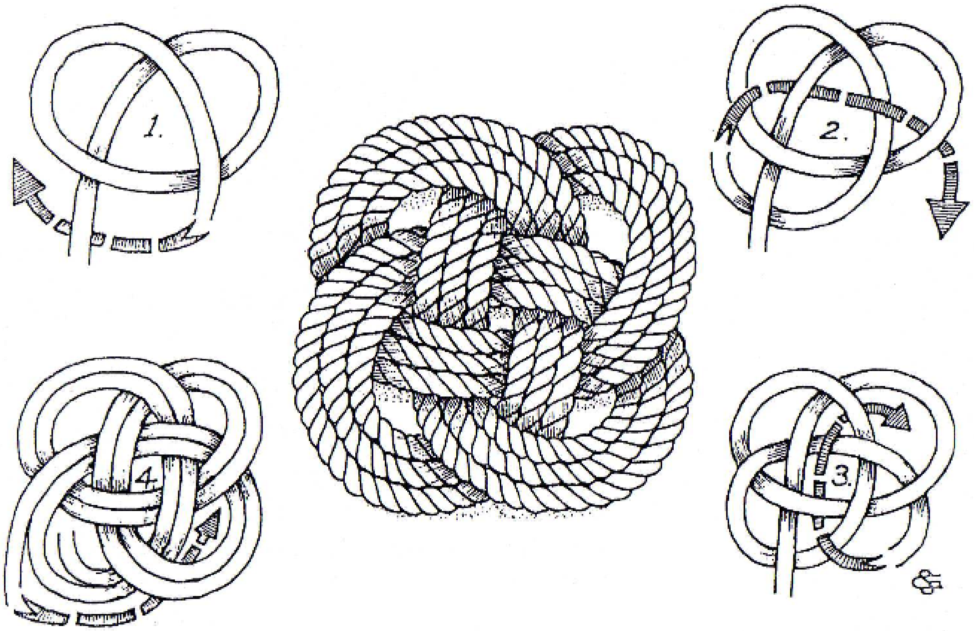
Nudos De Cuerda

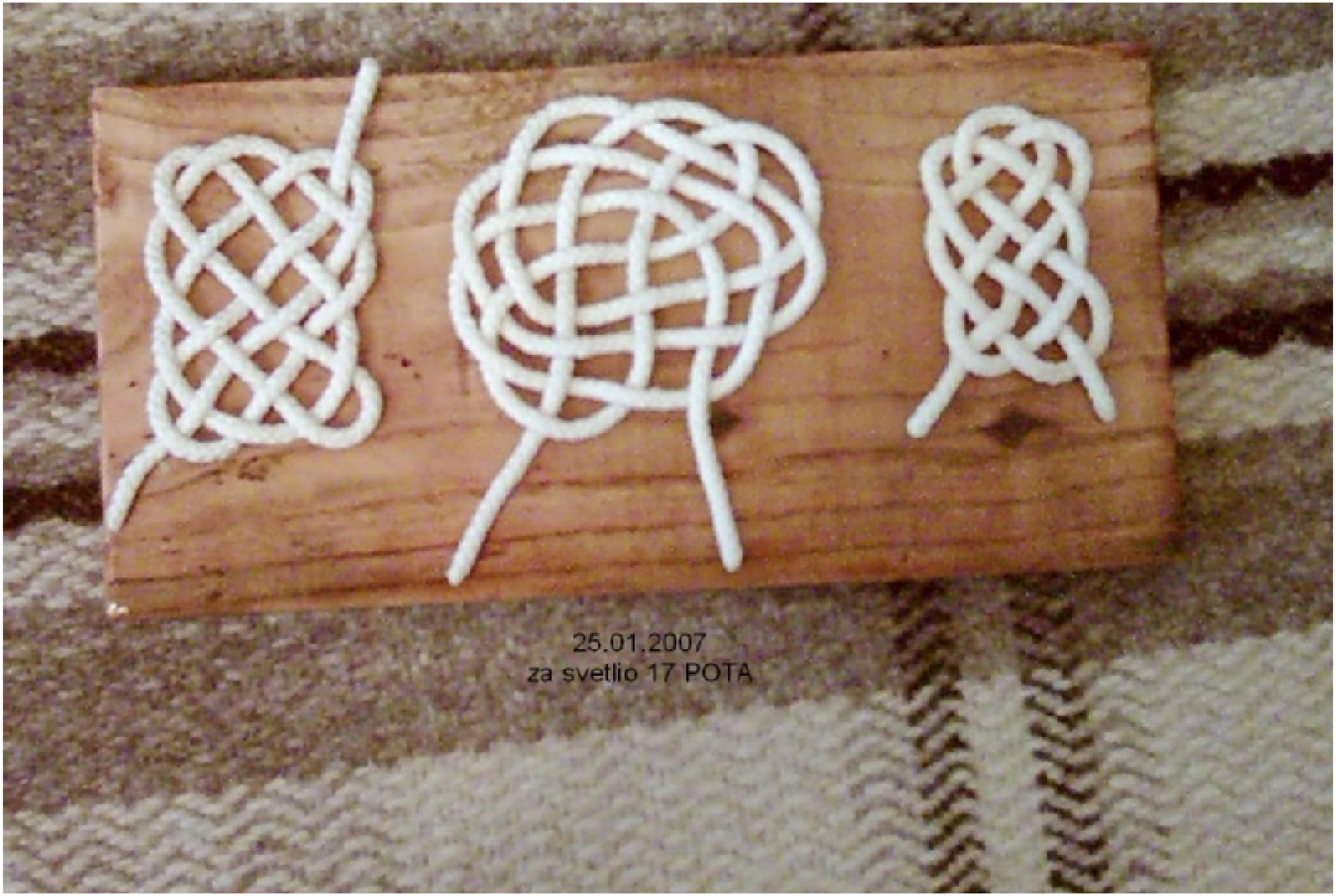
International Guild of Knot Tyers

The International Guild of Knot Tyers (IGKT) is an association of people interested in knots and knotting techniques of all kinds. We have over a thousand members world-wide, from all walks of life, including academics, surgeons, sailors, sportsmen and women, scouts, magicians, farmers, miners and accountants. Membership is open to anyone interested in knotting, whether expert or simply hoping to learn from others.

IGKT is an educational, non-profit making organization and our mission is to promote the art, craft and science of knotting, its study and practice, to undertake research into all aspects of knotting and to establish an authoritative body for consulting purposes. We attend public events to advertise the Guild and its work, and conduct talks and demonstrations by arrangement with interested groups. We keep in touch with each other by correspondence, by holding regular meetings and exhibitions at both international and regional levels. The Guild publishes a quarterly newsletter in English, Knotting Matters.

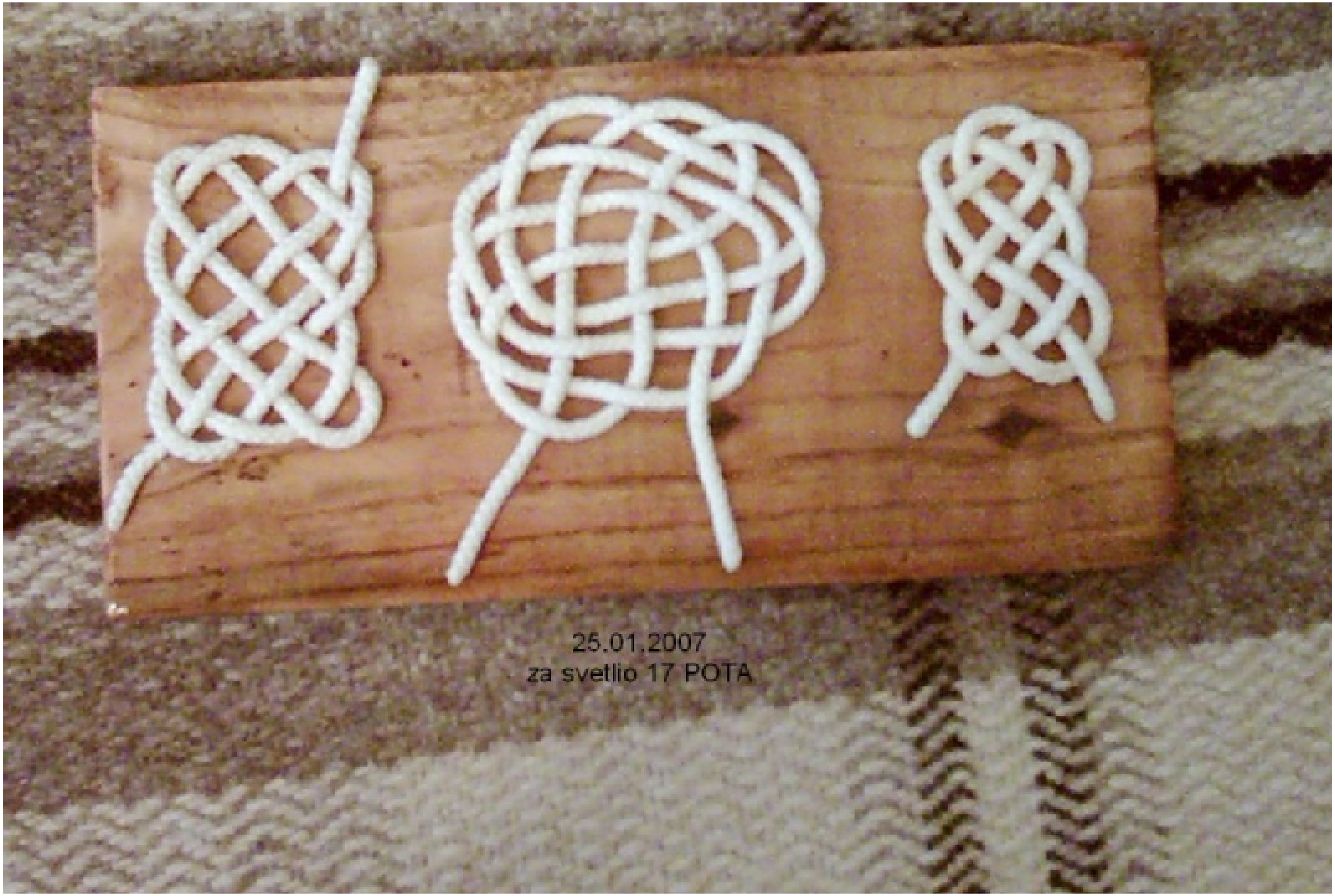
For more information about the IGKT, please contact: secretary@igkt.net

