# DESCOMPOSICIONES DE HEEGAARD DE LA 3-ESFERA

FRIEDHELM WALDHAUSEN

ABSTRACT. Mostramos que sólo existen las conocidas.

## 1. DEFINICIONES

En lo que sigue trabajamos en la categoría semilineal. Las (3-)variedades y las superficies son conexas, orientables y compactas. Con $U(\dots)$ denotamos una vecindad regular de $(\dots)$; convenimos en que una vecindad regular siempre se escogerá pequeña respecto a todas las cosas que aparezcan en una argumentación.

Un *cubo con asas [Brezel ≈ dona]* es un espacio homeomorfo a una vecindad regular de una gráfica conexa (finita) en la 3-esfera.

Sea $M$ una 3-variedad orientada, cerrada y conexa y sea $F$ una superficie orientada, cerrada y conexa en $M$. Si la cerradura de cada componente de $M - F$ es un cubo con asas, entonces llamamos a la pareja $(M, F)$ una *descomposición de Heegaard* de $M$. Por el *género* de la descomposición de Heegaard entendemos el género de $F$.

Una descomposición de Heegaard $(M, F')$ se llama *equivalente* a $(M, F)$, si existe un homeomorfismo $h : M \to M$ isotópico a la identidad que induce un homeomorfismo que conserva la orientación de $F$ en $F'$; escribimos $(M, F) \cong (M, F')$.

En lo que sigue denotamos con $(S^3, T)$ a "la" descomposición de Heegaard de la 3-esfera de género 1 (sólo hay una clase de equivalencia; en particular la orientación de $T$ no cambia la clase de equivalencia de $(S^3, T)$). Sea $E$ una 3-bola en $S^3$ tal que $E \cap T$ es un 2-disco y tal que $\partial E \cap T = \partial(E \cap T)$ ("$\partial$" denota "frontera"). Sea $(M, F)$ una descomposición de Heegaard y sea $E'$ una 3-bola en $M$ escogida de la misma manera que $E$ en $S^3$. Construimos la *suma conexa* de $(M, F)$ con $(S^3, T)$ identificando las fronteras de $M - \overset{\circ}{E'}$ y $S^3 - \overset{\circ}{E}$ mediante un homeomorfismo que invierte la orientación y tal que también $\partial E' \cap F$ y $\partial E \cap T$ se identifiquen con un homeomorfismo que invierte la orientación. La pareja de espacios obtenida es de nuevo una descomposición de Heegaard; la denotamos mediante $(M, F)\#(S^3, T)$. Como hay una clase de isotopía distinguida de homeomorfismos de $M\#S^3$ en $M$, la clase de equivalencia de $(M, F)\#(S^3, T)$ se fija de manera única a partir de la de $(M, F)$.

Definimos una *descomposición de Heegaard mínima* como sigue: Una descomposición de Heegaard $(M, F)$ se llama *no mínima*, si existe una descomposición de Heegaard $(M, F')$ tal que

$$(M, F) \cong (M, F')\#(S^3, T).$$

(Precaución: *No* se sigue de esta definición que dos descomposiciones de Heegaard mínimas de $M$ tengan el mismo género.)

Para abreviar definimos recursivamente

$$(M,F)\#n(S^3,T) \cong ((M,F)\#(n-1)(S^3,T))\#(S^3,T).$$

Llamamos a dos descomposiciones de Heegaard $(M,F)$ y $(M,F')$ *equivalentes establemente* cuando existen números $m$ y $n$ tales que

$$(M,F)\#m(S^3,T) \cong (M,F')\#n(S^3,T).$$

Se cumple el Teorema de Reidemeister y Singer: *Sean $(M,F)$ y $(M,F')$ descomposiciones de Heegaard de $M$. Entonces $(M,F)$ y $(M,F')$ son equivalentes establemente* ([4] y [6]; v. también [8], p. 56).

(Por cierto que Singer considera, a diferencia de la terminología que vimos, homeomorfía como el concepto de equivalencia en lugar de homeomorfía en una clase de isotopía distinguida. Pero el teorema citado está demostrado en [6], pp. 107–11.)

