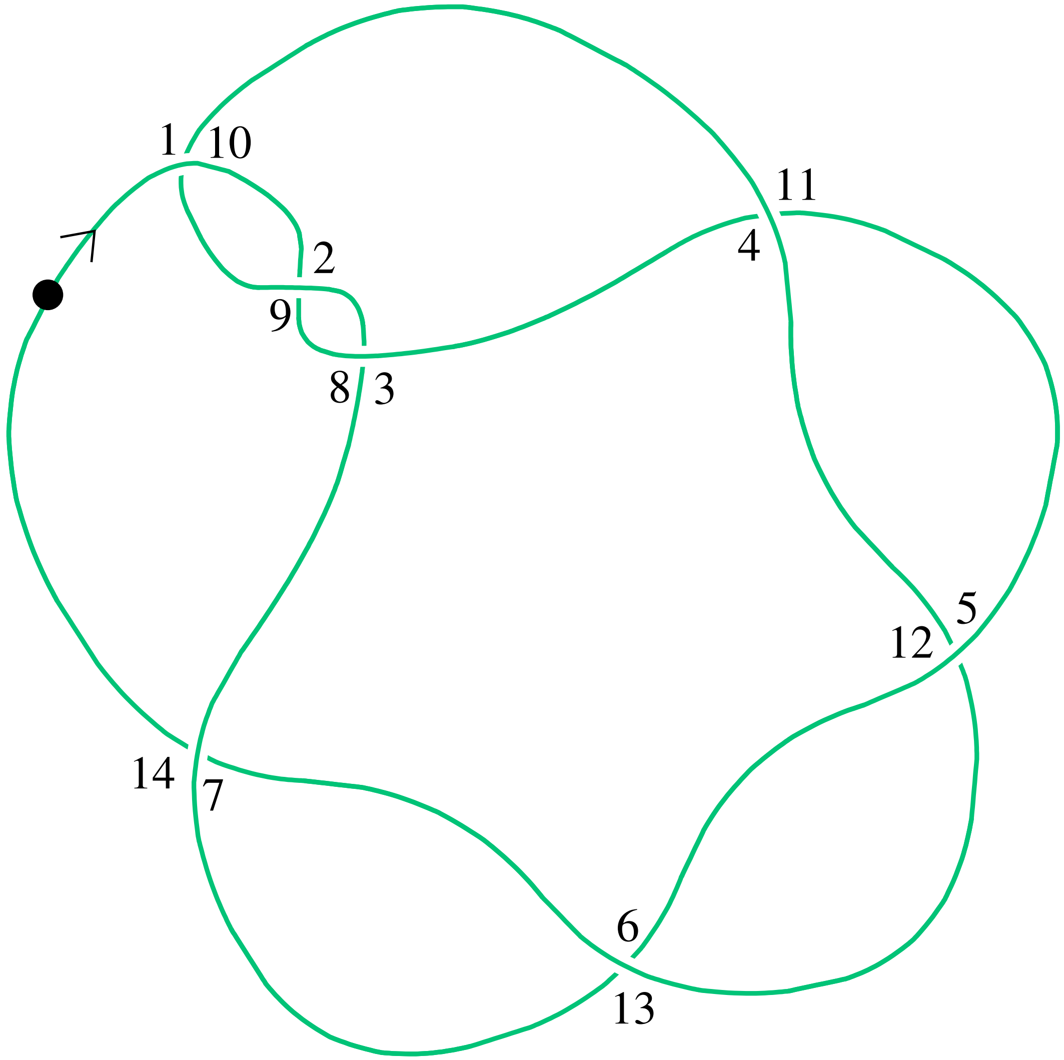
Ya podemos entender la afirmación:

Cada punto de cruce del diagrama recibe dos números: uno es par y el otro es impar.

En la sucesión de un diagrama, si en un cruce tenemos al número i, al otro número j que aparece en ese cruce lo llamamos el <u>acompañante</u> de i.

Escribimos

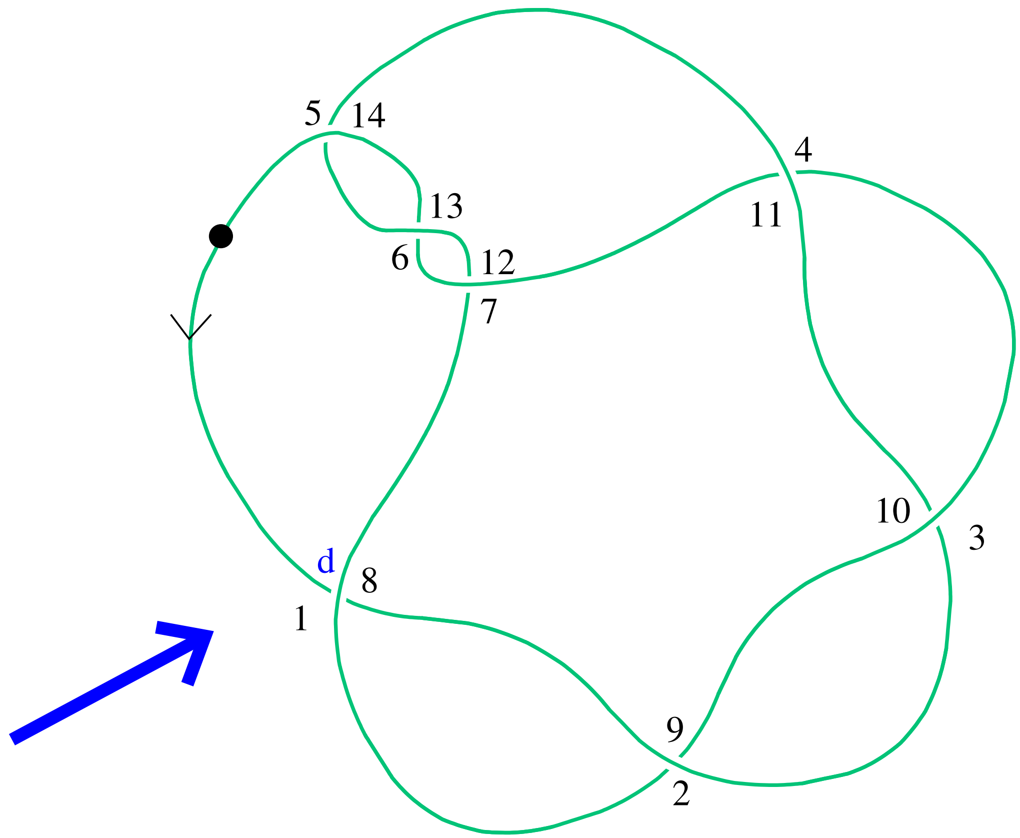
$$j = \text{acompañante}(i) = a(i)$$



$a(1) = 10$, $a(2) = 9$, $a(3) = 8$, $a(4) = 11$, $a(5) = 12$, $a(6) = 13$, $a(7) = 14$,

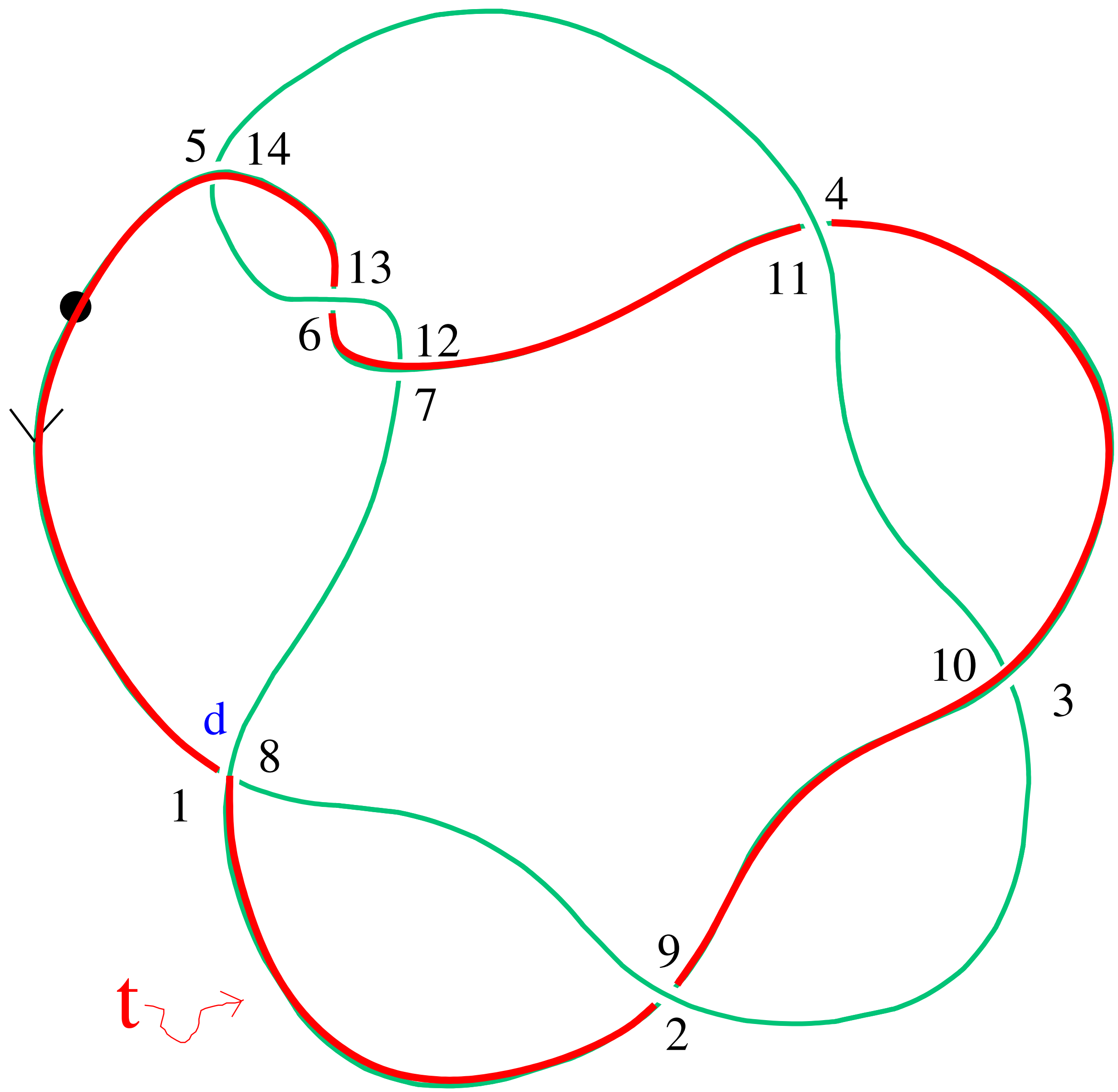
$a(8) = 3$, $a(9) = 2$, $a(10) = 1$, $a(11) = 4$, $a(12) = 5$, $a(13) = 6$ y $a(14) = 7$.

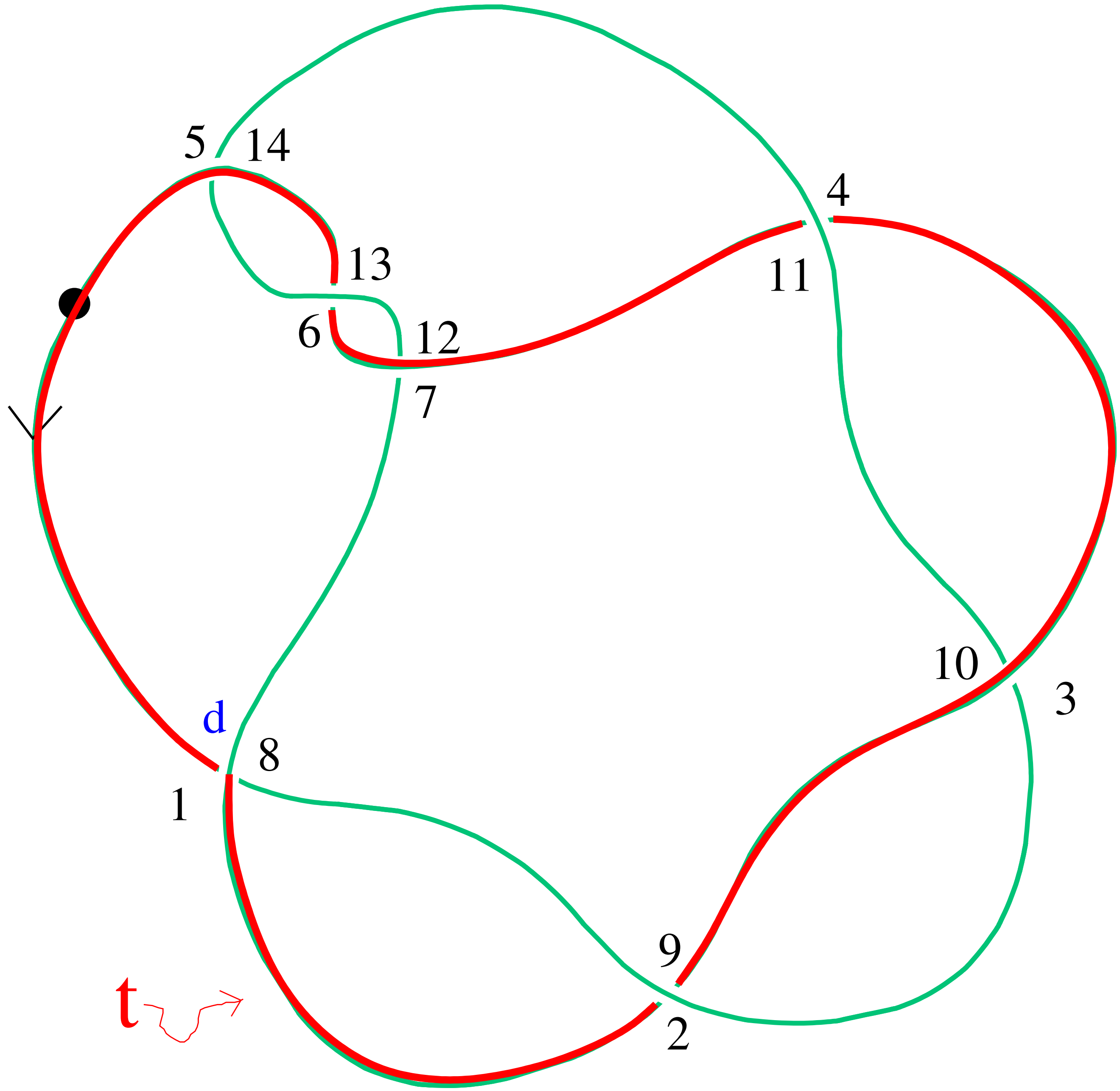
Tomemos un nudo k y un diagrama D de k con proyección p. Tomemos ahora un punto doble en D, $d = p(x_i) = p(x_{a(i)})$.



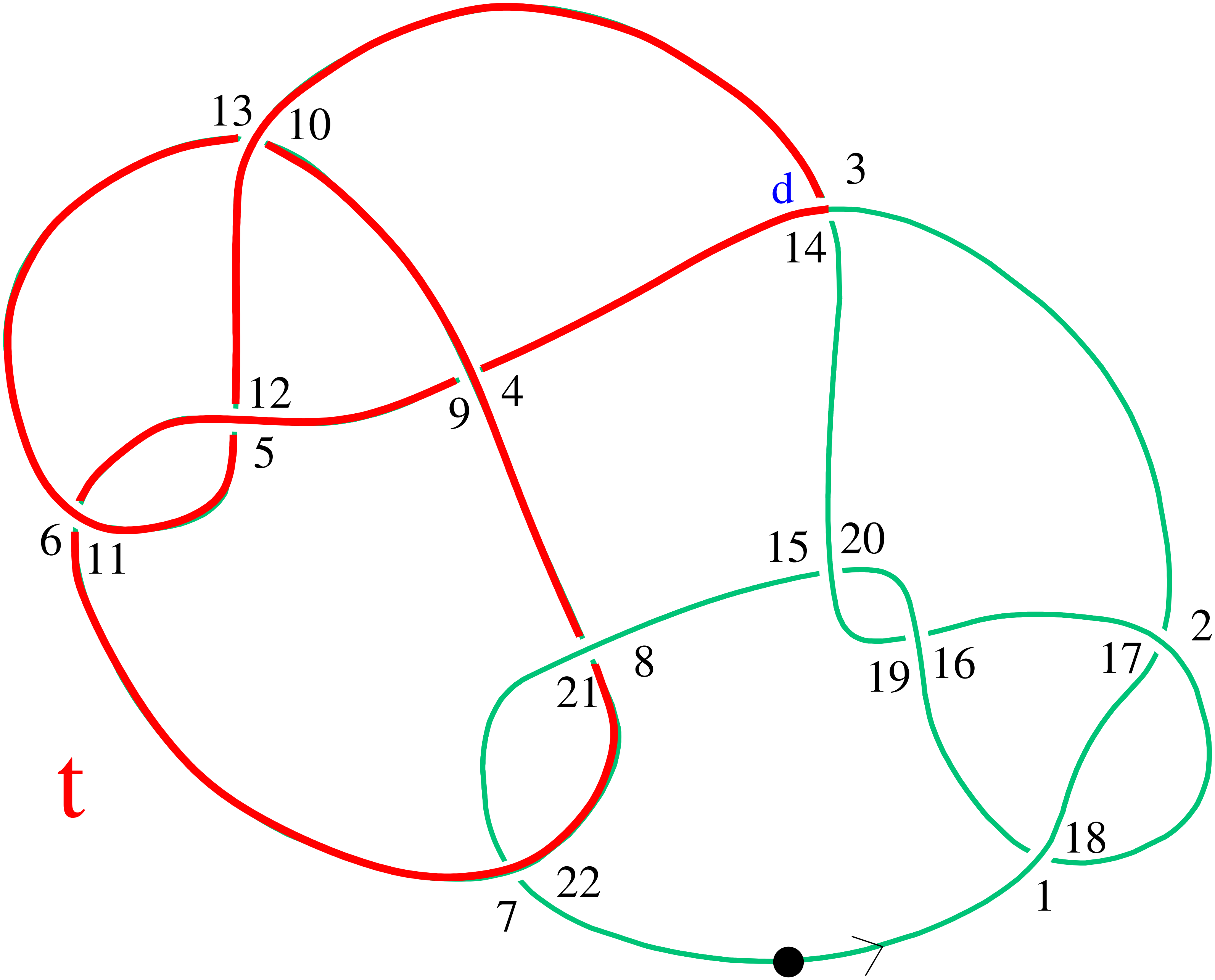
Tenemos que probar que i es par y que $a(i)$ es impar, o al revés, que i es impar y que $a(i)$ es par.
$(a(i) =$ acompañante de $i)$

Llamemos t a la proyección de la curva que va sobre el nudo, siguiendo su orientación, que comienza en x_i y termina en $x_{a(i)}$.





La curva t es cerrada: comieza en d y termina en d.

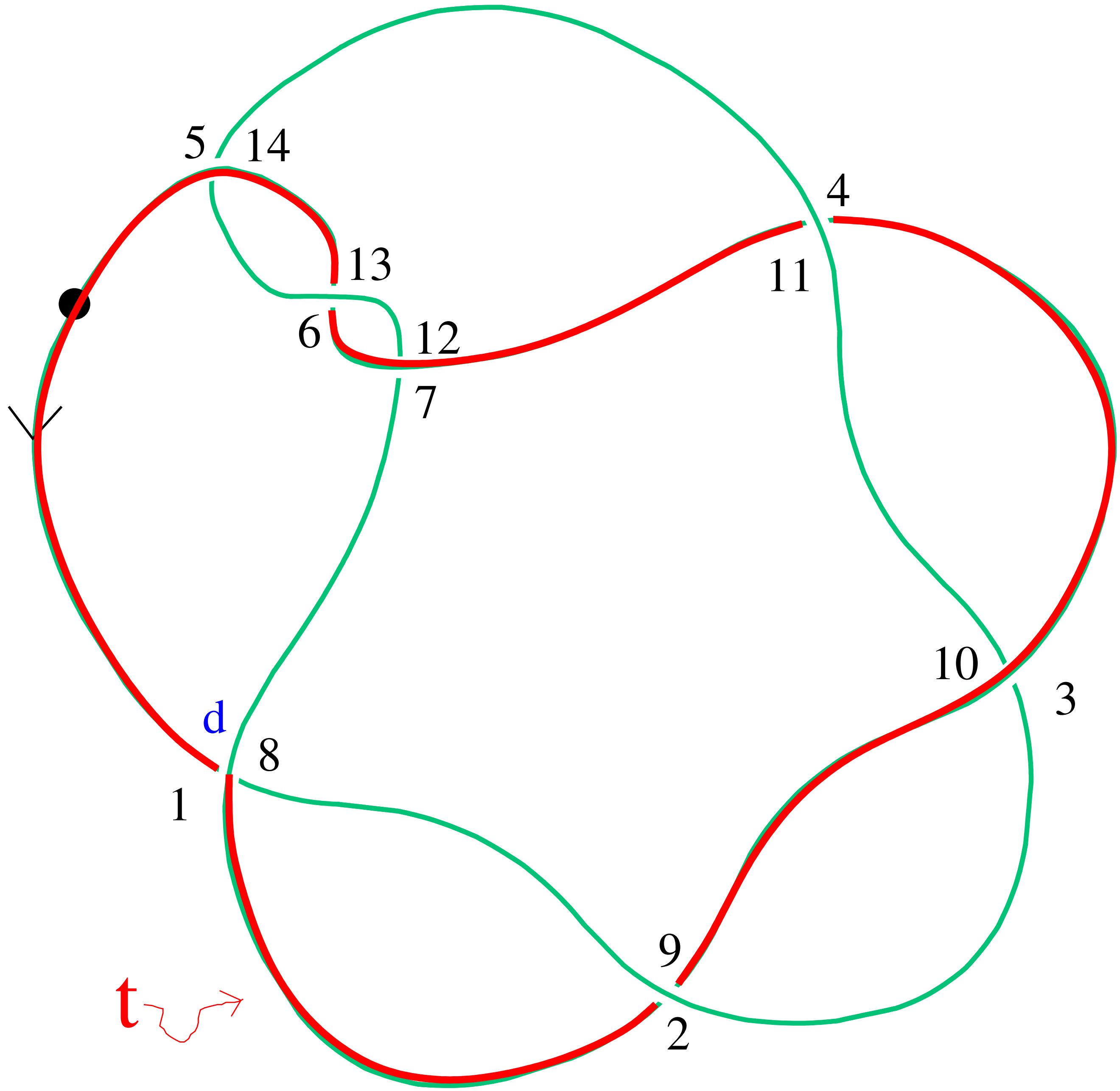


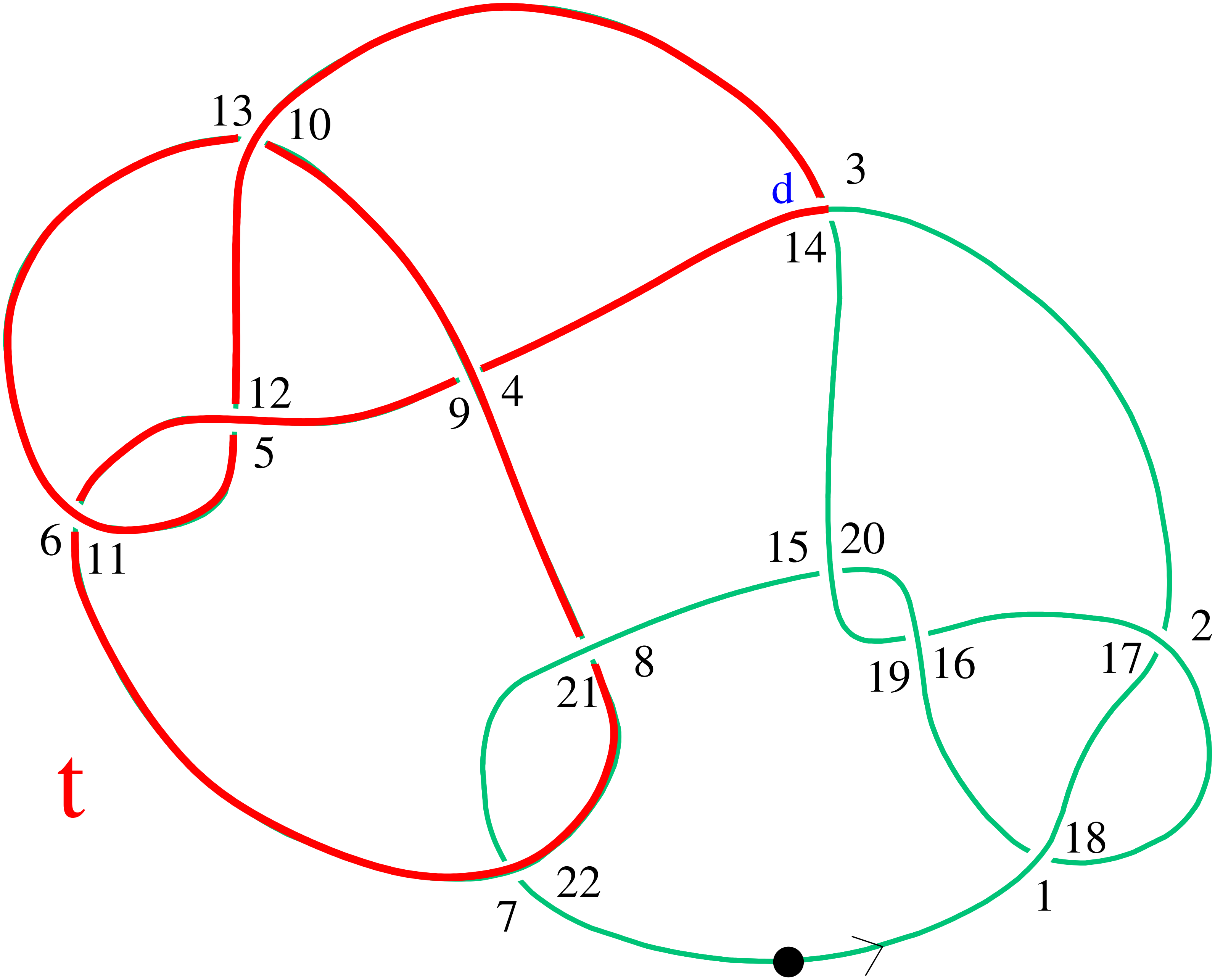
Pero t no tiene por qué ser simple.

Para construir la curva t, comenzamos en x_i, recorremos al nudo, llegamos a $x_{a(i)}$ y proyectamos sobre el diagrama.

Para saber quién es el número $a(i)$, debemos contar el número de puntos dobles sobre los que pasa la curva t.

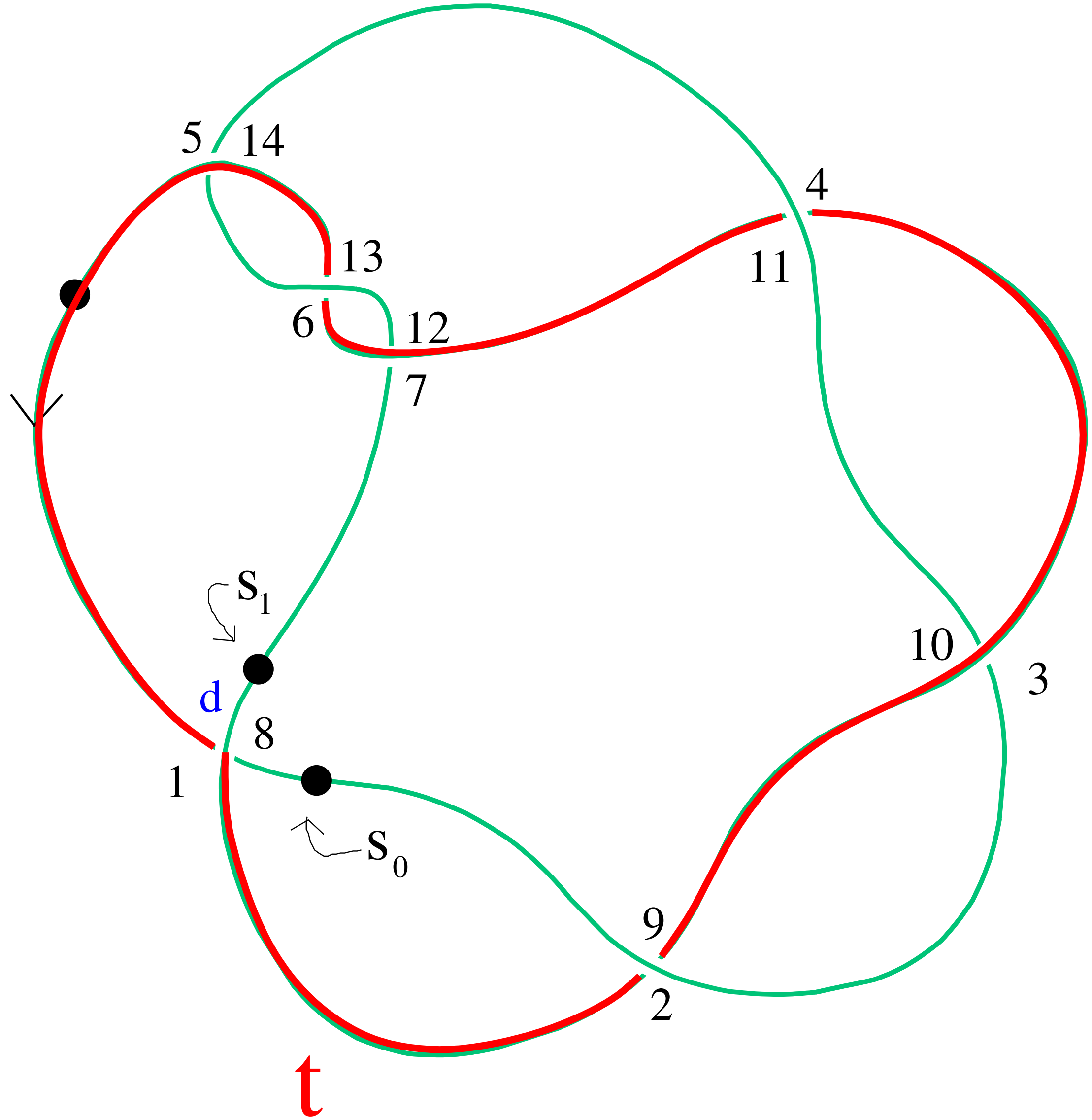
Si t pasa por k puntos dobles, entonces $a(i) = i + k$.



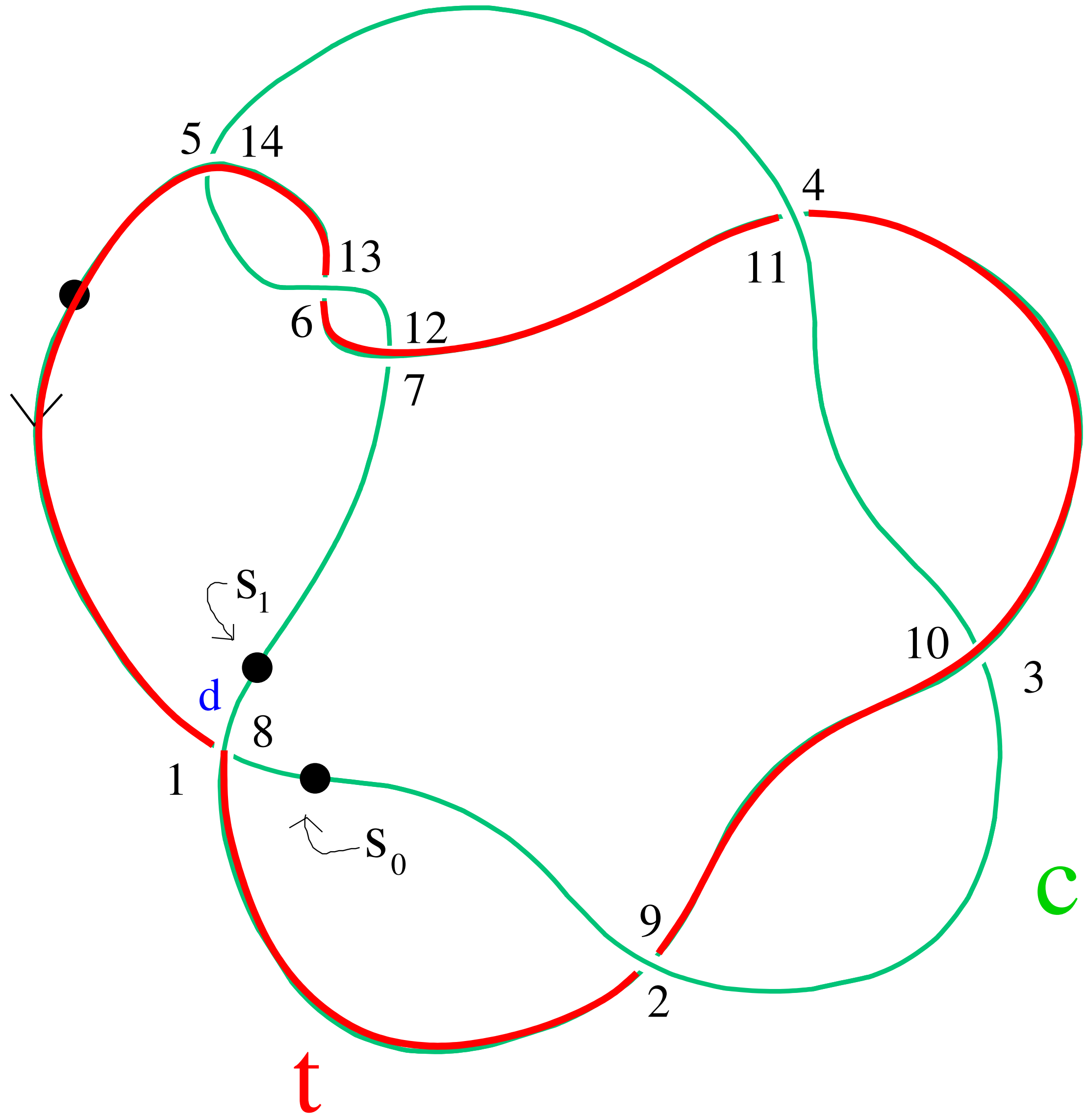


13
10
d
3
14
12
4
9
5
6
11
15
20
2
8
17
19
16
21
t
18
22
1
7

Consideremos dos puntitos, s_0 un poquito después de d y s_1 un poquito antes de d.
(o sea no hay puntos dobles entre s_j y d)

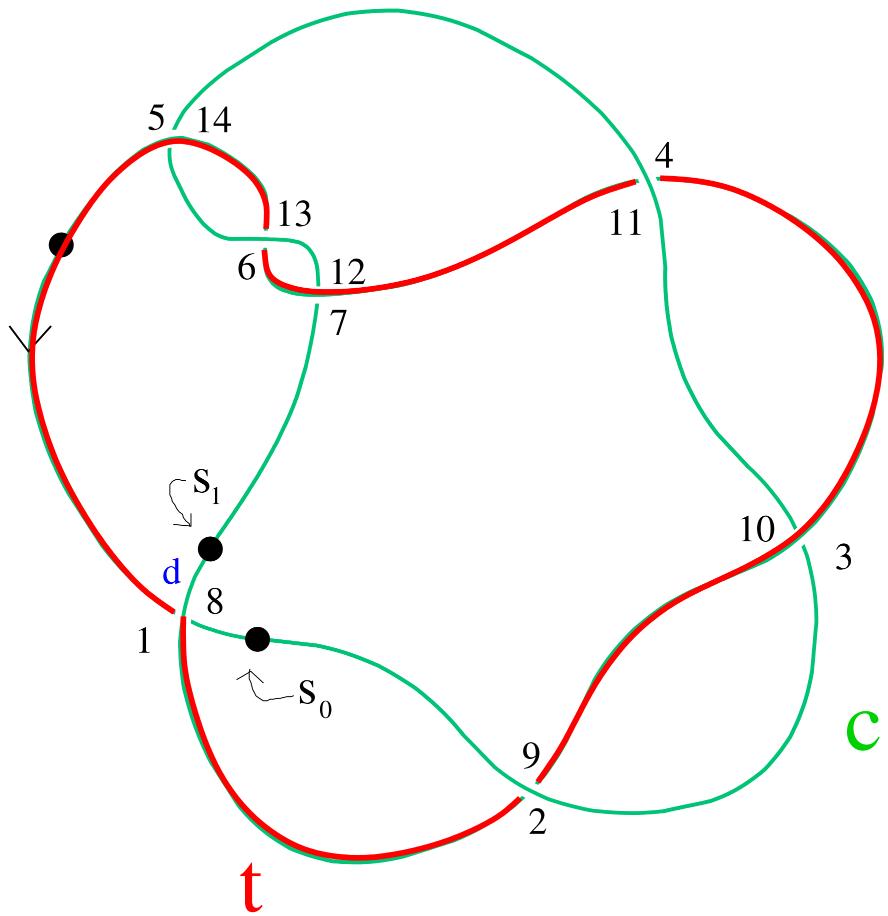


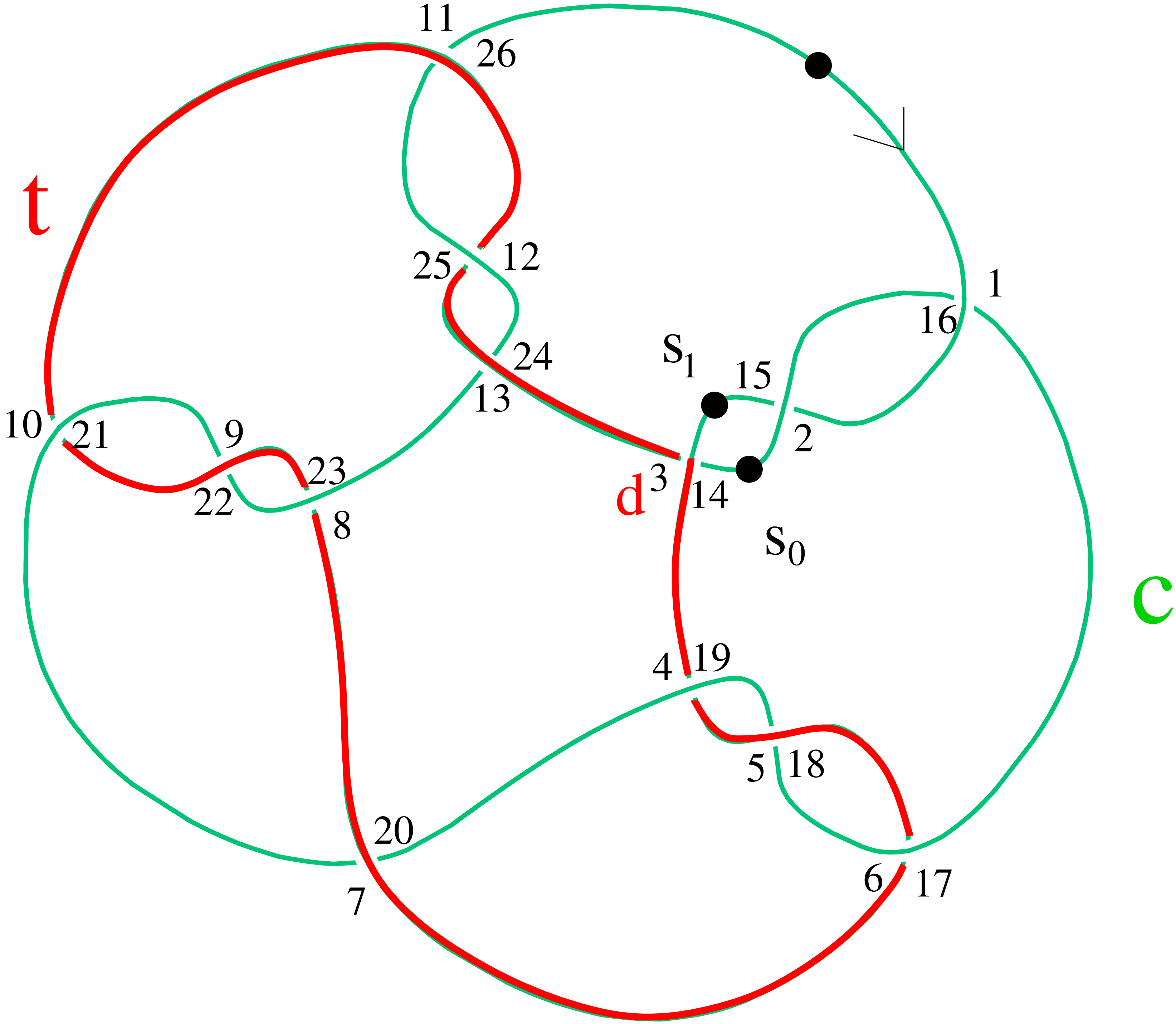
Llamemos c a la curva sobre el diagrama que conecta a s_0 con s_1 siguiendo la orientación del nudo.
(o sea, del otro lado de t)



<u>1er. caso:</u> Consideremos primero el caso en que la curva t es simple.

En este caso, el número de puntos dobles sobre t, el número que nos interesa calcular, es el número de puntos de intersección entre t y c, más 1.



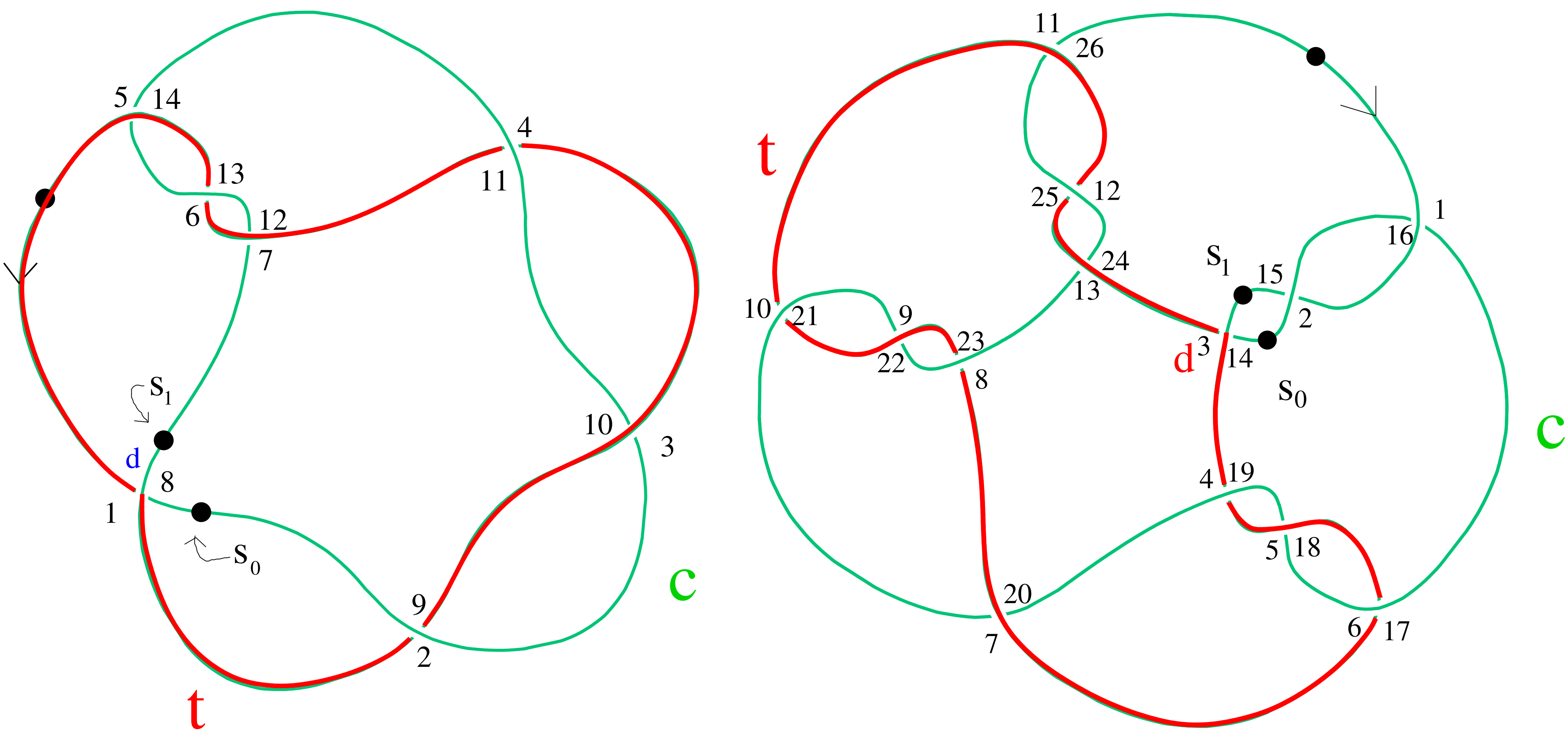


t
d
c
s_1
s_0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26

Como la curva t es simple cerrada, la curva t separa al plano en dos pedazos: la parte de adentro de t y la parte de afuera de t.

(este es el famosísimo Teorema de la Curva de Jordan)

Por como escogimos a los puntos s_0 y s_1, ambos están en la parte de adentro de t o ambos están en la parte de afuera de t.

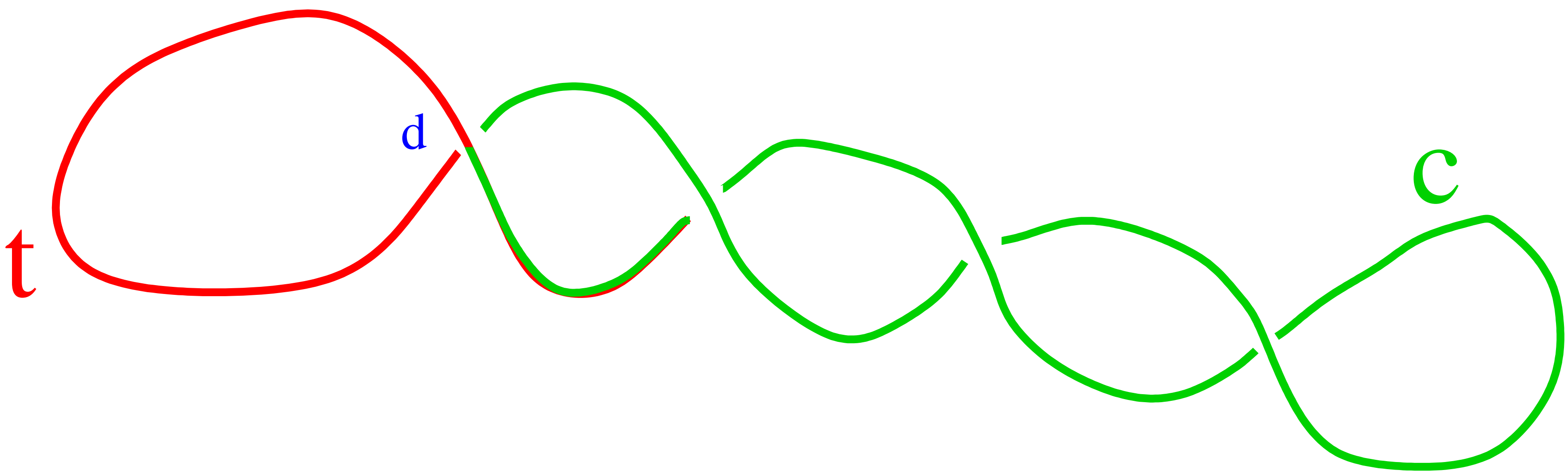


Digamos que ambos están en la parte de afuera.