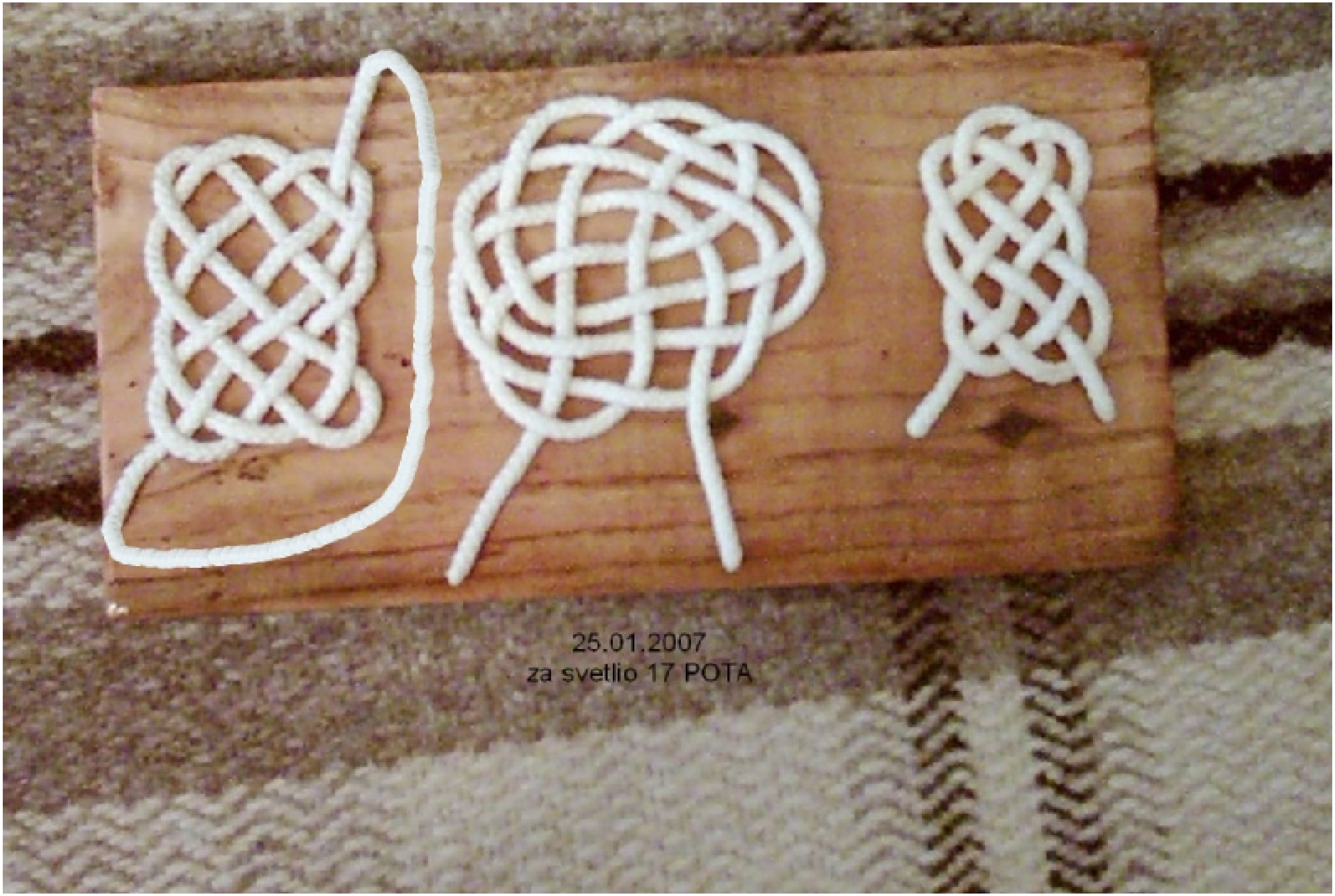


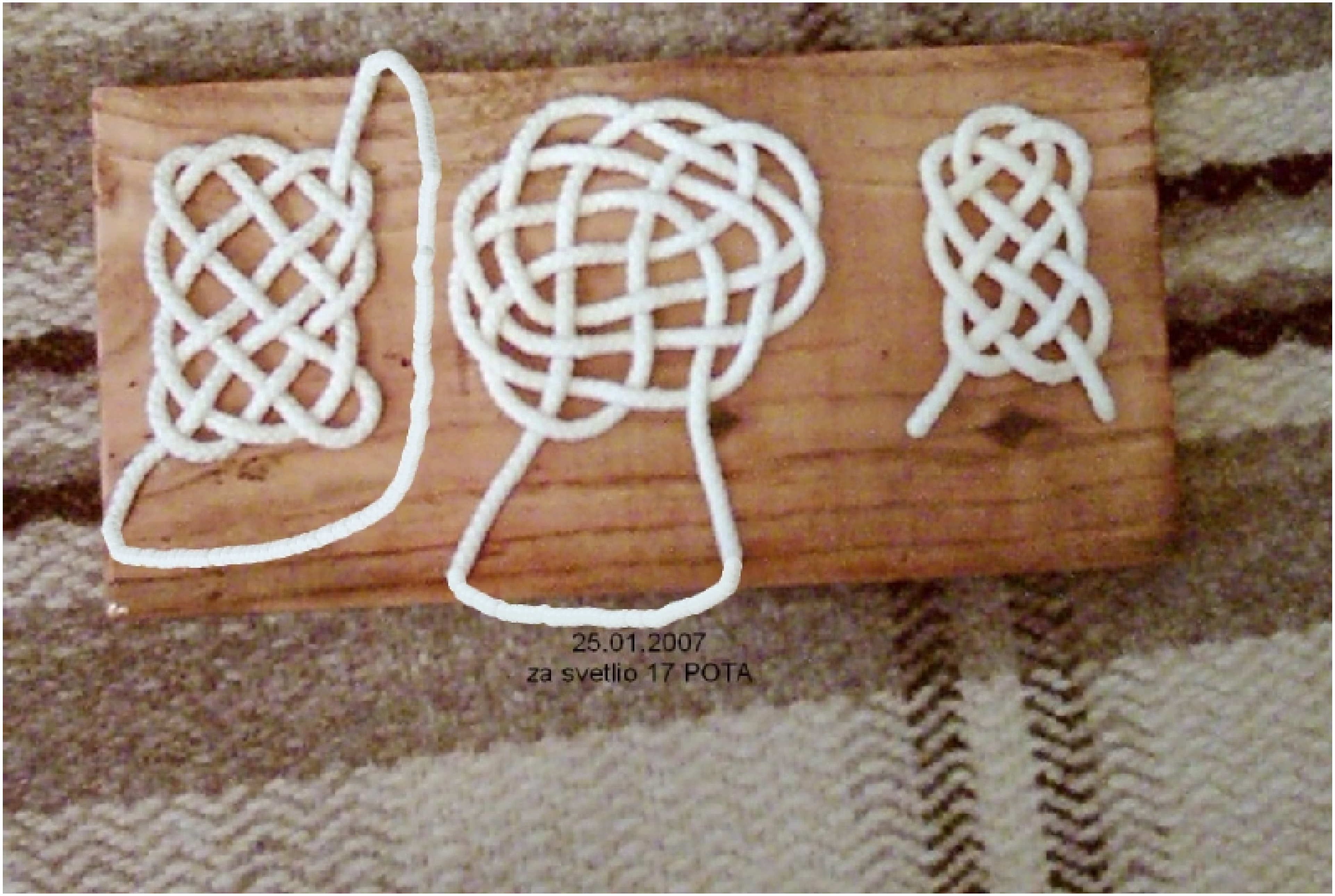


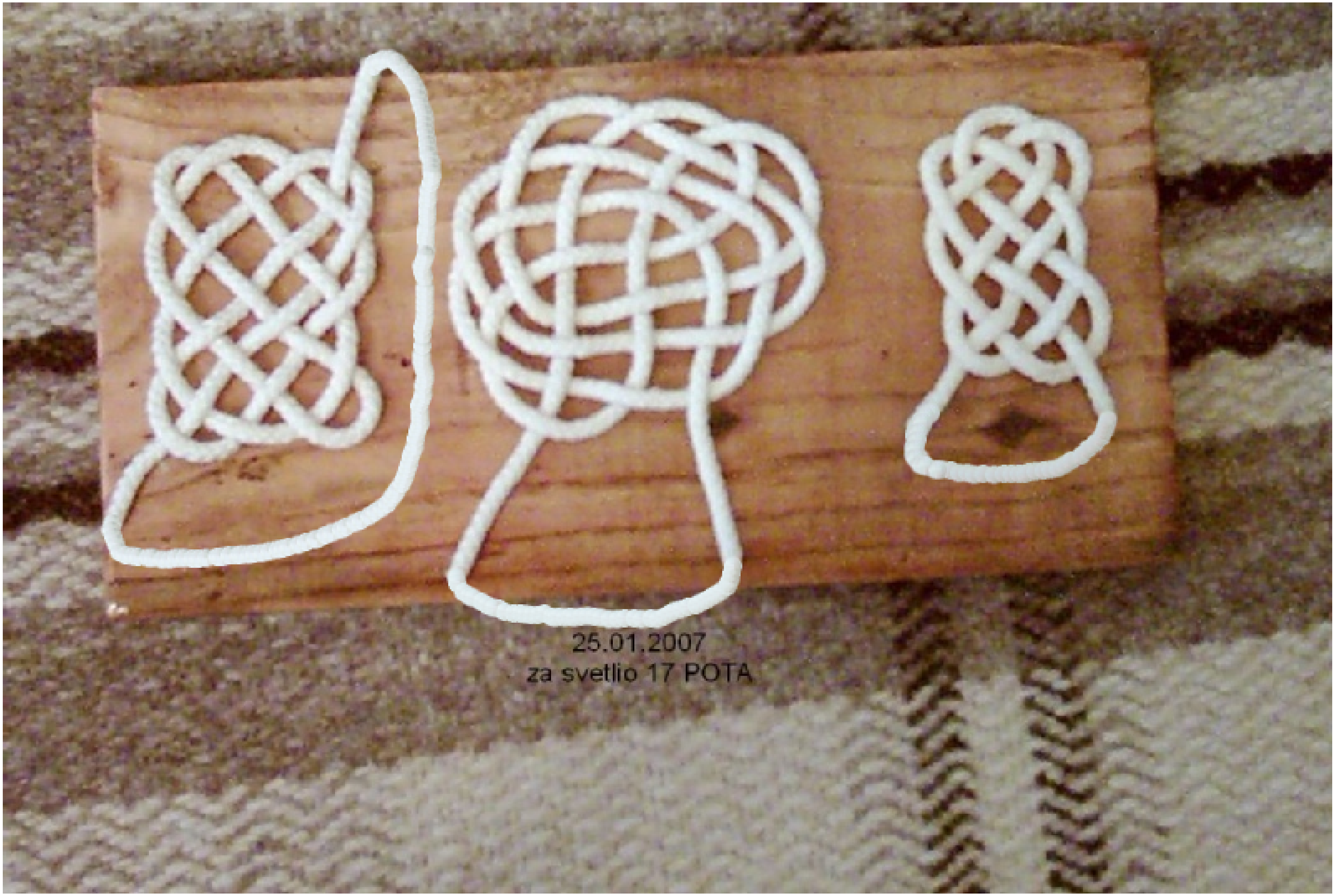