## 2. Equivalencia y equivalencia estable

Por una *pareja meridional* en la descomposición de Heegaard $(M,F)$ entenderemos una pareja de 2-discos $x$ y $y$ en $M$ tales que $x \cap F = \partial x$ y $y \cap F = \partial y$ y tales que $x \cap y = \partial x \cap \partial y$ es exactamente un punto de intersección (transversal); $x$ y $y$ están necesariamente en lados opuestos de $F$.

Hay una pareja meridional en $(S^3,T)$. Como la 3-bola $E$ (*v. supra*) se puede escoger ajena a esta pareja meridional, hay una pareja meridional en $(M,F') \cong (M,F)\#(S^3,T)$.

Si $x$, $y$ es una pareja meridional en $(M,F'')$ y si $U = U(x \cup y)$ es una vecindad regular de $x \cup y$ en $M$, entonces la pareja $(U, U \cap F'')$ es homeomorfa a la pareja $(S^3 - \mathring{E}, (S^3 - \mathring{E}) \cap T)$, (*v. supra*); también $(M,F'') \cong (M,F')\#(S^3,T)$ para alguna descomposición de Heegaard $(M,F')$ (cuya unicidad *no* se afirma).

Correspondientemente la afirmación $(M,F'') \cong (M,F')\#n(S^3,T)$ es equivalente a que en $(M,F'')$ existen $n$ parejas meridionales ajenas — Pero un "sistema de $n$ parejas meridionales ajenas" es un concepto muy poco manejable. Definiremos e investigaremos un recurso más flexible y esencial en lo que resta de este párrafo.

**2.1.** Sea $(M,F)$ una descomposición de Heegaard; sean $U$ y $V$ las subvariedades en las que $F$ descompone a $M$. Un sistema de $n$ discos bidimensionales ajenos en $V$, $v = v_1 \cup \cdots \cup v_n$, $v \cap \partial V = \partial v$, se llama un *sistema bueno de $n$ discos meridianos en* $V$ si existe un sistema de $n$ discos bidimensionales ajenos en $W$, $w = w_1 \cup \cdots \cup w_n$, $w \cap \partial W = \partial w$, tal que ( al numerar apropiadamente a las componentes de $v$ y $w$) se cumple:

$$\partial v_j \cap \partial w_j \text{ es exactamente un punto de intersección (transversal)}$$

$$\partial v_i \cap \partial w_j = \emptyset \text{ si } i > j;$$

llamamos a $w$ *un sistema coordinado con* $v$.

Si $v$ es un sistema bueno de discos meridianos en $V$ y $w$ es un sistema coordinado, entonces $w$ es (con la misma definición) un sistema bueno de discos meridianos en $W$ y $v$ es un sistema coordinado con $w$.

**2.2.**

**Lema 2.1.** *Sea $v$ un sistema bueno de $n$ discos meridianos en $V$ y sea $w$ un sistema coordinado con $v$.*

*(1) Existe un sistema $\tilde{w}$ coordinado con $v$ tal que $\partial v_j \cap \partial \tilde{w}_j$ es exactamente un punto de intersección (transversal) y tal que $\partial v_i \cap \partial \tilde{w}_j = \emptyset$, si $i \neq j$.*

*(2) Sea $\tilde{U} = U(F \cup v \cup w)$ una vecindad regular de $F \cup v \cup w$ en $M$ y sea $\tilde{F} = \partial \tilde{U} \cap V$. Entonces $\tilde{U}$ es homeomorfa a $\tilde{F} \times I$* ($I$ es el intervalo unitario).

*Proof. Demostración de* (1): Construiremos el sistema $\tilde{w}$ a partir de $w$.

Sea $i$ el índice más chico tal que existe un punto de intersección $q \subset \partial v_i \cap \partial w_j$, $j > i$. Sea $k$ uno de los arcos en $\partial v_i$ que une a $q$ con el punto de intersección $\partial v_i \cap \partial w_i$. Supongamos que escogimos a $q$ de tal manera que $k \cap w = \emptyset$. Sea $U(w_i \cup k \cup w_j)$ una vecindad regular de $w_i \cup k \cup w_j$ en $M$. El conjunto $W \cap \partial U(w_i \cup k \cup w_j)$ se compone de tres 2-discos. Sendo de éstos es isotópico a $w_i$, resp., $w_j$ en $W$; sea $w'_j$ el tercero. Para cada $h \neq i$, $\partial v_h \cap \partial w'_j$ se compone de tantos puntos como $\partial v_h \cap \partial w_j$; pero $\partial v_i \cap \partial w'_j$ contiene un punto menos que que $\partial v_i \cap \partial w_j$. Reemplazamos a $w_j$ con $w'_j$. Repetimos el procedimiento tanto como necesitemos. El sistema finalmente obtenido de $w$ tiene las propiedades enunciadas para $\tilde{w}$.