Si t y c no se tocan, entonces no hay puntos dobles al recorrer t, salvo d, y, por lo tanto, $a(i) = i + 1$ y se tiene el resultado

(i es par y $a(i)$ es impar, o al revés, i es impar y $a(i)$ es par)

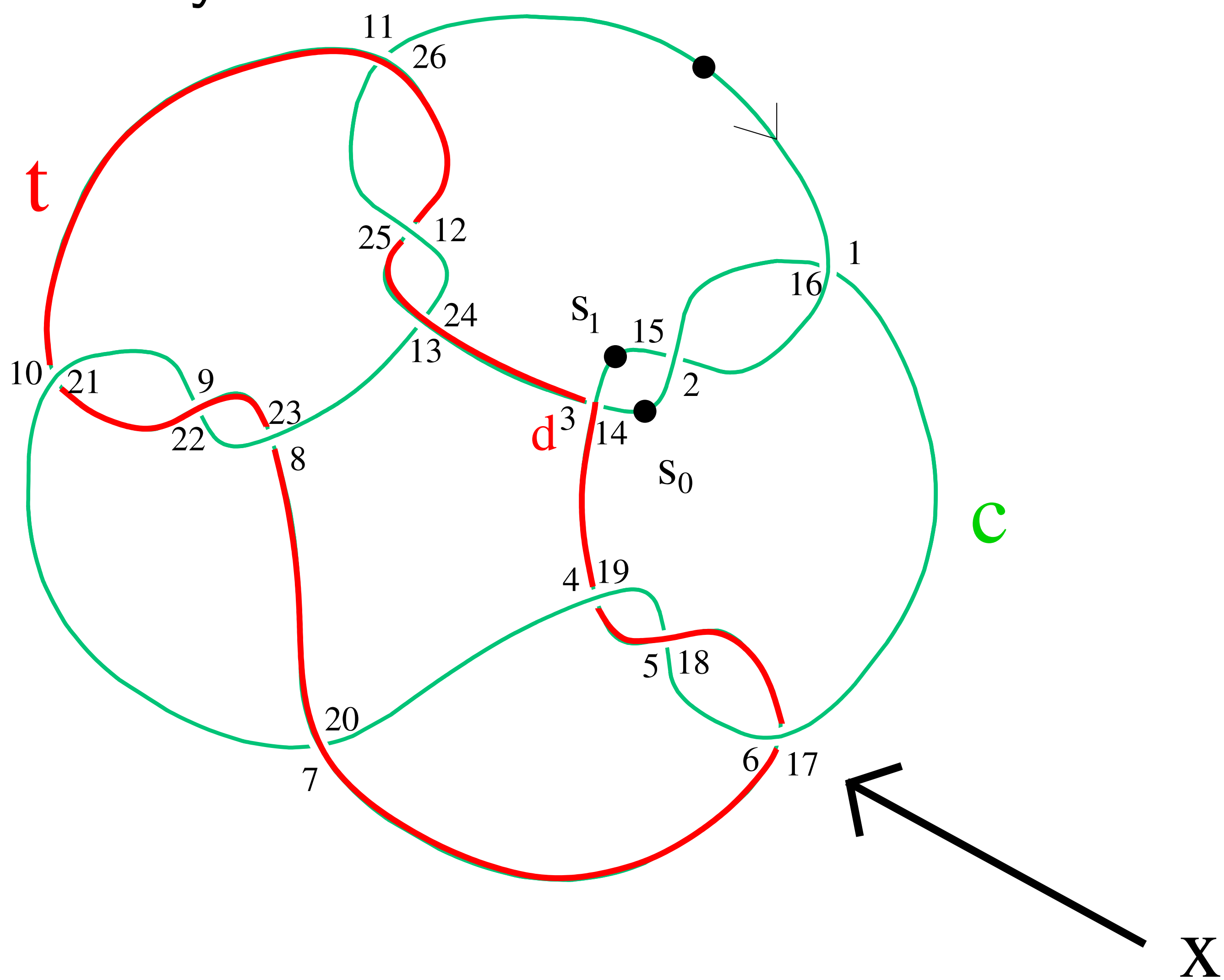
(Este es un caso muy bobo:



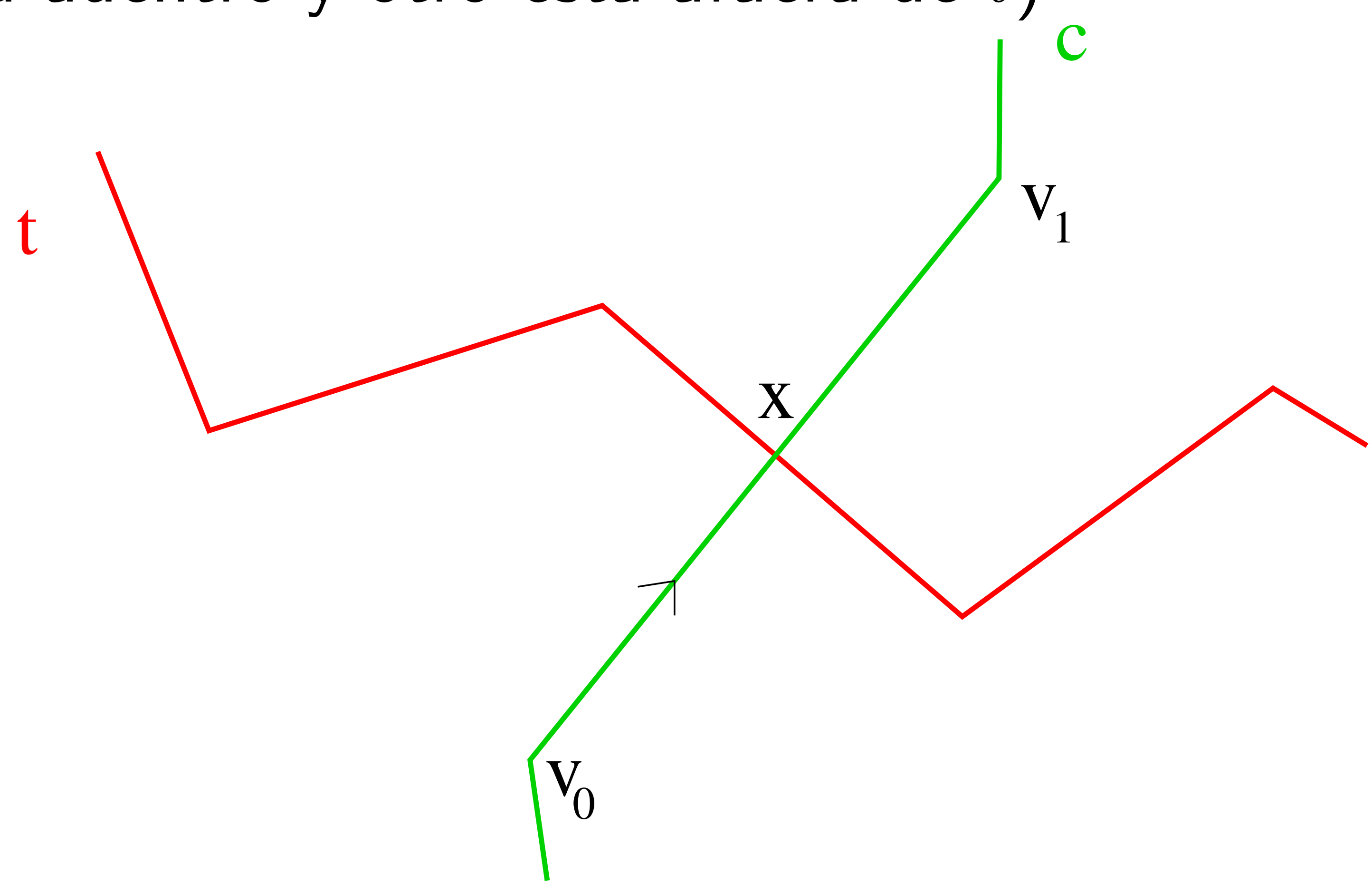
)

Pensemos, entonces que t y c sí se tocan en un cierto número de puntos.

Tomemos x el primer punto de c, a partir de s_0, que está en la intersección de t y c.



Si a es la arista de c donde vive x y v_0 y v_1 son los extremos de a, en ese orden, entonces v_0 y v_1 están en lados distintos de t. (Uno está adentro y otro está afuera de t)

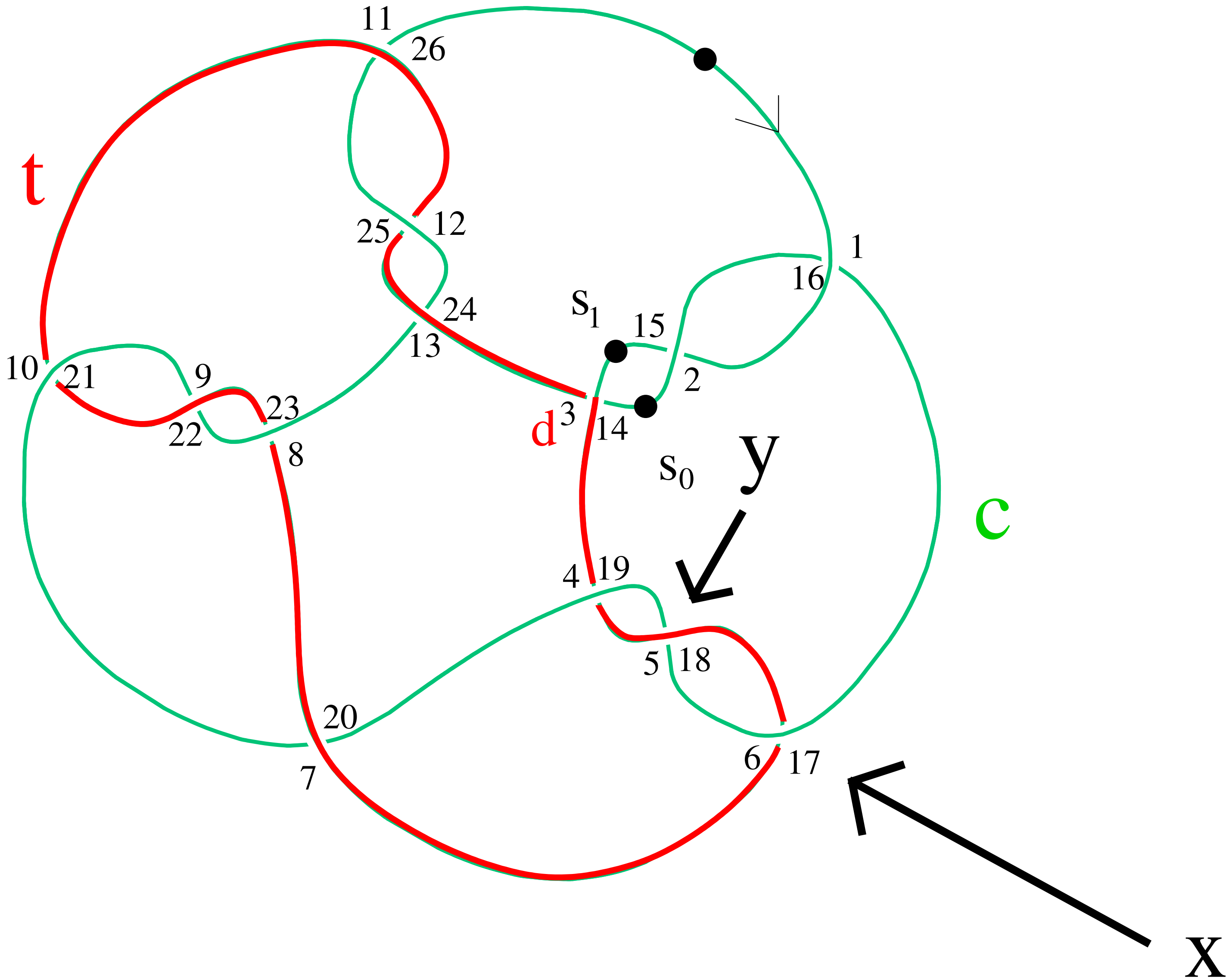


De hecho v_0 está afuera de t y v_1 está adentro de t, pues estamos suponiendo que s_0 está afuera de t.

Ahora, la curva c conecta a v_1 con s_1 y v_1 está adentro de t y s_1 está afuera de t.
Sabemos que t separa al plano en dos partes. ¡Para pasar de una parte a la otra, debemos cruzar a la curva t!
Entonces, forzosamente c debe cortar a t en un punto y posterior a v_1: La curva c corta a t en un punto y posterior a x.

En particular $x \neq y$.

Podemos pensar que y es el segundo punto en el que c corta a t (o sea, escogemos a y como el primer punto de $c \cap t$ que es posterior a x).



Si hay más puntos de intersección de c y t, aparte de x y y, continuamos con el tercer punto de intersección de c y t y, si repetimos el argumento, nos vamos a encontrar un cuarto punto de intersección.

O sea, cada vez que encontremos un punto de intersección de c y t, nos encontramos con otro punto de intersección distinto.

O sea, los puntos de intersección de c y t vienen por pares.

En particular el número k de puntos de intersección de c y t es par.

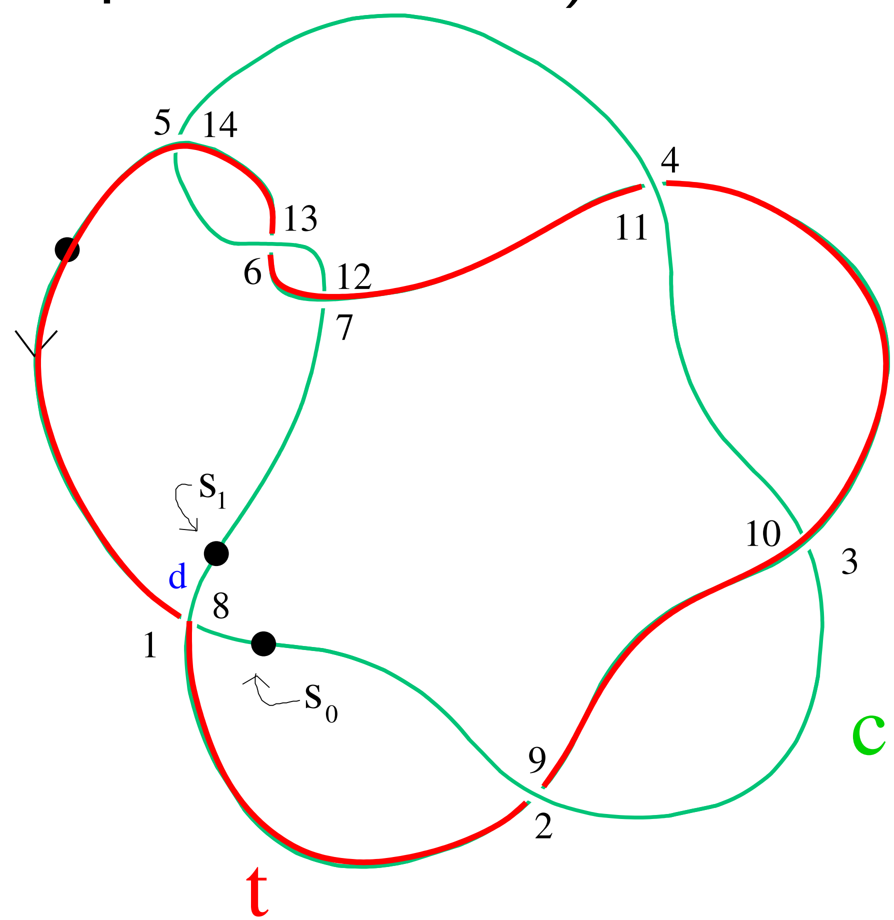
Regresamos a lo que queríamos probar

(i es par y $a(i)$ es impar, o al revés, i es impar y $a(i)$ es par)

y, como ya sabíamos que $a(i) = i + k + 1$ y acabamos de ver que k debe ser par, obtenemos el resultado.

Todo esto salió de suponer que los puntos s_0 y s_1 estaban afuera de t.

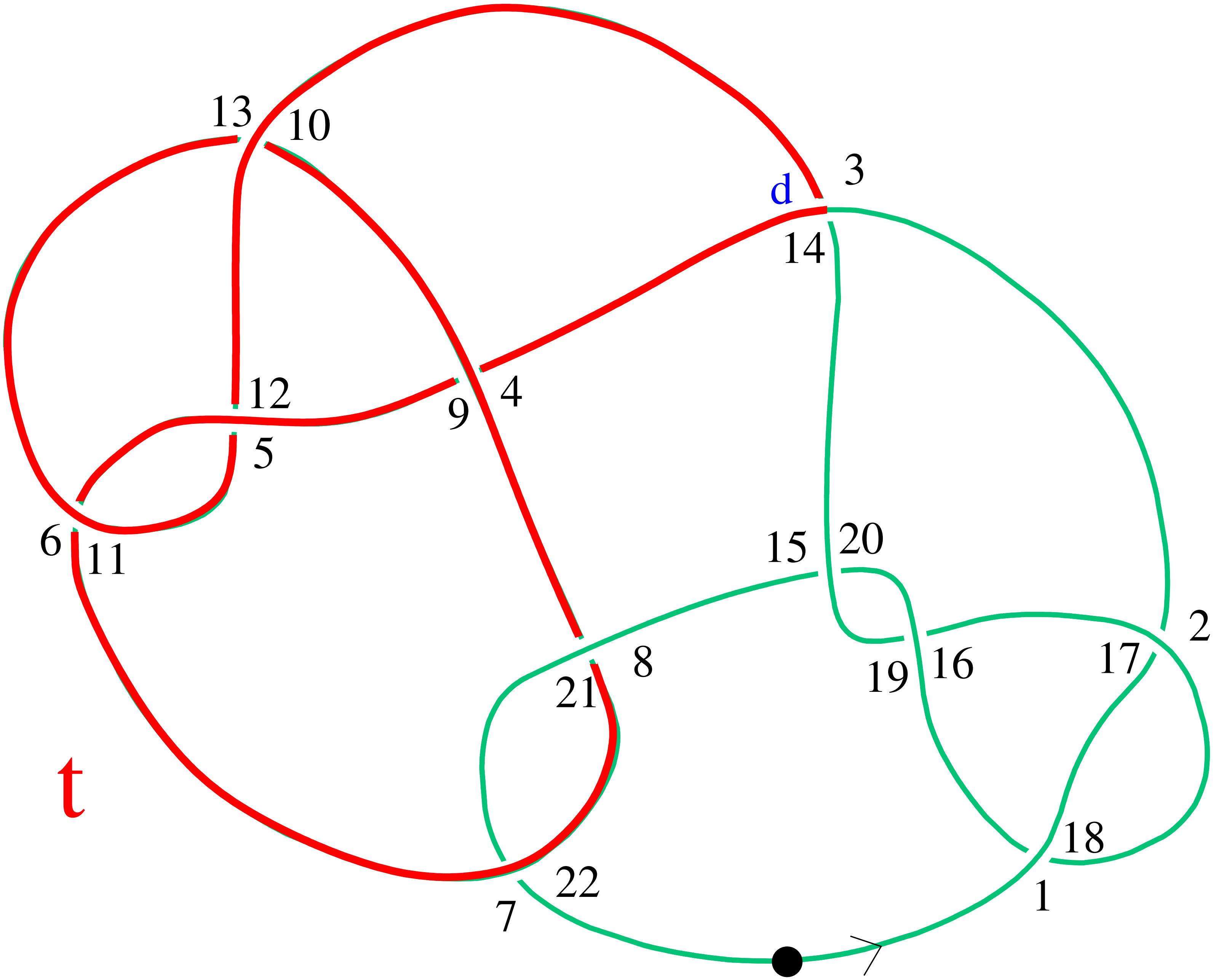
Pero podemos repetir el mismo razonamiento cuando s_0 y s_1 están adentro de t (sólo hay que cambiar “adentro” por “afuera” y “afuera” por “adentro”).



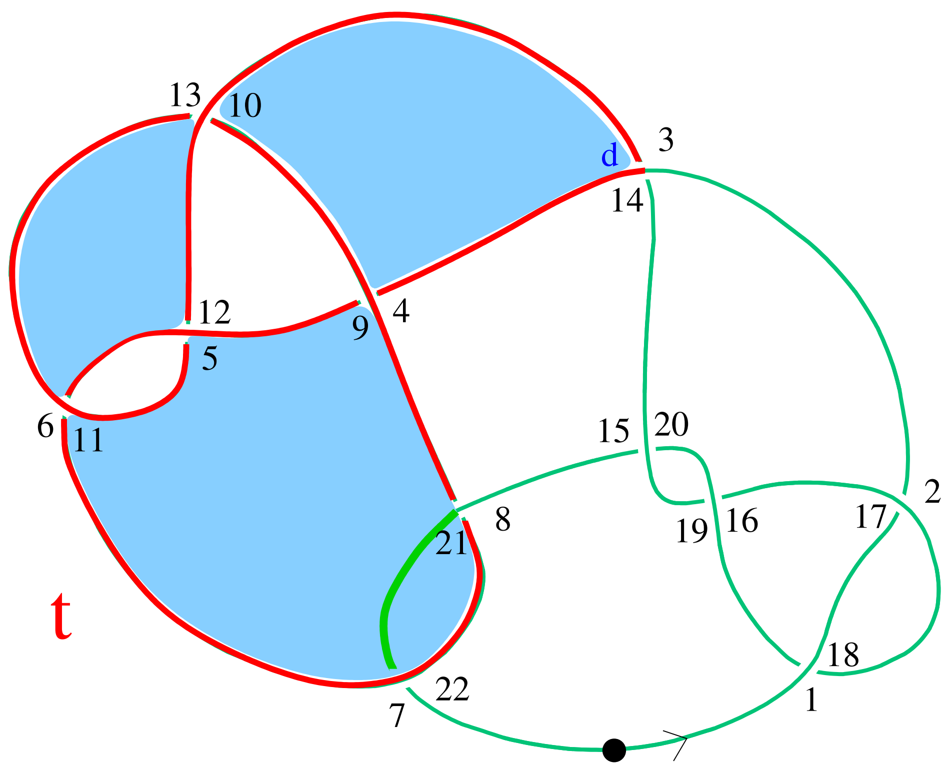
Ahora, estábamos en el caso de que t era una curva simple.

¿Qué pasa si t no es simple?

2do. caso: Supongamos que t no es una curva simple.



En este caso, si coloreamos el plano como tablero de ajedrez usando a t como las "casillas", vemos que t es unión de un número finito de curvas simples cerradas, $t_1, t_2, \ldots, t_m$, que se tocan en puntitos.



Estos puntitos son todos los puntos dobles de t y no tienen nada que ver con c.

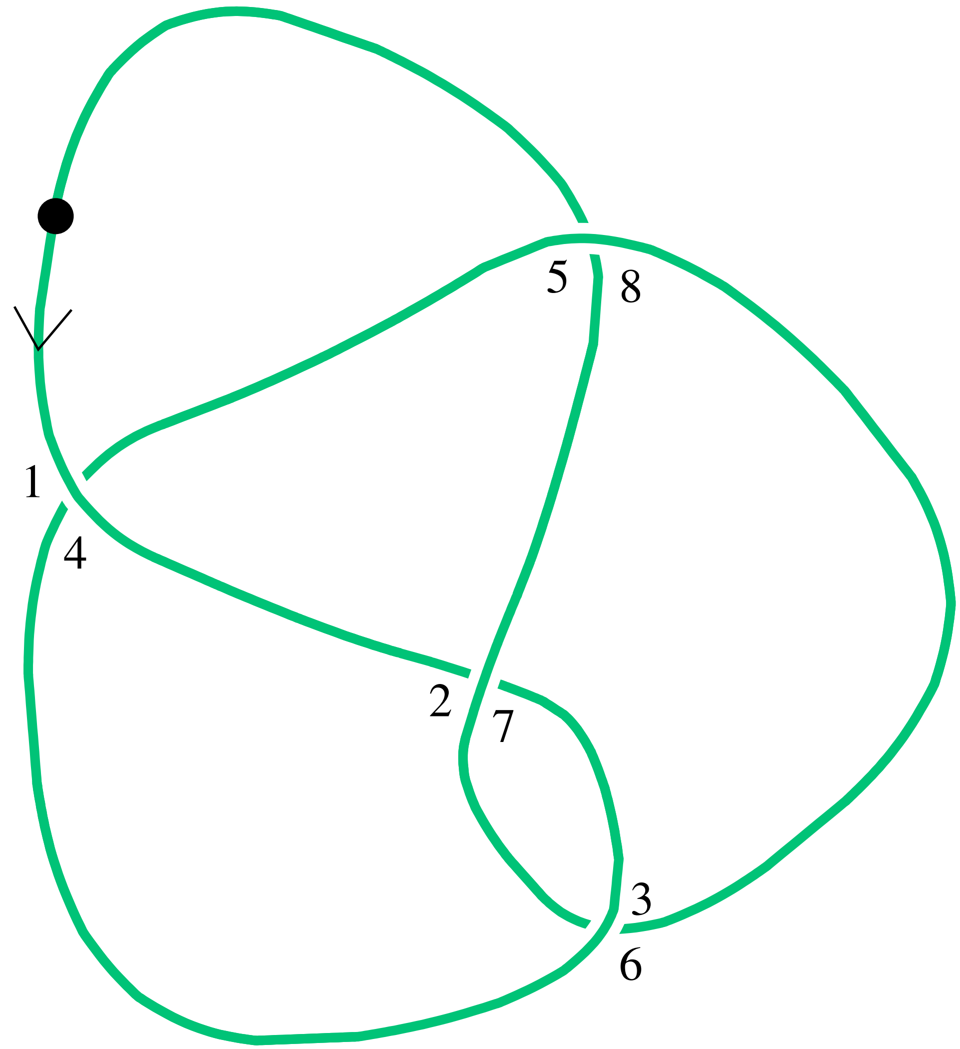
Por el caso anterior, cada una de estas curvas t_j se toca con c un número par de veces, así que, si sumamos, t se toca con c un número par de veces.

Para ir de x_i a $x_{a(i)}$ sobre t, debemos contar todos los puntos de intersección de t con c y hay que añadir un 2 por cada punto doble de t; en total, hay que pasar por un número par de puntos, más el punto de comienzo...

Concluimos que $a(i) = i + \text{un número par} + 1$.

Y, finalmente, tenemos que i es par y $a(i)$ es impar, o al revés, i es impar y $a(i)$ es par, que es lo que queríamos probar.

Entonces es cierto, al numerar un diagrama recorriendo al nudo, cada punto de cruce recibe dos números: uno es par y el otro es impar.



También ya sabemos que si cambiamos el punto base o si cambiamos la orientación del nudo, las sucesiones de números

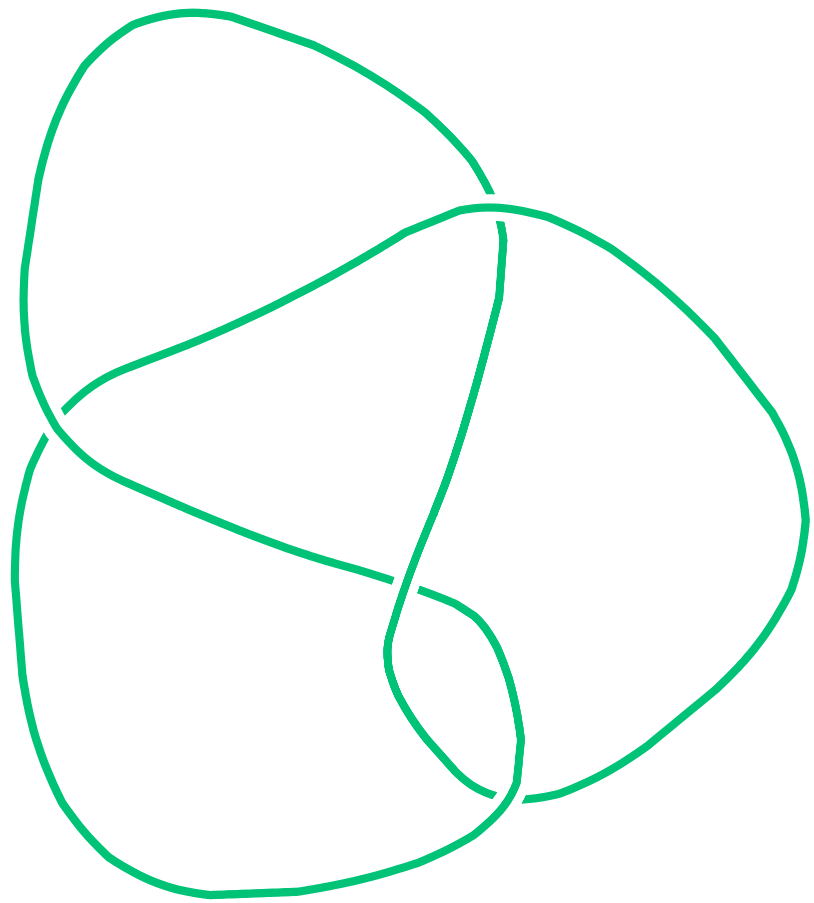
$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 \\ a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2n} \end{array}$$

se obtienen unas de las otras sumando (o restando) en cada renglón un cierto número b.

Por la aritmética tan particular que tenemos, basta pensar que el número b está entre 1 y $2n$.

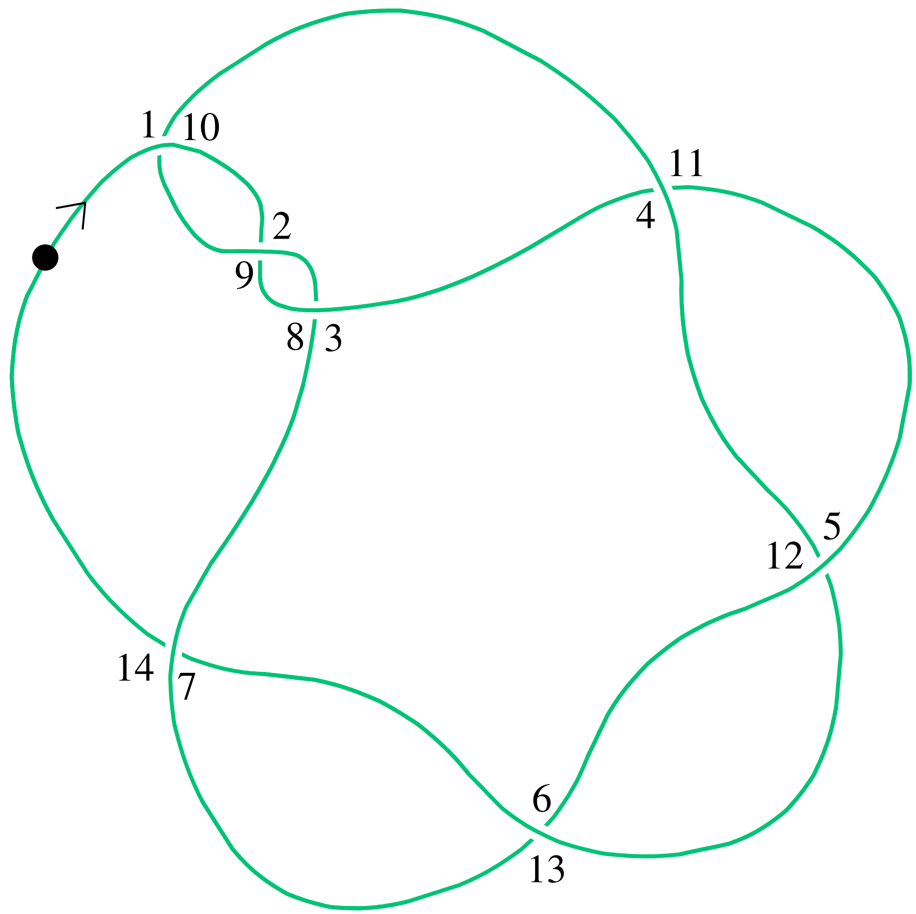
O sea que podemos construir $4n$ sucesiones distintas.

(lo que es claro si vemos el dibujo: Tenemos n cruces, así que podemos escoger $2n$ puntos base distintos. En cada uno de estos puntos base, podemos escoger dos orientaciones posibles. Podemos obtener $4n$ sucesiones, cuando mucho.)



De entre todas las sucesiones de un diagrama, podemos escoger la más chica con el orden del diccionario.

Por ejemplo



1	3	5	7	9	11	13
10	8	12	14	2	4	6

Todos los trasladados de su código son:

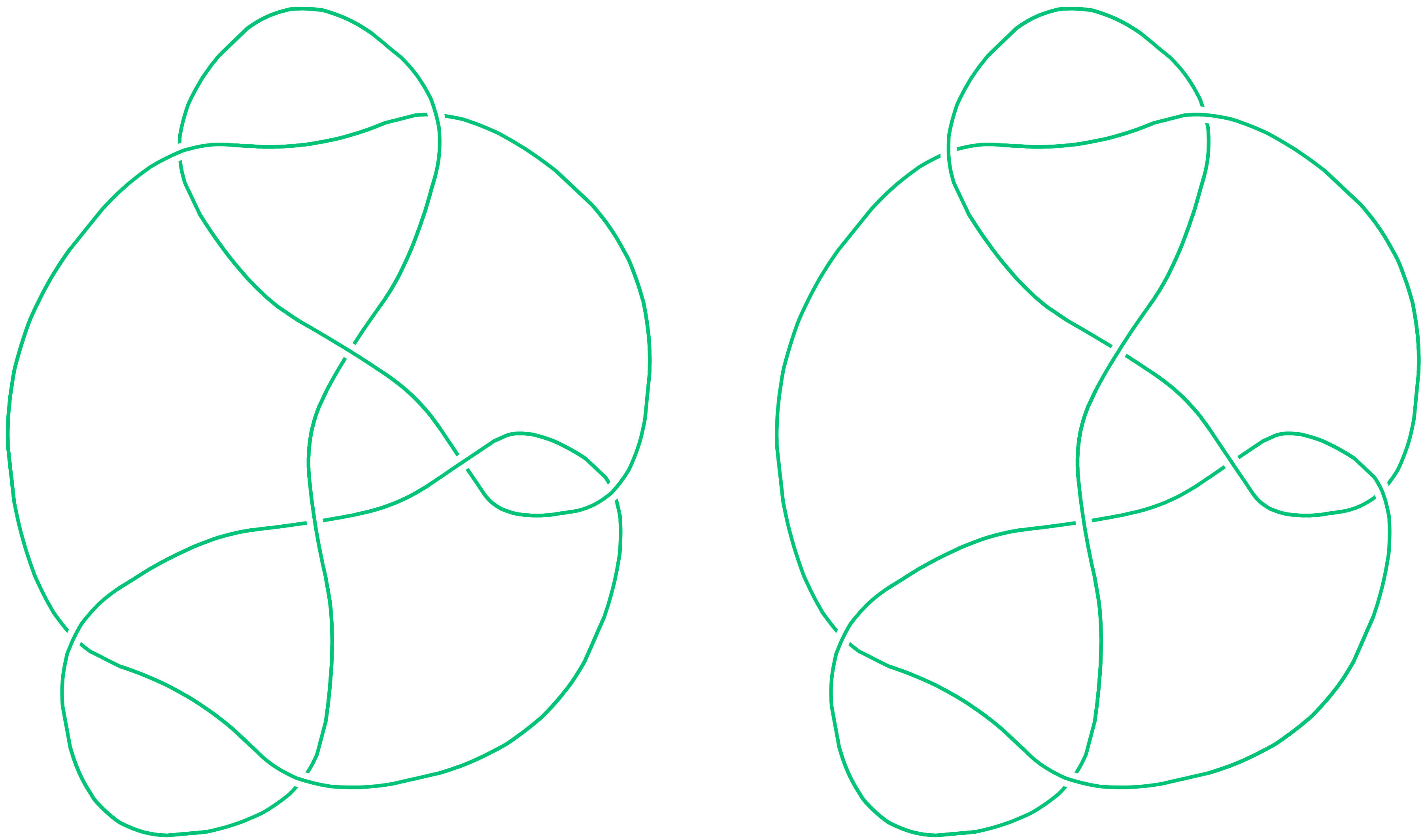
[10, 8, 12, 14, 2, 4, 6]
[8, 10, 14, 12, 2, 4, 6]
[8, 10, 12, 14, 4, 2, 6]
[6, 10, 12, 14, 2, 4, 8]
[8, 12, 10, 14, 2, 4, 6]
[6, 10, 12, 14, 2, 4, 8]
[8, 12, 10, 14, 2, 4, 6]
[8, 10, 12, 2, 14, 4, 6]
[8, 10, 12, 14, 2, 6, 4]
[10, 8, 12, 14, 2, 4, 6]
[8, 10, 12, 2, 14, 4, 6]
[8, 10, 12, 14, 2, 6, 4]
[10, 8, 12, 14, 2, 4, 6]
[8, 10, 14, 12, 2, 4, 6]
[8, 10, 12, 14, 4, 2, 6]
[8, 10, 14, 12, 2, 4, 6]
[8, 10, 12, 14, 4, 2, 6]
[6, 10, 12, 14, 2, 4, 8]
[8, 12, 10, 14, 2, 4, 6]
[6, 10, 12, 14, 2, 4, 8]
[8, 12, 10, 14, 2, 4, 6]
[8, 10, 12, 2, 14, 4, 6]
[8, 10, 12, 14, 2, 6, 4]
[8, 10, 12, 2, 14, 4, 6]
[8, 10, 12, 14, 2, 6, 4]
[10, 8, 12, 14, 2, 4, 6]
[8, 10, 14, 12, 2, 4, 6]
[8, 10, 12, 14, 4, 2, 6]

La sucesión más chica es

$$[6, 10, 12, 14, 2, 4, 8]$$

y ése es el código del nudo.

Nudos con la misma proyección



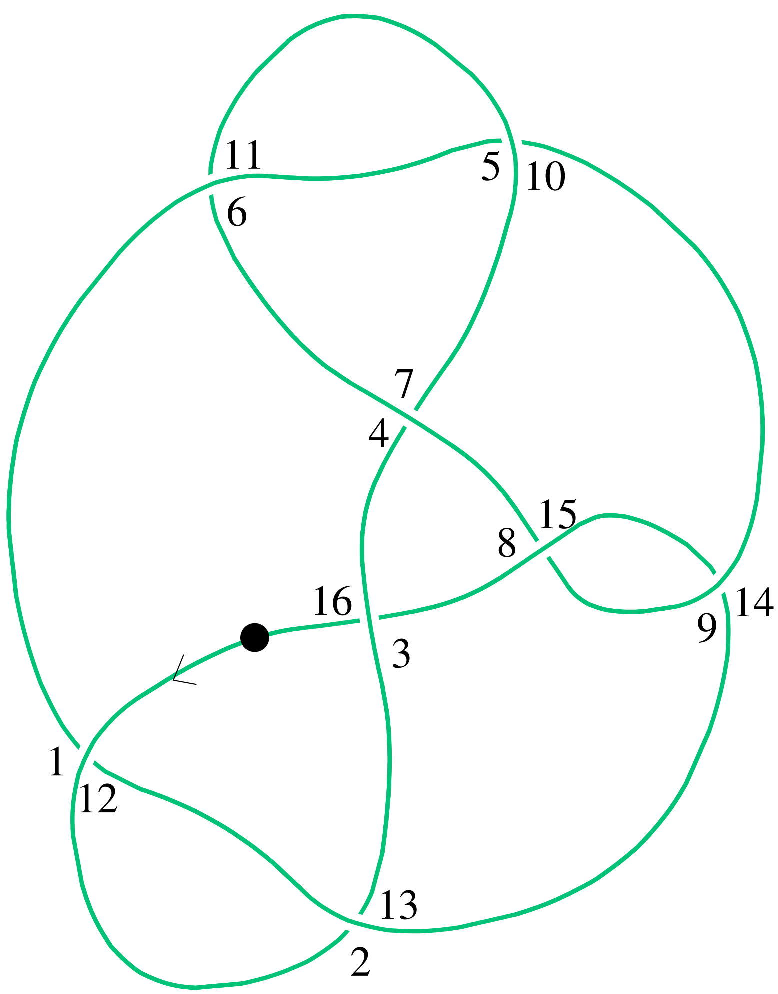
El primer nudo tiene polinomio

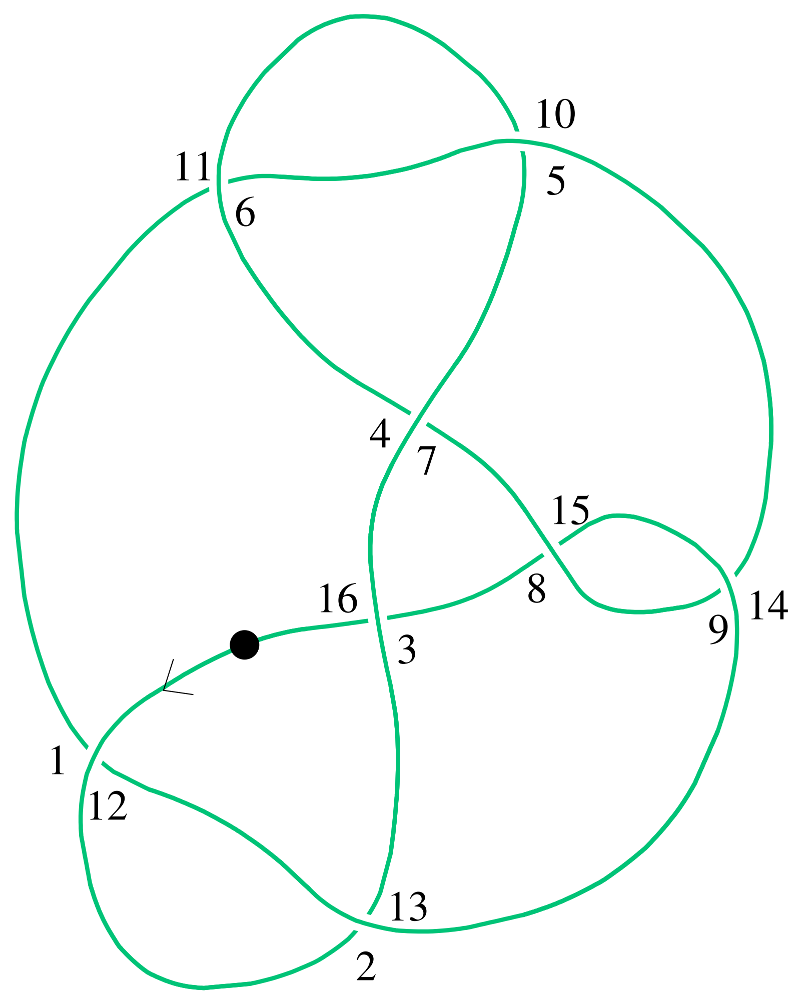
$$f(x) = x^{-8} - 2x^{-12} + 5x^{-16} - 5x^{-20} + 6x^{-24} - 6x^{-28} + 4x^{-32} - 3x^{-36} + x^{-40}$$

y el segundo

$$f(x) = -x^{20} + x^{16} - x^{12} + 2x^{8} - x^{4} + 2 - x^{-4}$$

No son el mismo nudo, pero...





1	3	5	7	9	11	13	15
12	16	10	4	14	6	2	8

1	3	5	7	9	11	13	15
12	16	10	4	14	6	2	8

Pues sí. Si tienen la misma proyección...

Se las puede arreglar uno e inventar códigos para nudos no alternantes.

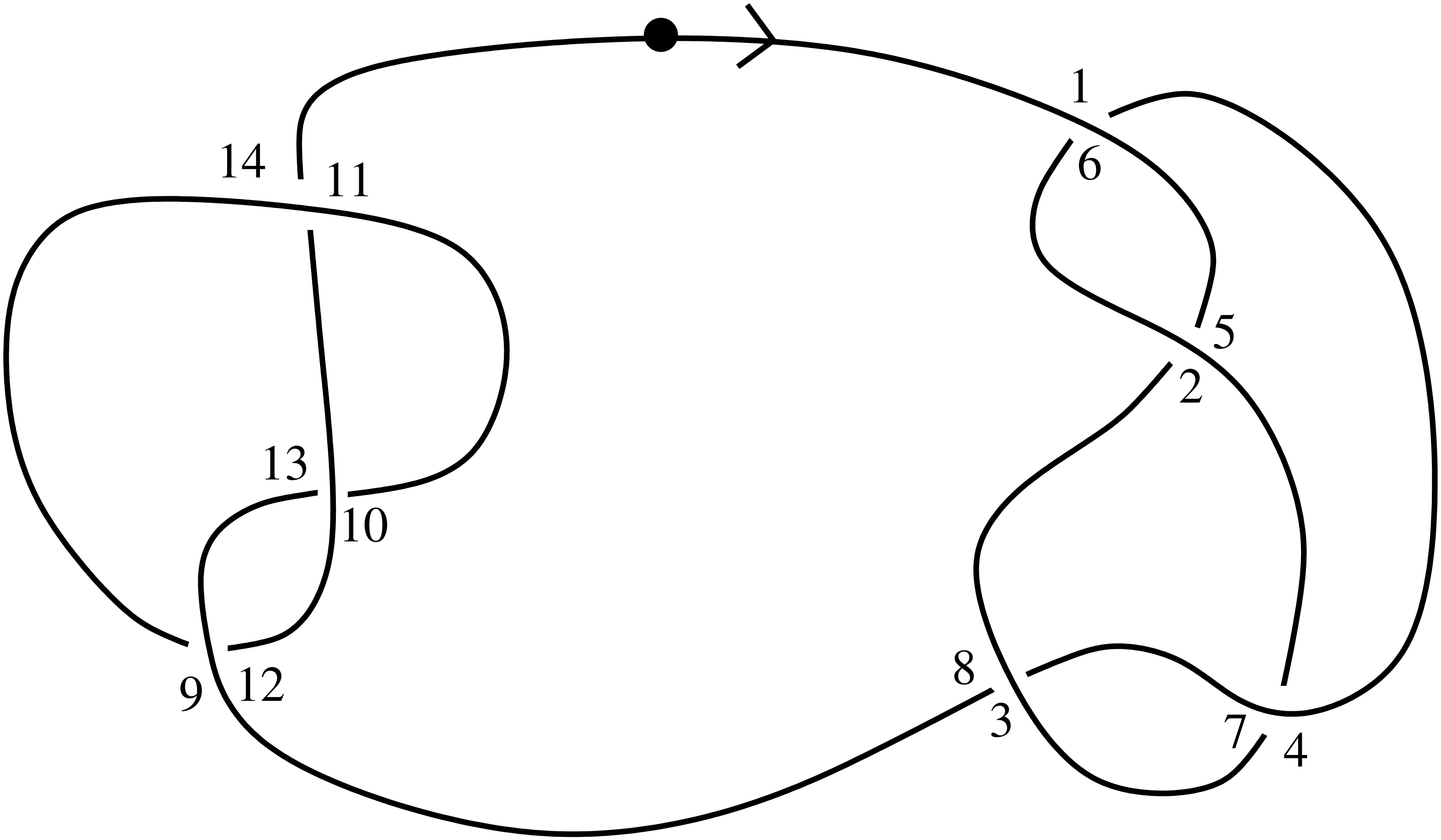
Pero para evitar complicaciones, vamos a pensar sólo en diagramas alternantes.