¡Estos nudos se pueden desanudar!

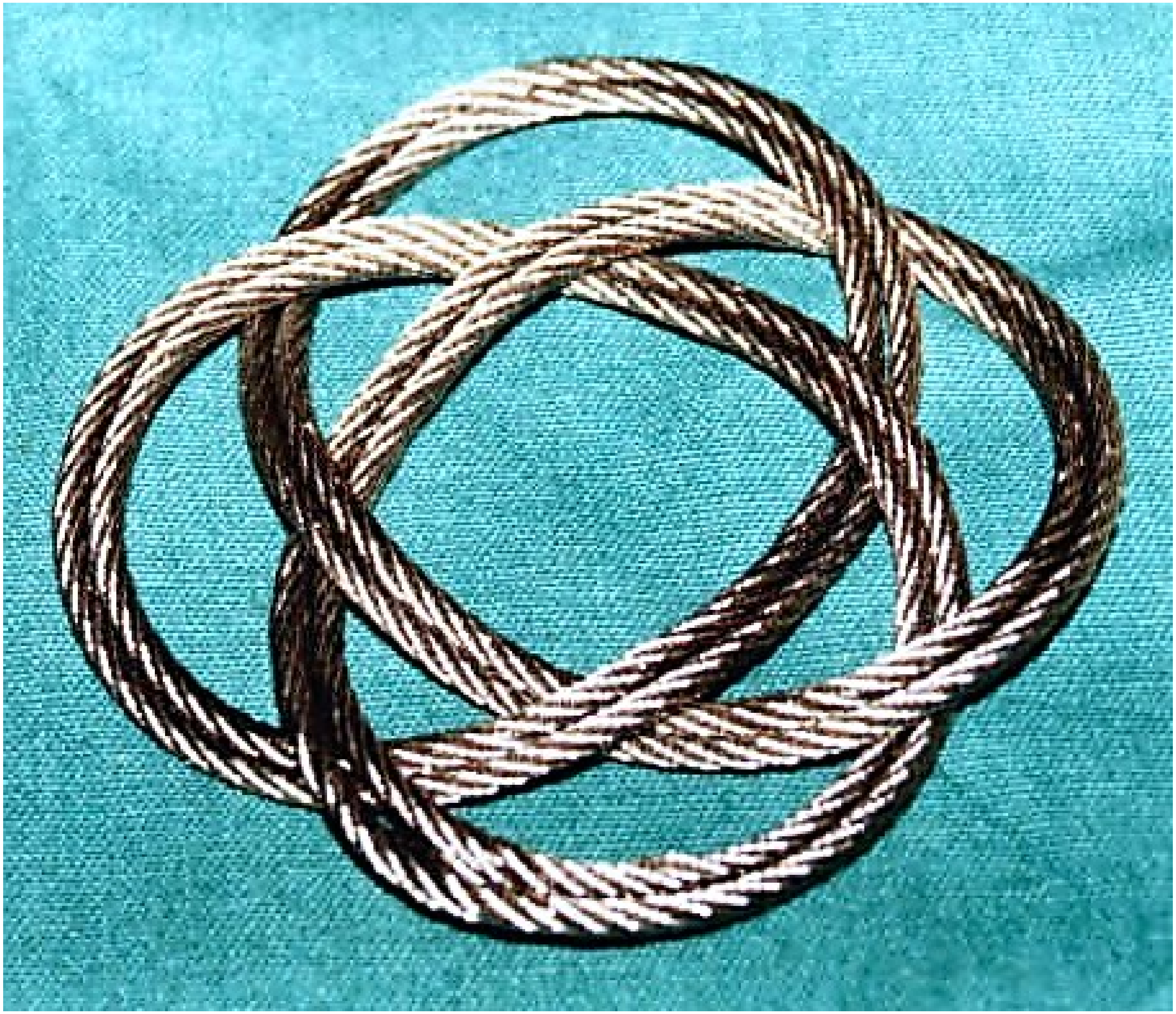
Cerramos:


25.01.2007
za svetlio 17 POTA


25.01.2007
za svetlio 17 POTA


25.01.2007
za svetlio 17 POTA


25.01.2007
za svetlio 17 POTA



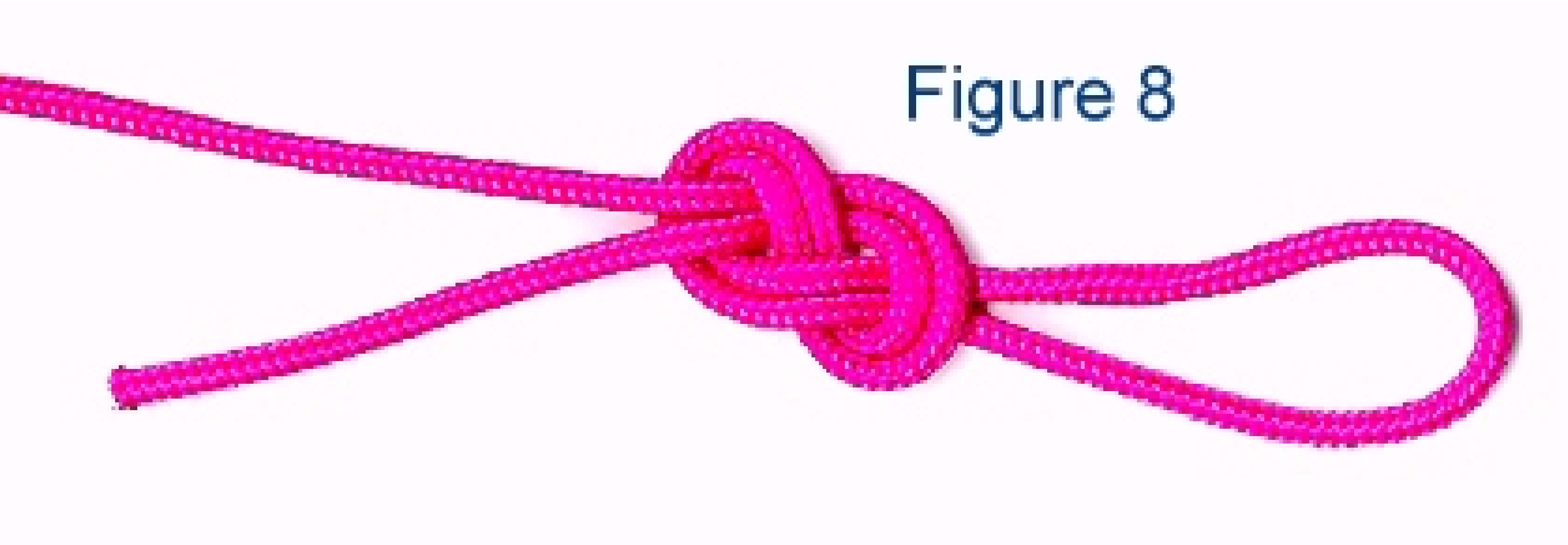
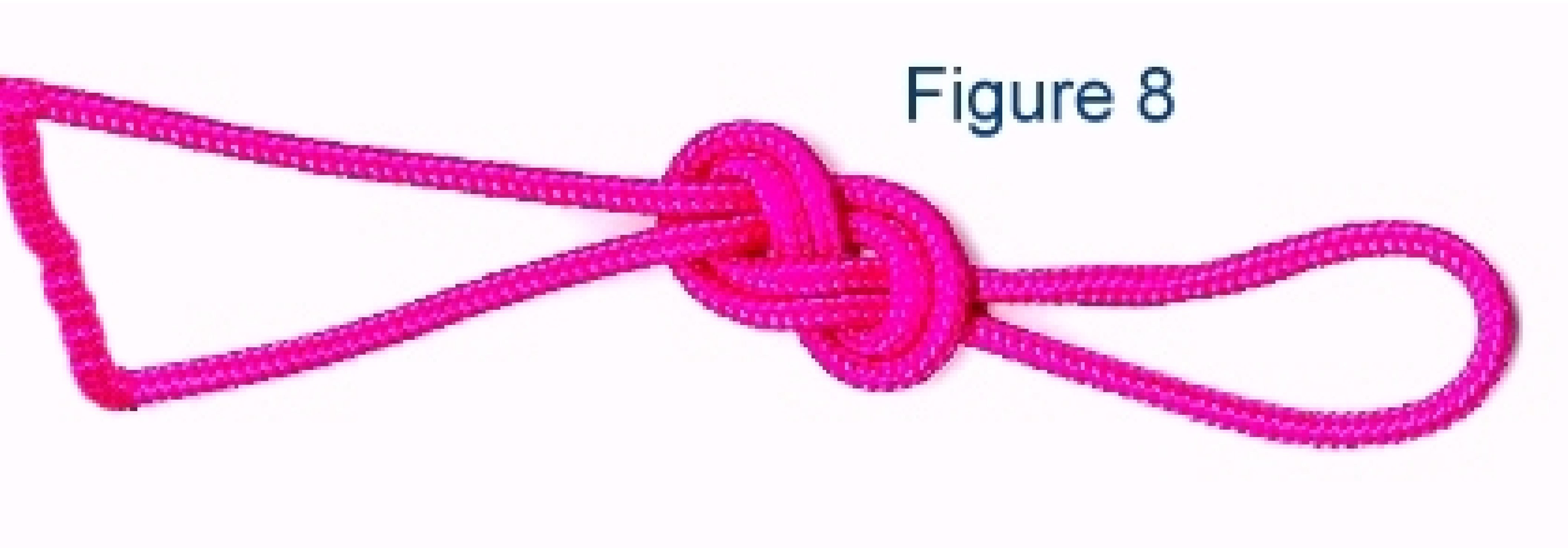
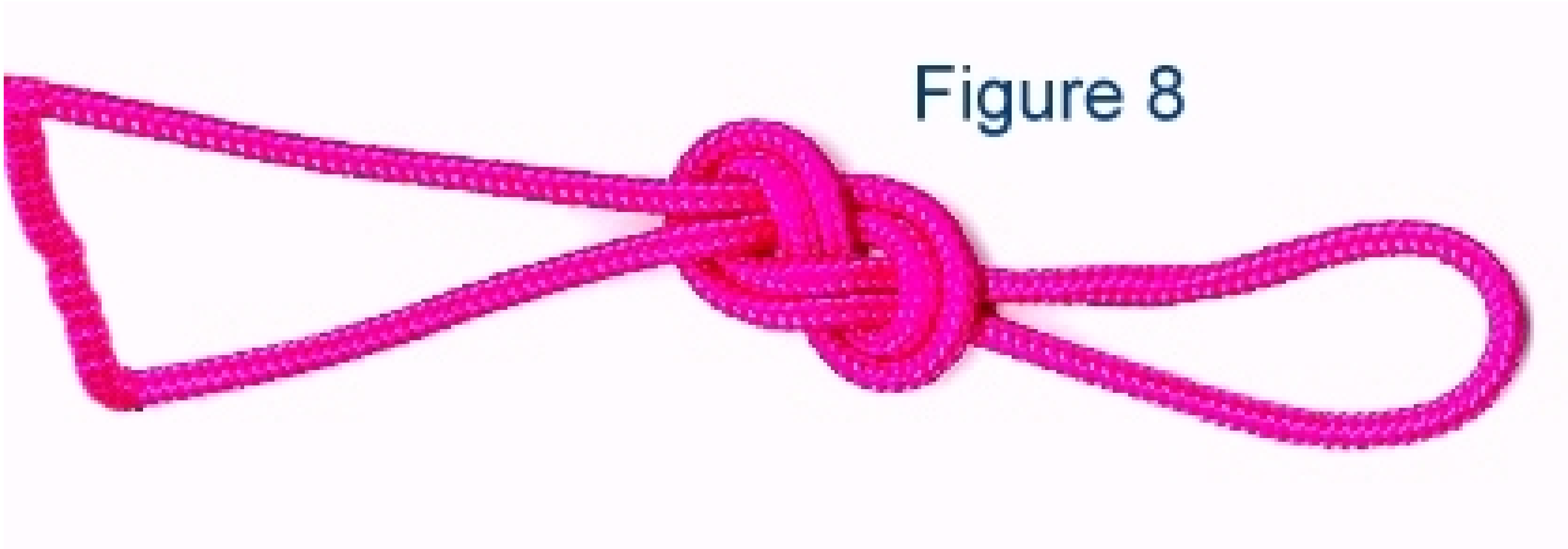


Figure 8

...

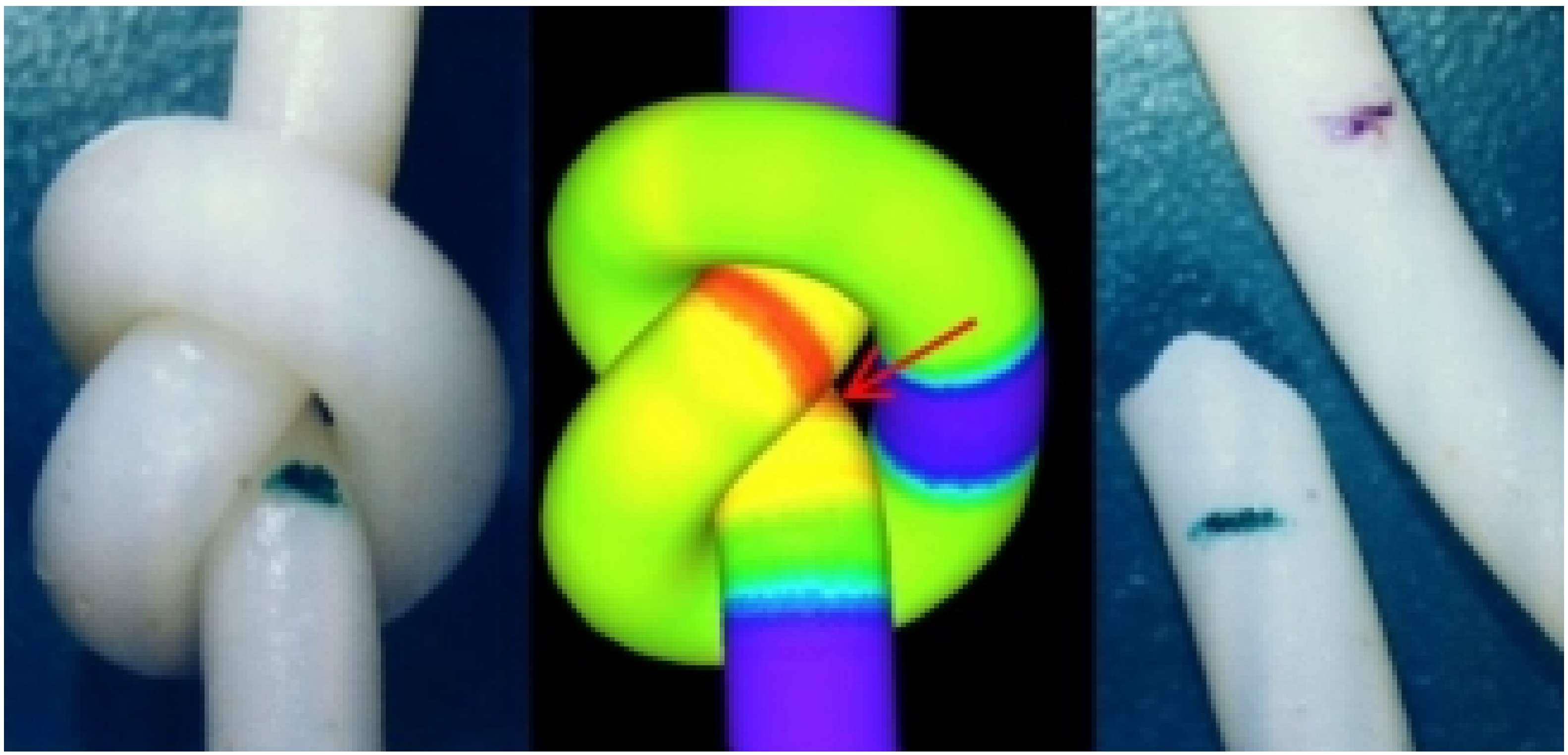


¿qué nudo es éste?