*Demostración de* (2): a) Probamos a continuación que los cambios en $w$ descritos en (1) no cambian el tipo de homeomorfía de $U(F \cup v \cup w)$.

Sea $U^*$ una vecindad regular de $F \cup v \cup w_1 \cup \cdots \cup w_i$ (sea $U^*$ pequeña respecto a las cosas mencionadas en (1)). Sea $W^* = W - \mathring{U}^*$. Entonces $U(F \cup v \cup w)$ es homeomorfa a la unión de $U^*$ y una vecindad regular de

$$X^* = (U^* \cap W^*) \cup (w_{i+1} \cap W^*) \cup \cdots \cup (w_n \cap W^*)$$

en $W^*$. Pero $X^*$ es isotópico en $W^*$ a

$$(U^* \cap W^*) \cup (w_{i+1} \cap W^*) \cup \cdots \cup (w'_j \cap W^*) \cup \cdots \cup (w_n \cap W^*).$$

b) En la demostración de nuestra afirmación podríamos también reemplazar a $w$ por $\tilde{w}$. Sea $U_j$ una vecindad regular de $v_j \cup \tilde{w}_j$ (en $M$). $U_j$ es una 3-bola; $\partial U_j \cap V$ y $\partial U_j \cap W$ son sendos 2-discos; $U_j \cap F$ es un toro perforado. Como las $U_j$ son ajenas y como $U(F \cup v \cup \tilde{w})$ es homeomorfa a una vecindad regular de $F \cup \bigcup U_j$, se sigue la afirmación. $\square$

**2.3.** Sea $(M, F)$ una descomposición de Heegaard; sean $V$ y $W$ las subvariedades en las que $F$ descompone a $M$. Sea $v$ un sistema bueno de discos meridianos en $V$ y sea $w$ un sistema coordinado con $v$; sean $U(v)$ y $U(w)$ vecindades regulares de $v$ y $w$ en $M$. Sean

$$\tilde{V} = V - \mathring{U}(v), \quad \tilde{W} = \overline{M - \tilde{V}}$$

$$W^* = W - \mathring{U}(w), \quad V^* = \overline{M - W^*}$$

Como $v$ no desconecta a $V$, por tanto $\tilde{V}$ es un cubo con asas, [9], Korollar 1; lo mismo se cumple para $W^*$. Por otro lado se sigue de (2.1) que las subvariedades $\tilde{V}$ y $V^*$ son isotópicas en $M$. Si $\tilde{F}$ es la superficie $\partial \tilde{V}$ provista de una orientación, $(M, \tilde{F})$ es una descomposición de Heegaard. Si $(M, \tilde{F}) \cong (M, -\tilde{F})$, entonces la clase de equivalencia de $(M, \tilde{F})$ se determina a través de $(M, F)$ y $v$, o a través de $(M, F)$ y $w$. Si $(M, \tilde{F}) \ncong (M, -\tilde{F})$, entonces de las dos orientaciones de $F$ se fija una descomposición también, a saber, la obtenida mediante el siguiente procedimiento: si $V$ resulta ser la "primera" componente de $V$ y $W$ al considerar las orientaciones de $M$ y de $F$, entonces $\tilde{V}$ resultará ser también la "primera" componente de $\tilde{V}$ y $\tilde{W}$ al considerar las orientaciones de $M$ y $\tilde{F}$.