¿Sale?

Entonces cada diagrama alternante tiene un código, que es una sucesión de números pares.

Si el diagrama tiene n cruces, su código tiene n números pares que están entre 2 y $2n$.

ejemplo



1	3	5	7	9	11	13
6	8	2	4	12	14	10

ejemplo

12	1	4	8	10	14	2	16	20	6	22	12	24	18
12	2	4	8	10	14	2	16	20	6	22	24	12	18
12	3	4	8	10	14	2	16	20	6	24	22	12	18
12	4	4	8	10	14	2	18	6	20	22	12	24	16
12	5	4	8	10	14	2	18	6	22	12	24	16	20
12	6	4	8	10	14	2	18	6	22	20	12	24	16
12	7	4	8	10	14	2	18	20	6	22	24	16	12
12	8	4	8	10	14	2	20	6	22	24	12	18	16
12	9	4	8	10	14	2	20	6	24	22	12	18	16
12	10	4	8	10	14	2	20	16	6	22	12	24	18
12	11	4	8	10	14	2	20	16	6	22	24	12	18
12	12	4	8	10	14	2	20	16	6	24	22	12	18
12	13	4	8	10	14	2	20	18	6	22	24	16	12
12	14	4	8	10	14	2	20	22	6	12	24	16	18
12	15	4	8	10	14	2	22	20	6	12	24	16	18

ejemplo

$$16 \quad 8 \quad 4 \quad 10 \quad 2 \quad 6 \quad 12 \quad 14$$

$$10 \quad 8 \quad 14 \quad 16 \quad 6 \quad 4 \quad 12 \quad 2$$

¿Cómo sabemos si una sucesión corresponde a un nudo?

Respuesta fácil

Para saber si una sucesión de números pares corresponde a un diagrama de un nudo, pues hay que tratar de dibujarla.

Si puedes dibujarla, la respuesta es sí.

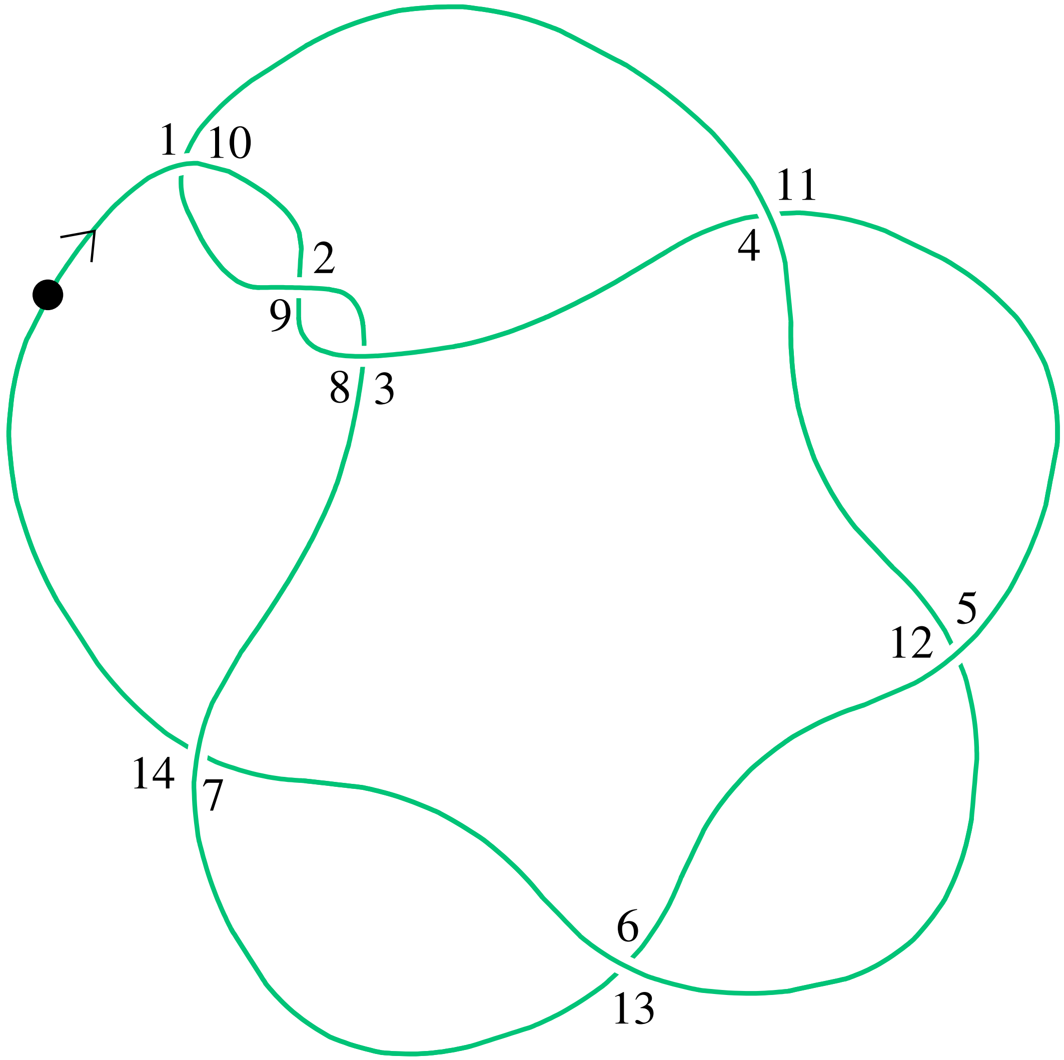
Si no puedes dibujarla, la respuesta es no.

Respuesta de Dowker y Thistlethwaite

En la sucesión de un diagrama, si en un cruce tenemos al número i, al otro número j que aparece en ese cruce lo llamamos el acompañante de i.

Escribimos

$$j = \text{acompañante}(i) = a(i)$$



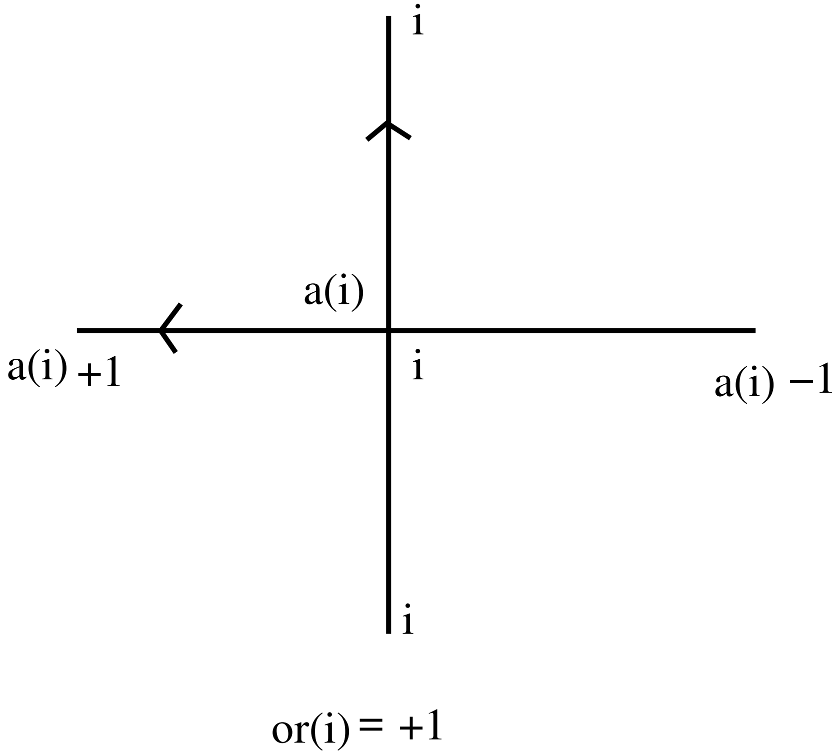
$a(1) = 10$, $a(2) = 9$, $a(3) = 8$, $a(4) = 11$, $a(5) = 12$, $a(6) = 13$, $a(7) = 14$,

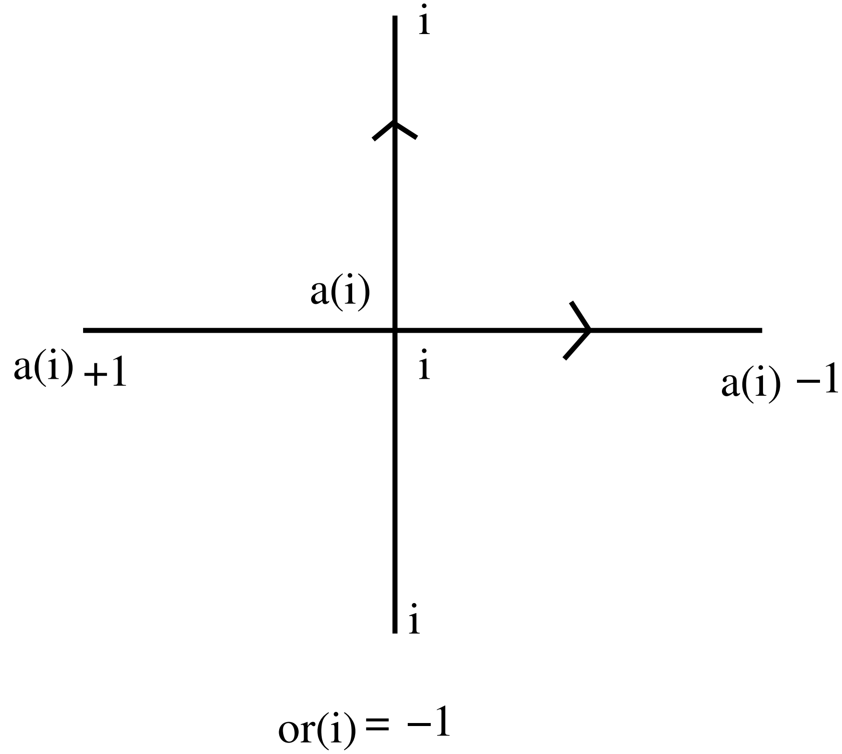
$a(8) = 3$, $a(9) = 2$, $a(10) = 1$, $a(11) = 4$, $a(12) = 5$, $a(13) = 6$ y $a(14) = 7$.

Tomamos un diagrama orientado D con n cruces. Tomamos una i entre 1 y $2n$.

Escribimos $or(i) = 1$ si el arco que va de $a(i) - 1$ hacia $a(i) + 1$ cruza al arco de $i - 1$ hacia $i + 1$ de derecha a izquierda.

Escribimos $or(i) = -1$ en otro caso.





Ahora para cada i entre 1 y $2n$ escribimos

$$\varphi_i(i) = 1$$

$$\varphi_i(r) = \begin{cases} -\varphi_i(r-1) & \text{si } a_r \in \{i, i+1, \ldots, a(i)\} \\ \varphi_i(r-1) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(o sea, tenemos φ_1, φ_2, ..., φ_{2n}.)

Regla 2. Tomamos un diagrama D con una orientación or. Para todo $i, s \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ tales que $i < a(i) < s$ y $a(s) < s$ se cumple

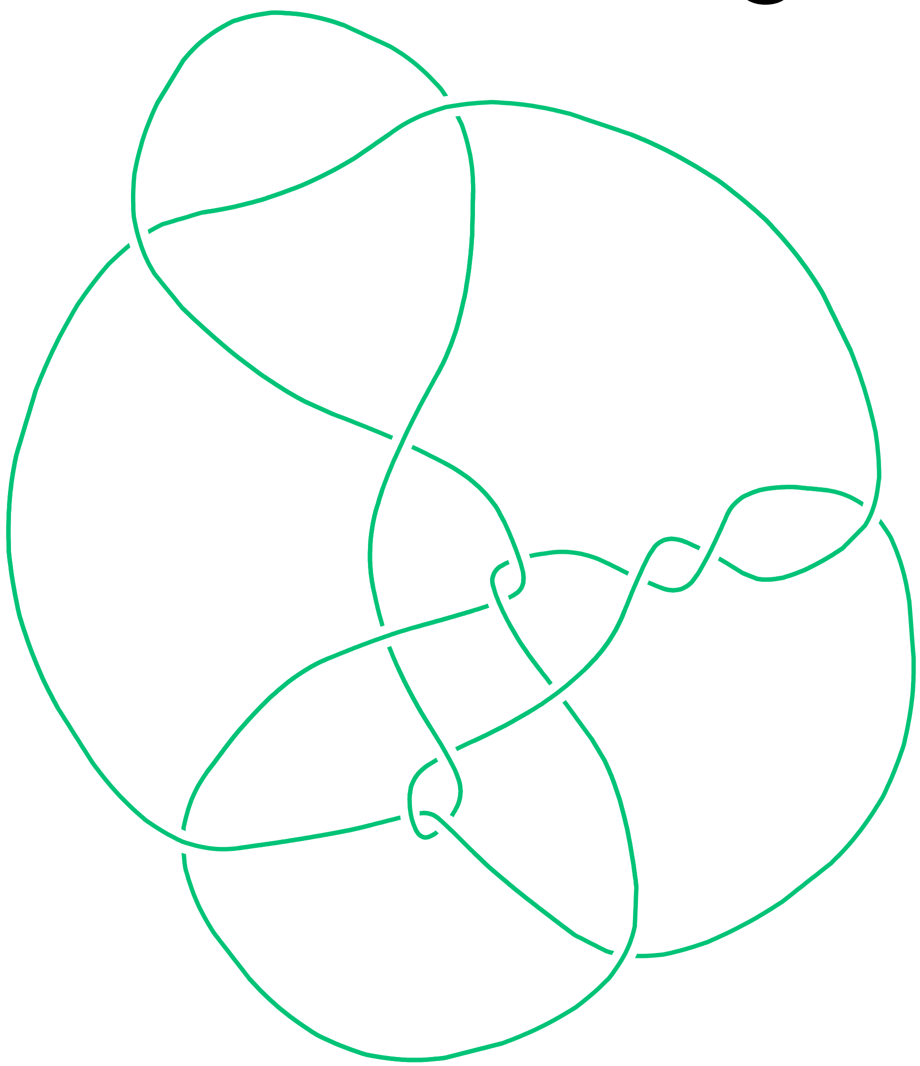
i) $\varphi_i(s)\varphi_i(a(s)) = 1$, si $a(s) \notin [i, a(i)]$.

ii) $\varphi_i(s)\varphi_i(a(s)) \cdot or(i) = or(s)$, si $a(s) \in [i, a(i)]$.

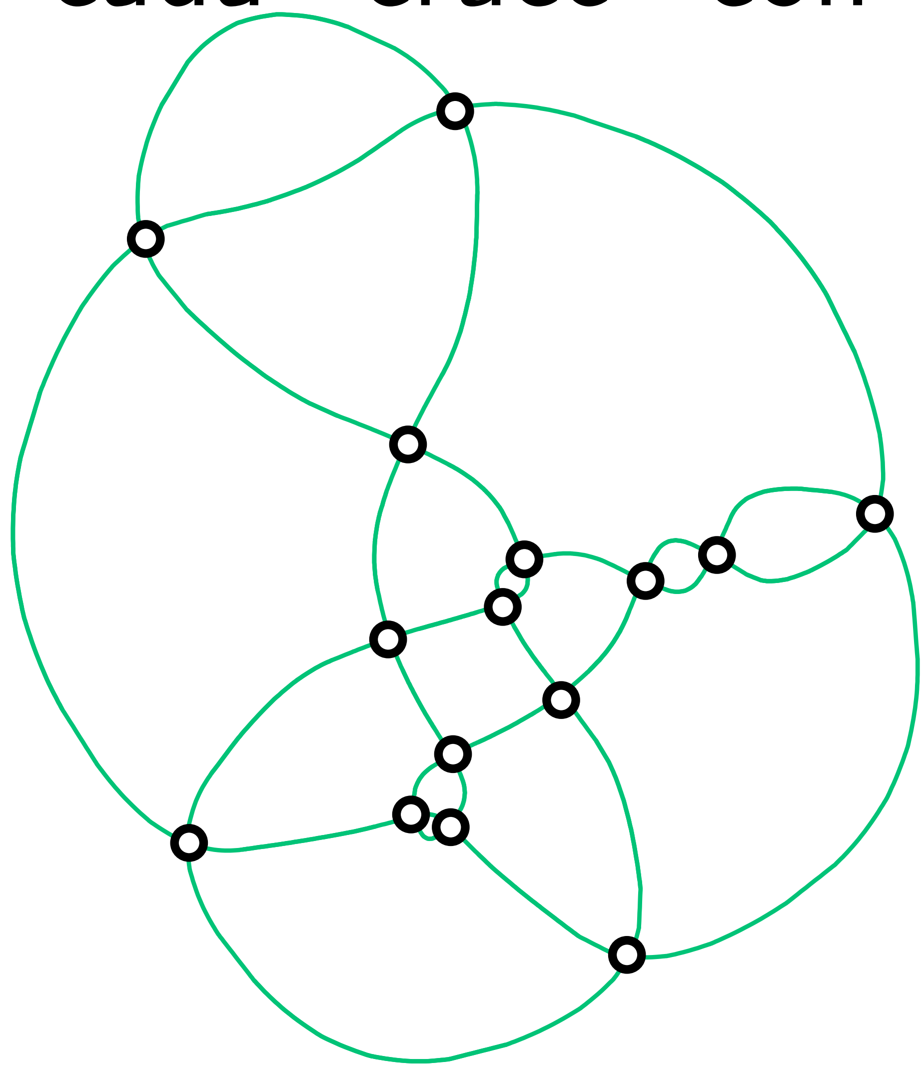
Teorema. (Dowker y Thistlethwaite) Dado un diagrama con orientación (D, or), una condición necesaria y suficiente para la realizabilidad del diagrama D es la Regla 2.

Una idea loca

Comenzamos con un diagrama de nudo



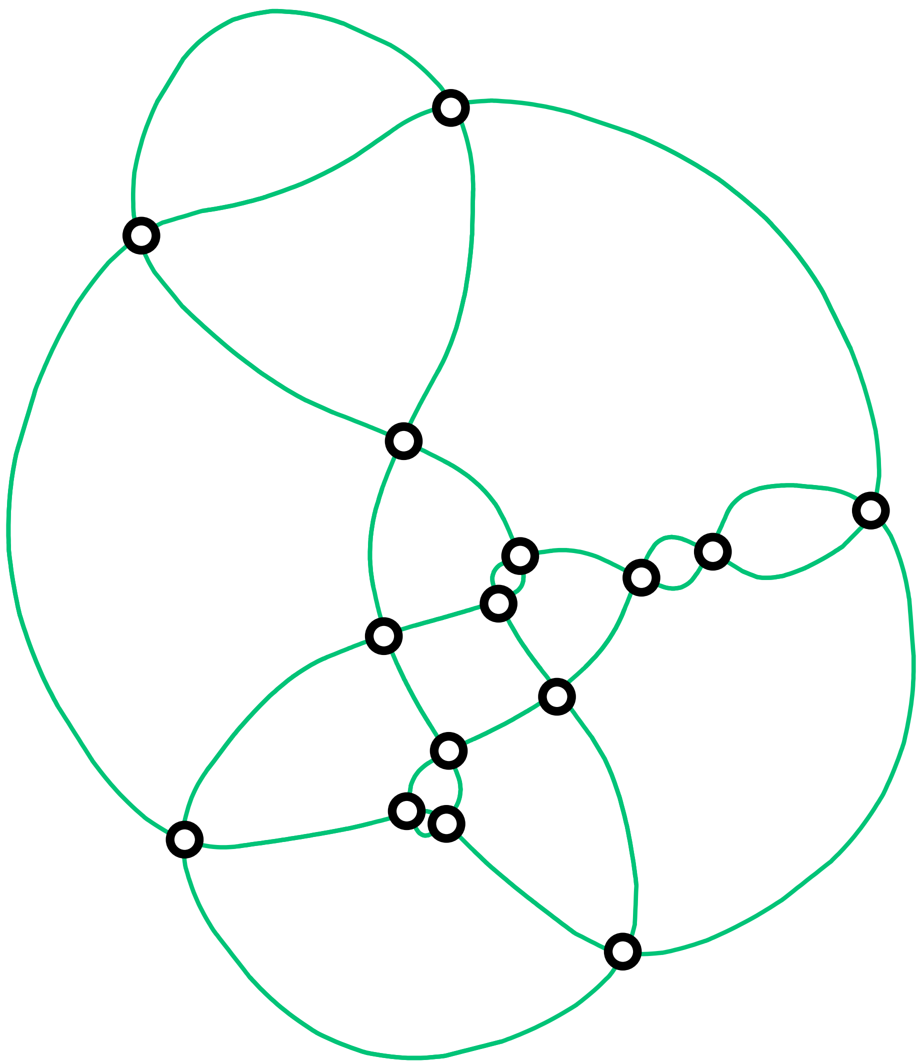
Cubrimos cada cruce con una bolita



Obtenemos un mapa (una gráfica encajada en el plano con vértices “gordos”)

Es una gráfica regular 4-valente.

Conway

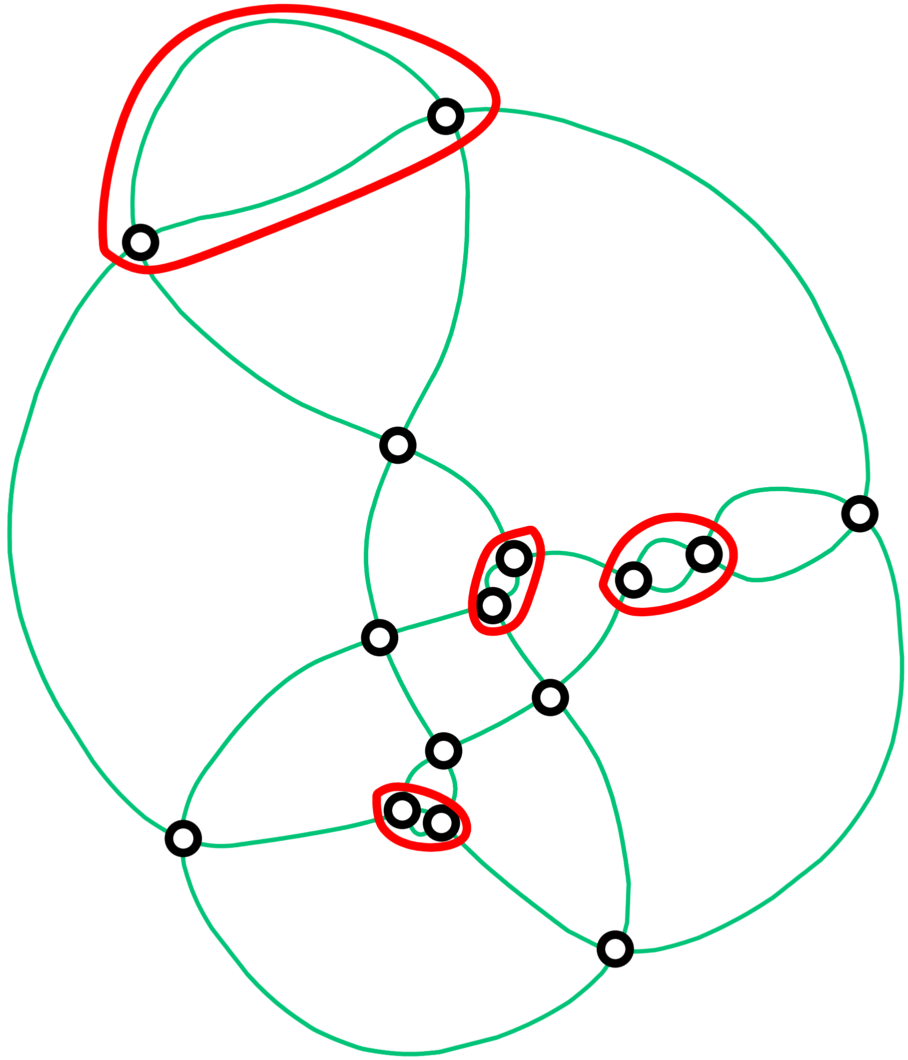


Ahora este mapa tiene caras de dos lados (con sólo dos vértices)

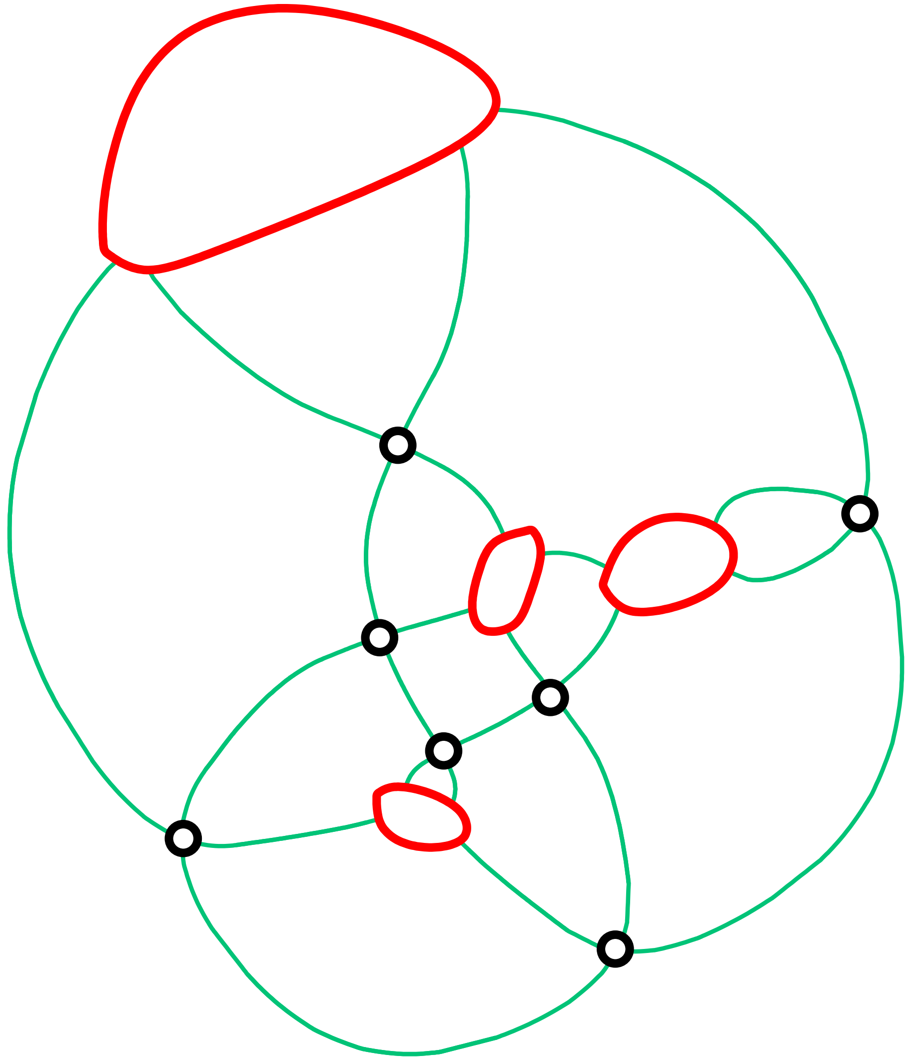
¡Esas no nos gustan!

Cada vez que encontremos una cara de dos lados, “fusionamos” las bolitas de sus vértices (y nos comemos los lados)

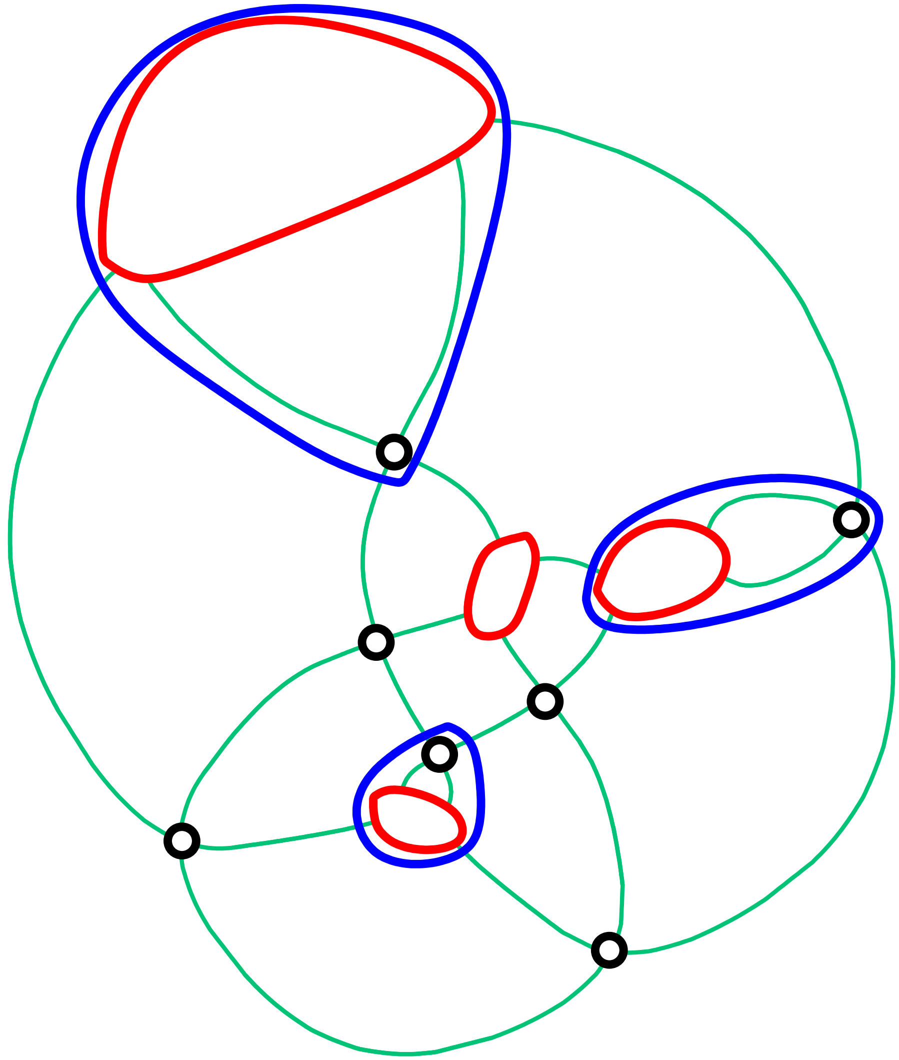
Conway



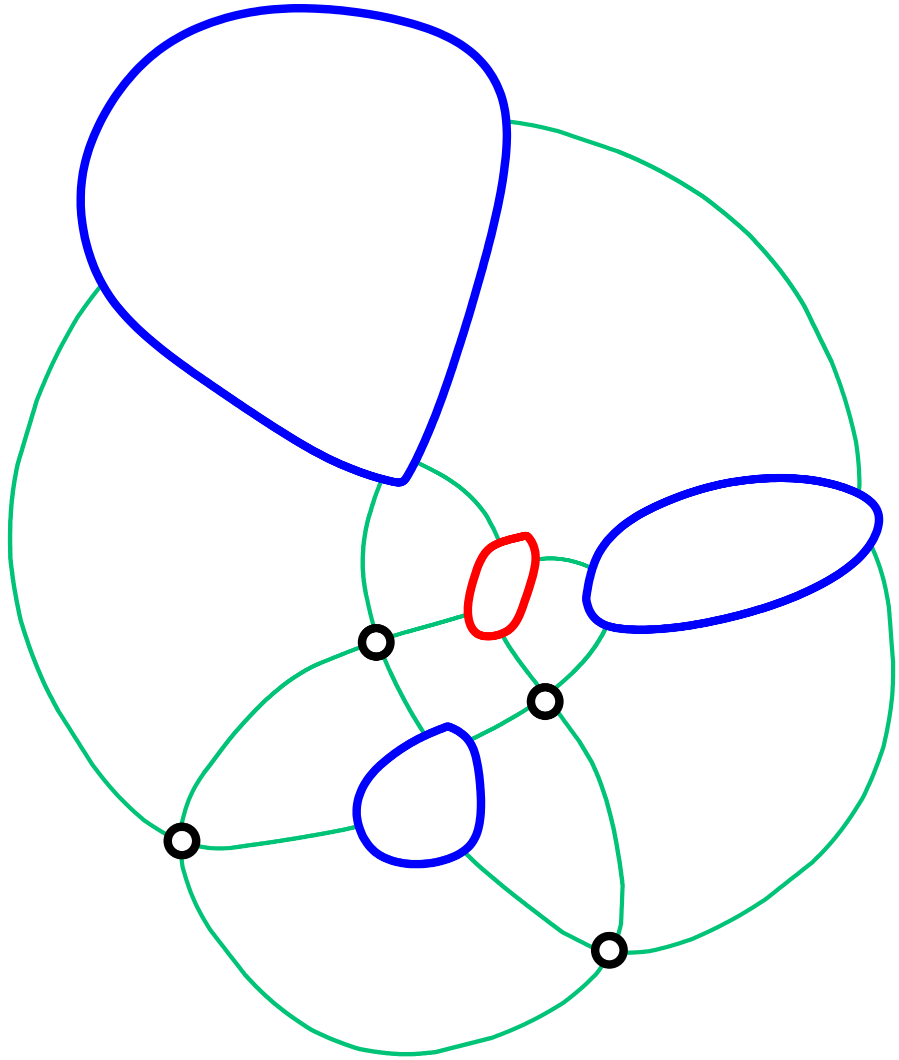
Conway



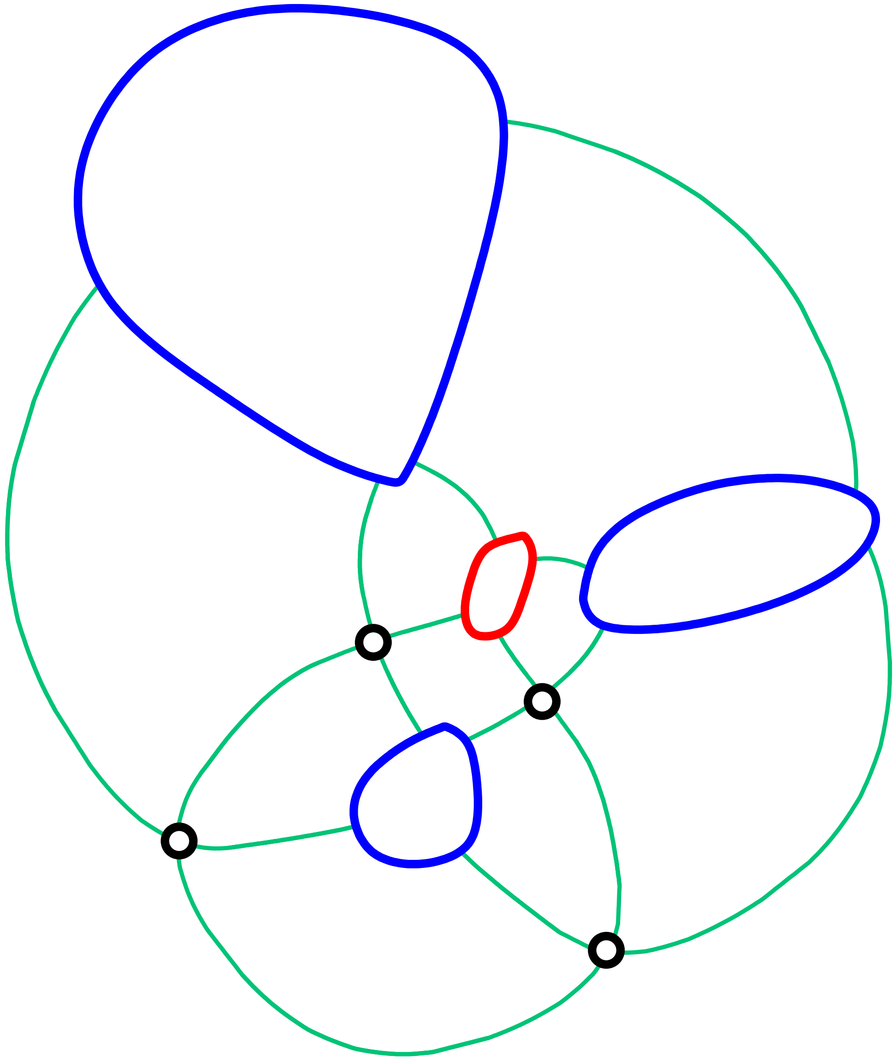
Conway



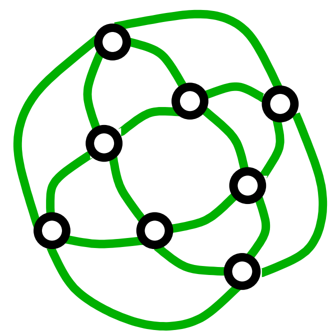
Conway



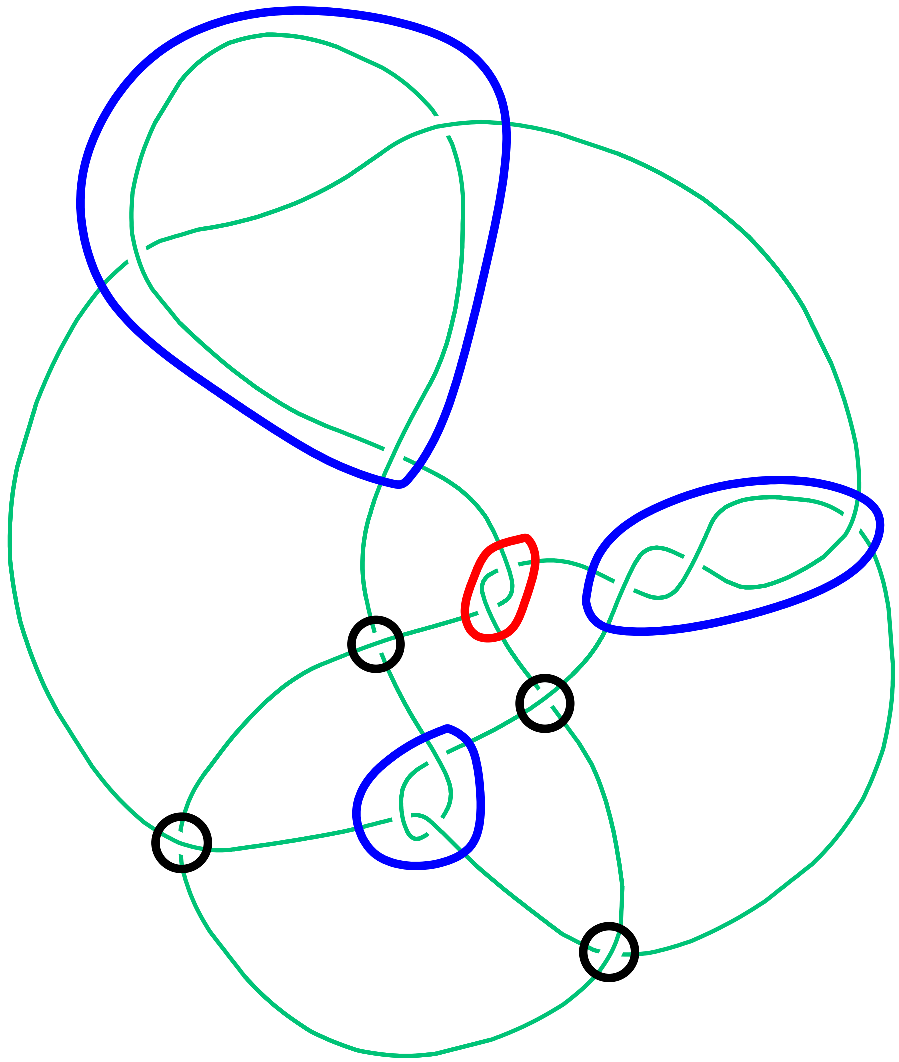
Conway



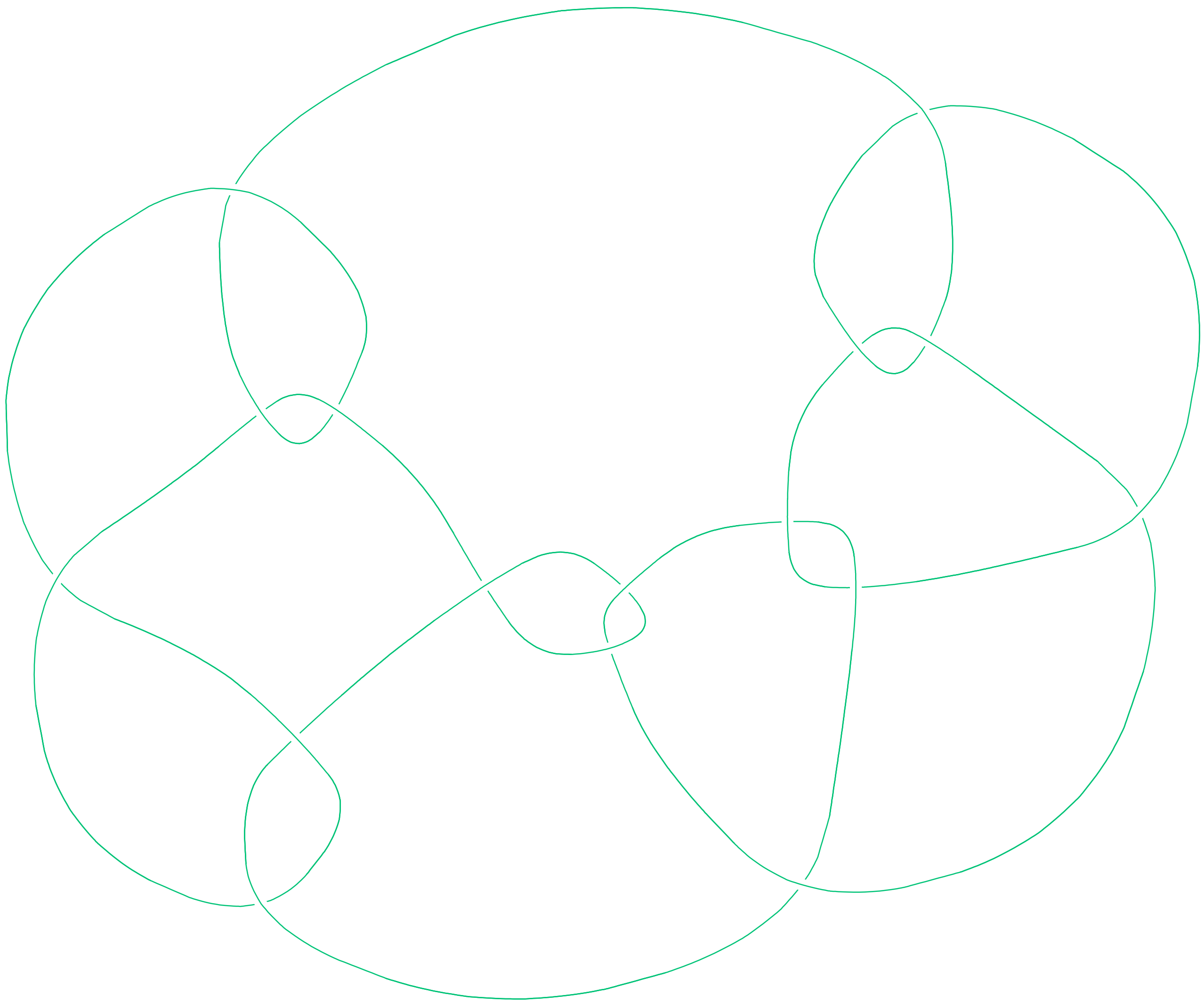
=



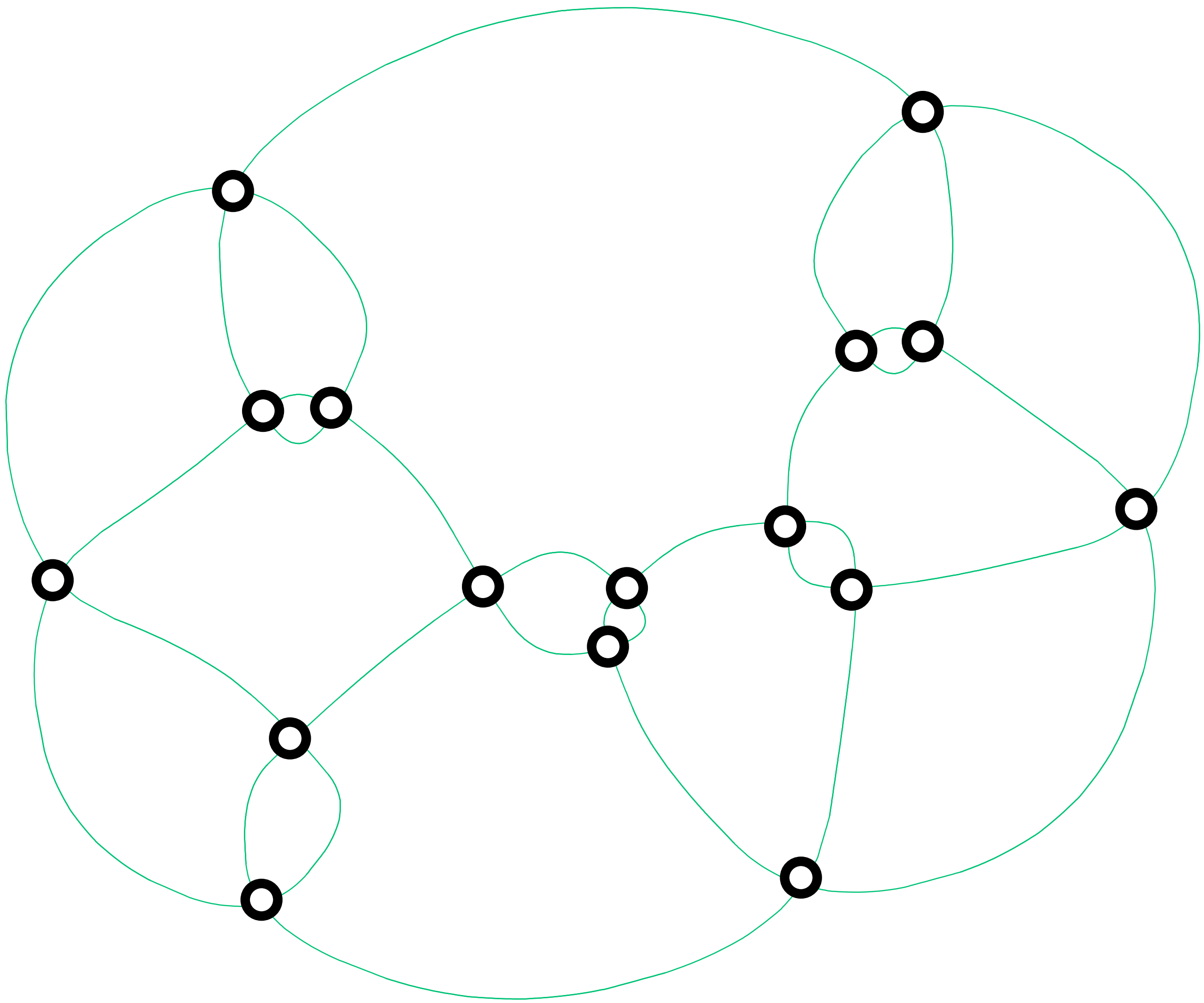
¿Qué quedó dentro de las bolitas?