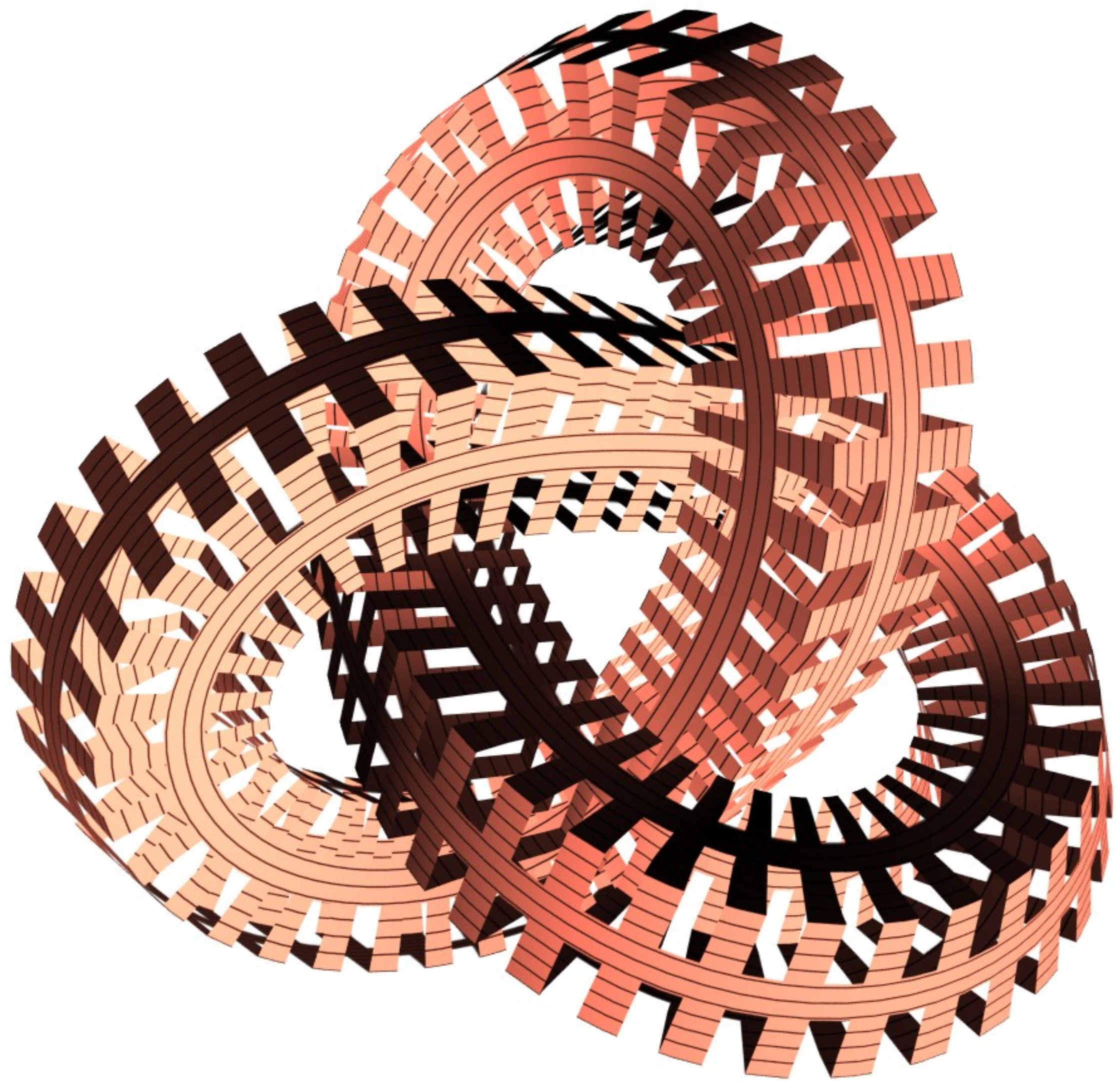


El no nudo:

Take one spaghetto.
Tie a knot on it and pull it by its ends. Gently!
Observe, where it breaks (Pieransk).