Luego en cada caso se determina una descomposición de Heegaard $(M, \tilde{F})$ a través de $(M, F)$ y $v$, o a través de $(M, F)$ y $w$ salvo equivalencia; la denominamos como la descomposición de Heegaard que se obtiene de $(M, F)$ mediante una *reducción en* $v$ (resp., mediante una reducción en $w$) y escribimos

$$(M, \tilde{F}) \cong (M, F(v)), \text{ resp., } (M, \tilde{F}) \cong (M, F(w)).$$

(Precaución: Es cierto que $(M, (-F)(v)) \cong (M, -(F(v)))$; pero de que $(M, F) \cong (M, -F)$ no se puede concluir que $(M, F(v)) \cong (M, -F(v))$.)

De la discusión previa captamos la siguiente consecuencia:

**2.4.**

**Lema 2.2.** *Sea $(M, F)$ una descomposición de Heegaard; $F$ descompone a $M$ en las componentes $V$ y $W$. Sean $v$ y $v'$ sistemas buenos de discos meridianos en $V$ (por lo que posiblemente $v \cap v' \neq \emptyset$). Si existe un sistema $w$ en $W$ que es tanto un sistema coordinado con $v$, como un sistema coordinado con $v'$, entonces $(M, F(v)) \approx (M, F(v'))$.*

Como corolario de nuestras definiciones se obtiene la primera parte del siguiente lema:

**2.5.**

**Lema 2.3.** *Sean $(M, F_1)$ y $(M, F_2)$ descomposiciones de Heegaard equivalentes establemente.*

*(1) Entonces existe una descomposición de Heegaard $(M, F)$ y existen sistemas buenos de discos meridianos $v$ y $x$ en $V$, un sistema $w$ coordinado con $v$ y un sistema $y$ coordinado con $x$ en $W$ (por lo que $V \cup W = M$ y $V \cap W = F$), tales que $(M, F(v)) \cong (M, F_1)$ y $(M, F(x)) \cong (M, F_2)$*

*(2) y tales que $v \cap x = \emptyset$ y $w \cap y = \emptyset$.*

*Proof. Demostración de* (2): Supongamos que los datos $(M, F), v, w, x, y$ están dados como se describe en (1). Mostraremos cómo se pueden obtener los nuevos datos para los que (2) también es cierta.

Podemos suponer (mediante una deformación pequeña de $(x \cup y, (x \cup y) \cap F)$ en $(M, F)$, en caso de ser necesario) que tenemos la siguiente "posición general":

$$x \cap y \cap (v \cup w) = \emptyset; \quad v \cap w \cap (x \cup y) = \emptyset;$$

$v \cap x$ y $w \cap y$ son sistemas ajenos de curvas simples y arcos, así que

$$v \cap x \cap F = \partial(v \cap x) \quad \text{y} \quad w \cap y \cap F = \partial(w \cap y).$$

a) Existen curvas cerradas en $v \cap x$. Entonces existe un 2-disco $D$ en $\mathring{v}$ tal que $D \cap x = \partial D$. $\partial D$ es frontera de un 2-disco $D'$ de $x$. Construimos $x'$ a partir de $x$, primero reemplazamos a $D'$ con $D$ y entonces retiramos $D$ de $v$. De (2.4) tenemos

$$(M, F(x')) \cong (M, F(x)).$$

b) Existe un arco $k$ en $v \cap x$. Las componentes $v_1, \ldots, v_n$ de $v$ y $w_1, \ldots, w_n$ de $w$ se numeran de tal manera que $\partial v_h \cap \partial w_i$ es exactamente un punto de intersección (transversal) si $i = h$ y es vacía si $h > i$. $k$ está en $v_j$. Sea $U(k)$ una vecindad regular de $k$ en $M$. Sea $\bar{w}$ un 2-disco en $U(k) \cap \mathring{V}$ tal que $\bar{w} \cap \partial U(k) = \partial \bar{w}$ no se contrae en

$\partial U(k) \cap V$ y toca a $v_j$ sólo en dos puntos. Es evidente que $W' = W \cup U(k)$ es un cubo con asas; lo mismo se cumple para $V' = V - \overset{\circ}{U}(k)$, porque el arco $k$ está en el 2-disco $v_j$. Definimos $F' = V' \cap W'$ y tomamos para $F$ la orientación inducida por $F' \cap F$. Definimos además

$$v'_i = v_i \quad \text{y} \quad w'_i = w_i \quad \text{para} \quad i < j$$

$$v'_{i+1} = v_i \quad \text{y} \quad w'_{i+1} = w_i \quad \text{para} \quad i > j,$$