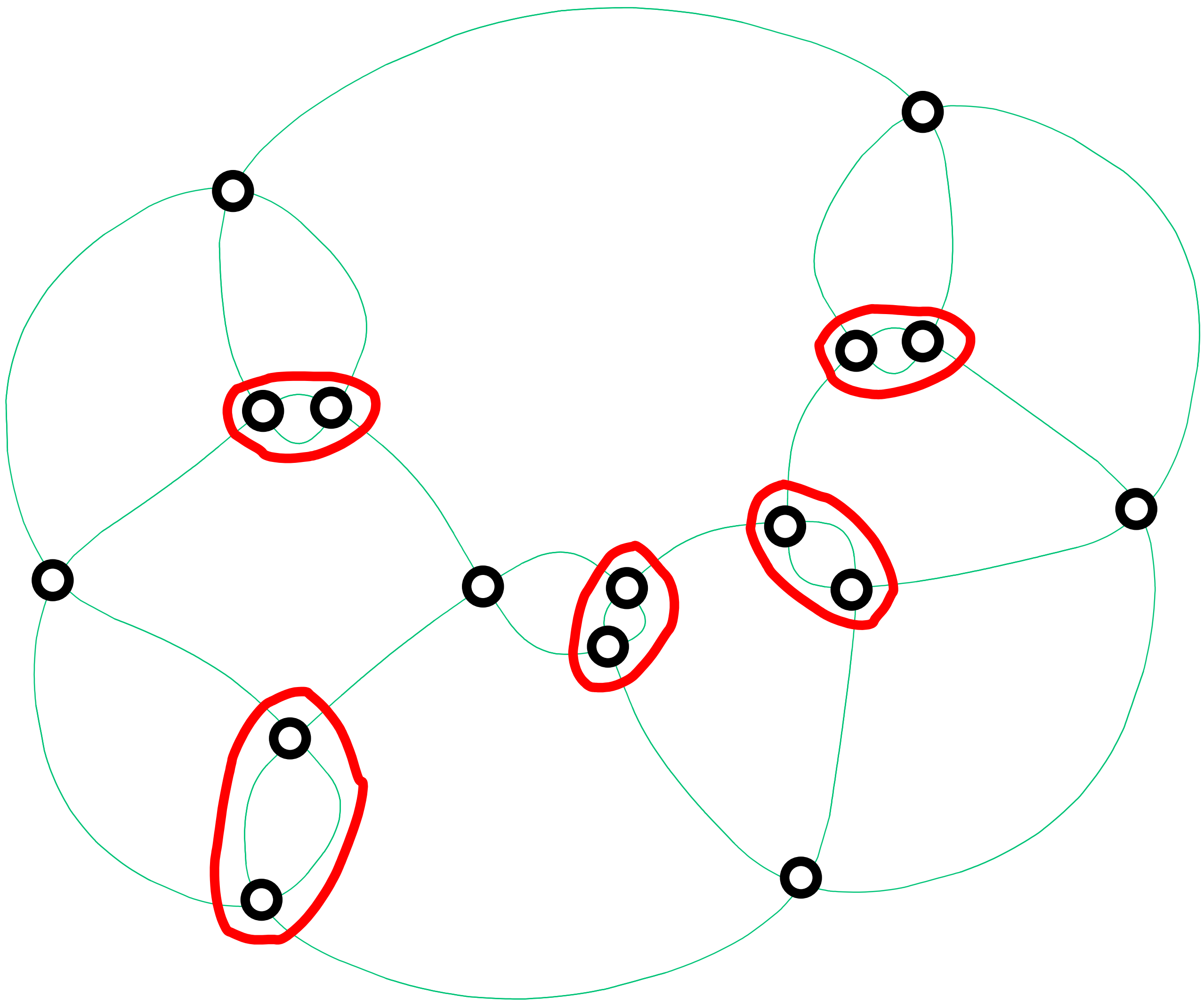
Conway



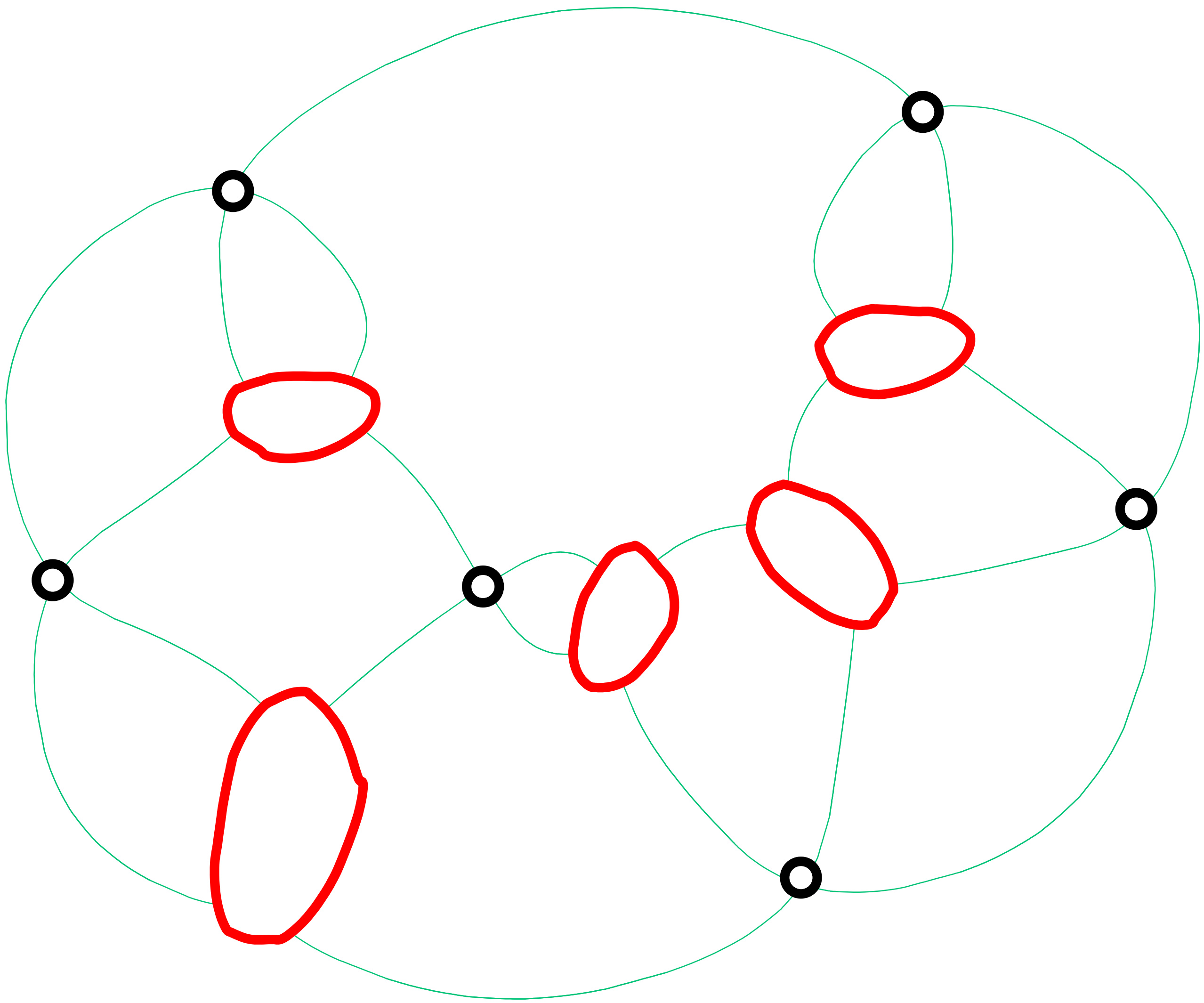
Conway



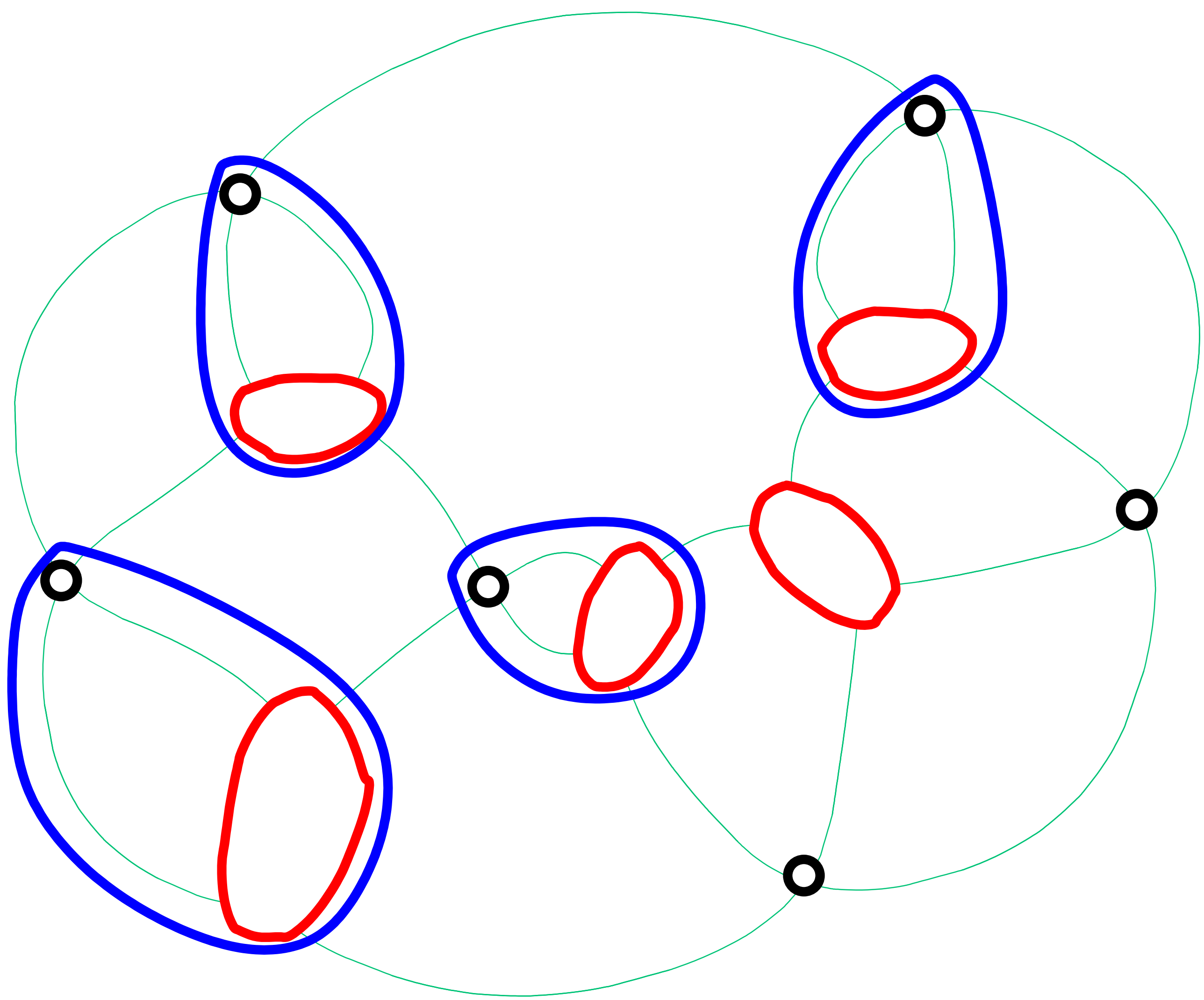
Conway



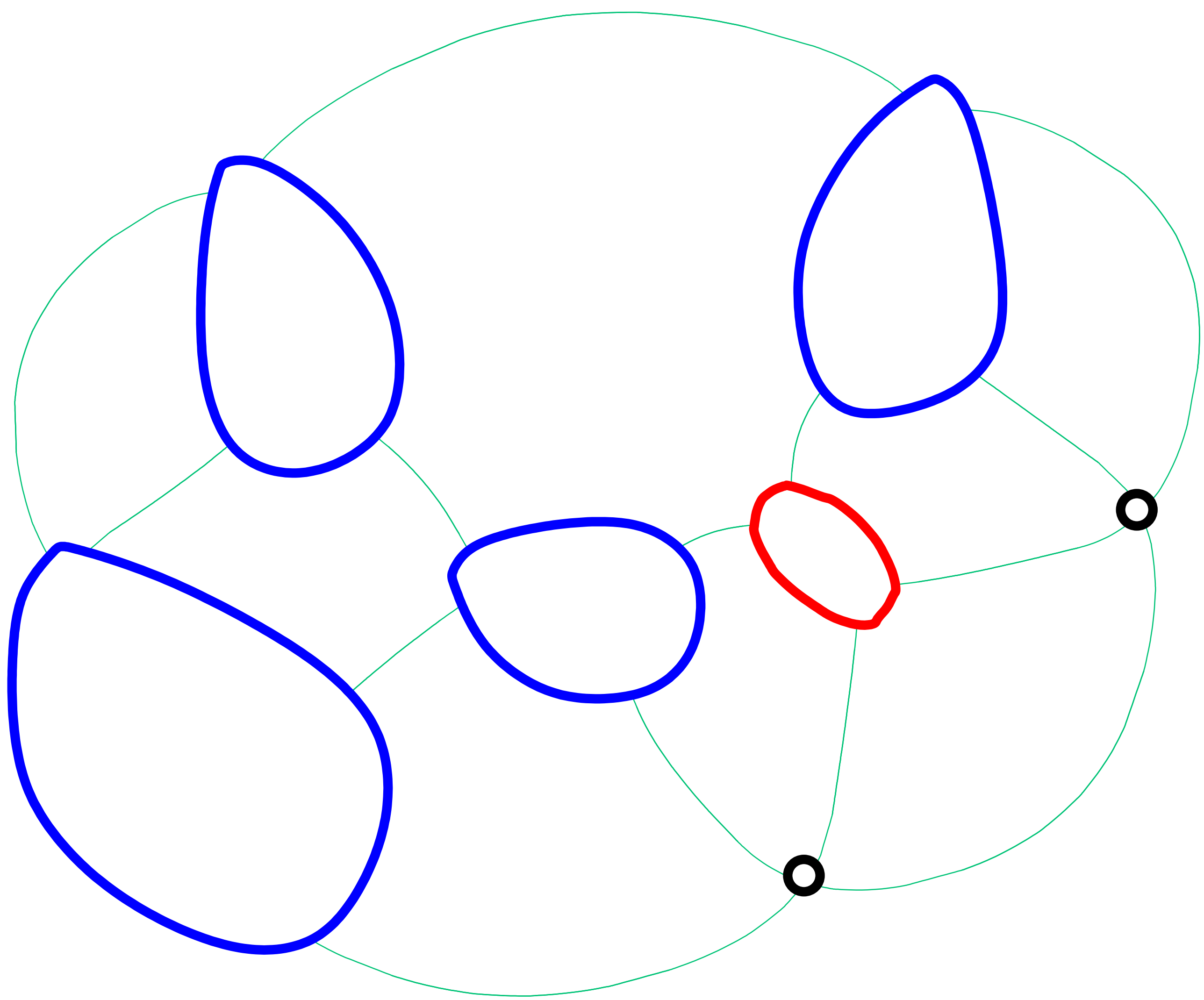
Conway



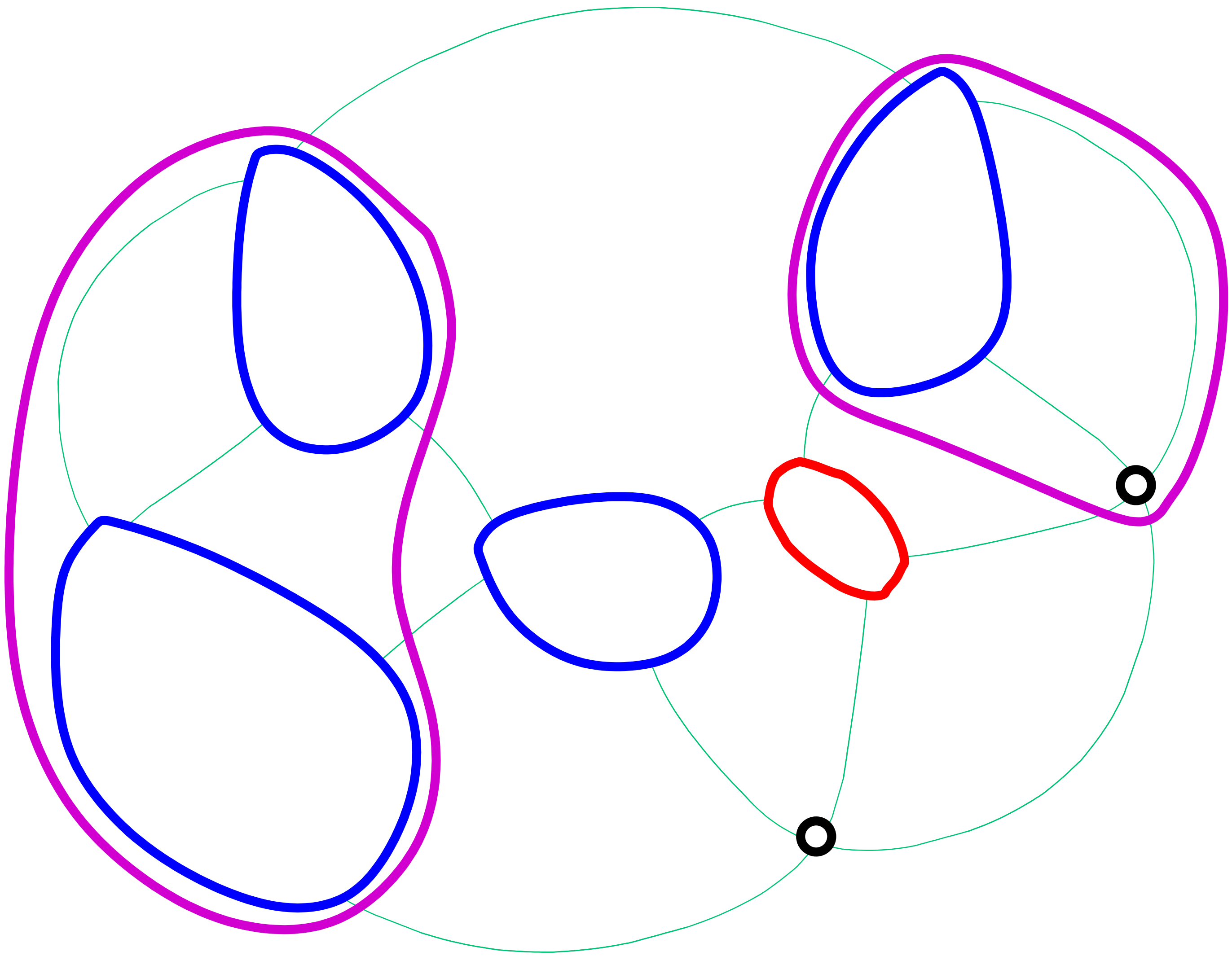
Conway



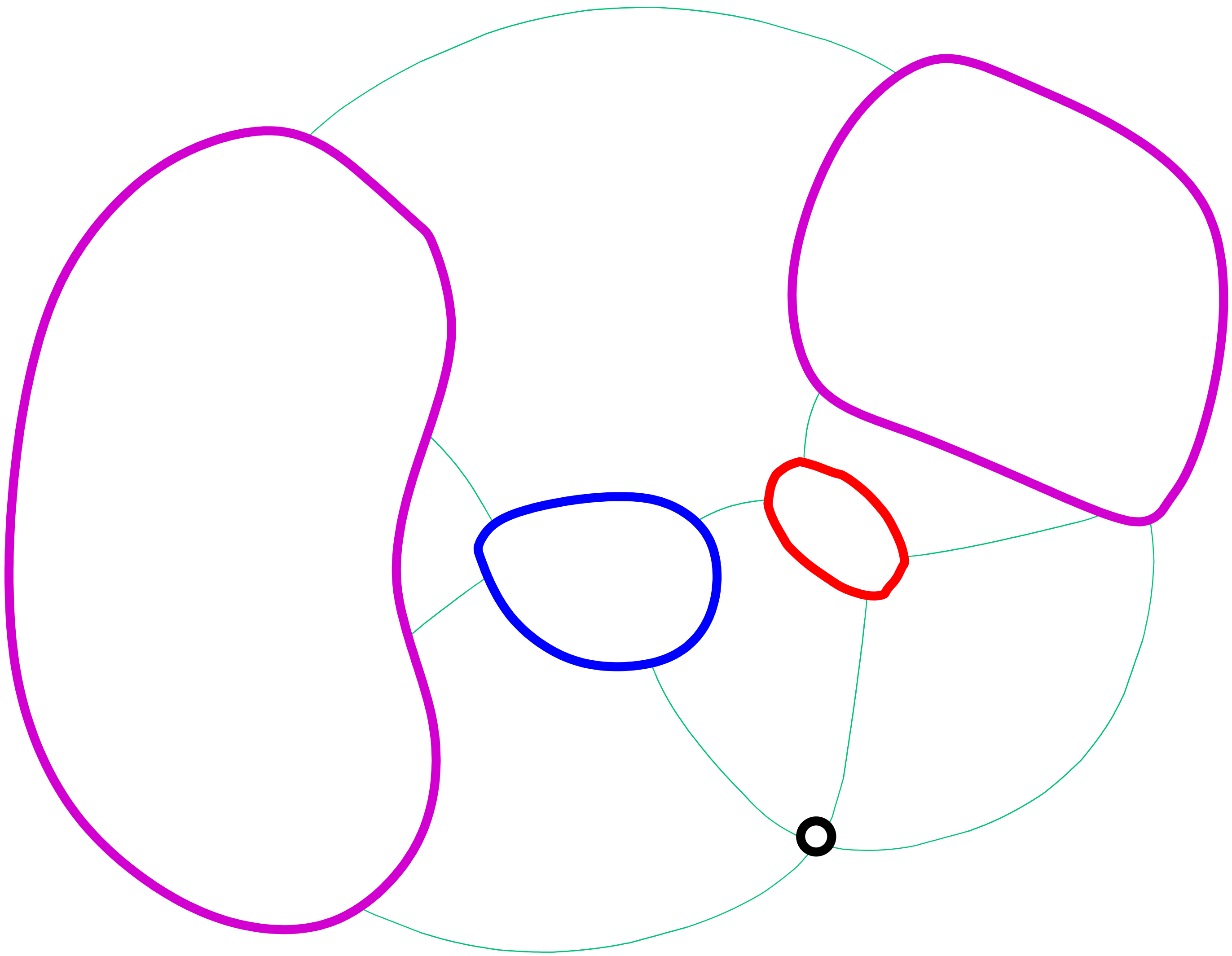
Conway



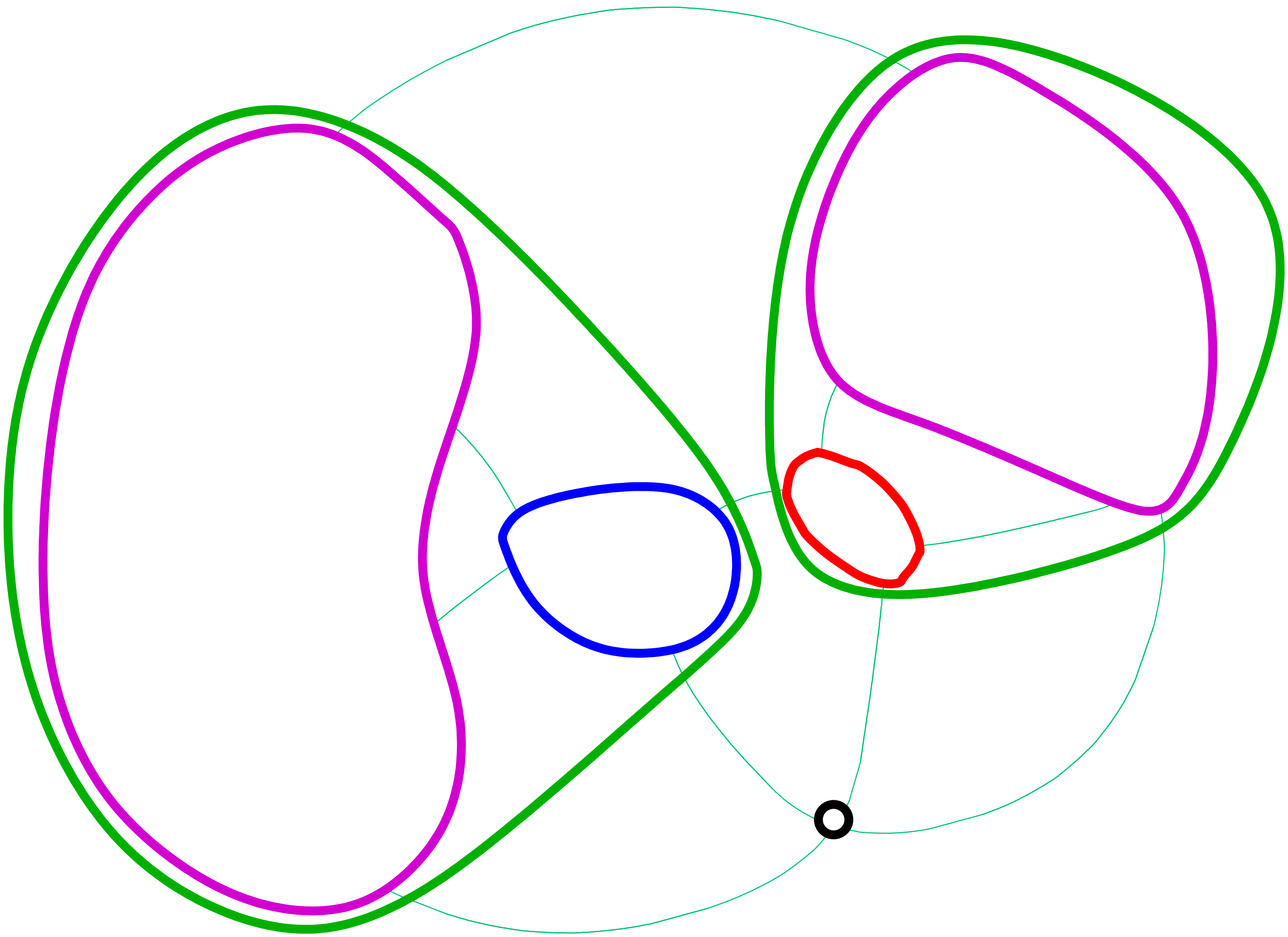
Conway



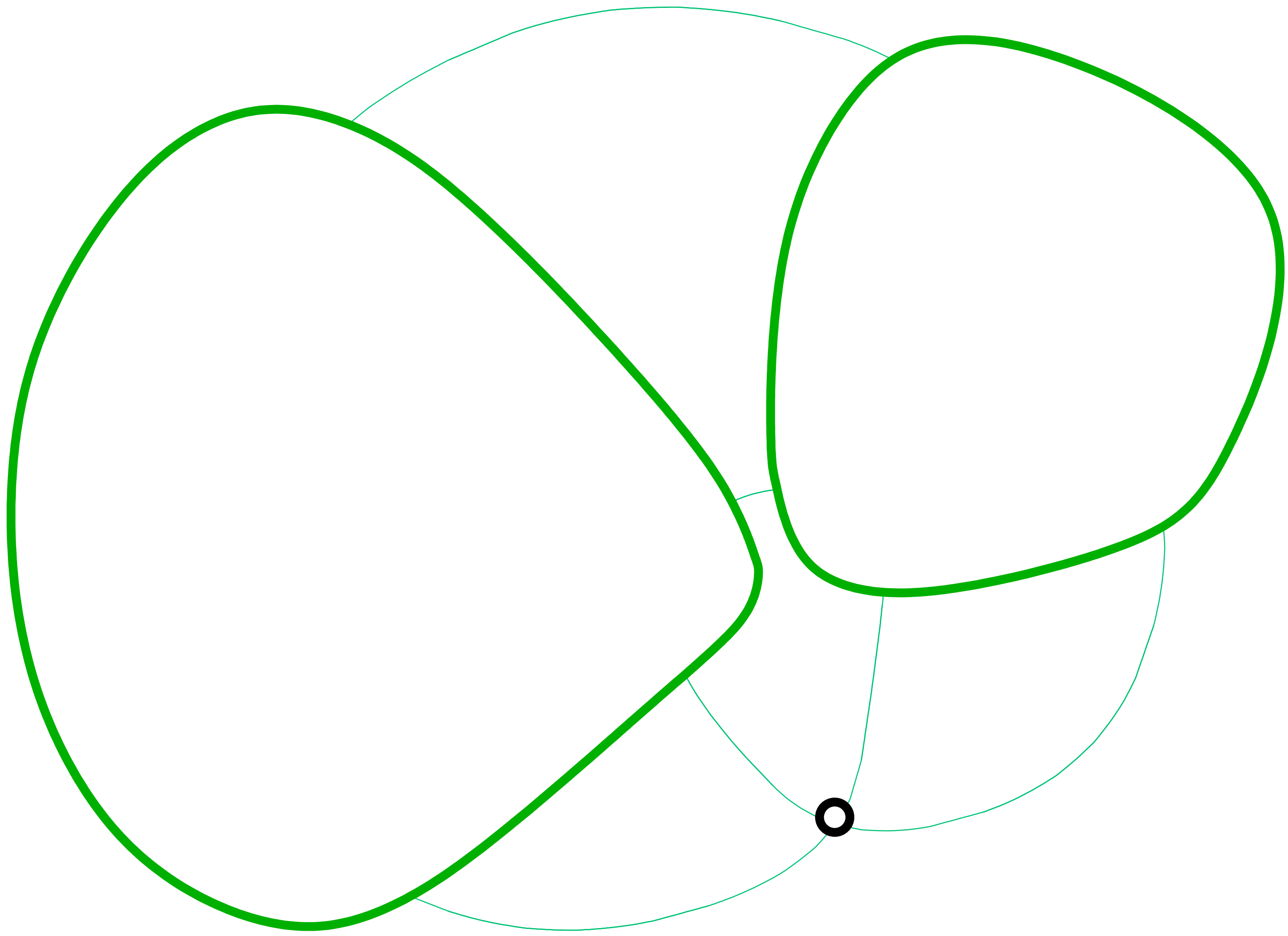
Conway



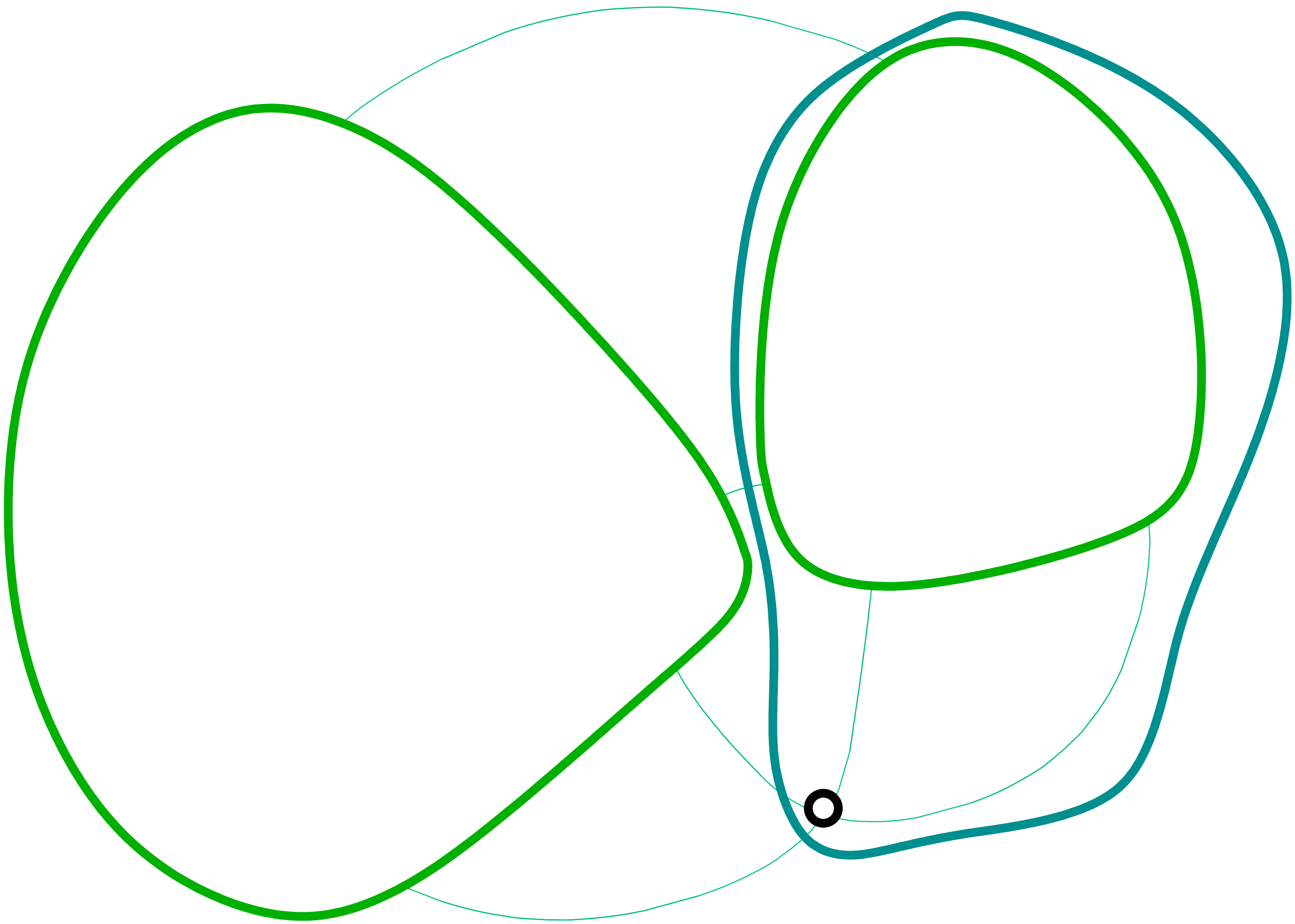
Conway



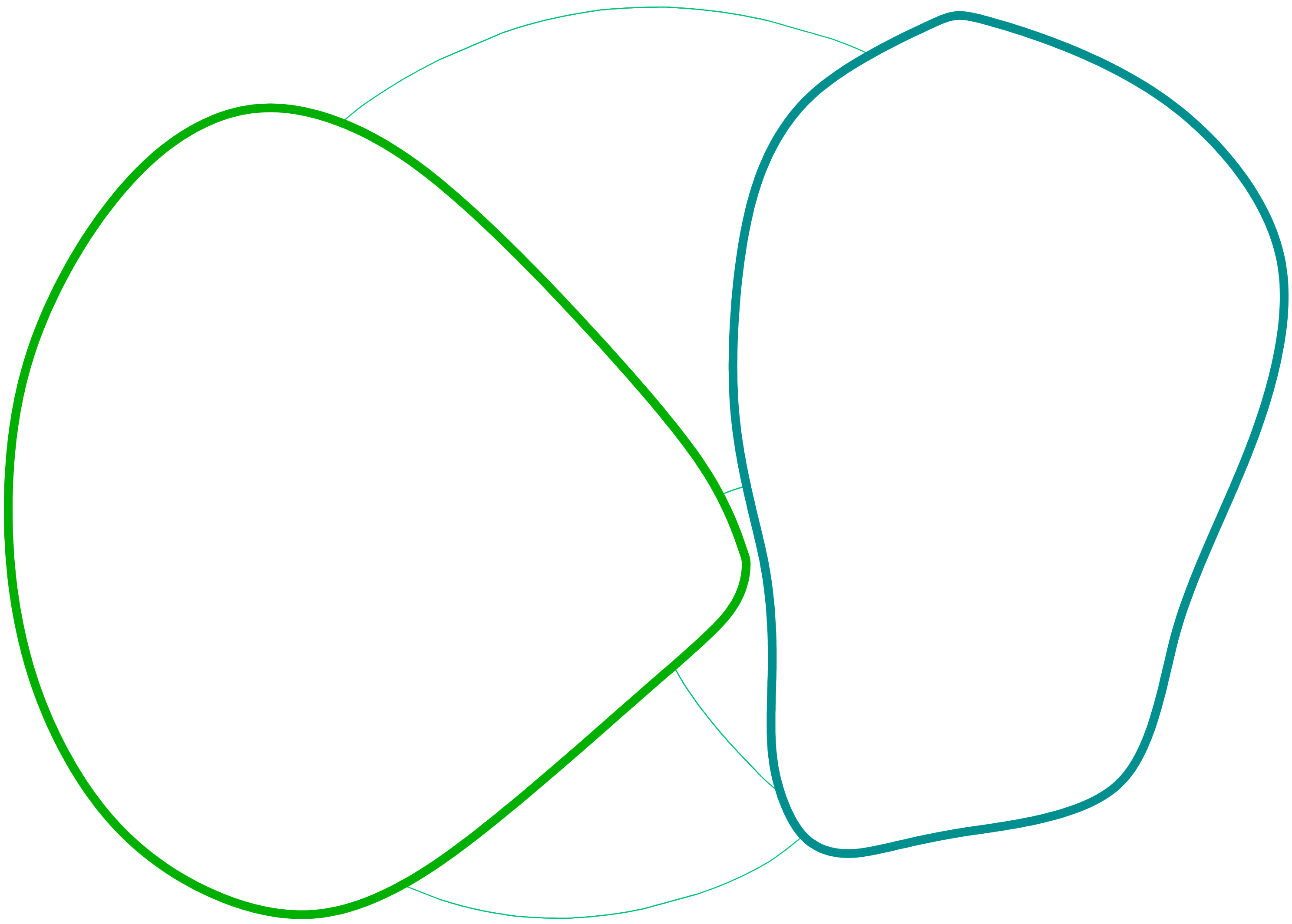
Conway



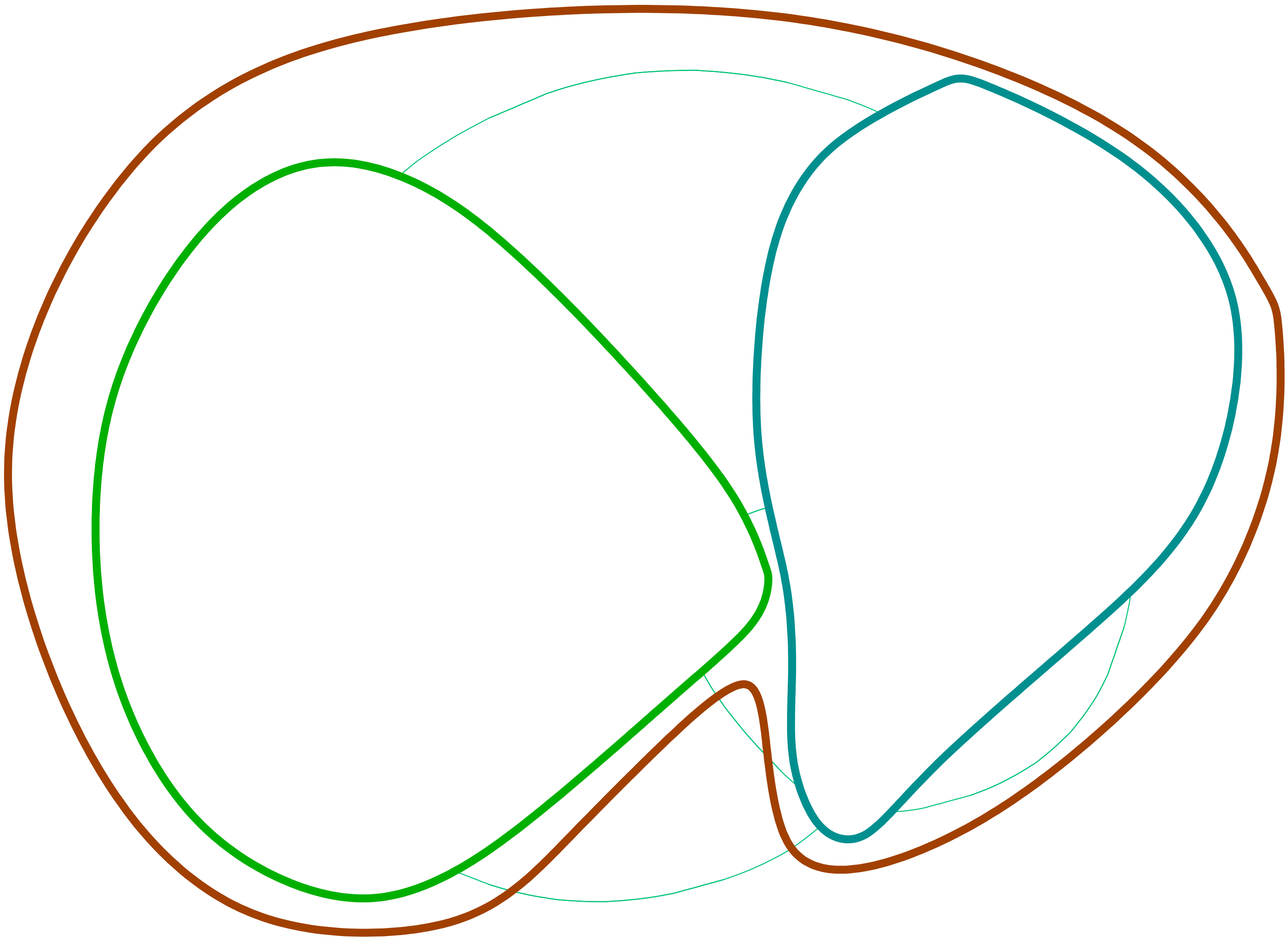
Conway



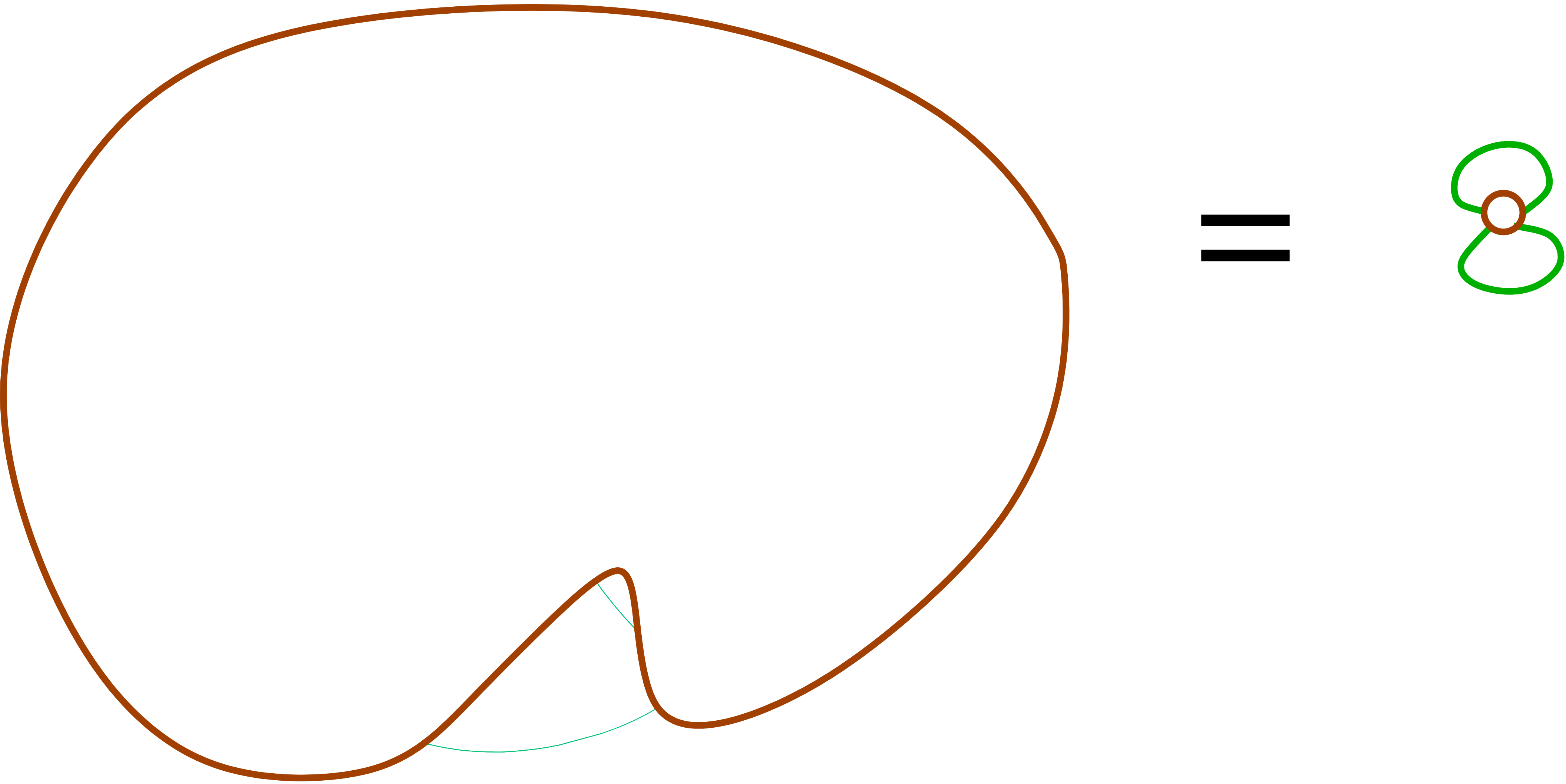
Conway



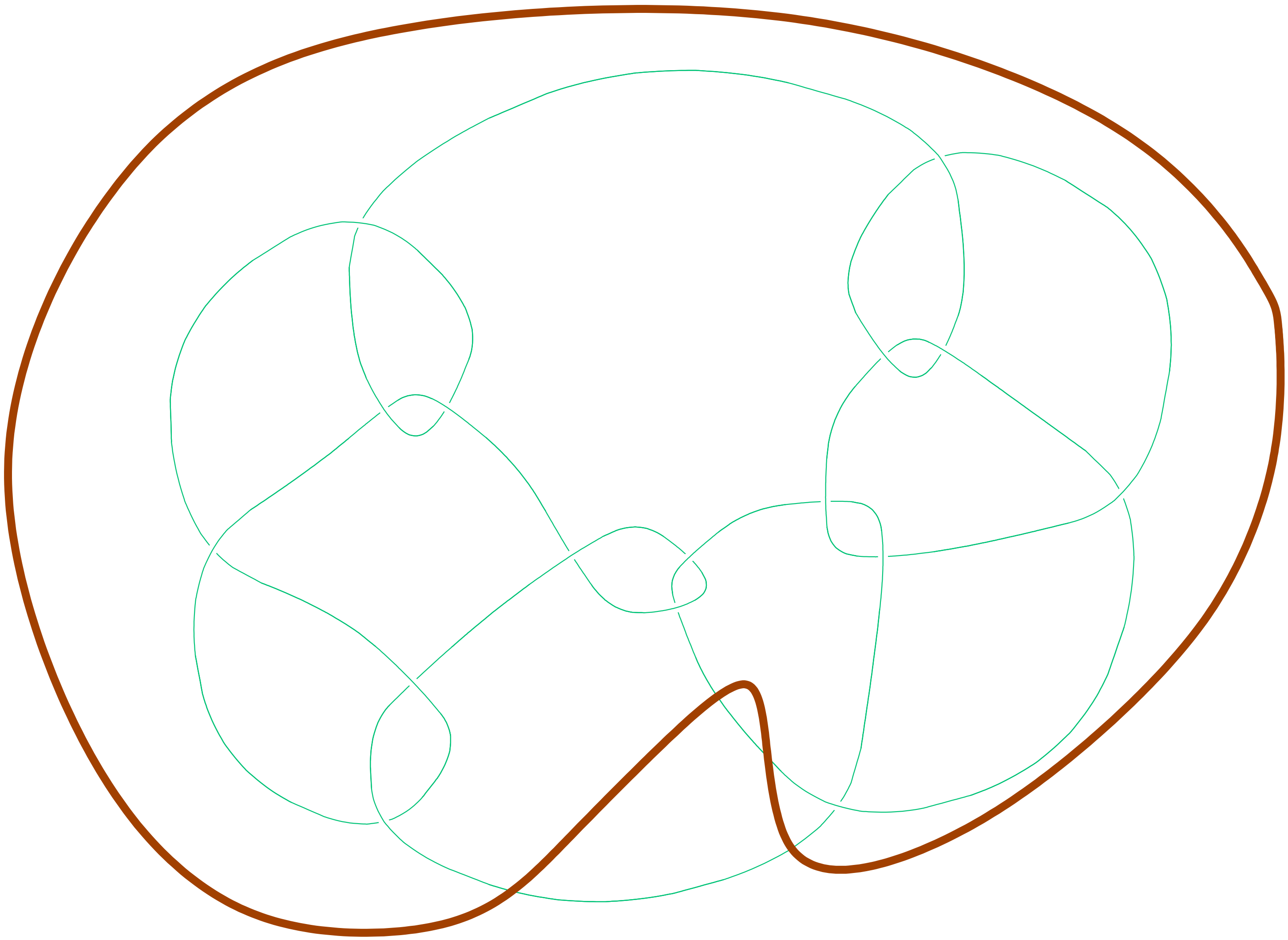
Conway

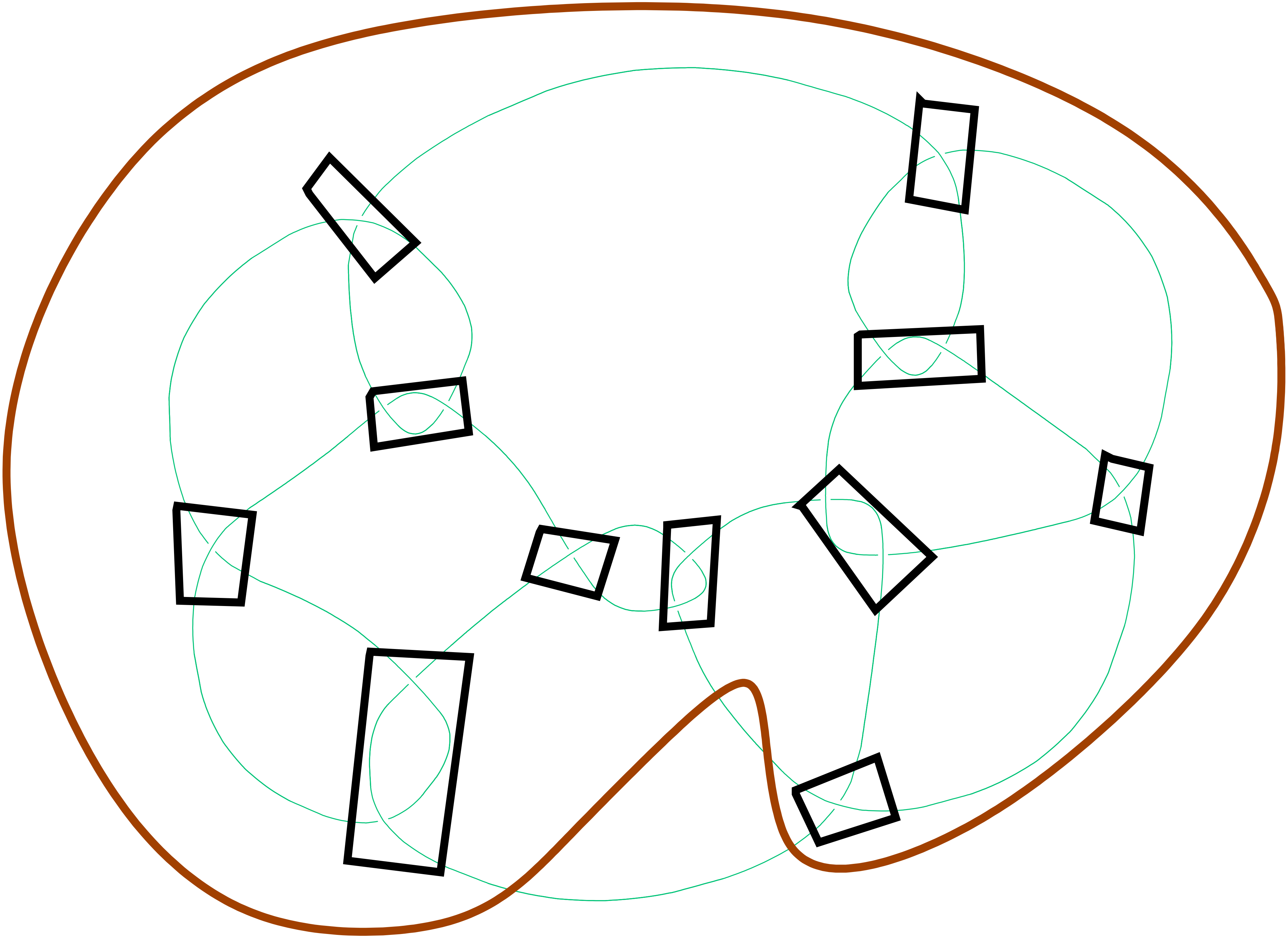


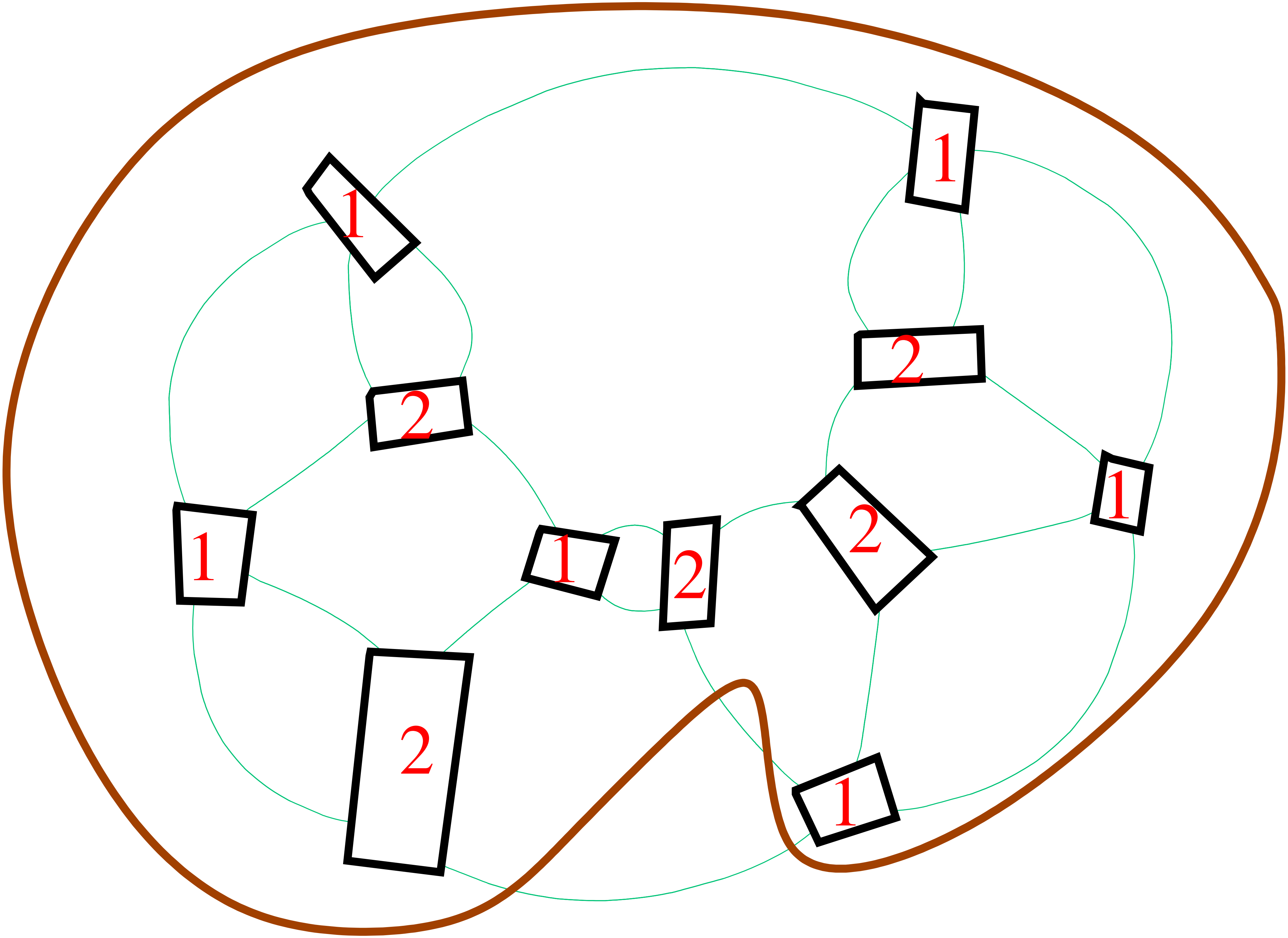
Conway

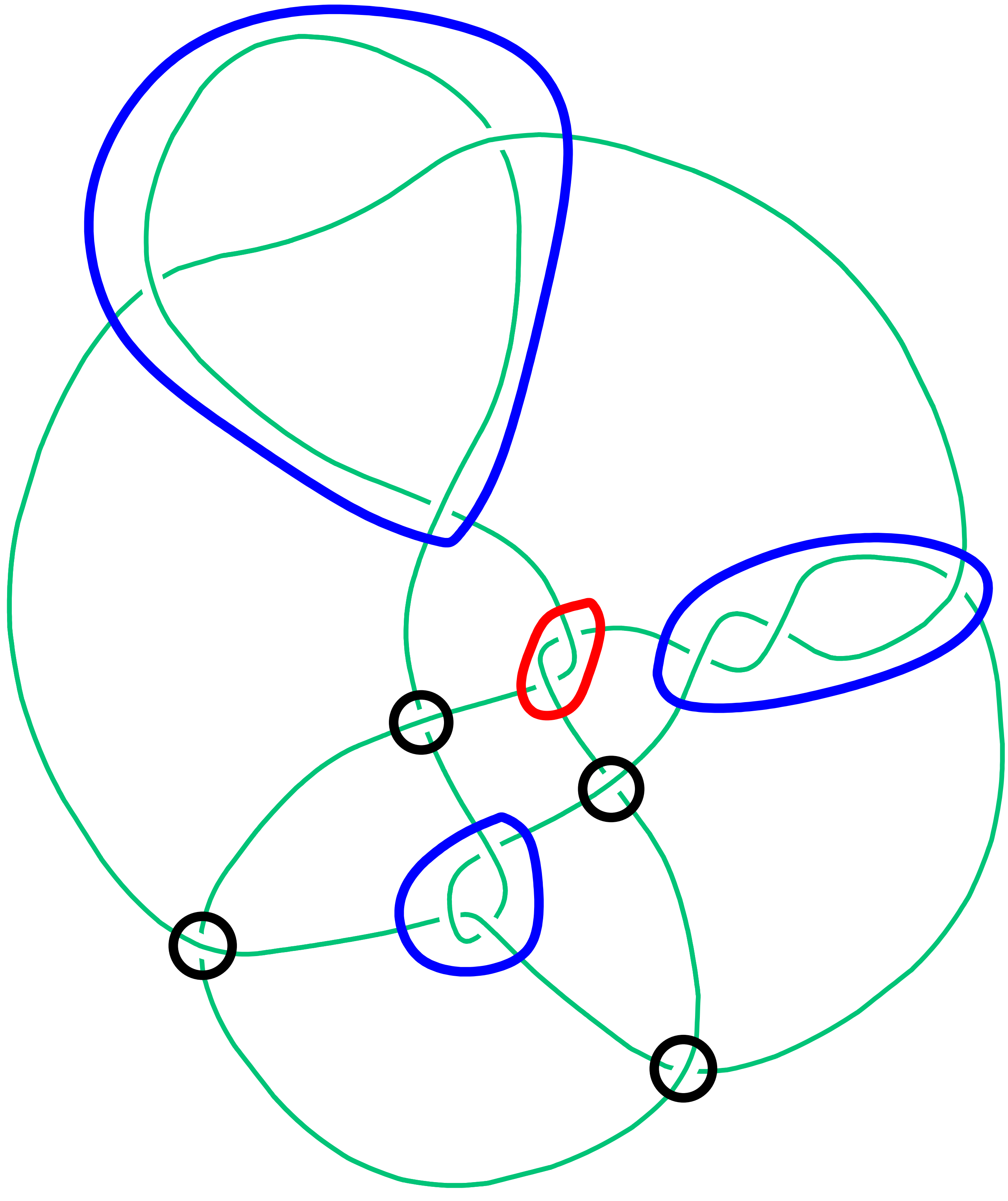


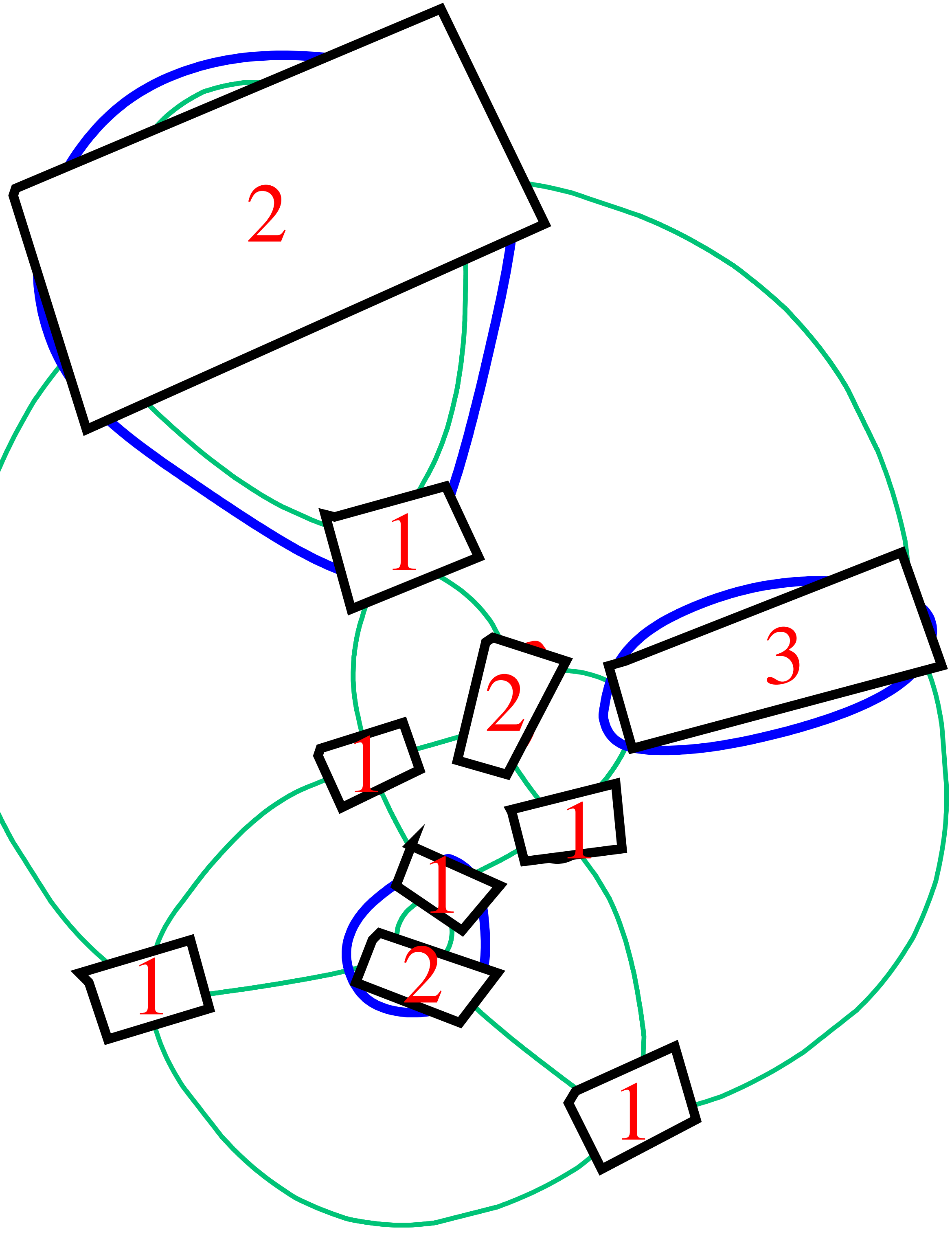
¿Qué quedó dentro de la bolita? (¡bolota!)





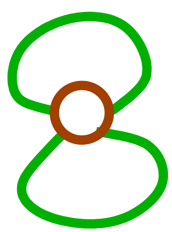

1
1
2
2
1
1
2
2
1
2
1




2
1
2
3
1
1
1
2
1
1

Vámonos despacio.