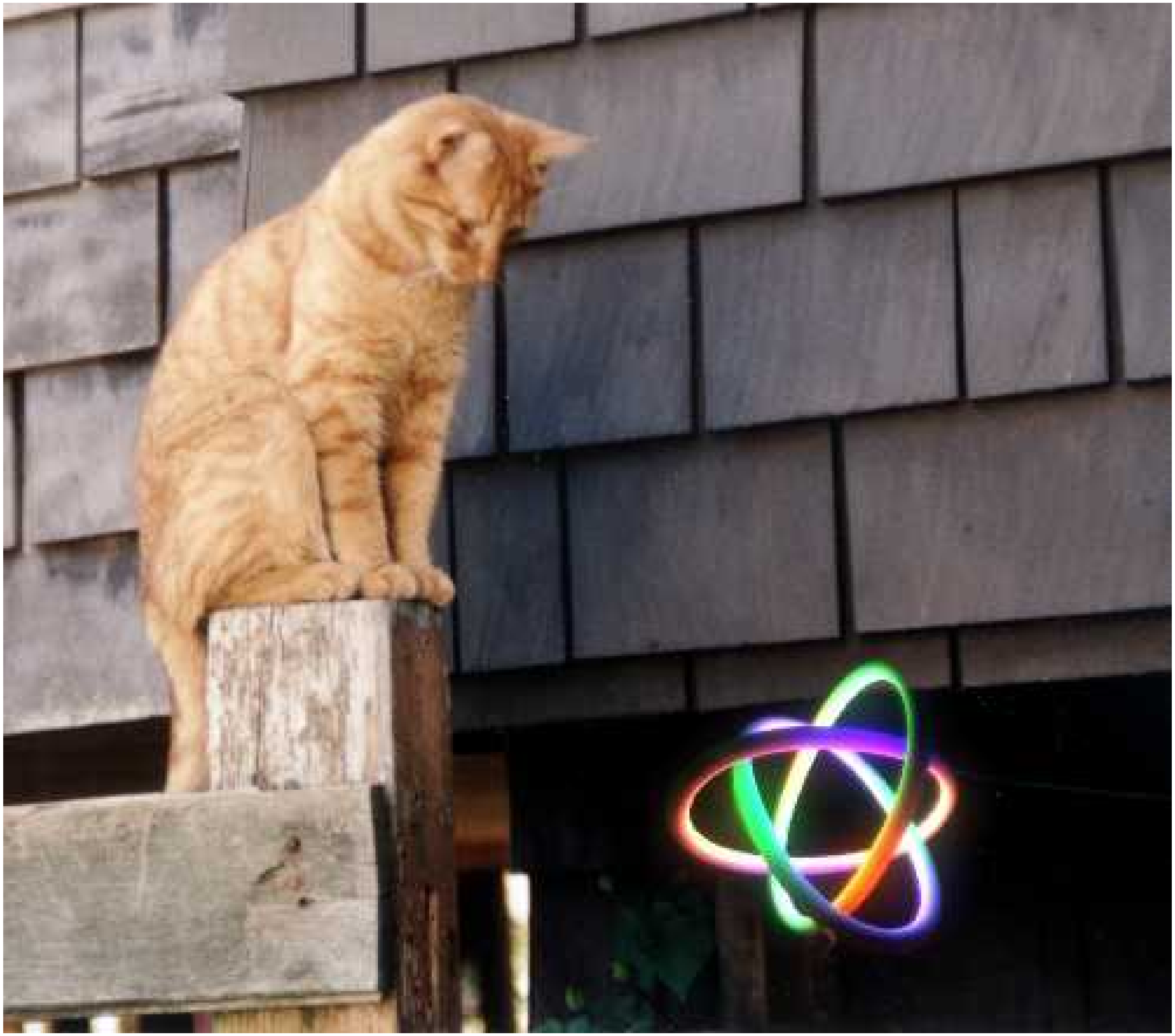


Otros usos



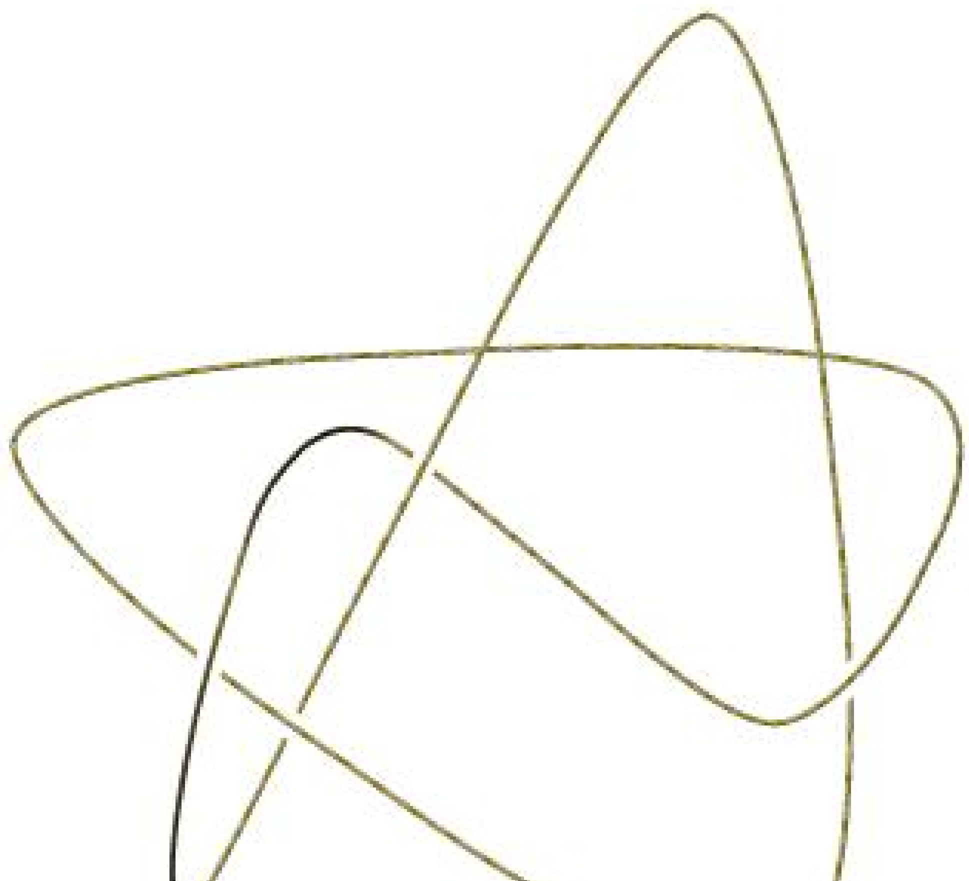
Otros usos

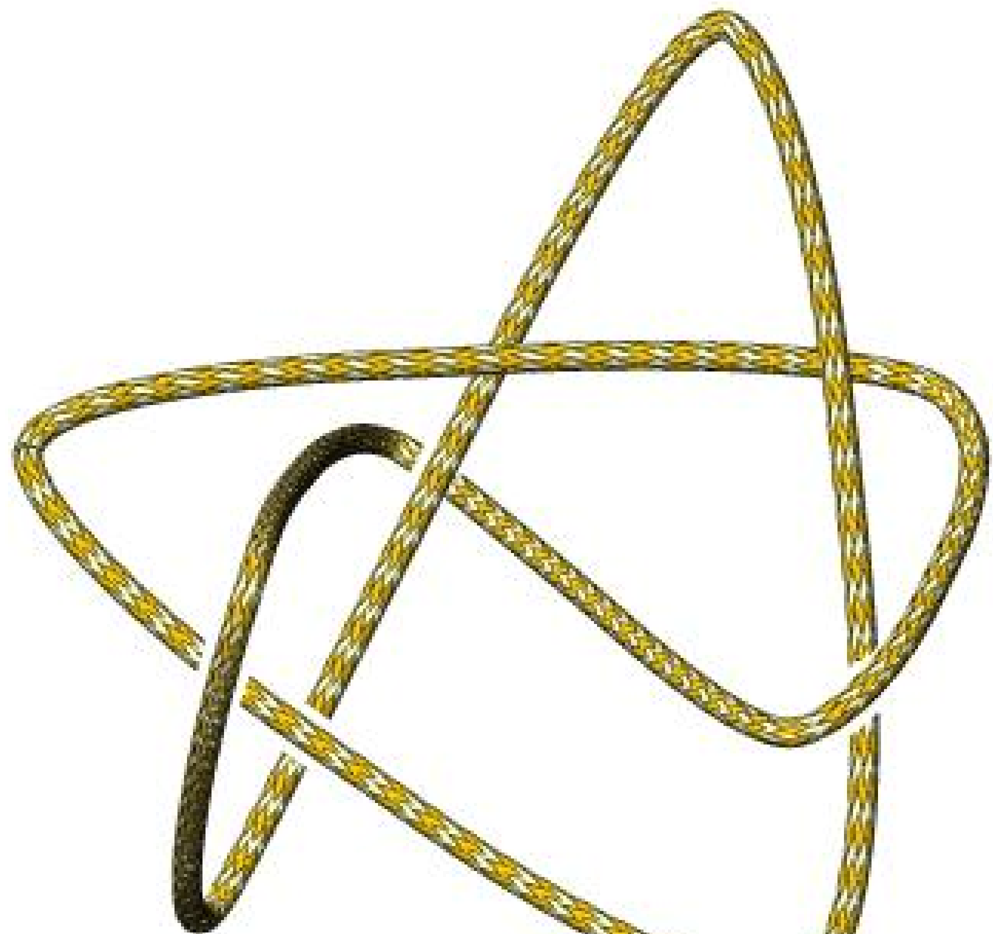
Otros usos

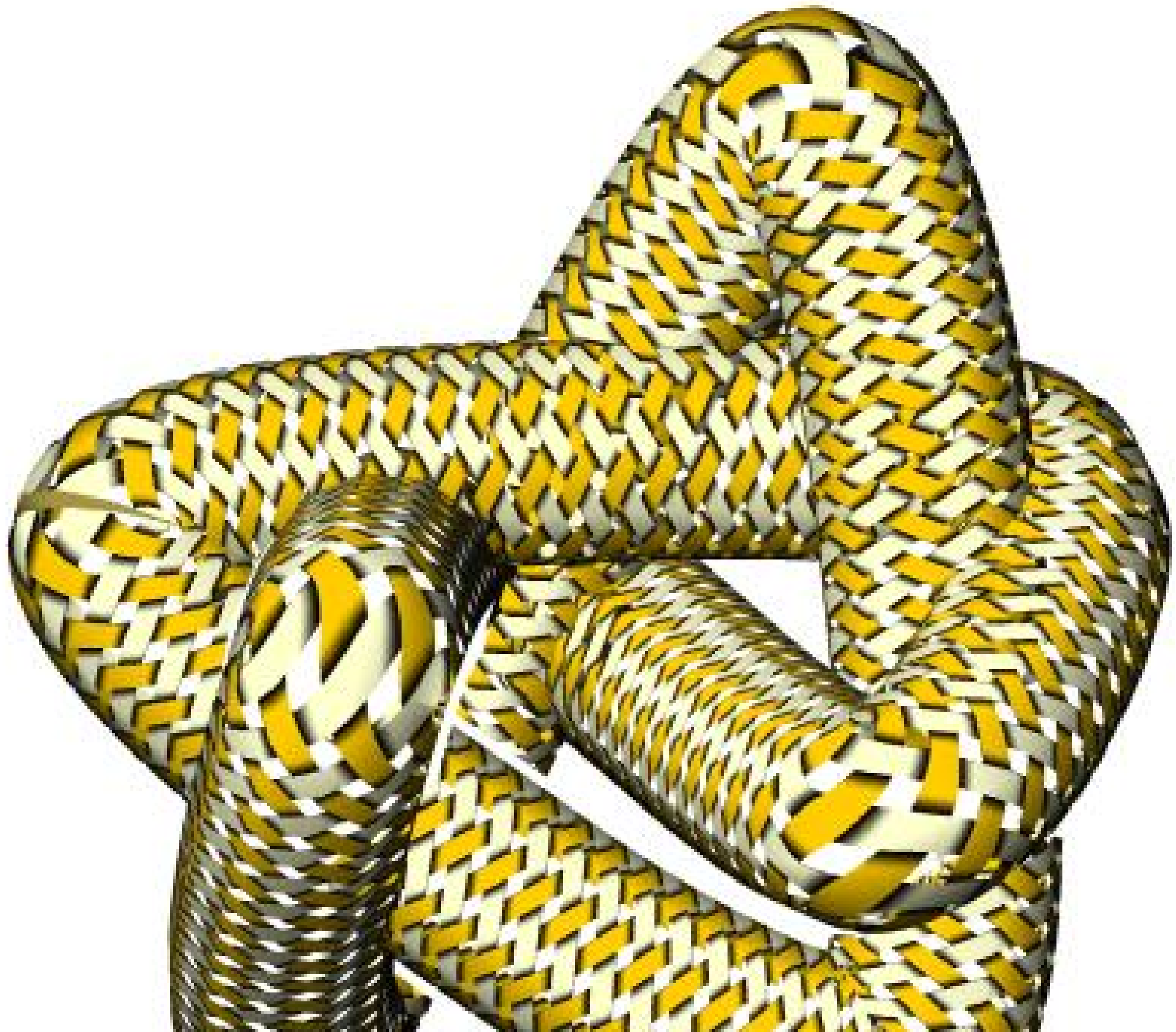


Nudos De Matemáticos

Los nudos van a ser curvas en el espacio tridimensional.