De los dos 2-discos $v_j \cap V'$ denotamos con $v'_j$ a ése que contiene el punto de intersección con $w_j$ y denotamos con $v'_{j+1}$ al otro. Finalmente escribimos

$$w'_j = w_j \quad \text{y} \quad w'_{j+1} = \bar{w}.$$

$v'$ es un buen sistema de $n+1$ 2-discos en $V'$ y $w'$ es un sistema coordinado con $v'$; es claro que

$$(M, F'(v')) \cong (M, F(v)).$$

Del mismo modo que construimos a $v'$ y $w'$ de $v$ y $w$, construimos $x'$ y $y'$ de $x$ y $y$; (tomamos para la nueva componente de $y'$ un 2-disco igual a $\bar{w}$ pero que sea ajeno a $\bar{w}$).

De los pasos (a) y (b) el número de componentes de $(v \cap x) \cup (w \cap y)$ es más chico en al menos 1; tras un número finito de pasos se tiene que $v \cap x = \emptyset$. De la misma manera logramos que $w \cap y = \emptyset$.

$\square$

## 3. Descomposiciones de Heegaard de la 3-esfera

**3.1.**

**Teorema 3.1.** *Sea $(M, G)$ una descomposición de Heegaard mínima de la 3-esfera. Entonces $G$ tiene género 0.*

Nunca se pondría en duda que este teorema es correcto. En algunas épocas se ha tenido, al parecer, por evidentemente cierto (*cf.* [4], Nota a pie de página en la p. 193). El que, a pesar de esto, sea algo que se debe demostrar fue señalado por Reidemeister ([4], p. 192). Respecto a los últimos tiempos se es más bien precavido ([2], 16.4 y [7], Conjetura A).

En [4], p. 192, está un esbozo de un comienzo de demostración. Pero parece dudoso que el método sugerido (estudio de las componentes) se pueda consolidar para obtener una demostración. Porque por este camino no se puede estar seguro de que la variedad subyacente es la 3-esfera, realmente sólo se confronta una descomposición de Heegaard desconocida con una descomposición de Heegaard de género $\leq$1; también se afronta el peligro de que simultáneamente se intente refutar el ejemplo descrito en (4.4.1).

*Proof. Demostración de* (3.1): Sea $(M, G')$ la descomposición de Heegaard de género 0. Por Reidemeister y Singer se tiene que $(M, G)$ y $(M, G')$ son equivalentes establemente. Por tanto de (2.5) se sigue que existe una descomposición de Heegaard $(M, F)$ con las siguientes propiedades:

Sean $V$ y $W$ las subvariedades tales que $V \cup W = M$, $V \cap W = F$; sea $n$ el género de $F$. Existe un sistema bueno $v = v_1 \cup \cdots \cup v_n$ en $V$ y un sistema $w = w_1 \cup \cdots \cup w_n$ coordinado con $v$ en $W$. Existe un sistema bueno $x = x_1 \cup \cdots \cup x_m$ en $V$ y un sistema $y$ coordinado con $x$ en $W$ tales que $(M,G) \approx (M,F(x))$. Se tiene que $v \cap x = \emptyset$ y que $w \cap y = \emptyset$.

Suponemos que de entre todas las descomposiciones de Heegaard con estas propiedades, $(M,F)$ se escogió de tal manera que $n$ es mínimo. Suponemos además que $n > 0$. Mostraremos que una de estas suposiciones es falsa.

Mediante una defomación pequeña de $(x \cup y, (x \cup y) \cap F)$ en $(M,F)$, en caso necesario, se tiene adicionalmente que $\partial v \cap \partial y$ y $\partial x \cap \partial w$ consisten sólo de puntos aislados (transversales). Las componentes de $v, w, x$ y $y$ se numeran de tal manera que $\partial v_i \cap \partial w_j$, resp., $\partial x_i \cap \partial y_j$ tienen exactamente un punto de intersección (transversal) si $i = j$ y son vacías si $i > j$.

**3.2.** *Mediante una modificación de $y$ sola obtenemos que $y \cap v_n$ consta de a lo más un punto* (y que además $y \cap w = \emptyset$). Demostración por inducción sobre el número de los puntos $y \cap v_n$.