Definición. Un mapa básico (o un polígono básico) es una gráfica finita, Γ, que es regular, 4-valente y está encajada en el plano (o en la esfera) y se cumple que

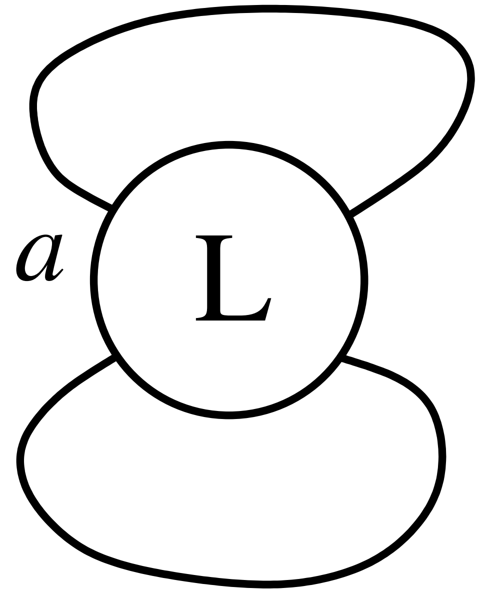
1) $\Gamma =$ 

o bien,

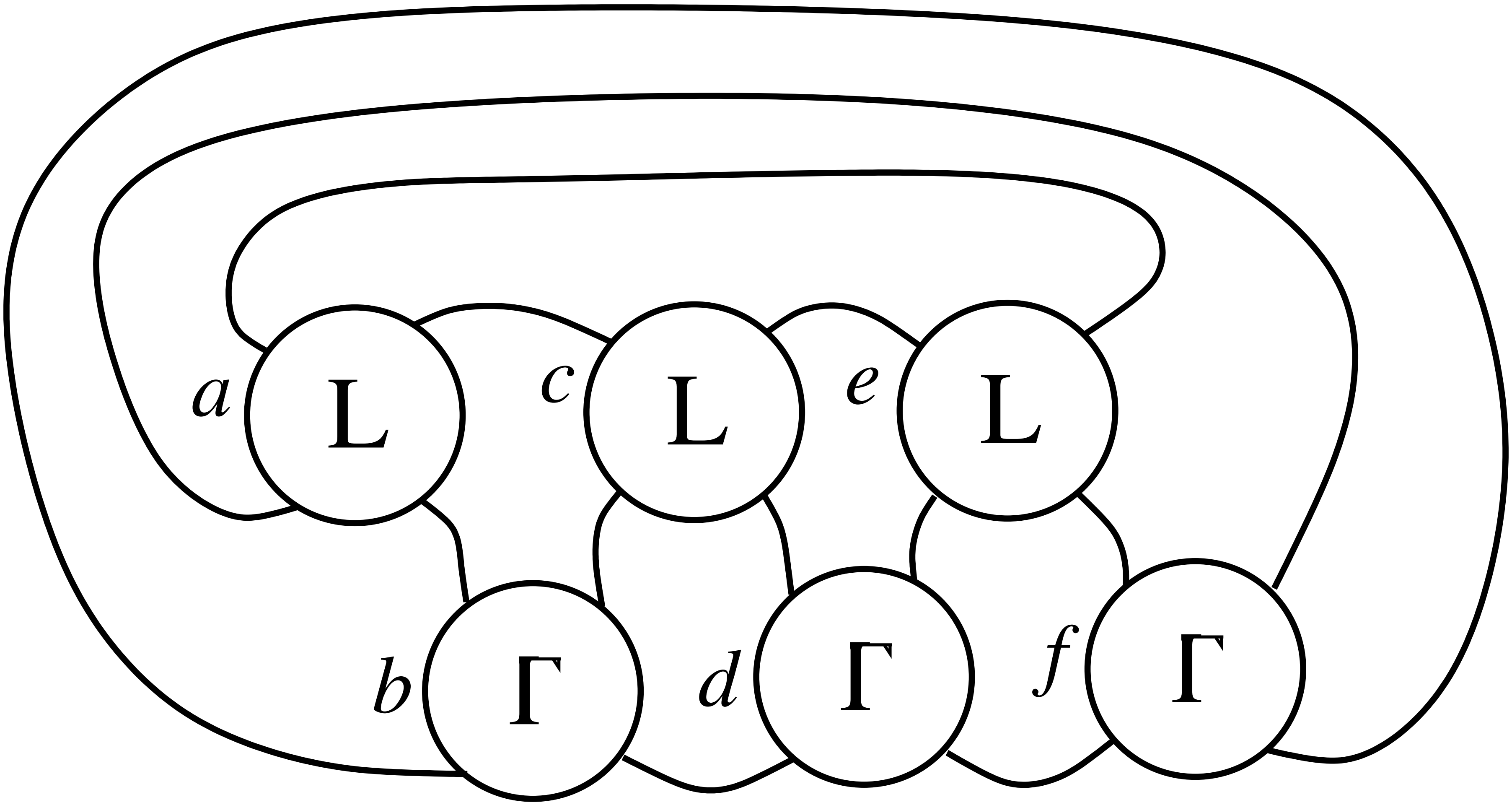
2) Todas las caras de Γ tienen más de dos lados

(no hay bígonos).

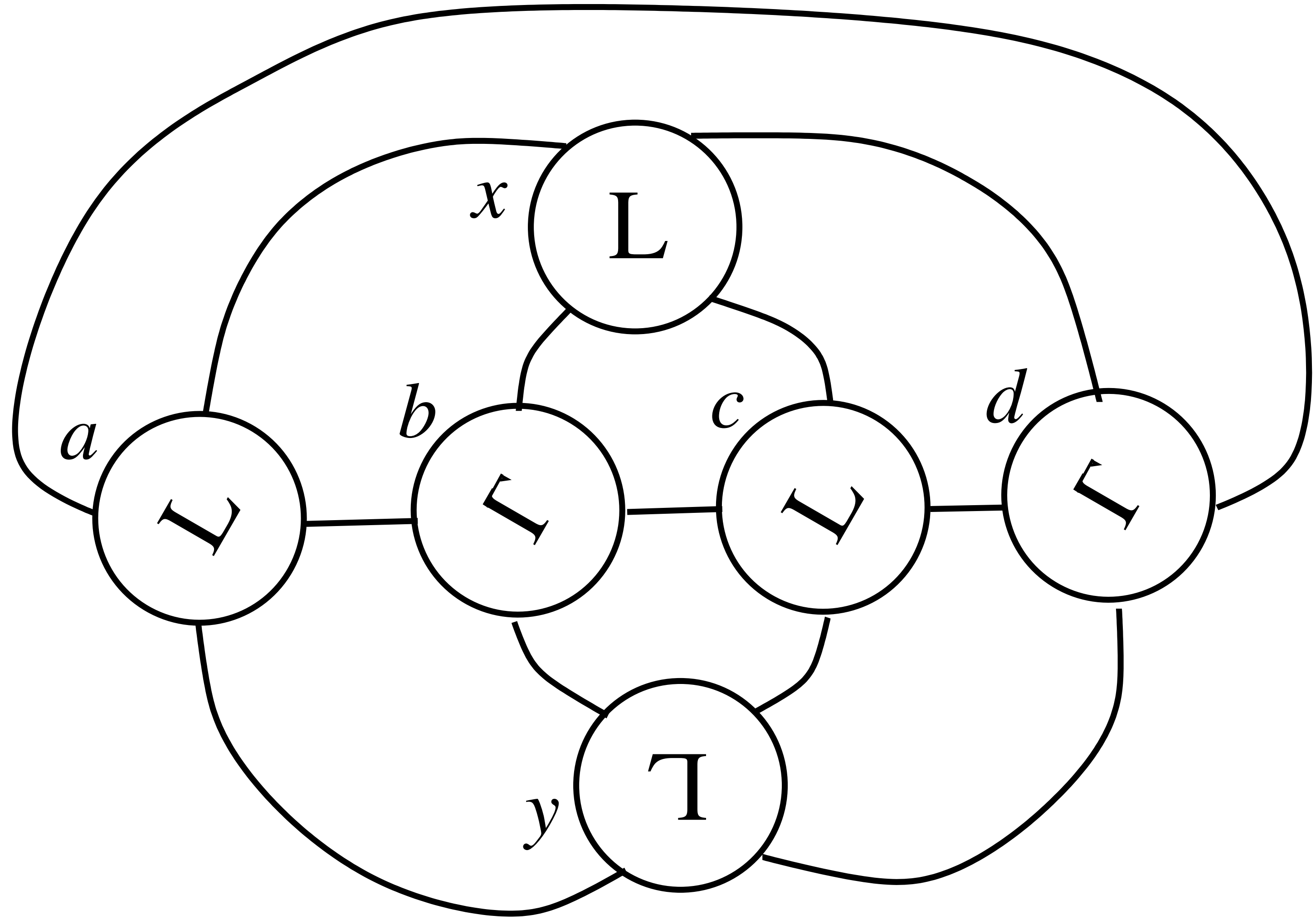
En un mapa básico vamos a pensar que sus vértices son "gordos" (o sea, son bolitas).



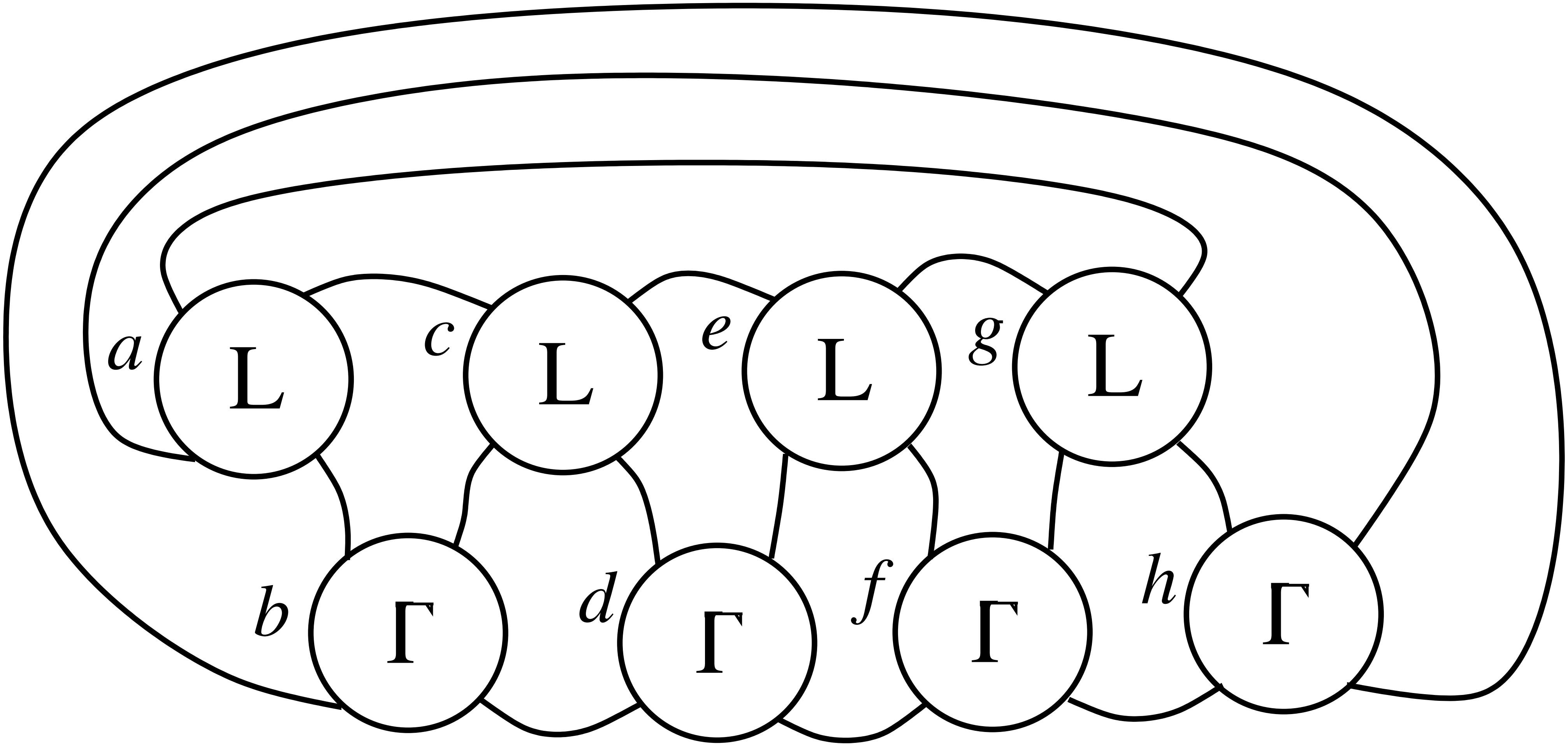
$\mathbf{1}^*$



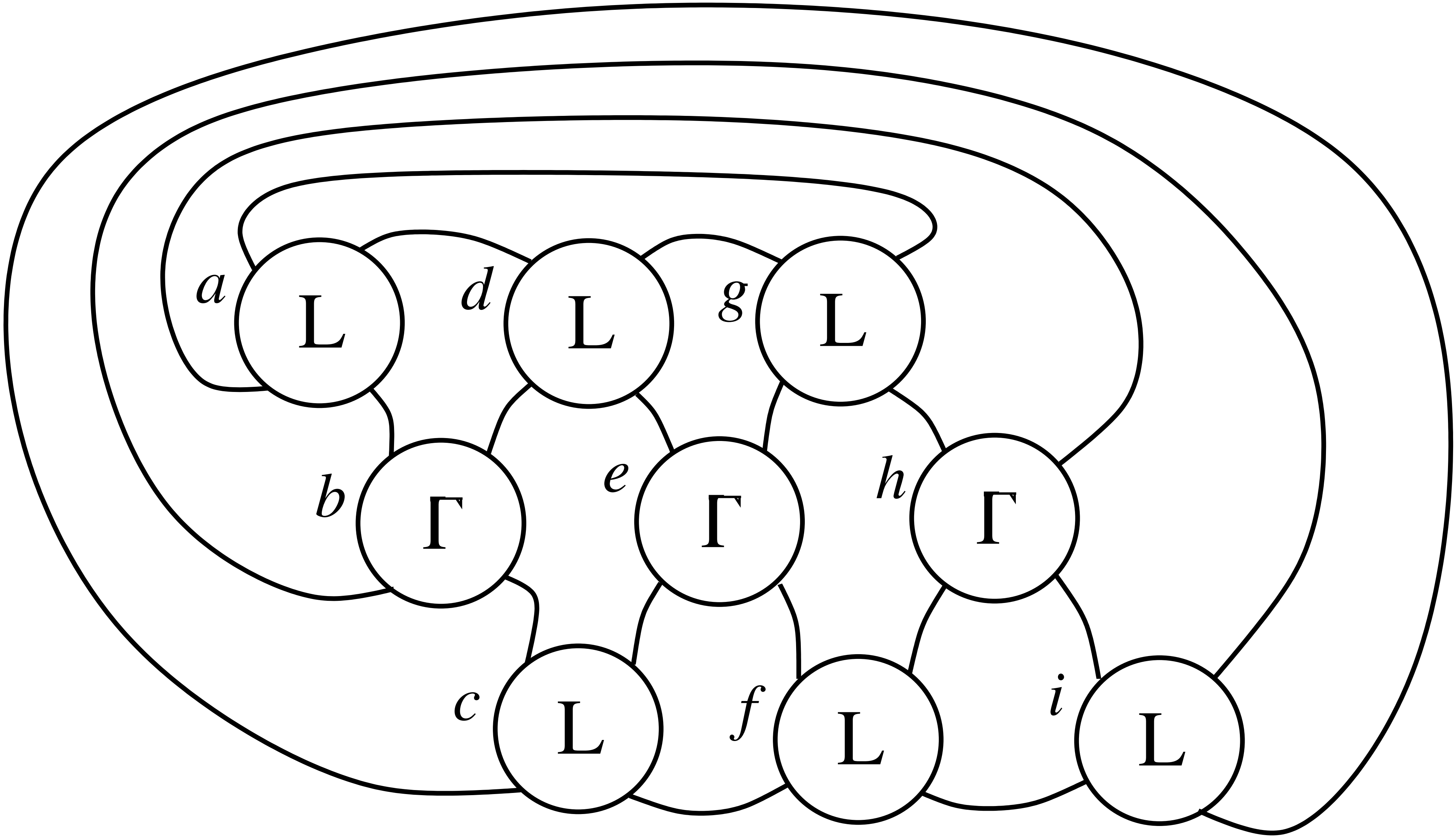
6*



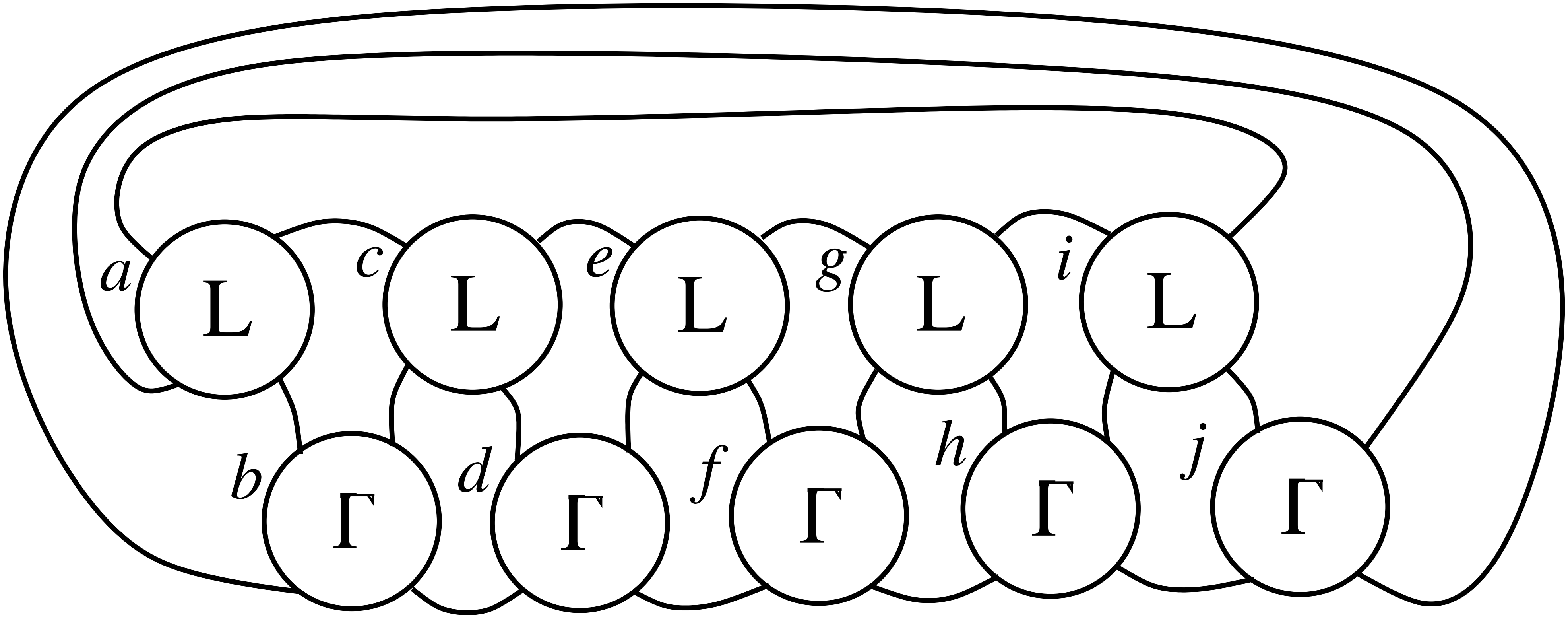
6**



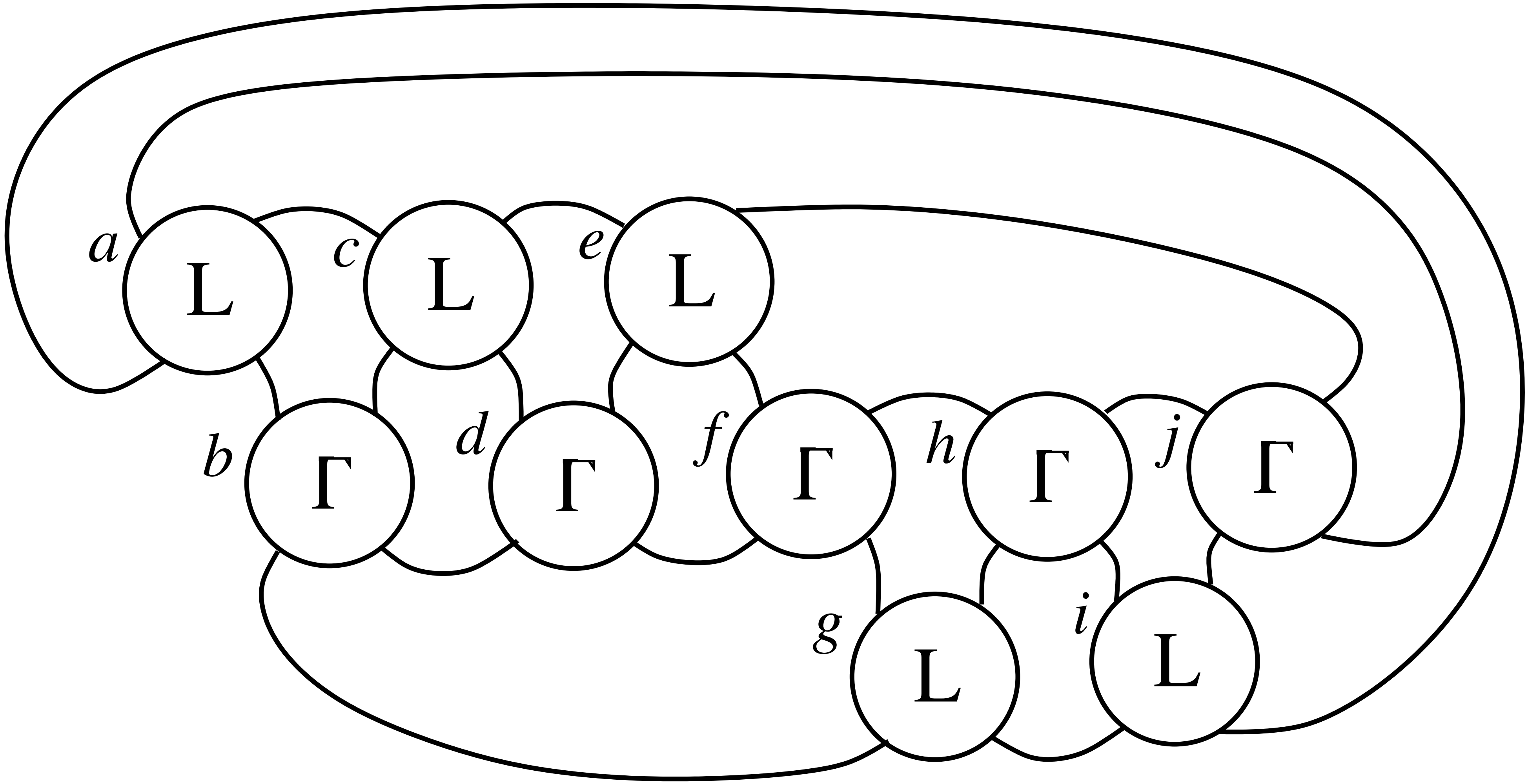
8*



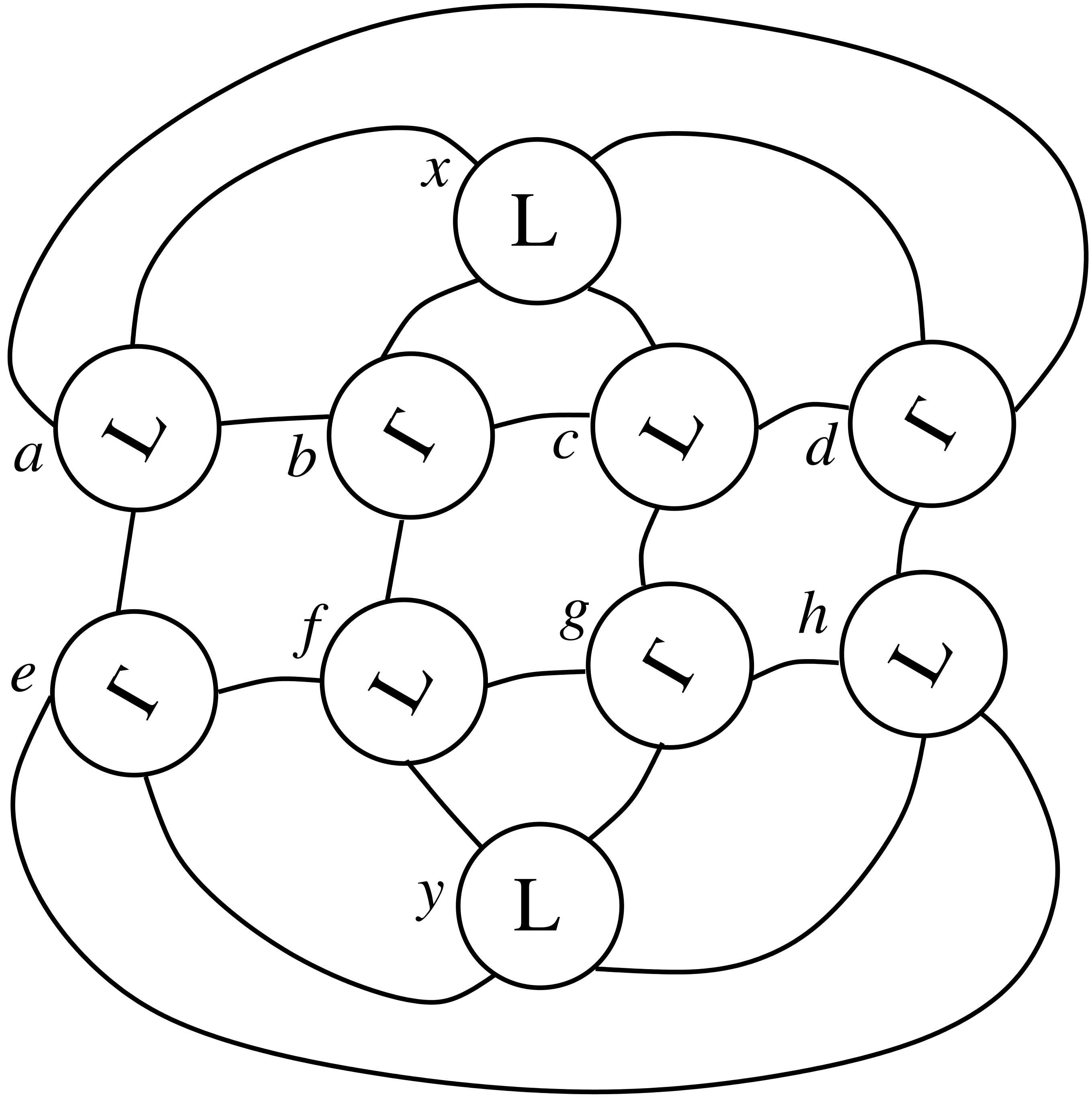
9*



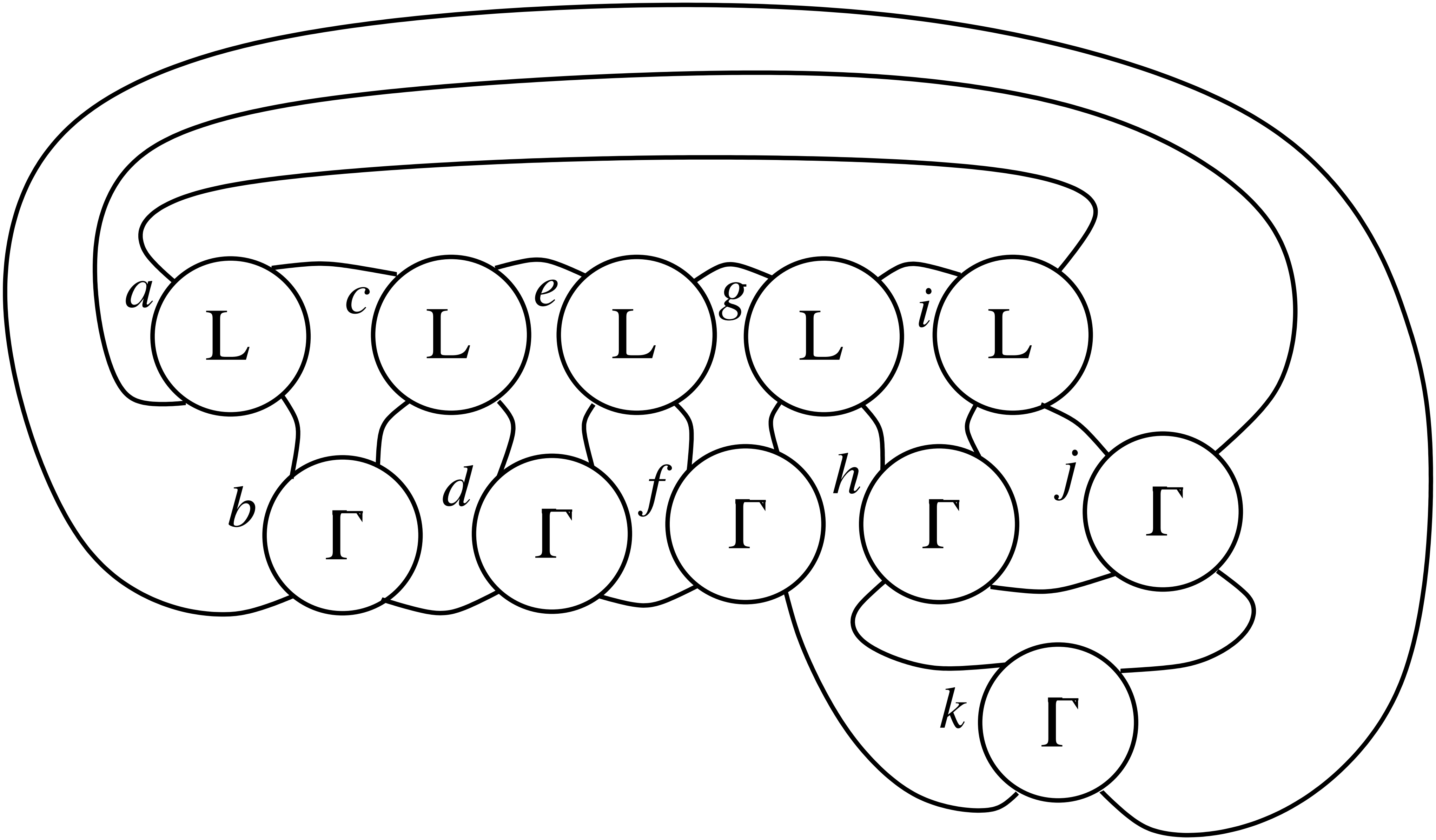
10*



10**



10***



11*

Observación. Si tenemos un mapa regular 4-valente encajado en la esfera y no es un mapa básico (o sea, tiene algunos bígonos), podemos fusionar los vértices de un bígono en un solo vértice gordo que contenga a los lados del bígono.