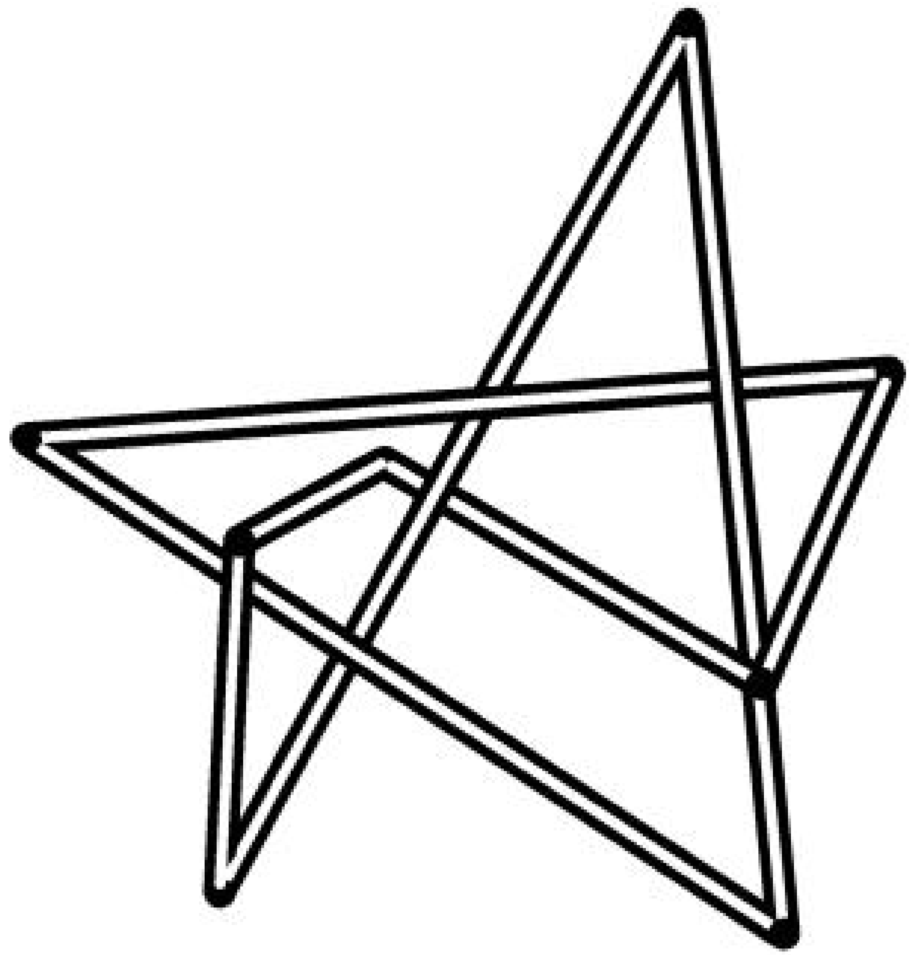




Mejor aún:

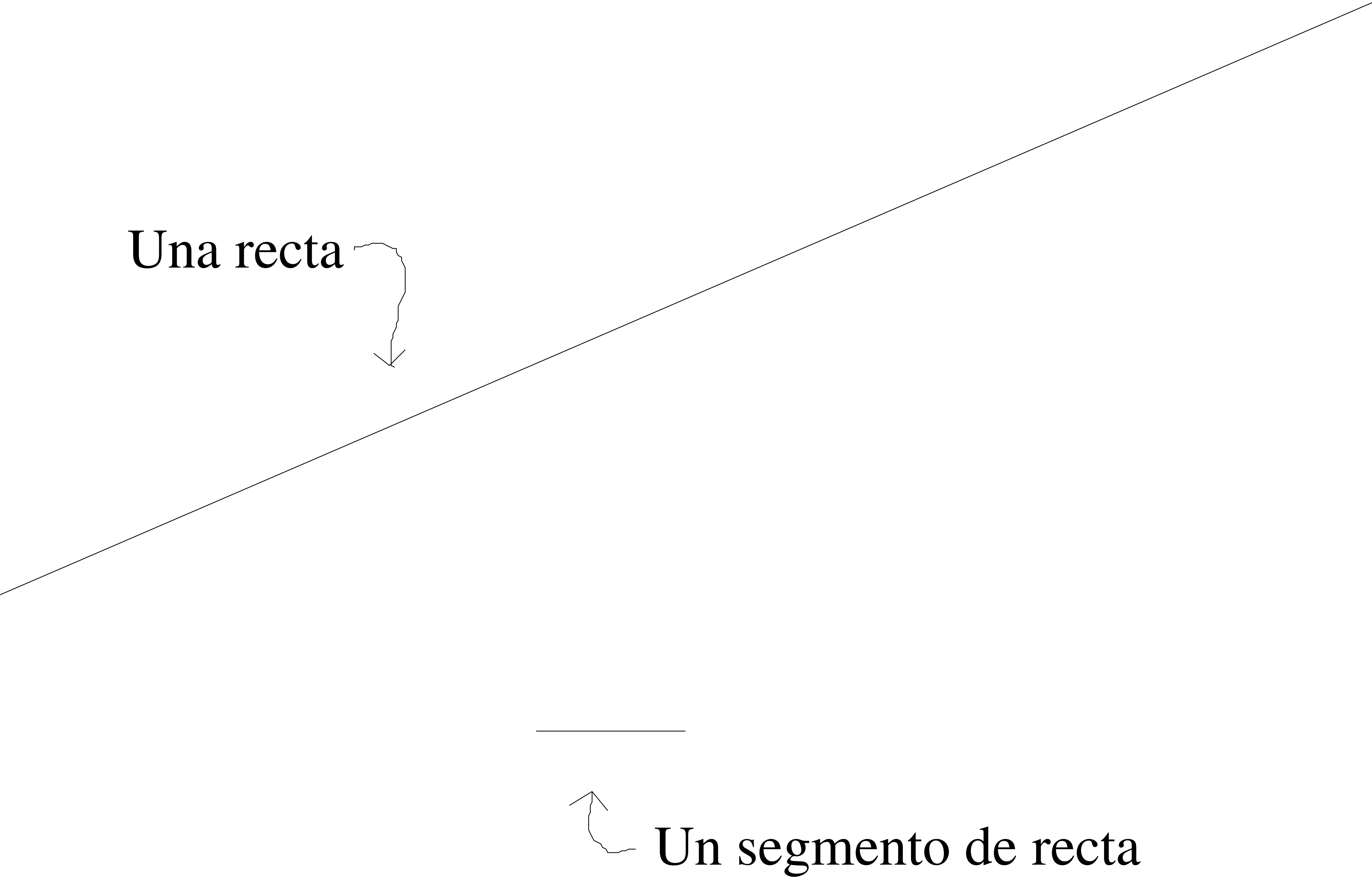
Nuestros nudos son curvas en el espacio que están hechas de segmentos de recta.

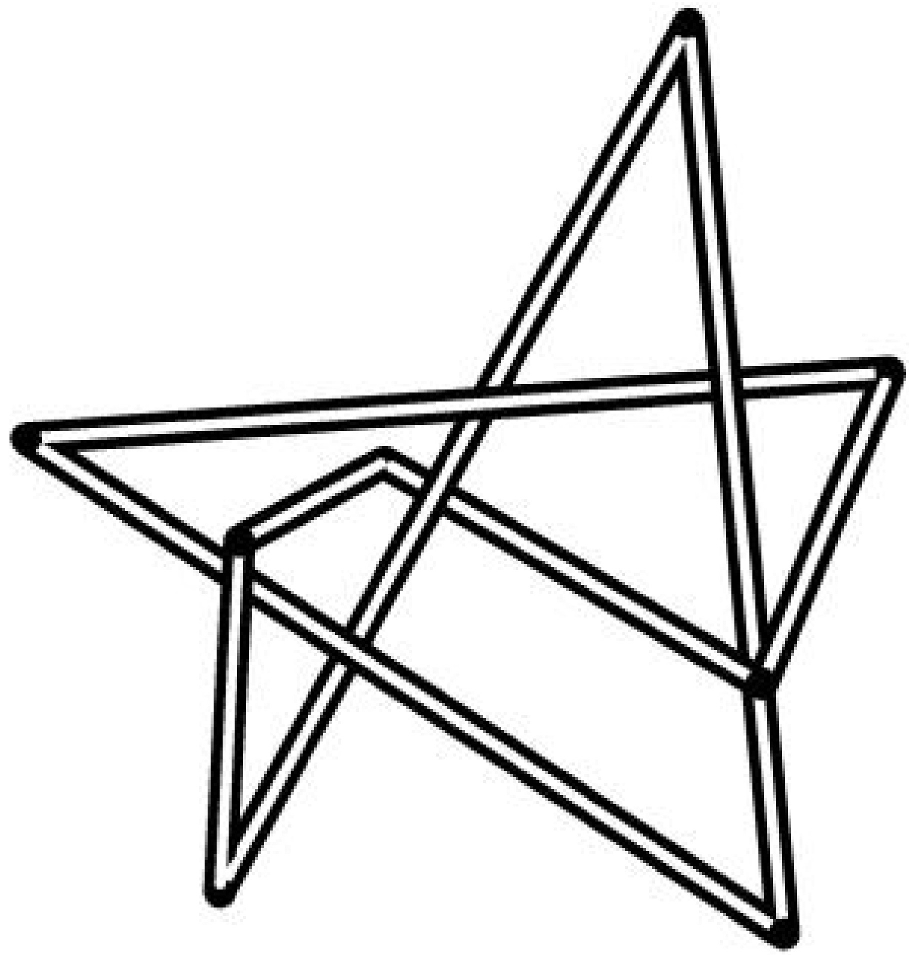
(ecuaciones más sencillas)



Pero, ¿Qué es una recta?