*1er. caso: La componente $y_j$ de $y$ se interseca con $v_n$ en al menos dos puntos.* Como $v_n \cap w$ es un único punto, existe un arco $k$ en $\partial v_n$ ajeno a $w$, tal que $k \cap y_j = \partial k$. Sea $U(w)$ una vecindad regular de $w$ en $M$; se tiene que $y_j \cup k$ está contenido en $W - U(w)$. $\overline{W - U(w)}$ es una 3-bola y $y_j$ la descompone en dos 3-bolas (en este punto necesitamos usar que $M$ es la 3-esfera). Por tanto existe un 2-disco $D$ en $W - U(w)$ tal que $D \cap \partial W = k$ y $D \cap y_j = \partial D \cap y_j = \overline{\partial D - k}$. Mediante una deformación de $D$ constante en $\partial D$, se tiene también que $D \cap y$ es un sistema de arcos simples ajenos (y después se eliminarían de la manera usual las eventuales curvas cerradas de intersección que aparecieran), ninguno de los cuales termina en $D \cap y_j$; en consecuencia podemos suponer (después, si se diera el caso, desechamos cualquier otra otra componente $y_j$ de $y$) que $D \cap y_j = D \cap y$.

Sea $U(D \cup y_j)$ una vecindad regular de $D \cup y_j$ en $M$. $W \cap \partial U(D \cup y_j)$ consta de tres 2-discos. Uno de éstos corta a $v_n$ en tantos puntos como $y_j$ y es isotópico a $y_j$ en $W$. Sean $y_j^1$ y $y_j^0$ los otros dos. $y_j^1 \cup y_j^0$ y $v_n$ se cortan mutuamente en 2 puntos menos que $y_j$ y $v_n$. Para cada $i$, $(y_j^1 \cup y_j^0) \cap x_i$ consiste de tantos puntos como $y_j \cap x_i$. En particular $(y_j^1 \cup y_j^0) \cap x_j$ es exactamente un punto; está, digamos, en $y_j^1$. Reemplazamos a $y_j$ con $y_j^1$.

*2do. caso: Cada componente de $y$ corta a $v_n$ en cuando mucho un punto; pero $y \cap v_n$ consiste de al menos dos puntos.* Entonces existe un arco $k$ en $\partial v_n$ ajeno de $w$ tal que

$$\partial k = k \cap y = (k \cap y_i) \cup (k \cap y_j);$$

sea, digamos, $i < j$. Sea $U(y_i \cup k \cup y_j)$ una vecindad regular de $y_i \cup k \cup y_j$ en $M$. $W \cap \partial U(y_i \cup k \cup y_j)$ consiste de tres 2-discos. Sendo de éstos es isotópico a $y_i$, resp., $y_j$ en $W$; sea $y'_j$ el tercero. Se tiene que $y'_j \cap v_n = \emptyset$. El punto de intersección de $y'_j$ con algún $x_h$ corresponde al de $y_i \cup y_j$ con $x_h$. También $y$ continúa siendo un sistema coordinado con $x$ cuando reemplazamos $y_j$ con $y'_j$.

**3.3.** *1er. caso: Se cumple $y \cap v_n \neq \emptyset$*, por consiguiente, de (3.2), es exactamente un punto; está, digamos, en $y_j$.

a) Reemplazamos a $x$ y $y$ con $x'$ y $y'$ como sigue:

$$x'_m = v_n \quad \text{y} \quad y'_m = y_j,$$

$$x'_i = x_i \quad \text{y} \quad y'_i = y_i, \quad \text{si} \quad i < j,$$

$$x'_{i-1} = x_i \quad \text{y} \quad y'_{i-1} = y_i, \quad \text{si} \quad j < i \leq m.$$

$x'$ es un buen sistema de discos meridianos y $y'$ es un sistema coordinado con $x'$; de (2.4) se sigue que

$$(M, F(x')) \cong (M, F(x)) \cong (M, G).$$

b) Conservamos a $x'$ y desechamos a $y'$ por $y''$, mientras que establecemos que

$$y''_m = w_m$$

y $y''_i = y'_i$, para $i < m$; $y''$ es así mismo un sistema coordinado con $x'$.

c) Sea $U(v_n \cup w_n)$ una vecindad regular de $v_n \cup u_n = x'_m \cup y''_m$ en $M$. Sea $\tilde{V} = \overline{V - U(v_n \cup w_n)}$ y $\tilde{W} = W \cup U(v_n \cup w_n)$; sea $\tilde{F} = \tilde{V} \cap \tilde{W}$, con la orientación inducida por $\tilde{F} \cap F$.