Se obtiene así un mapa con menos bígonos.

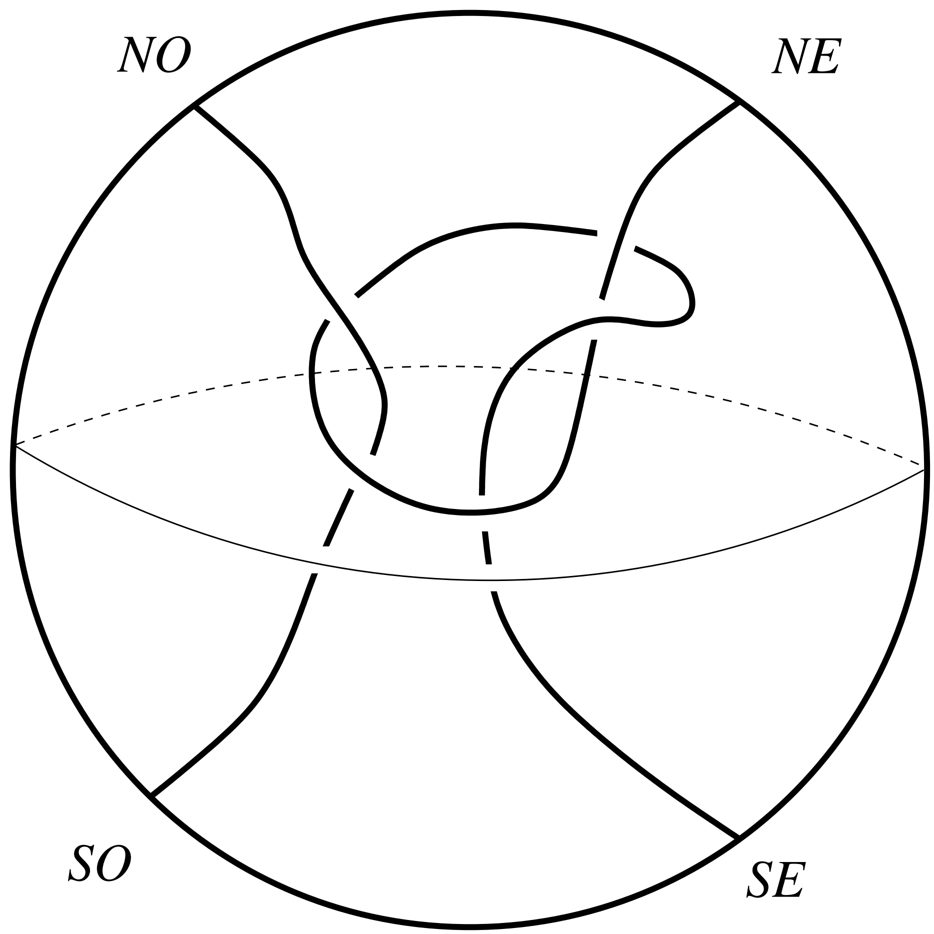
Si repetimos este proceso un número finito de veces, obtenemos un mapa básico.

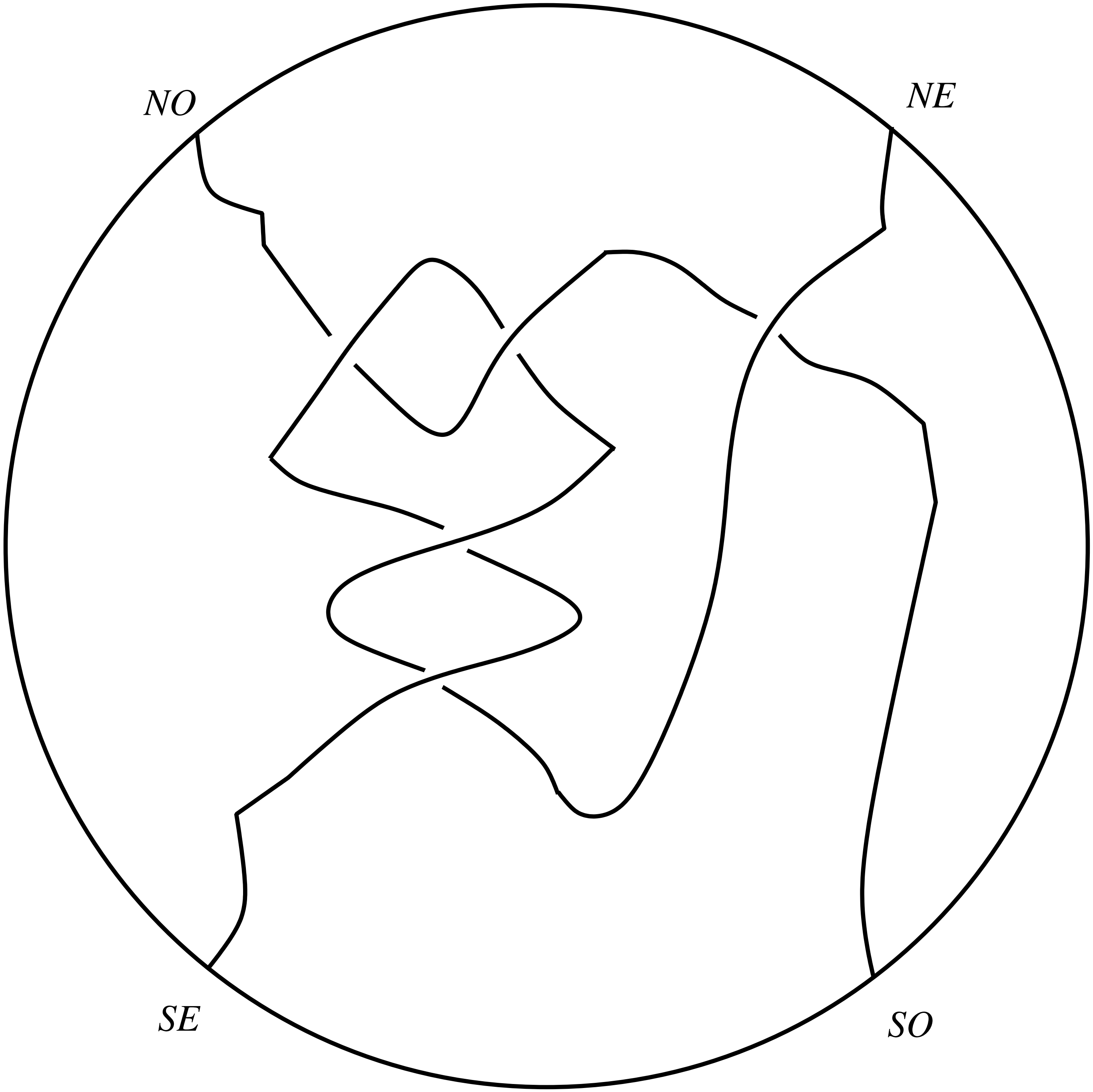
Ahora dentro de cada bolita de un mapa básico vamos a poner un <u>tangle racional</u>

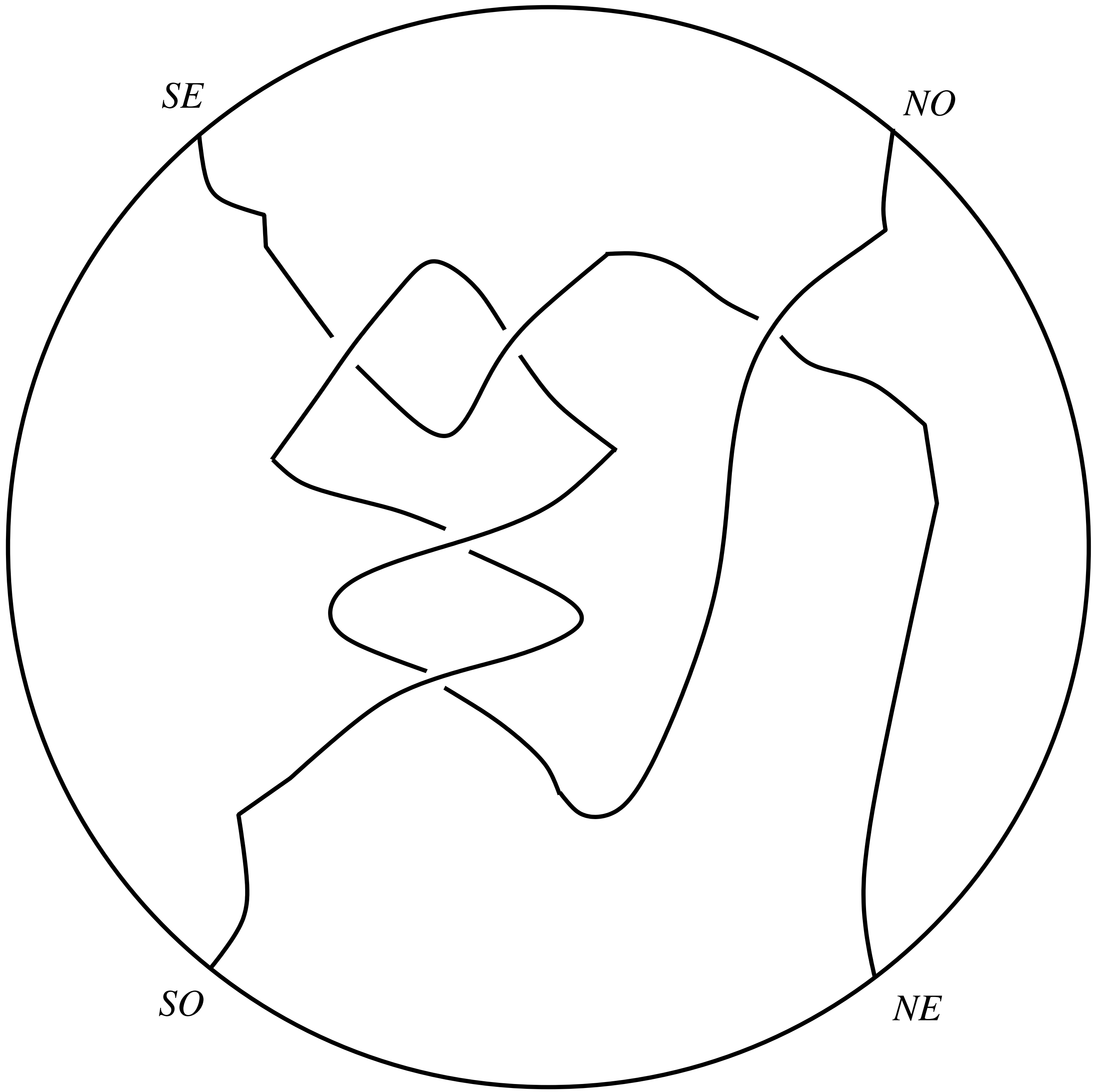
Conway

¿...?

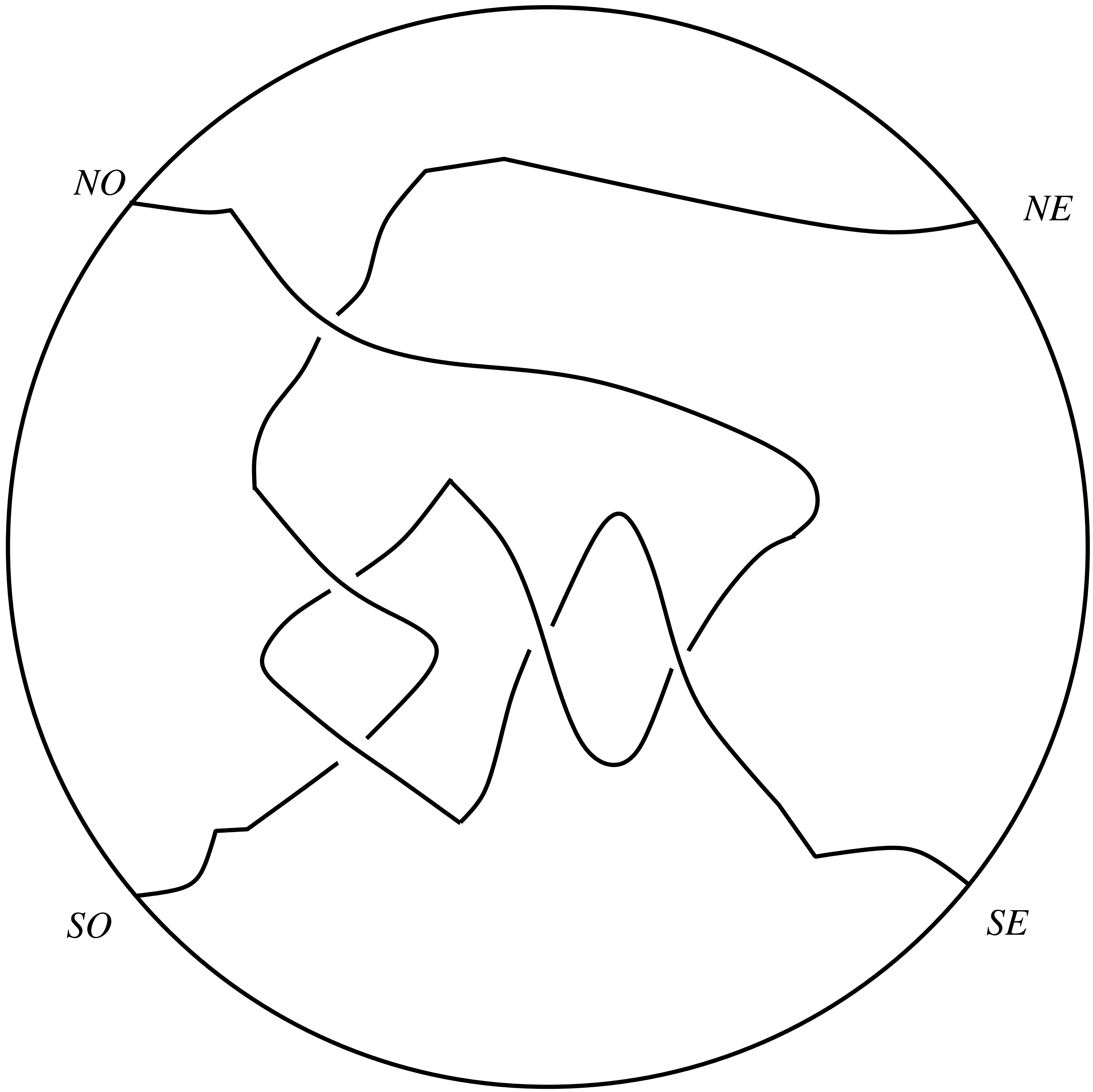
Definición. Un tangle (un 2-tangle) es una bola tridimensional junto con dos arcos ajenos propiamente encajados en la bola y con los extremos de los arcos marcados con las etiquetas NO, NE, SO y SE:

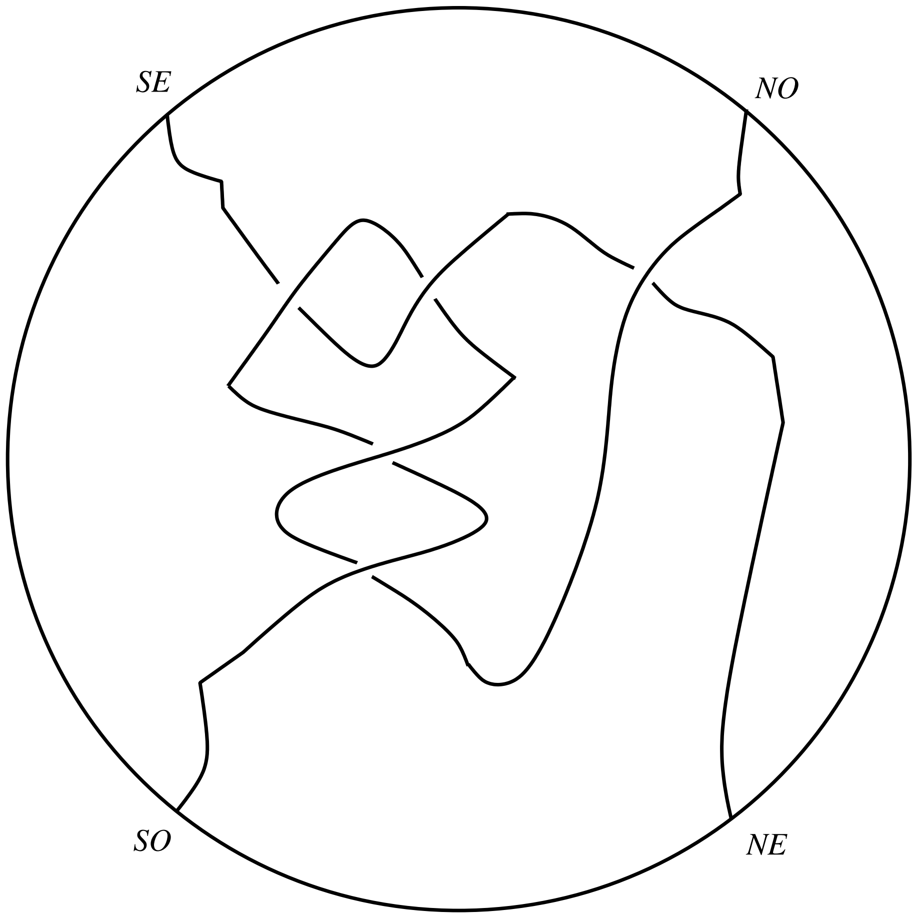


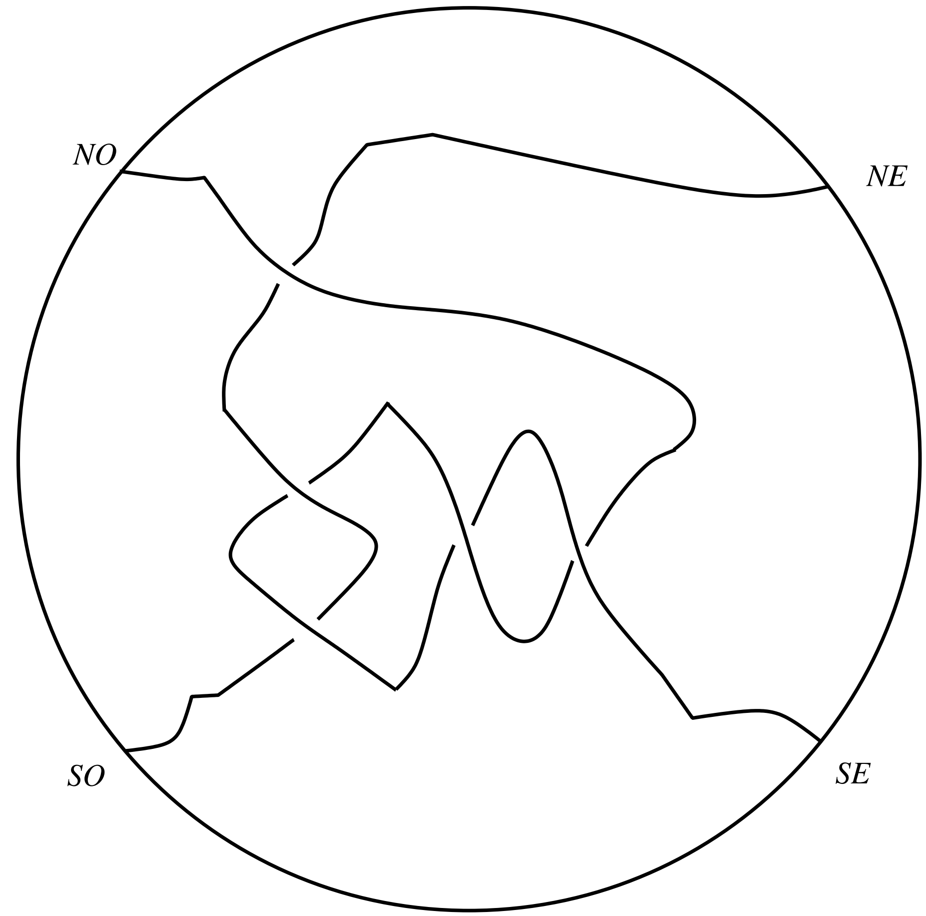

NO
NE
SE
SO



SE
NO
SO
NE


NO
NE
SO
SE


SE
NO
SO
NE


NO
NE
SO
SE

(A un tangle también se le llama un "ovillo", una "maraña", una "madeja"..., pero ninguno de estos nombres me gusta.)

Tomamos dos números enteros p y q de tal manera que la fracción $\frac{p}{q}$ esté reducida.

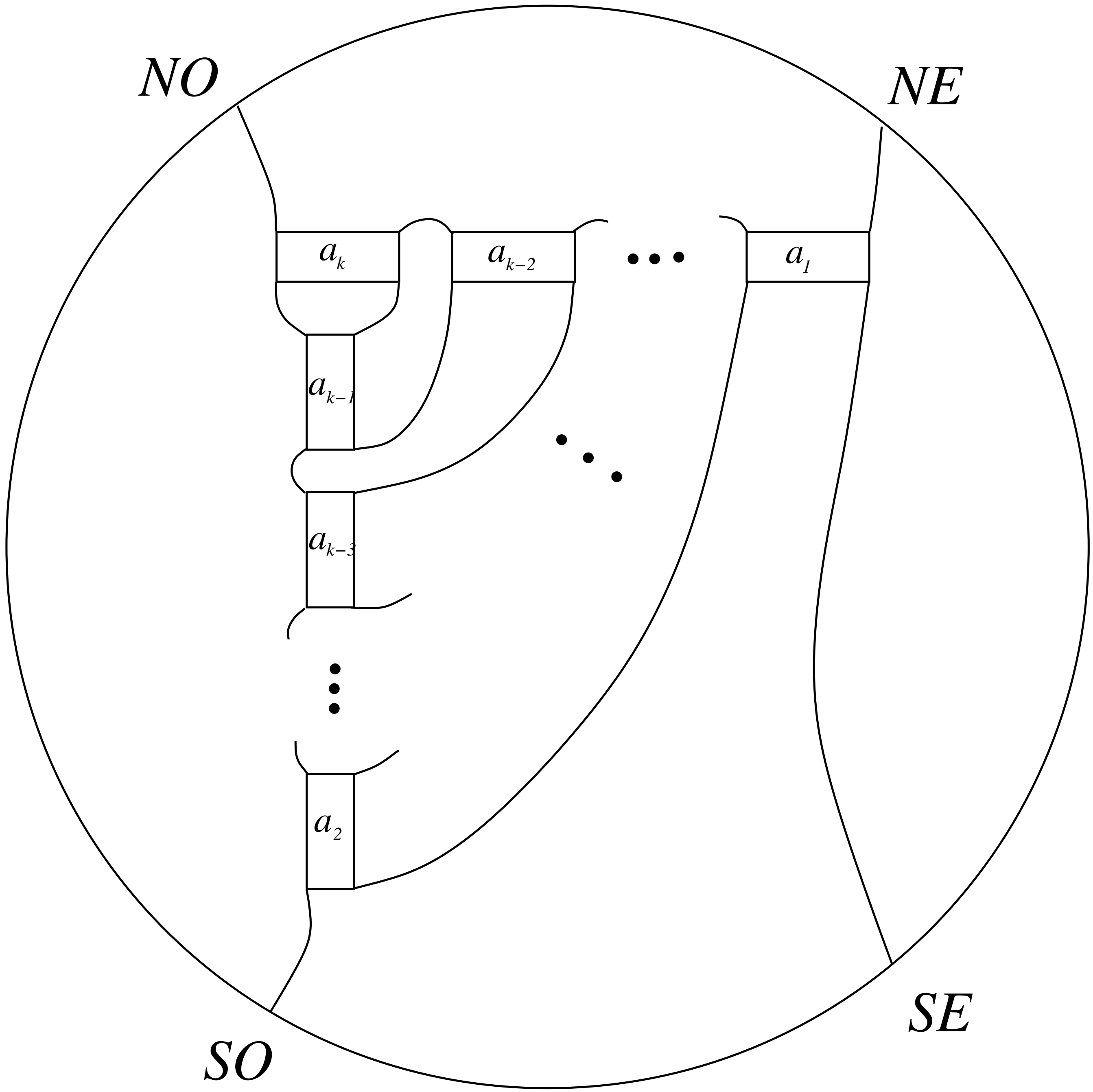
Por ejemplo, 7 y 5 otra vez.

Escribimos $\frac{p}{q}$ como fracción continua

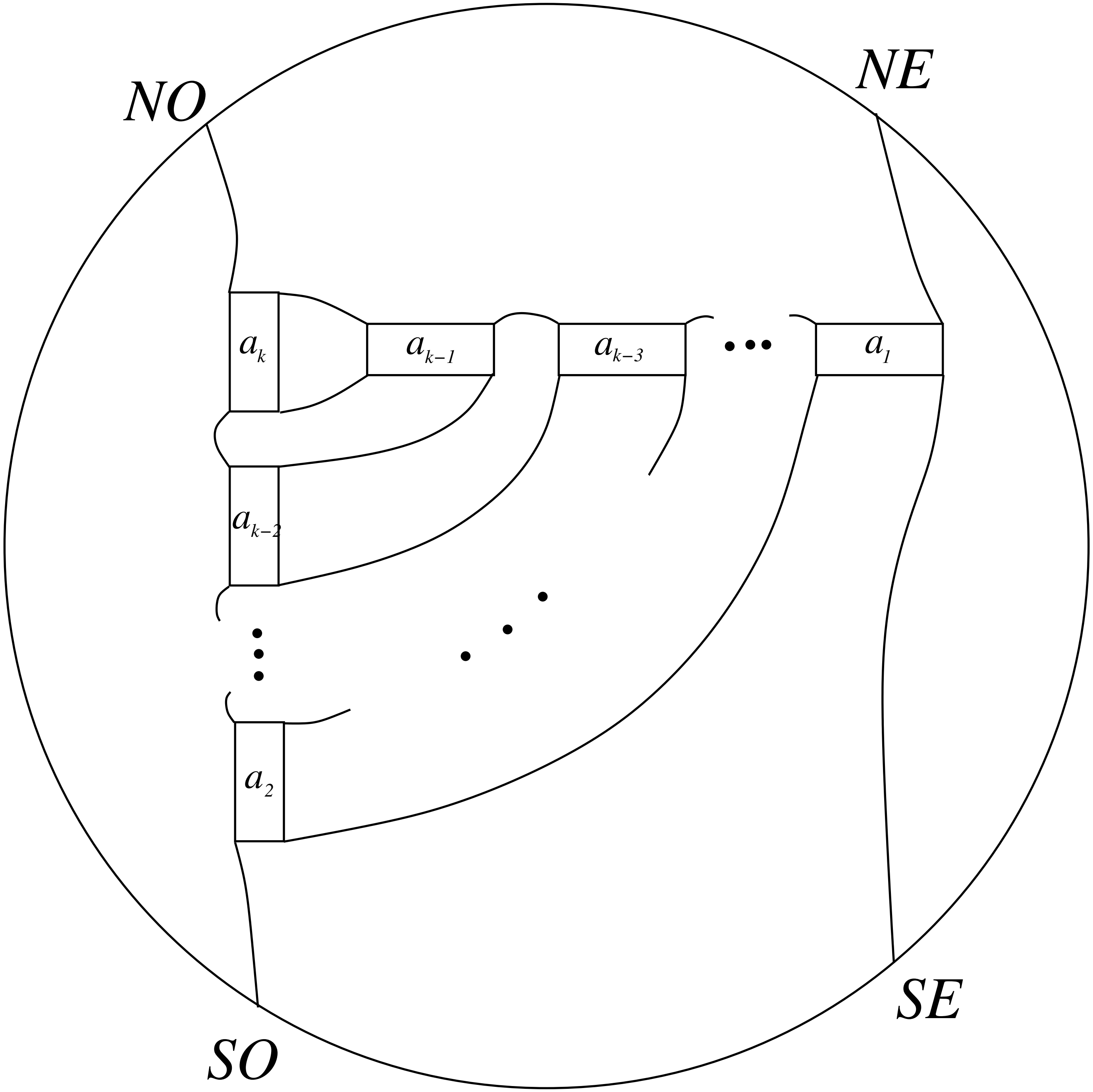
$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_k}}}$$

Por ejemplo $\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}}$

Y dibujamos:



k impar



k par

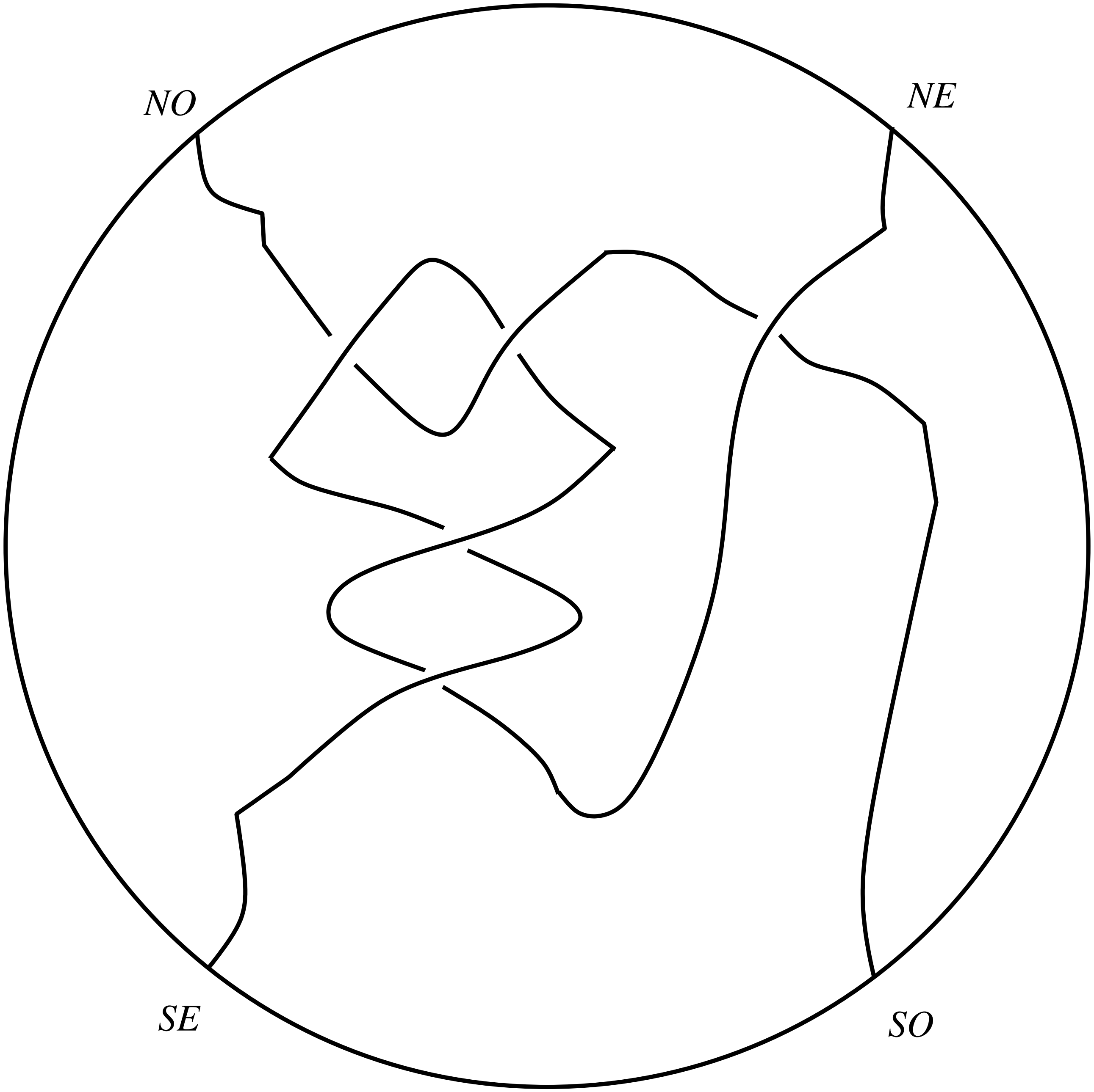
El diagrama anterior se llama

el tangle racional $\frac{p}{q}$,

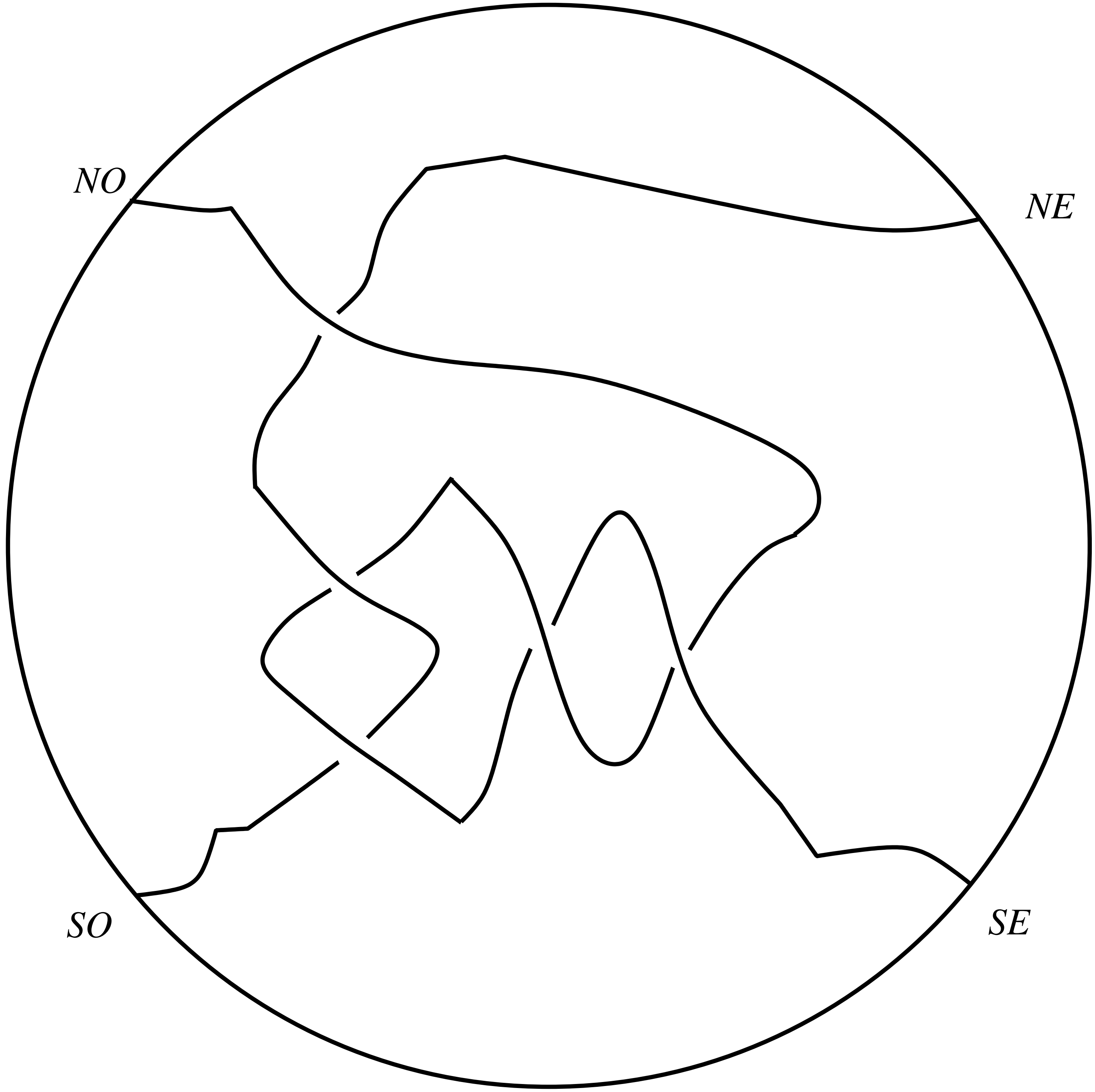
o bien,

el tangle racional $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$.

(se pide que $a_k \neq 0$)

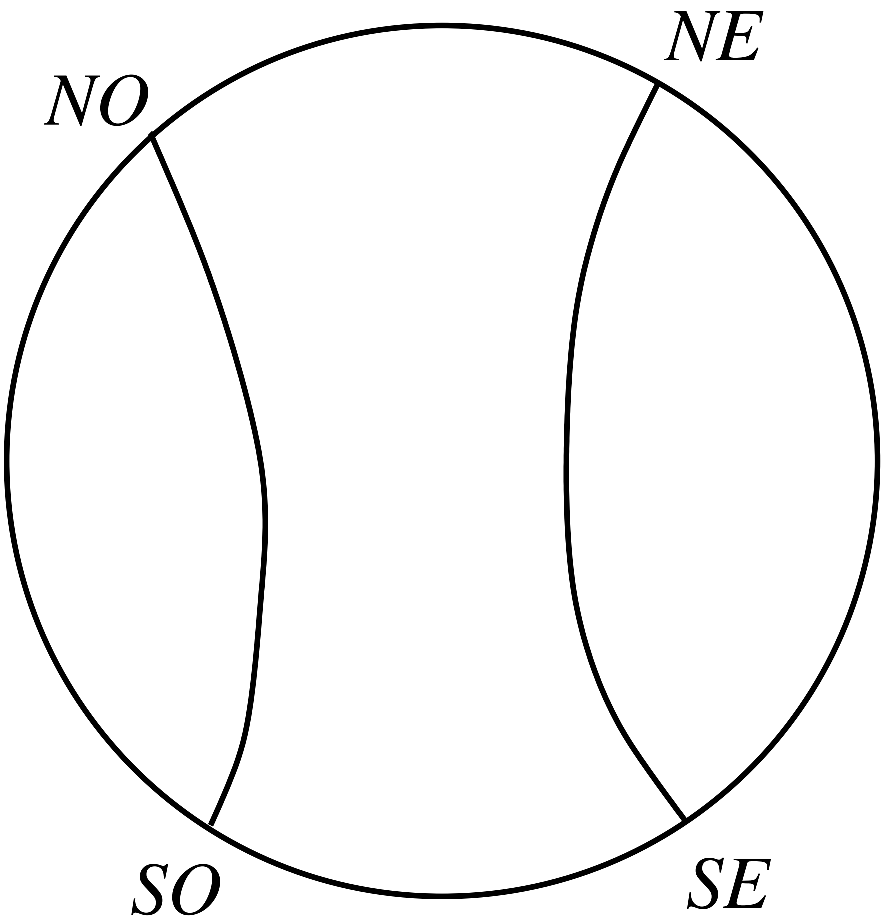


El tangle racional $\frac{7}{5}$

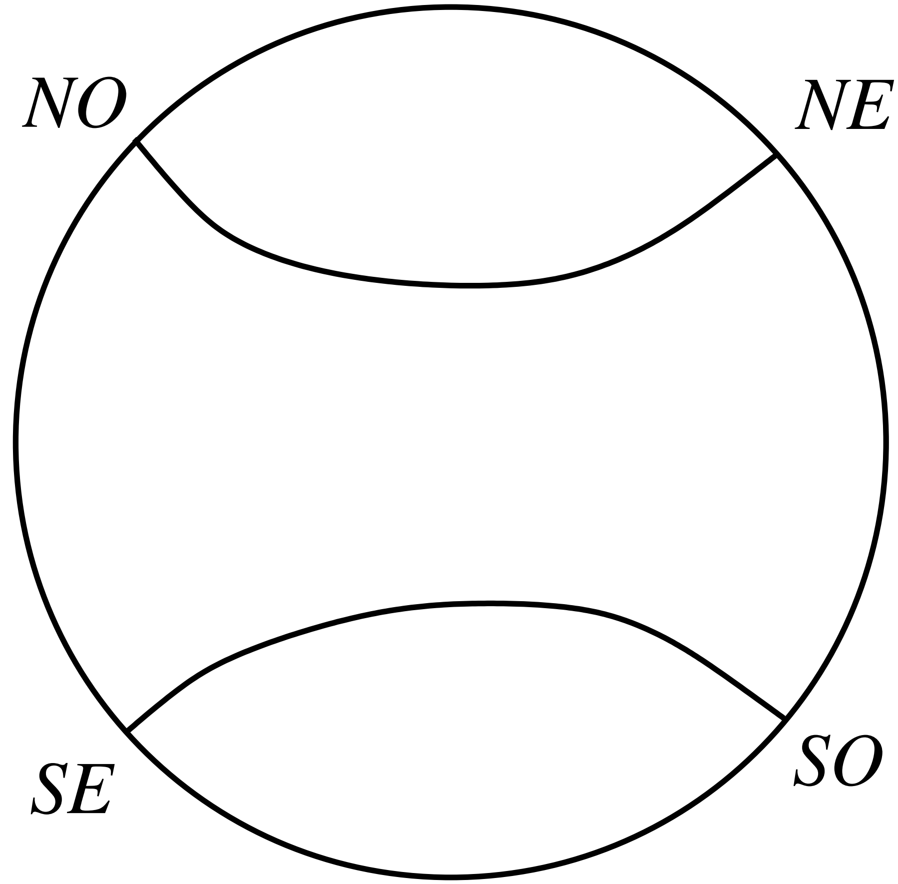


NO
NE
SO
SE

Hay dos casos especiales:



El tangle $\frac{0}{1}$



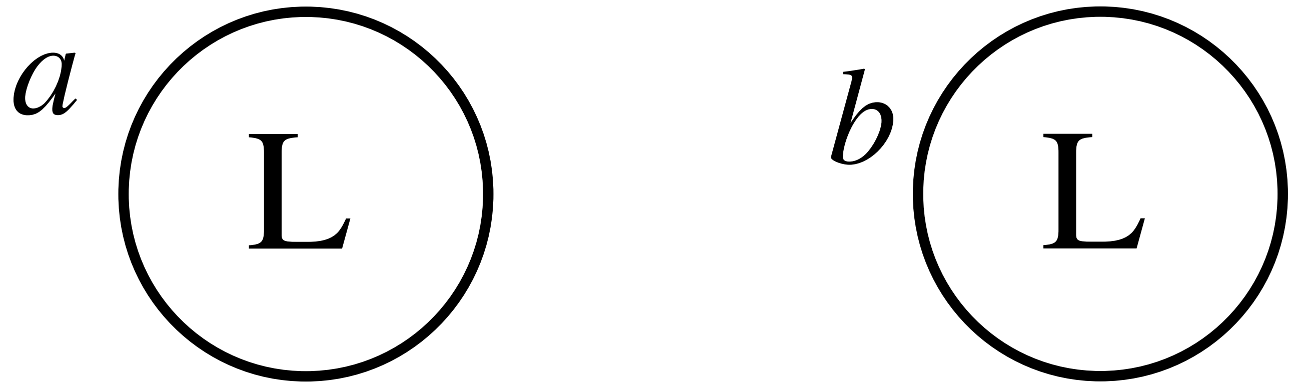
El tangle $\frac{1}{0}$

Definición. Dos tangles son equivalentes si se puede pasar de uno al otro con una sucesión finita de movidas de Reidemeister I, II y III dentro de la bola (sin tocar la frontera de la bola).

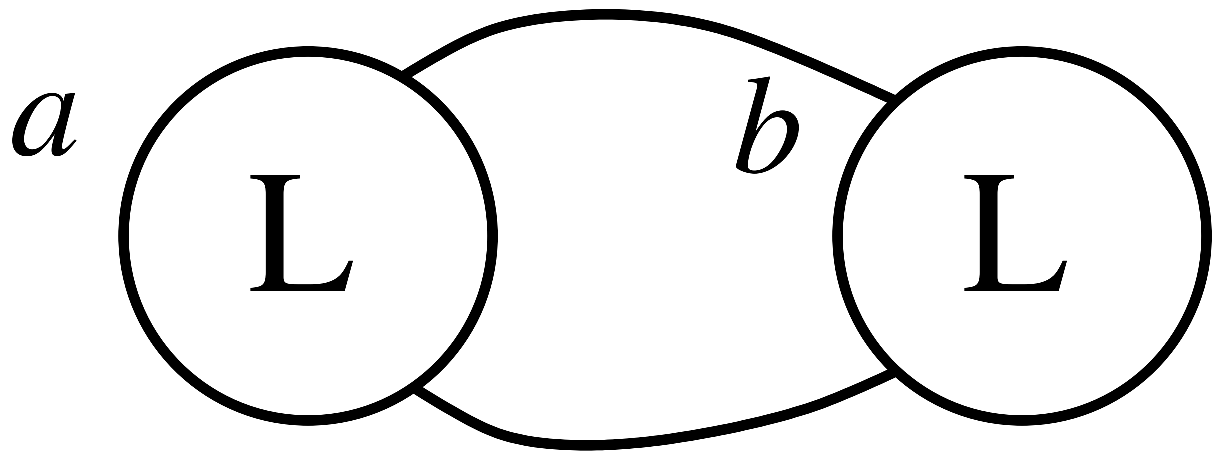
Se puede probar que dos tangles racionales son equivalentes si y sólo si las fracciones continuas que los definen son el mismo número racional, o ambos son $\frac{0}{1}$, o ambos son $\frac{1}{0}$

(no es muy difícil, pero hay que meterse con algo de teoría de los números, topología, inducción...)

Supongamos que tenemos dos tangles a y b

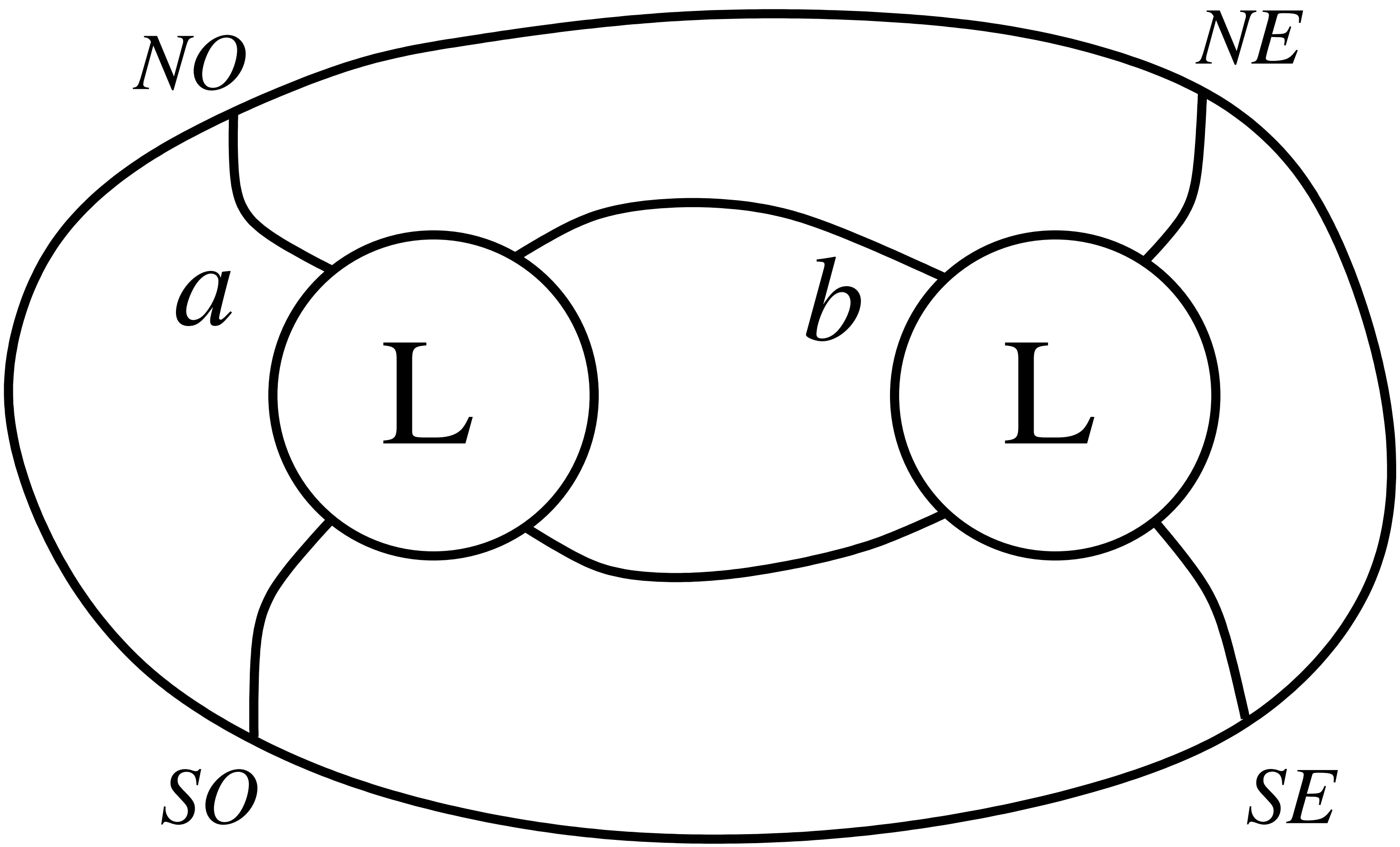


Podemos formar su suma:



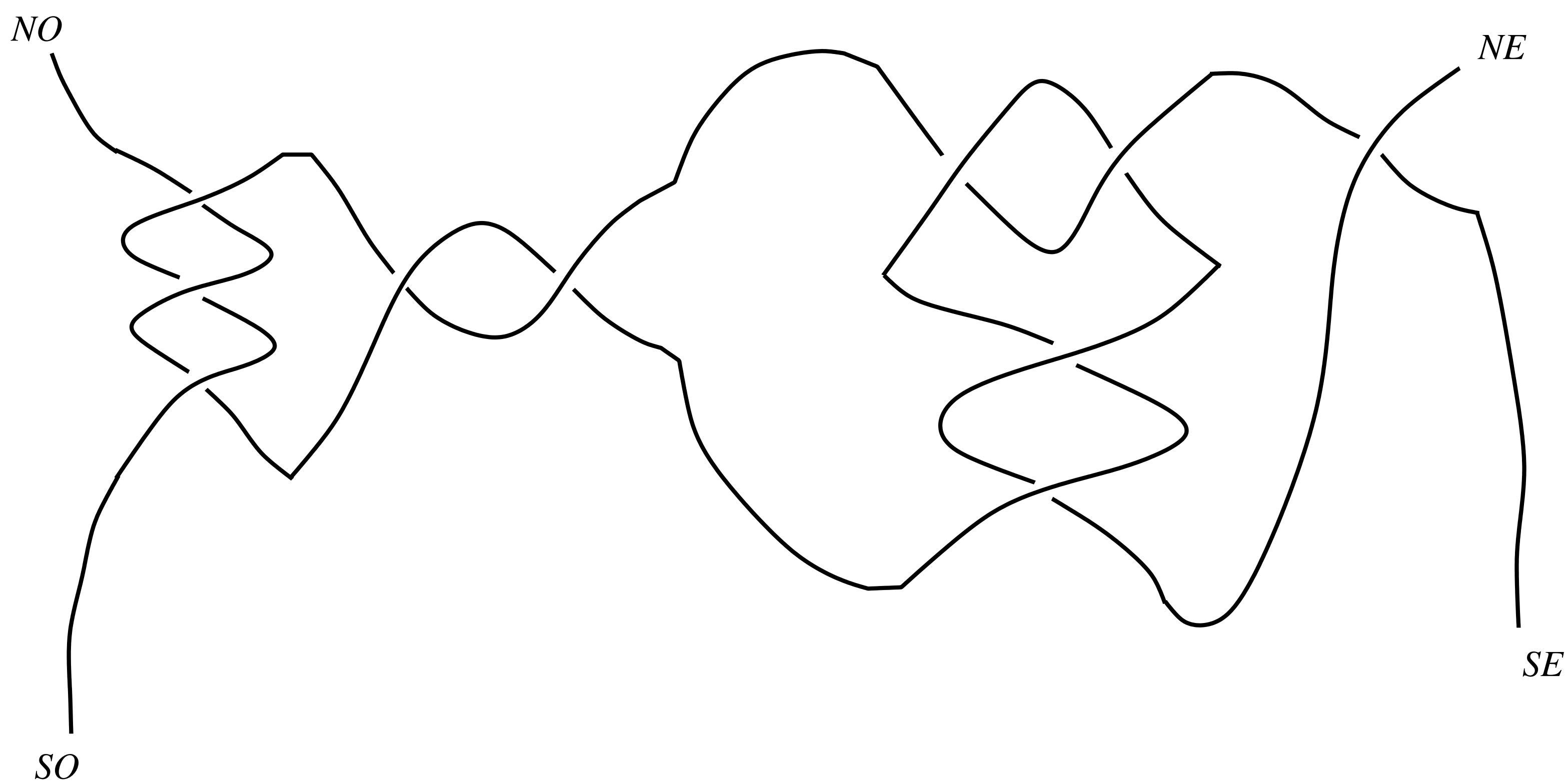
$$a+b$$

O sea:



$a+b$

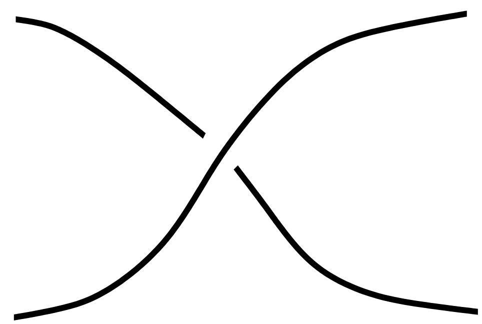
Nótese que la suma de dos tangles racionales es... Bueno, no tiene por qué ser un tangle racional



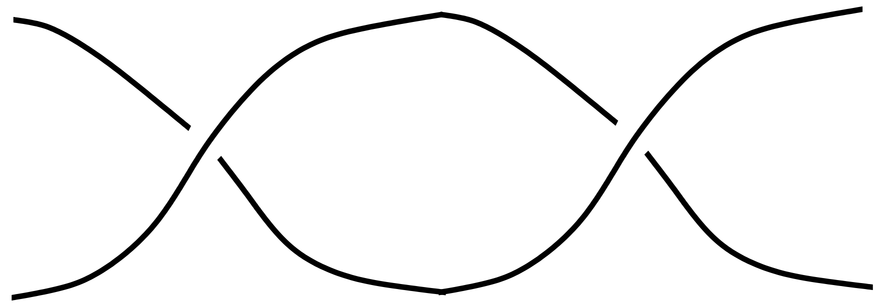
$$\frac{7}{3}+\frac{7}{5}$$

Y la suma tampoco es conmutativa.

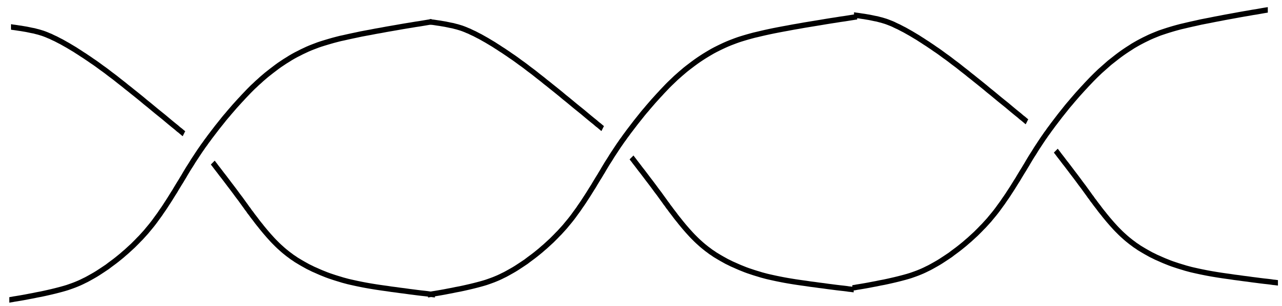
El tangle $1 = \frac{1}{1}$:



$\mathbf{1}$



$$1 + 1 = 2$$

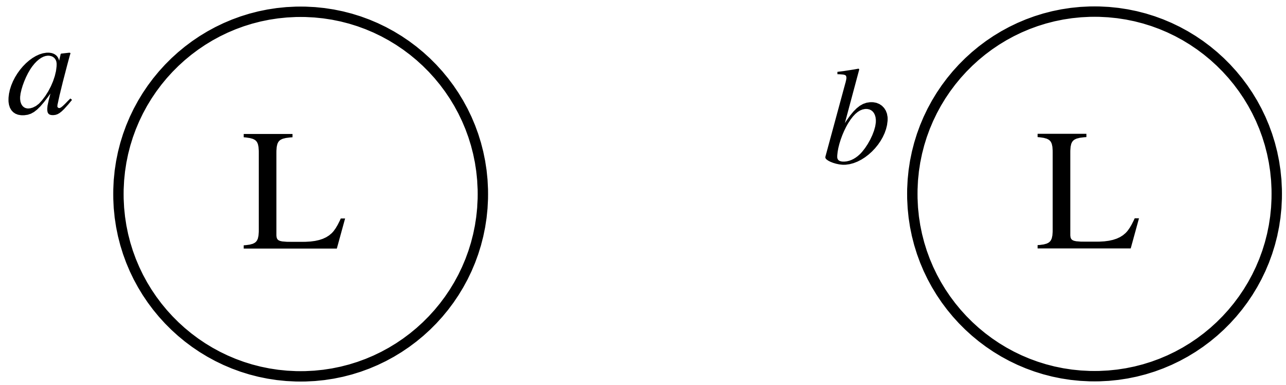


$$1+1+1=3$$

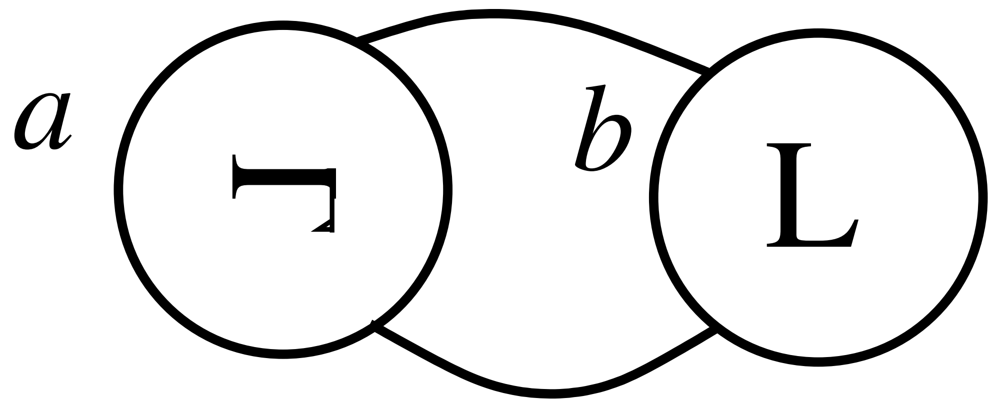
En general

$$\overbrace{1 + \cdots + 1}^{n \text{ veces}} = n$$

Supongamos que tenemos dos tangles a y b

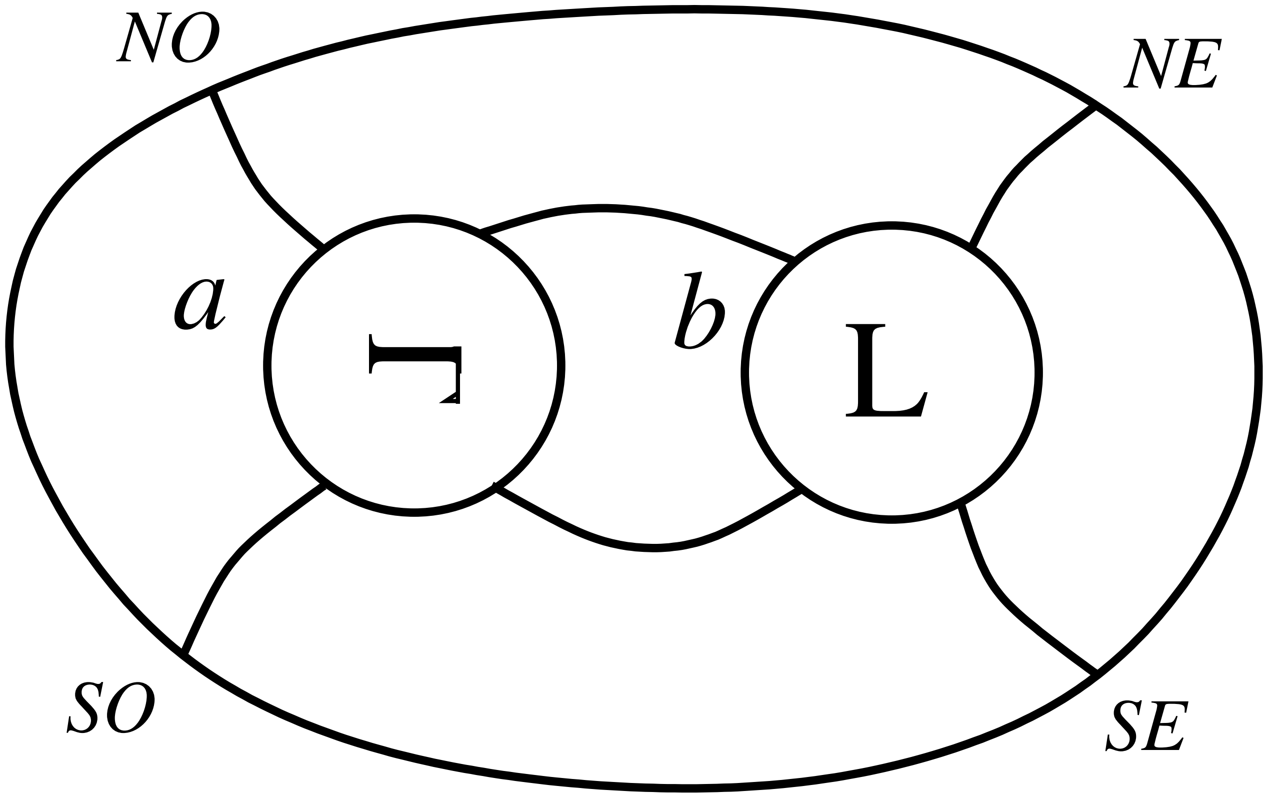


Podemos formar su producto:

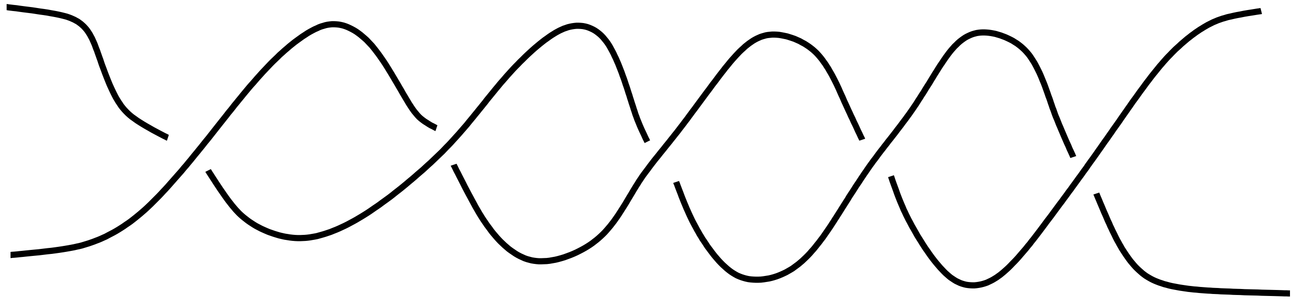


$$(ab)$$

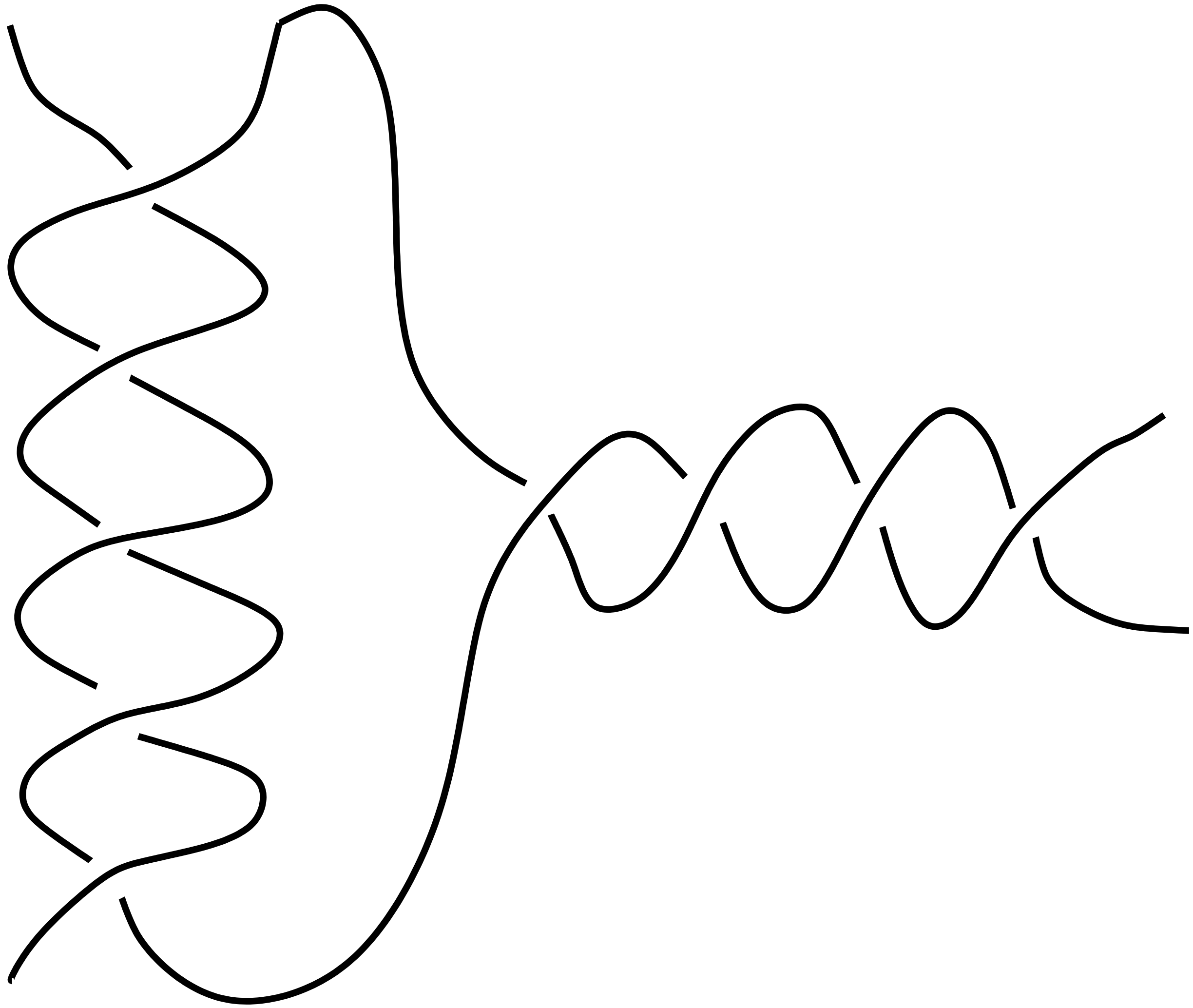
O sea:



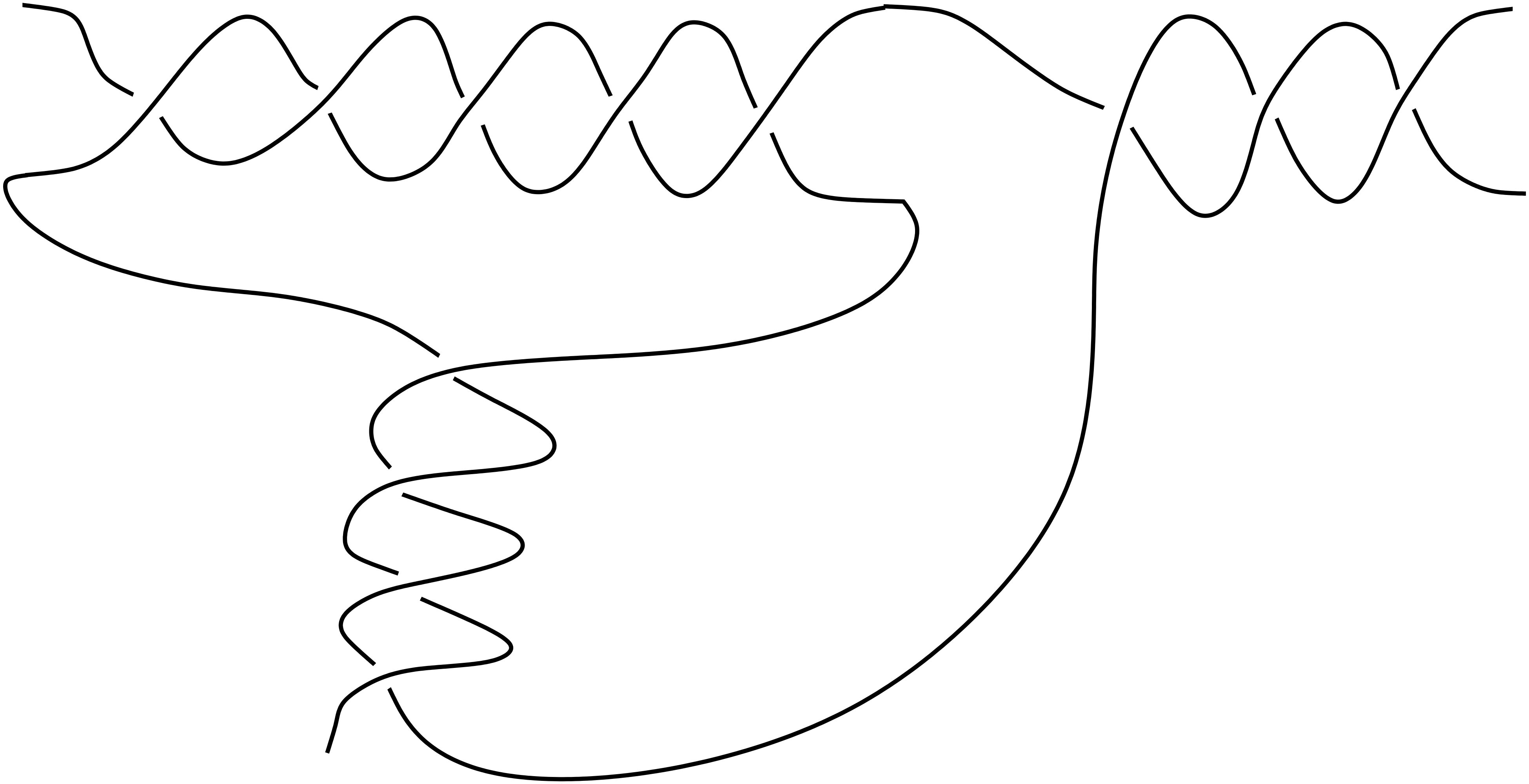
(ab)



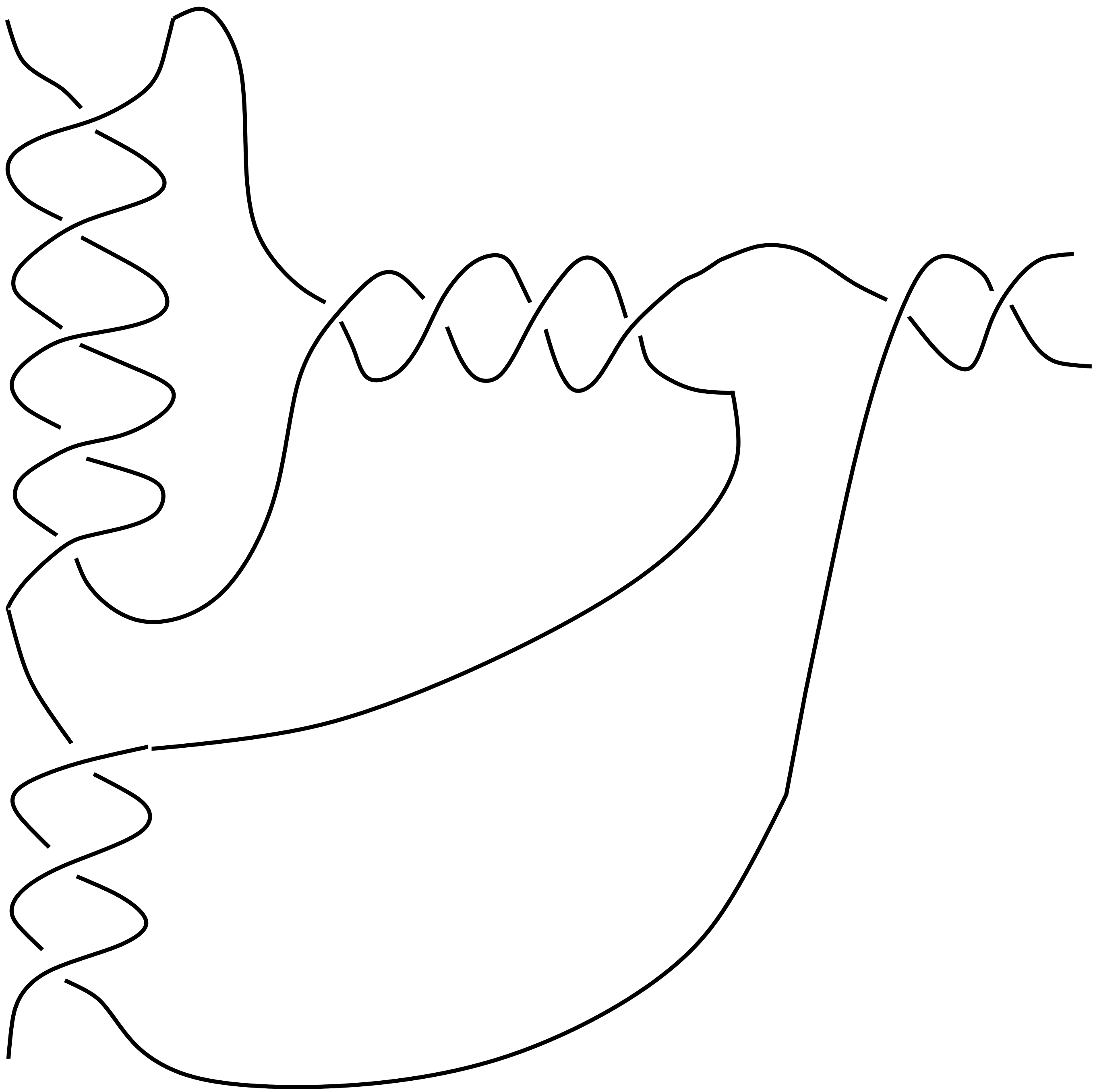
5



(54)



((54)3)



(((54)3)2)

En general

$$((\cdots((a_k a_{k-1})a_{k-2})\cdots a_2)a_1) = [a_1, a_2, \ldots, a_k]$$

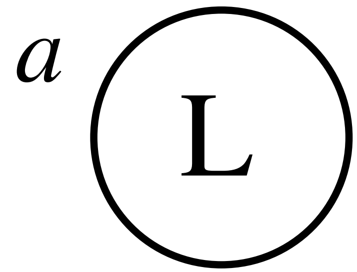
(Conway abrevia

$$((\cdots((a_k a_{k-1})a_{k-2})\cdots a_2)a_1) = a_k a_{k-1}\cdots a_2 a_1,$$

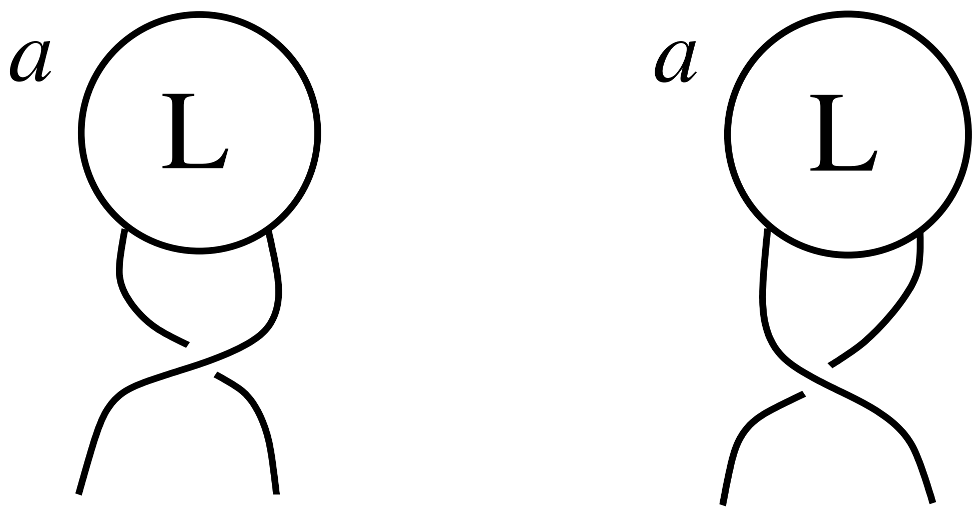
que parece contrario a nuestros convenios.)

Una última operación:

Supongamos que tenemos un tangle a:



Podemos formar los tangles



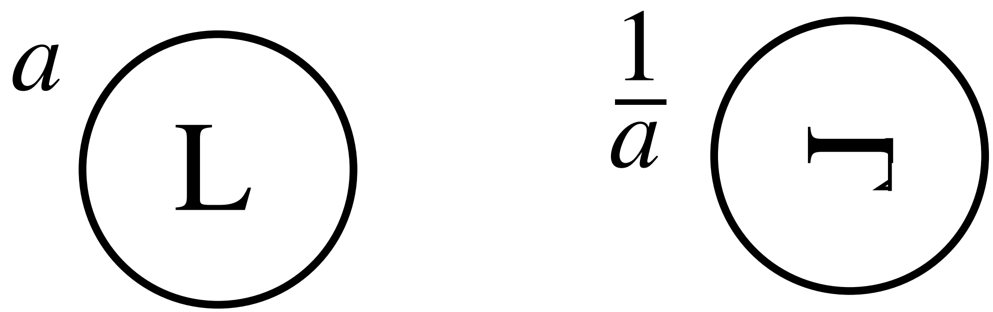
$a+$ $\qquad$ $a-$

Definición. Cualquier tangle que se obtiene de los tangles 0 o ∞ mediante una sucesión finita de las operaciones anteriores se llama un tangle algebraico.

(una operación extra:

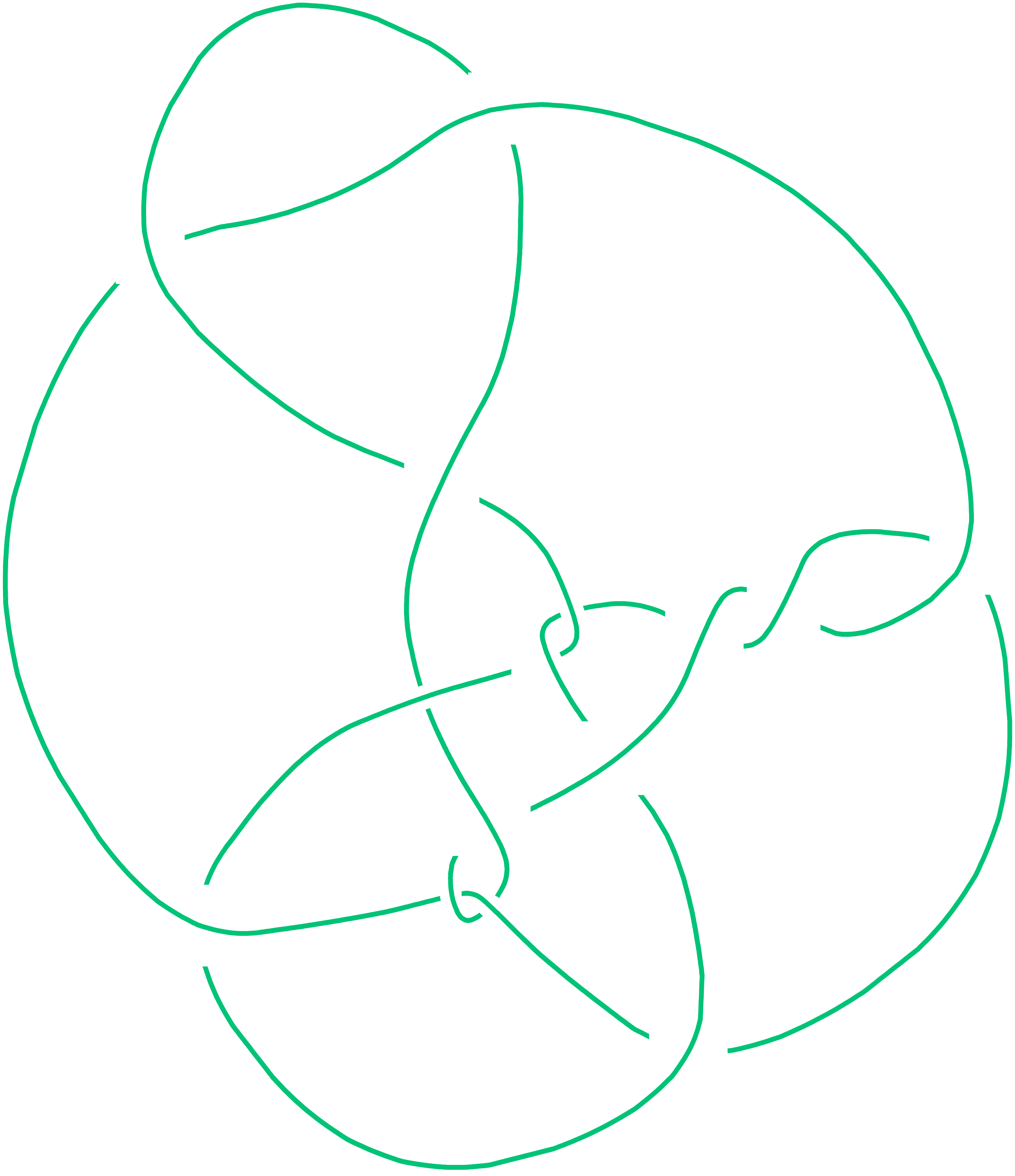
)

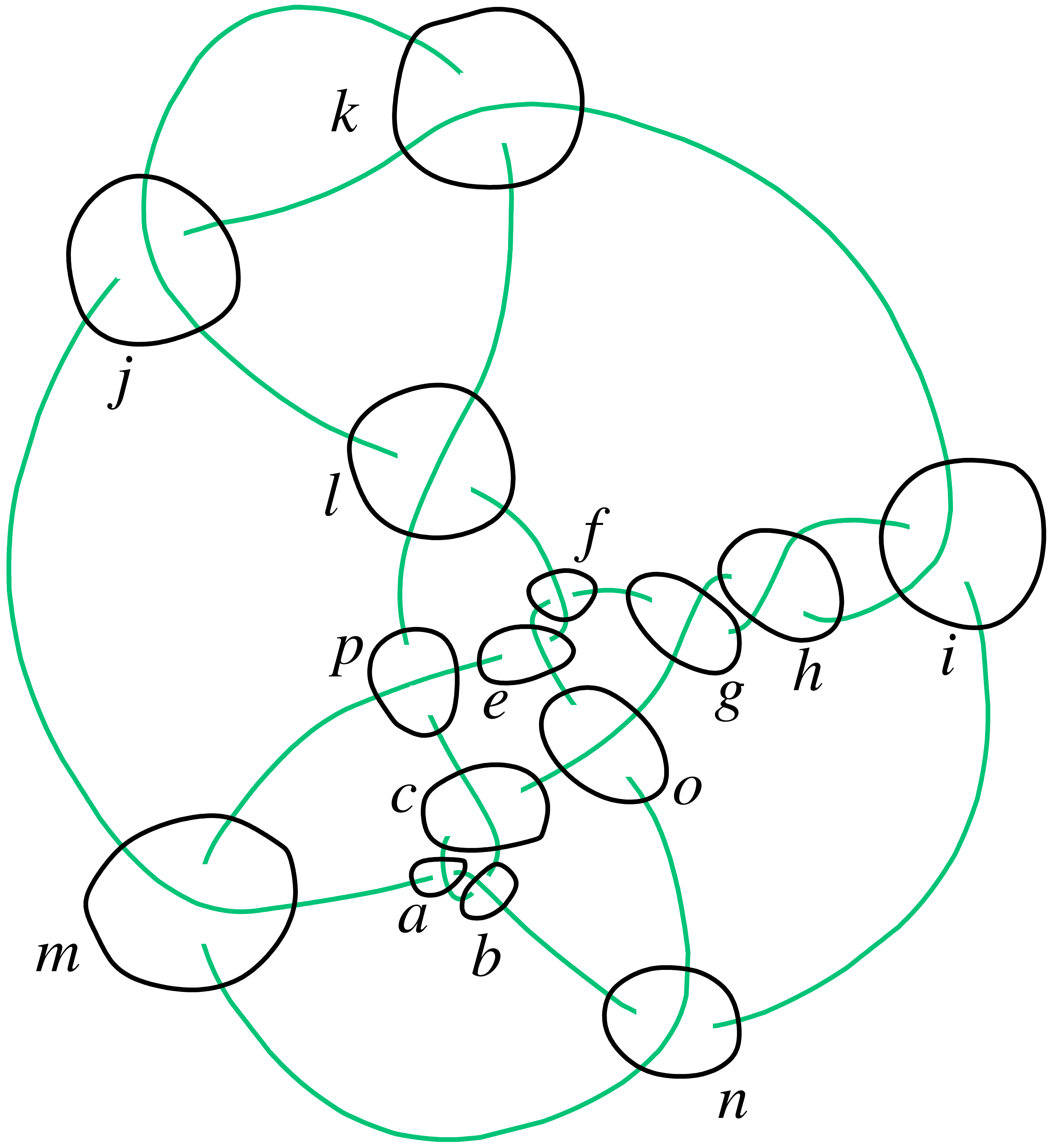
(otra operación extra:

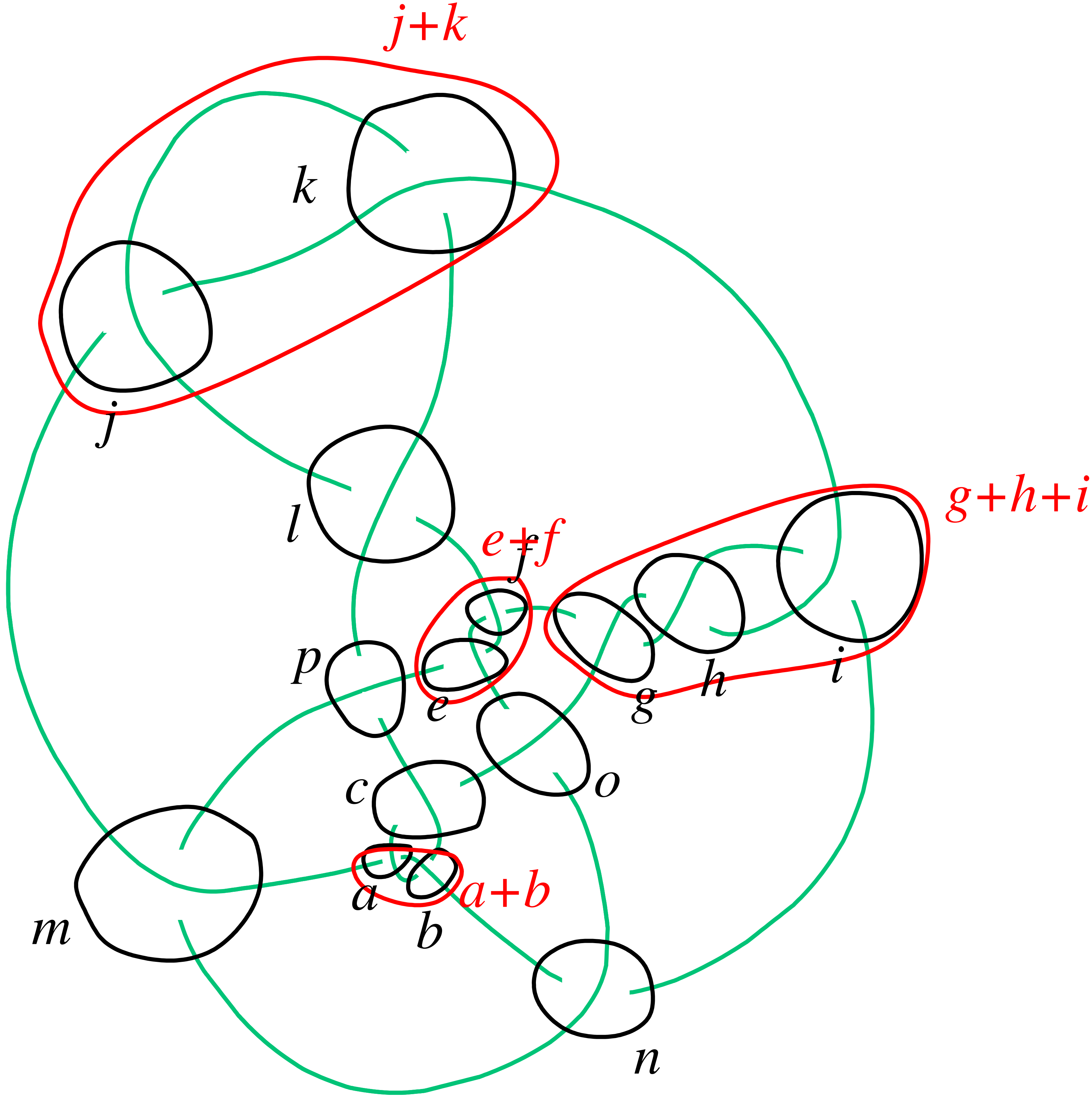


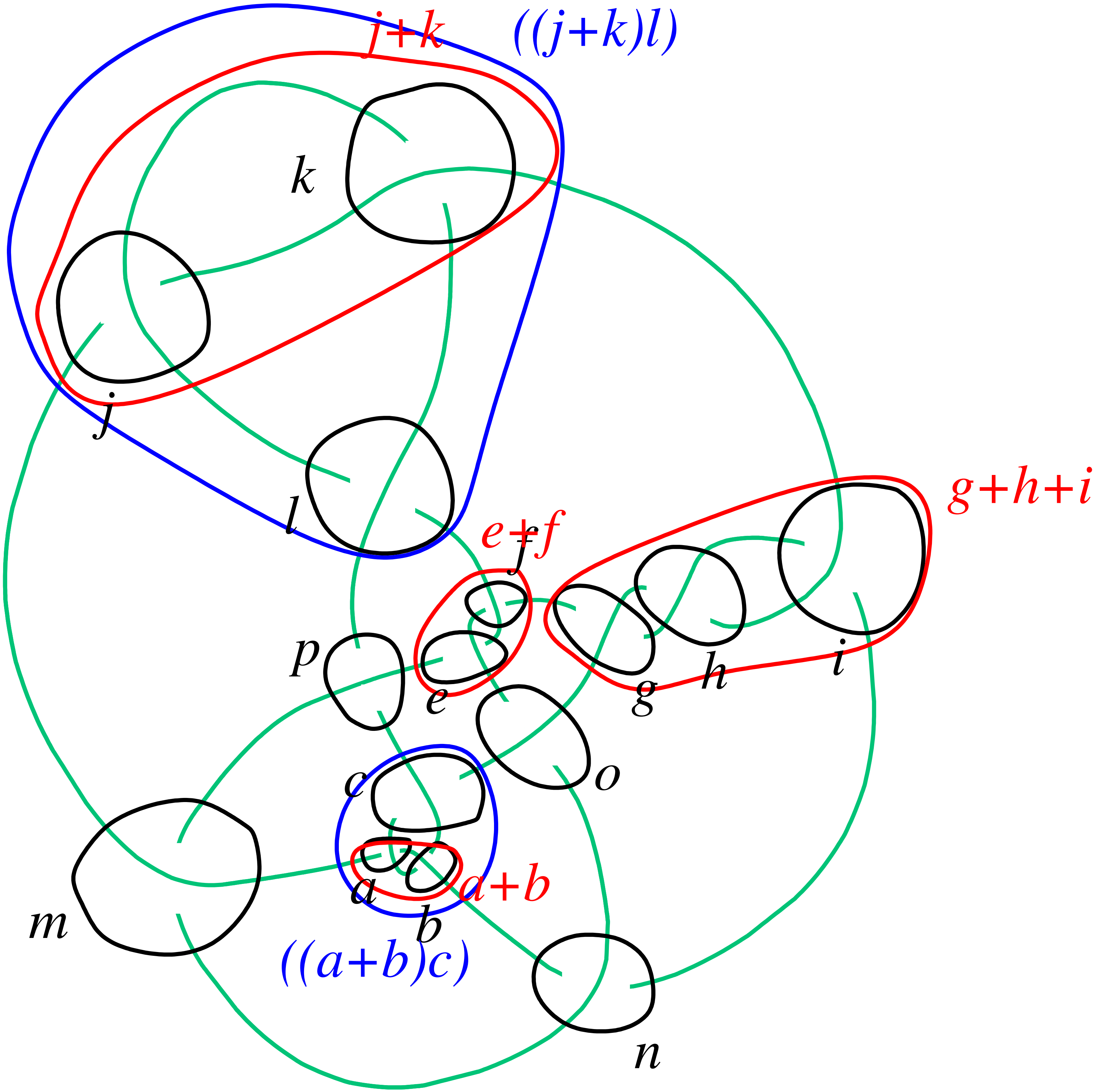
)

Observación. Todo diagrama de nudo se puede obtener de un mapa básico al sustituir con tangles algebraicos los vértices del mapa.