Como $v_n \cap w = v_n \cap w_n$ y $v_n \cap y'' = v_n \cap y''_m$ se tiene que

$$w_i \cap \partial\tilde{W} = \partial w_i \quad \text{para} \quad i < n \quad \text{y}$$

$$y''_i \cap \partial\tilde{W} = \partial y''_i \quad \text{para} \quad i < m.$$

Así $\tilde{v} = \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{n-1} = v_1 \cap \tilde{V}, \ldots, v_{n-1} \cap \tilde{V}$ es un buen sistema de $n-1$ discos meridianos en $\tilde{V}$ y $\tilde{w} = w_1, \ldots, w_{n-1}$ es un sistema coordinado con $\tilde{v}$.

Lo correspondiente se cumple para

$$\tilde{x} = \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{m-1} = x'_1 \cap \tilde{V}, \ldots, x'_{m-1} \cap \tilde{V} \quad \text{y} \quad \tilde{y} = y''_1, \ldots, y''_{m-1}.$$

Se tiene que $(M, \tilde{F}(\tilde{x})) \cong (M, F(x))$; además $\tilde{v} \cap \tilde{x} = \emptyset$ y $\tilde{w} \cap \tilde{y} = \emptyset$. Como $\tilde{F}$ tiene género menor que $F$, tenemos una contradicción a nuestra elección de $(M, F)$.

*2do. caso: Se cumple $y \cap v_n = \emptyset$.* Definimos

$$x^*_{m+1} = v_n \quad \text{y} \quad y^*_{m+1} = w_n$$

$$x^*_i = x_i \quad \text{y} \quad y^*_i = y_i \quad \text{para} \quad i \leq m.$$

$x^*$ es un buen sistema de $m+1$ discos meridianos en $V$ y $y^*$ es un sistema coordinado con $x^*$.

Se sigue que $(M, G) \cong (M, F(x)) \cong (M, F(x^*)) \# (S^3, T)$, en contradicción a nuestra suposición de que $(M, G)$ es mínima. □

## 4. Bemerkungen

**4.1.** Haken ([1], § 7) mostró: Sea $(M, F)$ una descomposición de Heegaard; supongamos que existe en $M$ una 2-esfera que no es frontera de una 3-bola. Entonces existe una 2-esfera con la misma propiedad que se interseca con $F$ en una sola curva —De esto y de (3.1) se sigue que para la variedad $S^2 \times S^1 \# \cdots \# S^2 \times S^1$ sólo existen las descomposiciones de Heegaard conocidas.

**4.2.** Sea $N$ un cubo con asas y sea $D$ un sistema de 2-discos en $N$, que sólo está limitado por la condición $D \cap \partial N = \partial D$. Una variedad que es homeomorfa a una vecindad regular de $D \cup \partial N$ se llama un *cubo con asas ahuecado* [¿casi un "cuerpo de compresión"?] y la superficie frontera correspondiente a $\partial N$ se llama la *superficie frontera óptima*.

Sea $M$ una variedad orientada y sea $F$ una superficie cerrada orientada en el interior de $M$ que descompone a $M$ en dos pedazos $V$ y $W$ que son cubos con asas o cubos con asas ahuecados con $F$ como superficie óptima; de $V$ y $W$ tomamos a $V$ como el "primer" pedazo determinado por las orientaciones de $M$ y $F$. Entonces llamamos a $(M, F)$ una *descomposición de Heegaard de $M$ relativa a la partición*

$(V \cap \partial M, W \cap \partial M)$. Se definirá "equivalencia" igual que como para las variedades cerradas; igualmente se definen la operación "$\#(S^3, T)$" y "equivalencia estable".