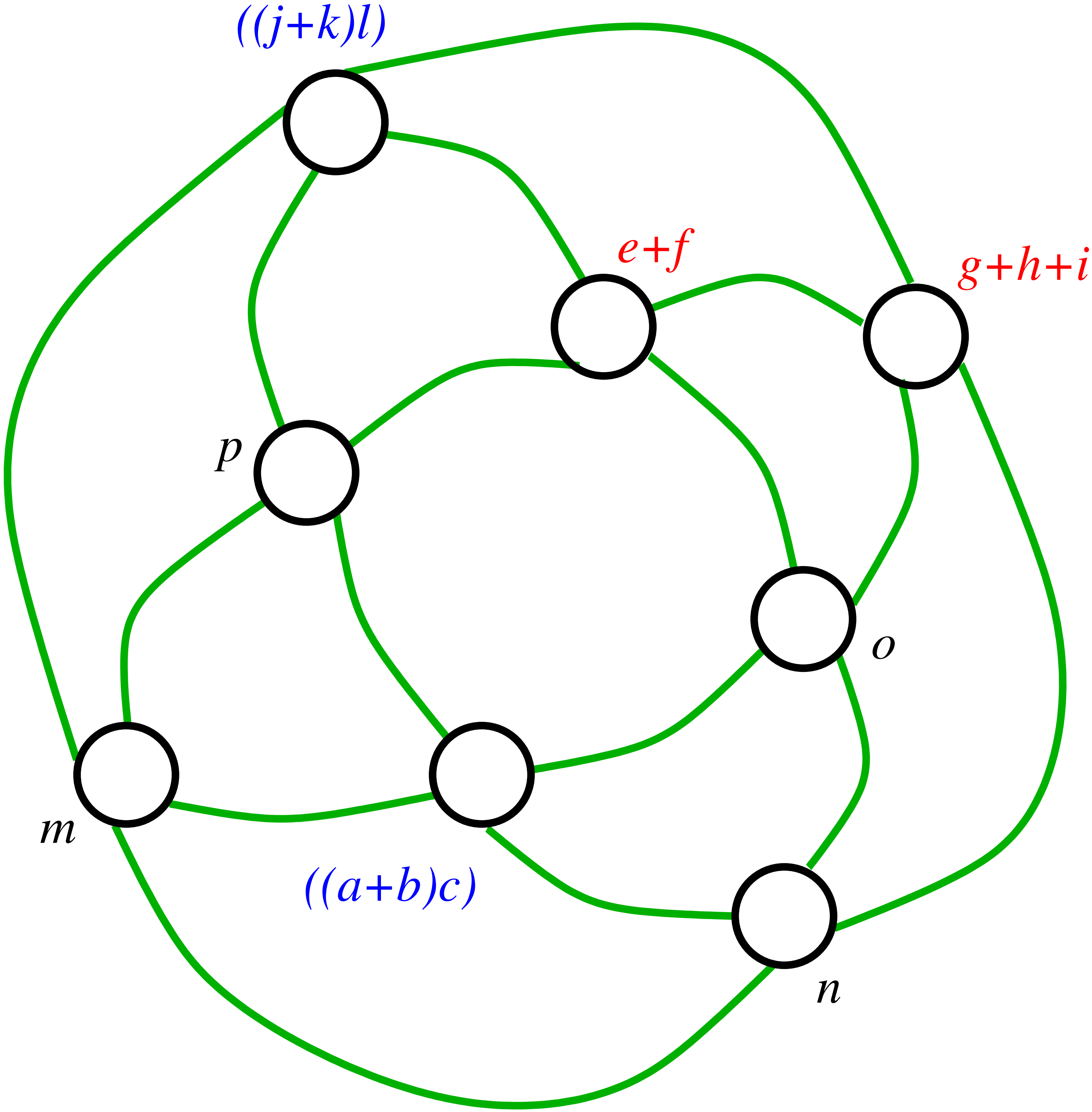



k
j
l
f
i
p
e
g
h
c
o
m
a
b
n


j+k
k
j
l
e+f
f
p
e
g+h+i
g
h
i
c
o
a
b
a+b
m
n

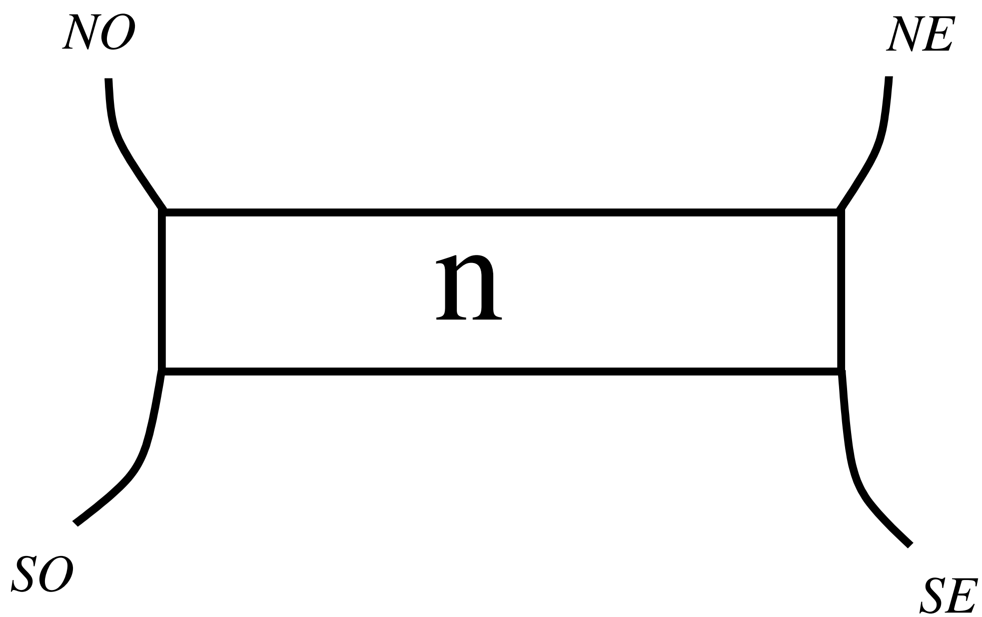


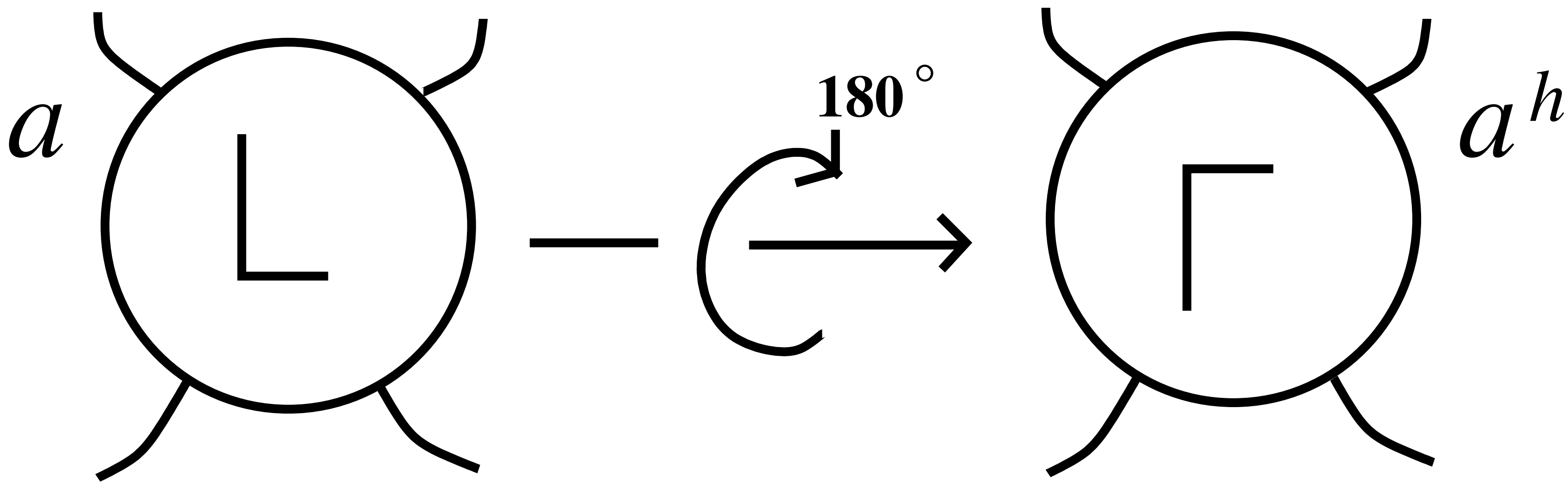
j+k
((j+k)l)
k
j
l
e+f
f
g+h+i
p
e
g
h
i
c
o
a+b
a
b
m
((a+b)c)
n



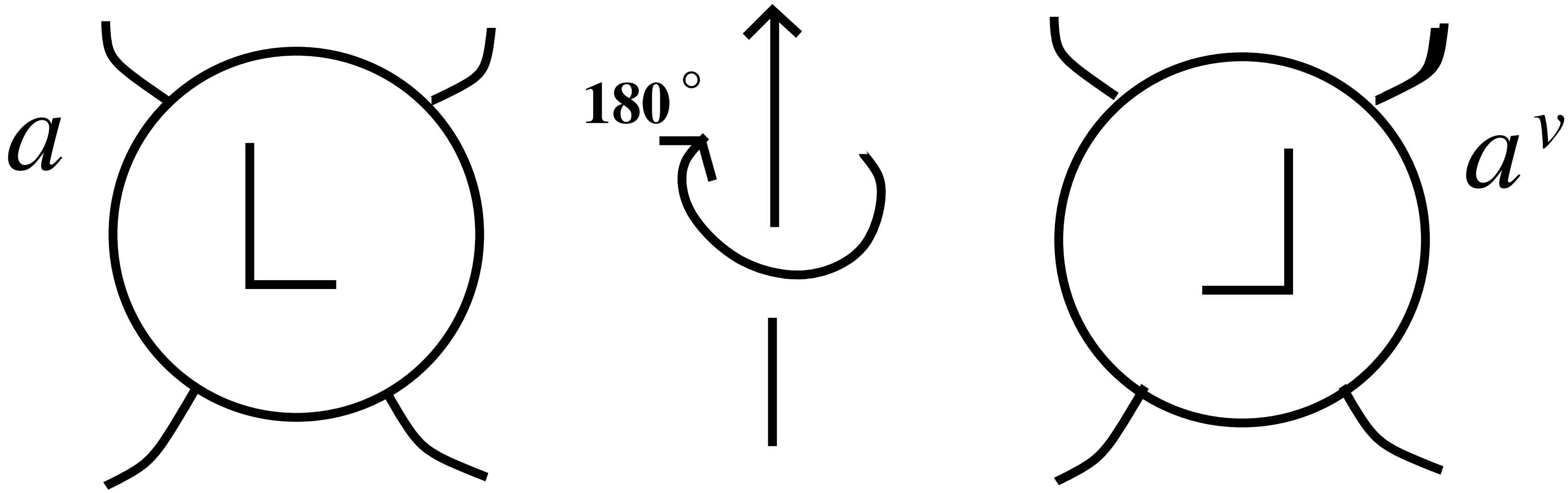
((j+k)l)
e+f
g+h+i
p
o
m
((a+b)c)
n

Notación. Vamos a escribir $[n]$ para el tangle





vuelta horizontal



vuelta vertical

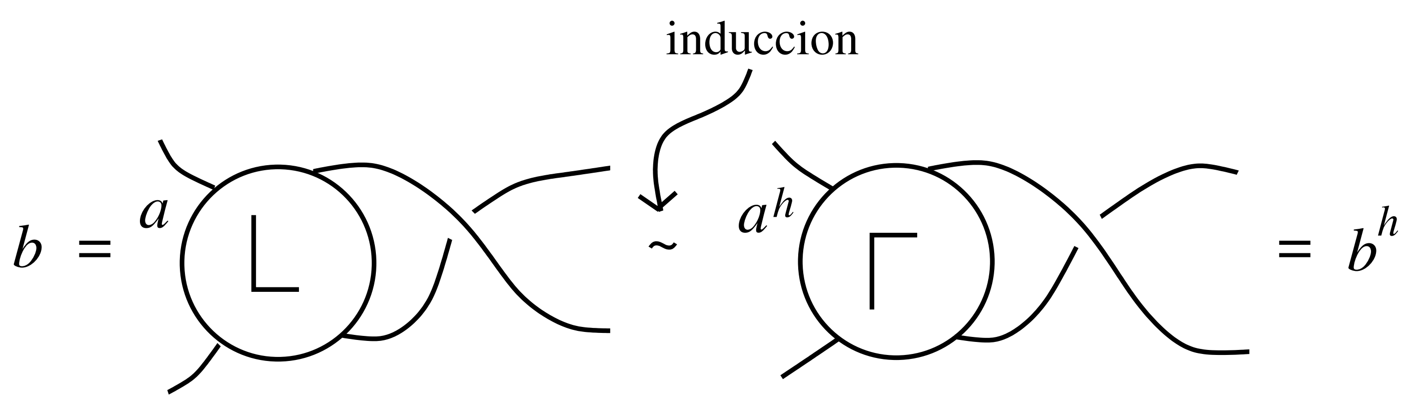
Lema. *Si a es un tangle racional, entonces $a \sim a^h$ y $a \sim a^v$.*

Dem. Por inducción sobre el número de cruces de a.

Como $[0] \sim [0]^h$, $[\infty] \sim [\infty]^h$, y $[\pm 1] \sim [\pm 1]^h$ y $[0] \sim [0]^v$, $[\infty] \sim [\infty]^v$, y $[\pm 1] \sim [\pm 1]^v$, tenemos el primer paso de inducción.

Supongamos que si a es un tangle racional con n cruces, entonces $a \sim a^h$.

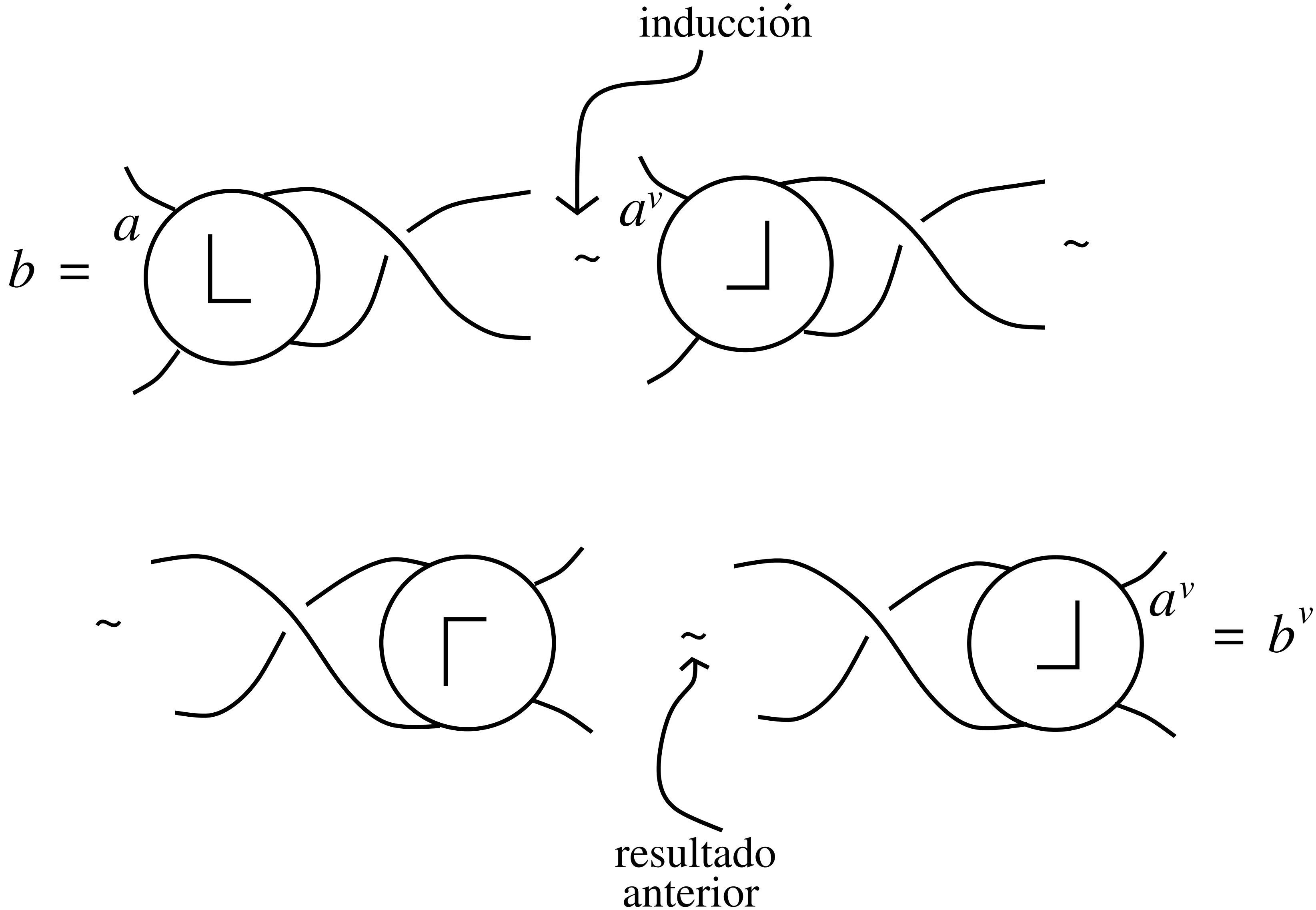
Sea b un tangle racional con $n+1$ cruces. Entonces $b = a + [\pm 1]$ para cierto tangle racional a.



Se sigue que $b \sim b^h$ para todo tangle racional b.

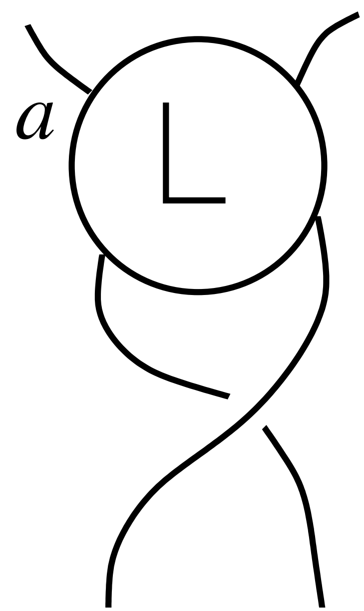
Supongamos ahora que si a es un tangle racional con n cruces, entonces $a \sim a^v$.

Sea b un tangle racional con $n+1$ cruces. Entonces $b = a + [\pm 1]$ para cierto tangle racional a.

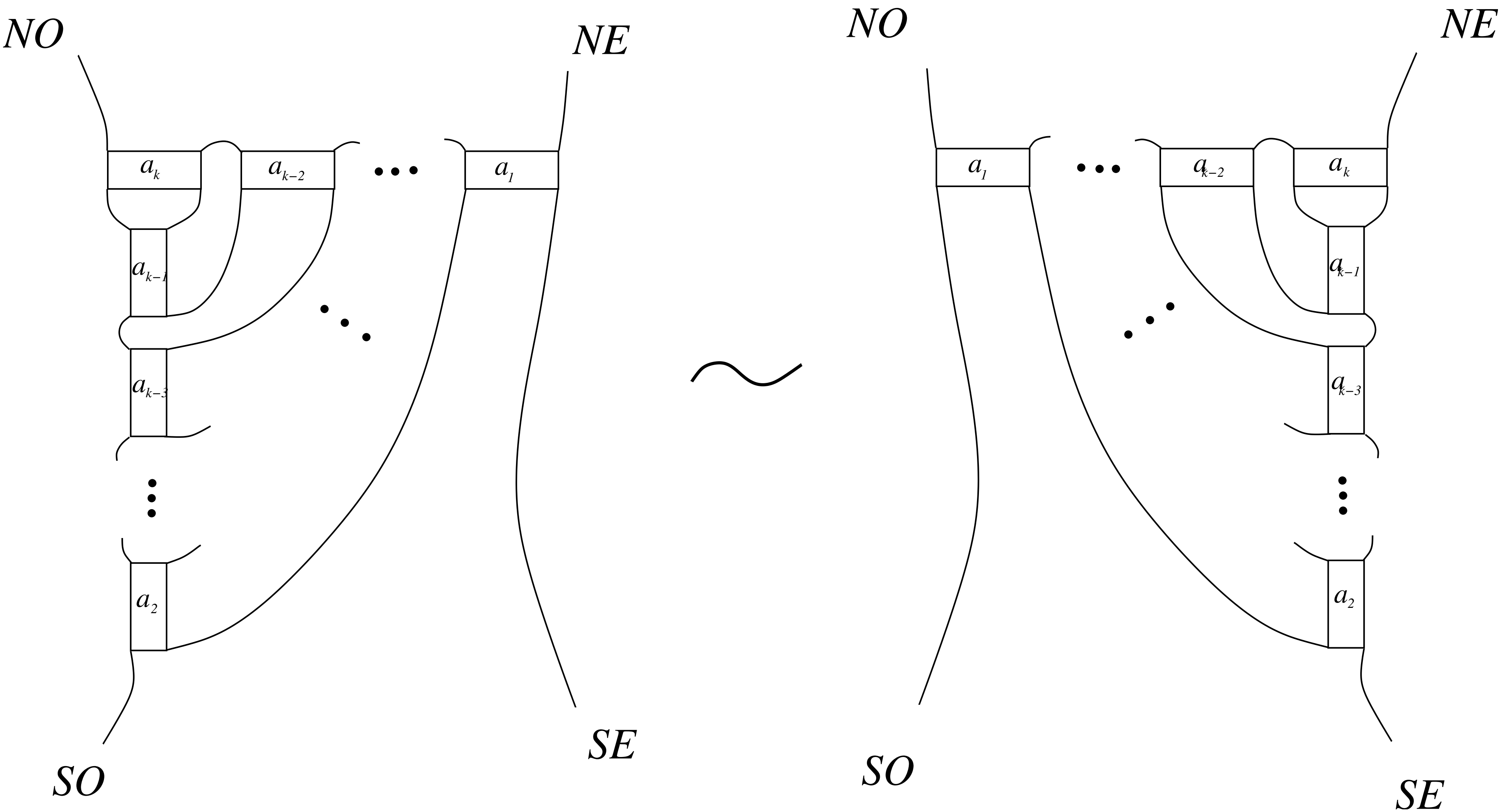


Se sigue que $b \sim b^v$ para todo tangle racional b.

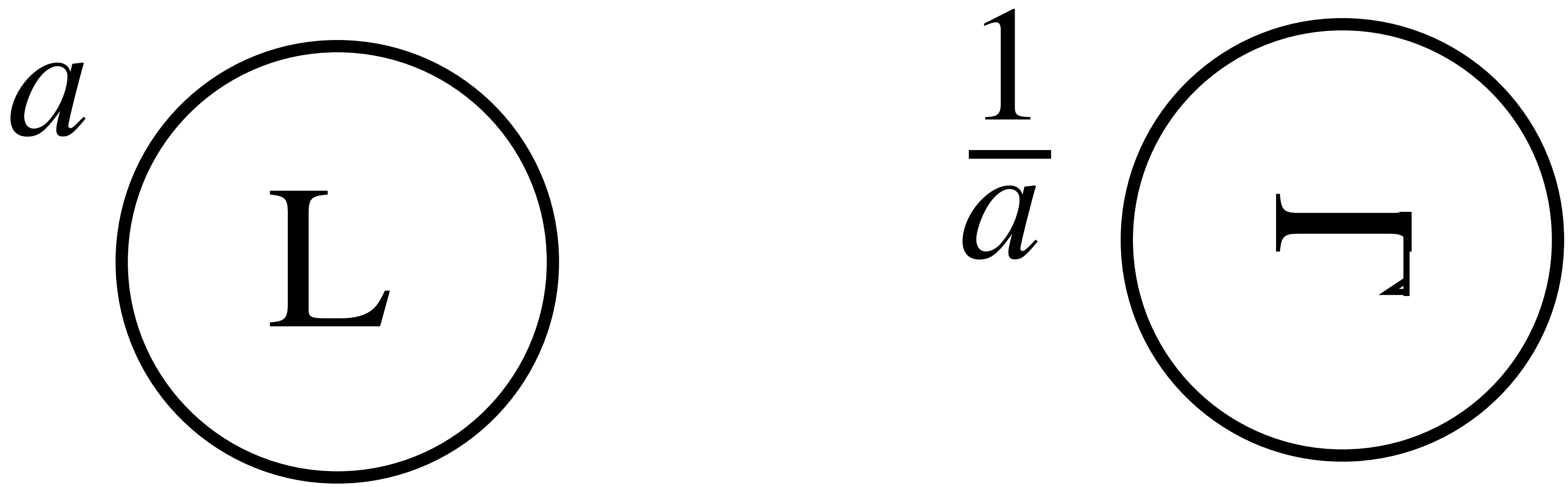
(Nótese que la demostración no está completa, pues si $b = [a_1, a_2, \ldots, a_k]$ y $a_1 = 0$, entonces

$b =$ 

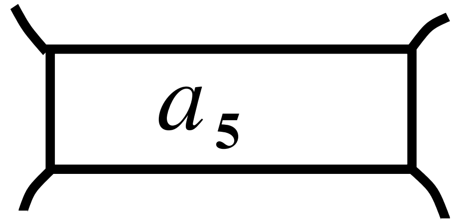
Ejercicio: Termina la demostración.)


NO
NE
a_k
a_{k-2}
a_1
a_{k-1}
a_{k-3}
a_2
SO
SE
~
NO
NE
a_1
a_{k-2}
a_k
a_{k-1}
a_{k-3}
a_2
SO
SE

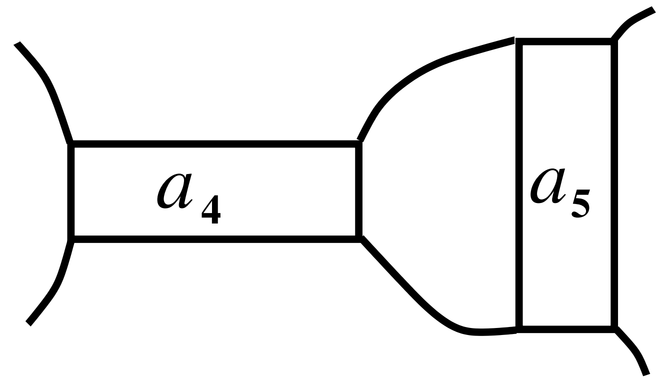
recordatorio



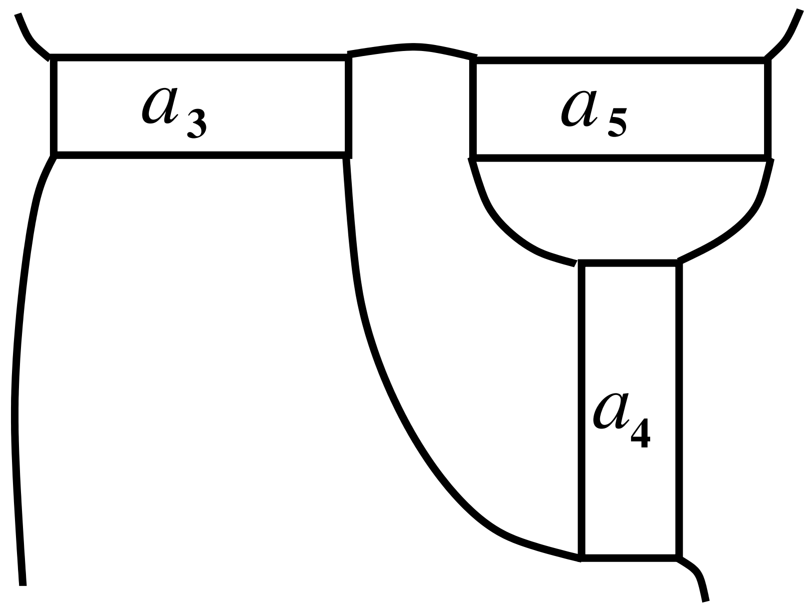
$$[a_5] =$$



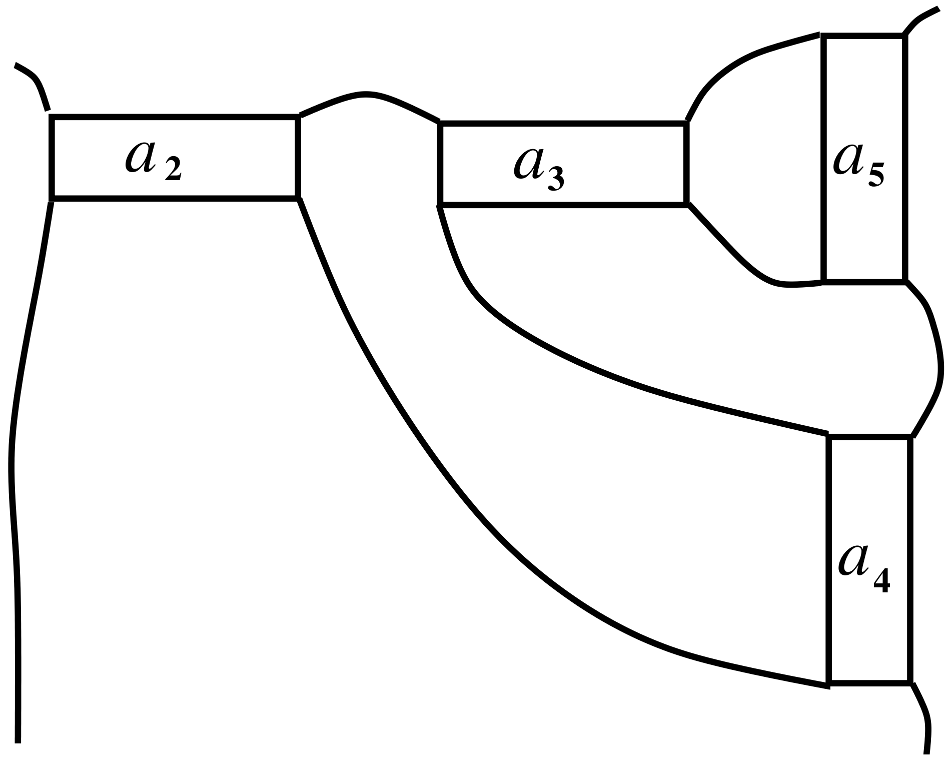
$$[a_4] + \frac{1}{[a_5]} =$$



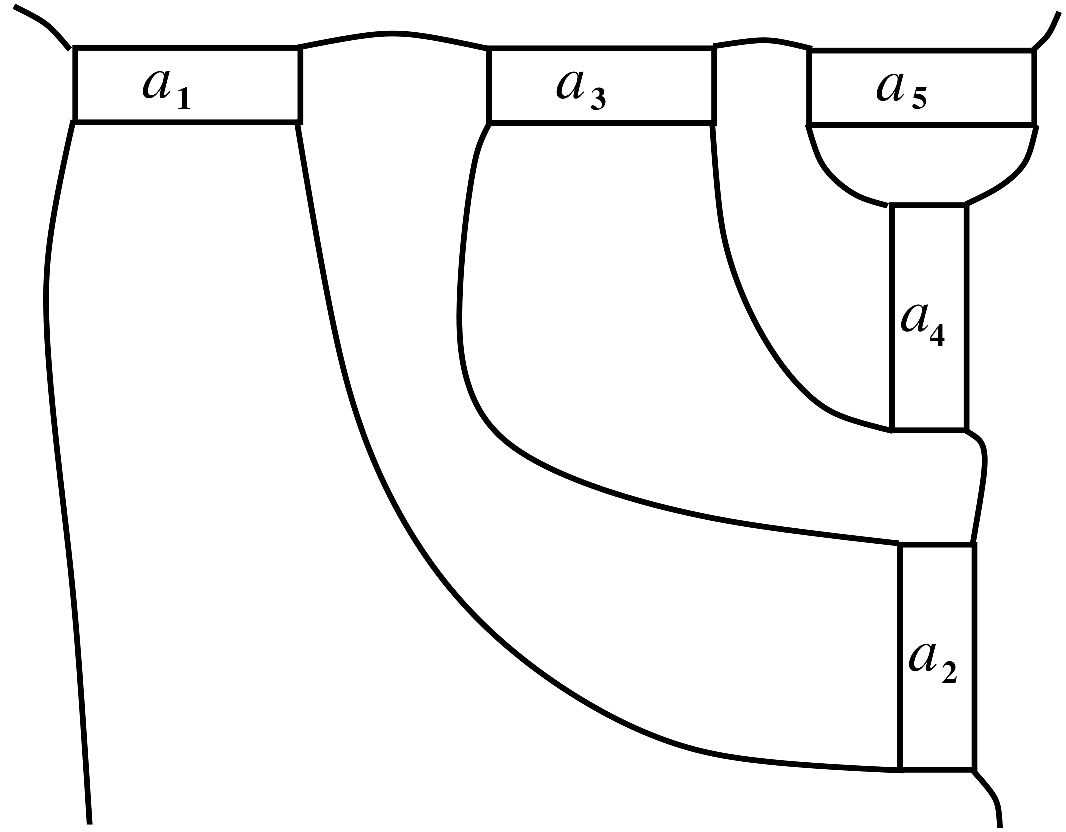
$$[a_3] + \cfrac{1}{[a_4] + \cfrac{1}{[a_5]}} =$$



$$[a_2] + \cfrac{1}{[a_3] + \cfrac{1}{[a_4] + \cfrac{1}{[a_5]}}} =$$



$$[a_1] + \cfrac{1}{[a_2] + \cfrac{1}{[a_3] + \cfrac{1}{[a_4] + \cfrac{1}{[a_5]}}}} =$$



ecuación para tangles

$$[a_1, a_2, \ldots, a_k] = [a_1] + \cfrac{1}{[a_2] + \cfrac{1}{[a_3] + \cdots + \cfrac{1}{[a_k]}}}$$

ecuación para fracciones continuas

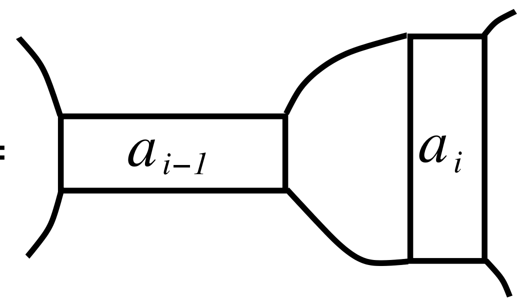
$$[a_1, \ldots, a_k] = [a_1, \ldots, a_{i-2}, a_{i-1} - 1, 0, +1, -1 + (a_i + 1), a_{i+1}, \ldots, a_n]$$

ecuación para fracciones continuas

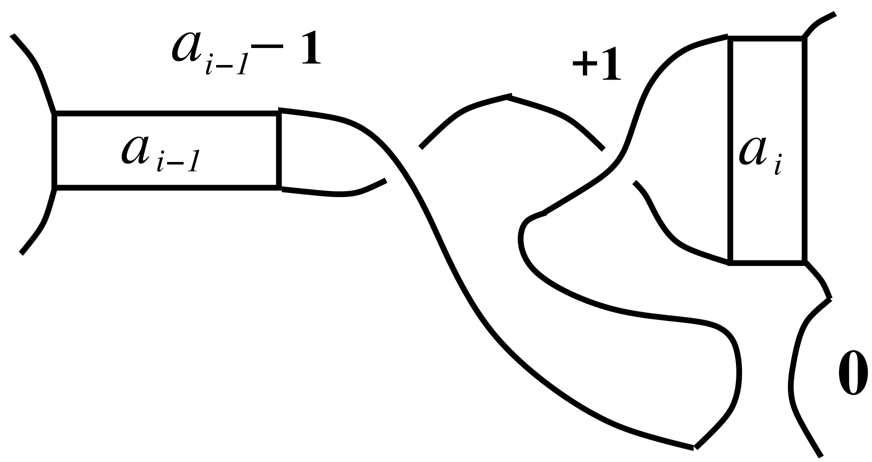
$$
\begin{aligned}
(a_{i-1}) - 1 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{-1 + (a_i + 1)}}} &= a_{i-1} - 1 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{a_i}}} \\
&= a_{i-1} + 1 + \frac{1}{a_i} \\
&= a_{i-1} + \frac{1}{a_i}
\end{aligned}
$$

ecuación para tangles

$$[a_{i-1}] + \frac{1}{[a_i]} =$$



$=$



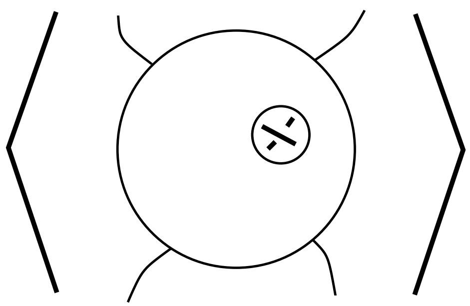
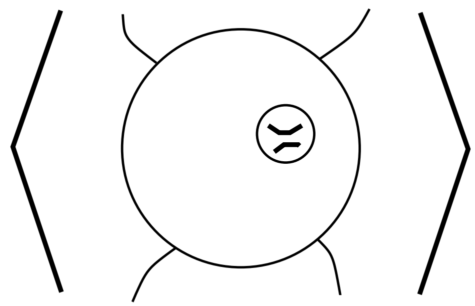
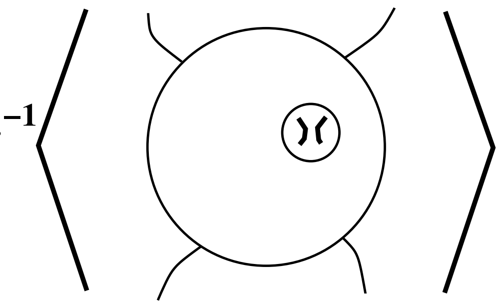
polinomios

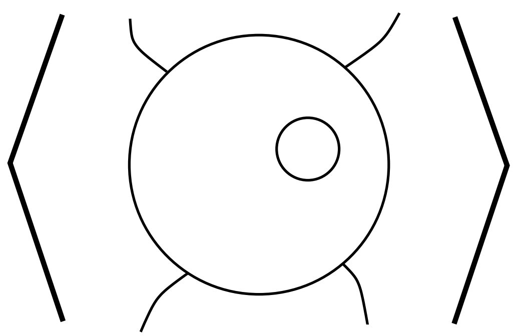
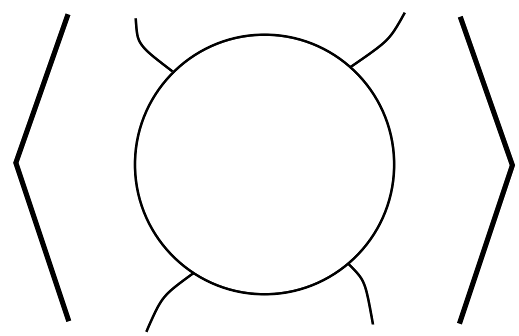
Consideraremos a

$$\langle [0] \rangle \quad \text{y} \quad \langle [\infty] \rangle$$

como dos símbolos que no se evalúan a nada.

Ahora postulamos

 $= \quad x$  $+ \; x^{-1}$ 

 $= \quad z$ 

$$z = -x^2 - x^{-2}$$

Si a es un tangle, despues de un rato encontramos

$$\langle a \rangle = \alpha_a(x)\langle[\infty]\rangle + \beta_a(x)\langle[0]\rangle$$

para ciertos polinomios $\alpha_a(x)$ y $\beta_a(x)$.

(es decir, después de alisar suficiente, terminamos con un 2-tangle sin cruces y sin componentes extra.)

movidas de Reidemeister

Definición. Si a es un tangle y

$$\langle a\rangle = \alpha_a(x)\langle[\infty]\rangle + \beta_a(x)\langle[0]\rangle,$$

definimos

$$R_a(x) = \frac{\alpha_a(x)}{\beta_a(x)}$$

(nótese que R_a puede ser infinito)

Teorema. Si a y b son tangles,

$$a \sim b \Rightarrow R_a = R_b$$

ejemplos

De ahora en adelante evaluaremos $x = \sqrt{i}$ (donde $i^2 = -1$).

Luego

$$z = -x^2 - x^{-2} = -i - \frac{1}{i} = -i + 1 = 0$$

Definición.

$$C_a = -iR_a(\sqrt{i})$$

(nótese que C_a puede ser infinito)

Observación. $C_{\frac{1}{a}} = \overline{\frac{1}{C_a}} =$ conjugado complejo de $\frac{1}{C_a}$.

Pues si

$$\langle a \rangle = \alpha_a(x)\langle [\infty] \rangle + \beta_a(x)\langle [0] \rangle,$$

entonces

$$\langle \tfrac{1}{a} \rangle = \alpha_a(x^{-1})\langle [0] \rangle + \beta_a(x^{-1})\langle [\infty] \rangle$$

ya que $\frac{1}{[0]} = [\infty]$, $\frac{1}{[\infty]} = [0]$ y $\overline{\frac{1}{\sqrt{i}}} = \sqrt{i}$

Proposición. Si

$$\langle a\rangle = \alpha\langle[\infty]\rangle + \beta\langle[0]\rangle$$

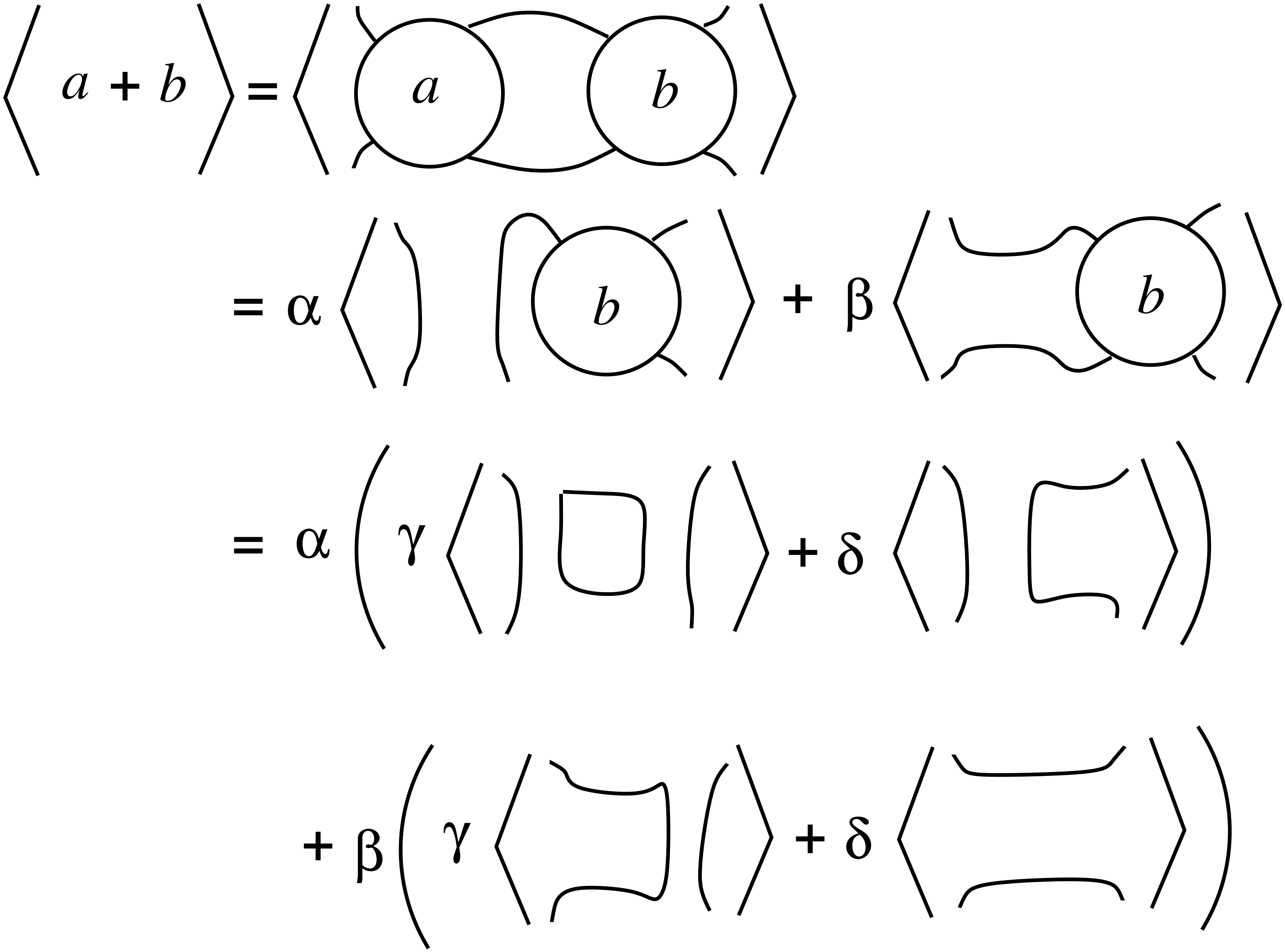
y

$$\langle b\rangle = \gamma\langle[\infty]\rangle + \delta\langle[0]\rangle$$

entonces

$$\langle a+b\rangle = (\alpha\delta+\beta\gamma)\langle[\infty]\rangle + \beta\delta\langle[0]\rangle$$

(todo evaluado en $x=\sqrt{i}$)



$$= (\alpha\delta + \beta\gamma)[\boldsymbol{\infty}] + \beta\delta[\mathbf{0}]$$

Resulta que $C_{a+b} = C_a + C_b$ (pues $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta\delta}$)

Como $C_{[\pm 1]} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, se tiene que

$$C_{\frac{1}{a}} = \frac{1}{C_a}$$

para a un tangle racional y se sigue que

$$C_a = [a_1, \ldots, a_k]$$

donde $a = [[a_1], \ldots, [a_k]]$.