El teorema de Reidemeister y Singer se cumple en la forma: Sean $(M, F)$ y $(M, F')$ descomposiciones de Heegaard de $M$ relativas a la partición $(G_1, G_2)$ de $\partial M$, entonces $(M, F)$ y $(M, F')$ son equivalentes establemente. La Sección 2 se cumple casi palabra por palabra (se pedirá naturalmente a todos los 2-discos que estén en el interior de la variedad).

**4.3.** El resultado de Haken mencionado en (4.1) también se cumple para descomposiciones de Heegaard de variedades con frontera (en su formulación se debe reemplazar "una sola" por "a lo más"); la demostración es parecida. De la misma forma se muestra: Sea $(M, F)$ una descomposición de Heegaard; si en $M$ hay un 2-disco $D$ tal que $D \cap M = \partial D$ no es frontera de un 2-disco en $\partial M$. Entonces existe un 2-disco con la misma propiedad que corta a $F$ en una sola curva —De esto y de (3.1) se sigue que: Si $(M, F)$ es una descomposición de Heegaard mínima de un cubo con asas, entonces $F$ es paralela a $\partial M$.

**4.4.** Definimos una noción de equivalencia distinta a la usada hasta ahora, a saber, la de homeomorfía de parejas que conserva ambas orientaciones; para variedades con frontera también la partición de la frontera se debe respetar (el si las dos nociones de equivalencia coinciden se desconoce completamente). La suma conexa hace de las clases de equivalencia de descomposiciones de Heegaard los elementos de un monoide (conmutativo y asociativo).

(1) En este monoide no se vale la ley de cancelación. Sea, por ej., $(M, F)$ una descomposición de Heegaard de género uno de un espacio lente $\neq S^3$. $(M, F)$ queda caracterizada (bajo nuestra nueva noción de equivalencia) por una pareja de números enteros primos relativos $(\alpha, \beta), 0 < \beta < \alpha$. Como $(M, -F)$ está caracterizada por $(\alpha, \beta')$ donde $\beta\beta' \equiv 1 \mod \alpha$, $(M, F)$ y $(M, -F)$ no son equivalentes. Por otro lado se tiene que $(M, F)\#(S^3, T) \cong (M, -F)\#(S^3, T)$. En efecto sea $D$ un 2-disco en $F$, sea $U(F - \overset{\circ}{D})$ una vecindad regular de $F - \overset{\circ}{D}$ en $M$ y sea $G = \partial U(F - \overset{\circ}{D})$. Junto con una orientación apropiada para $G$, $(M, G)$ es un representante tanto para $(M, F)\#(S^3, T)$ como para $(M, -F)\#(S^3, T)$.

(2) Sean $(M, F)$ y $(M', F')$ descomposiciones de Heegaard de género 1 de los espacios lente (5,2) y (7,2). Mediante sumas obtenemos cuatro descomposiciones de Heegaard de la variedad orientada $M\#M'$: $(M, F)\#(M', F')$, $(M, F)\#(M', -F')$, etc. Son concebibles dos casos: 1. Estas cuatro descomposiciones de Heegaard caen en más de dos clases de equivalencia. 2. Caen en a lo más dos clases de equivalencia —El segundo caso es un poco más plausible que el segundo.

## References


[1] W. Haken. Some results on surfaces in 3-manifolds. MAA Studies in mathematics, Vol. 5.
[2] C. D. Papakyriakopoulos. Some problems on 3-dimensional manifolds. Bull. Am. Math. Soc. 64 (1958), 317–335
[3] H. Poincaré. Cinquième complément à l'analysis situs. Rc. Circ. Mat. Palermo 18 (1904), 45–110.
[4] K. Reidemeister. Zur dreidimensionalen Topologie. Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg 9 (1933), 189–194.
[5] H. Seifert y W. Threlfall. Lehrbuch der Topologie. Teubner, Leipzig 1934.

[6] J. Singer. Three-dimensional manifolds and their Heegard diagrams. Trans. Am. Math. Soc. 35 (1933), 88–111.
[7] J. Stallings. How not to prove the Poincaré conjecture. Topology Seminar Wisconsin 1965, Ann. Math. Stud. 60.
[8] J. H. C. Whitehead. On certain sets of elements in a free group. Proc. London Math. Soc. 41 (1936), 48–56.
[9] H. Zieschang. Über einfache Kurven auf Vollbrezeln. Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg 25 (1962), 231–250.