¿Qué es un segmento de recta?

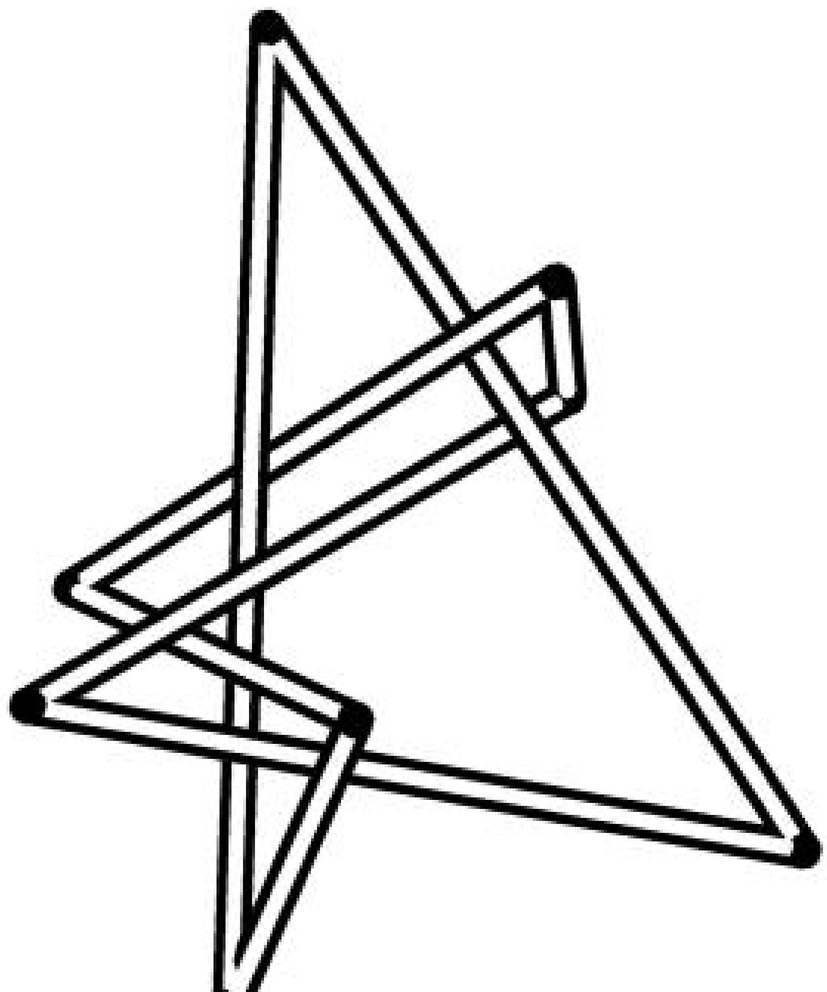

Una recta
Un segmento de recta



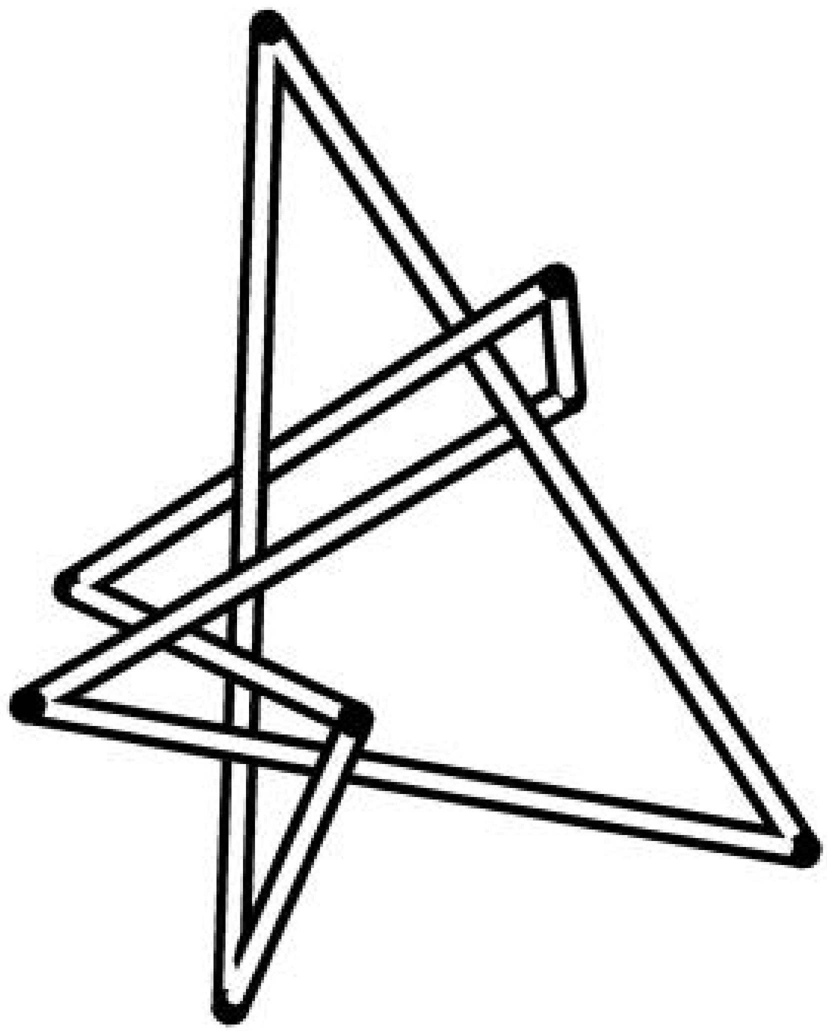
Definición. Un nudo es una curva, k, en el espacio tridimensional.

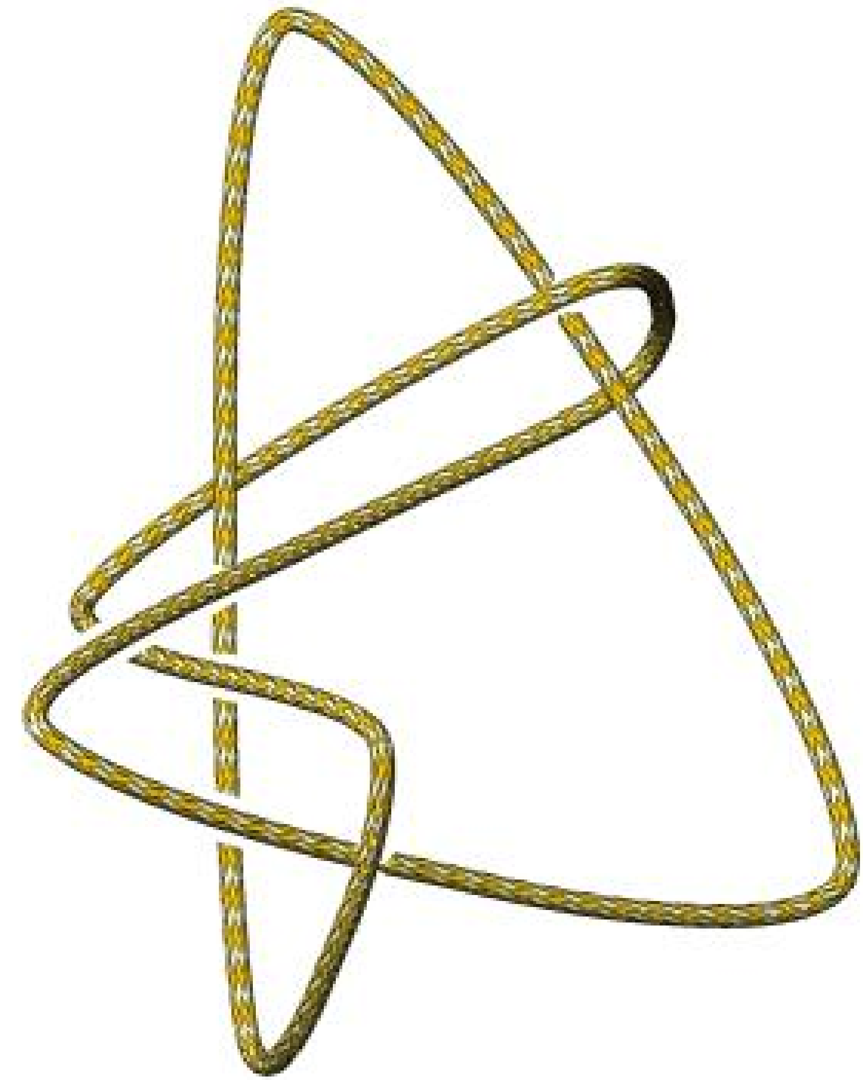
Pedimos que k sea una curva simple y cerrada.

También pedimos que k sea unión de un número finito de segmentos de recta.



Sin embargo, usualmente vamos a dibujar los nudos como curvas “redonditas”



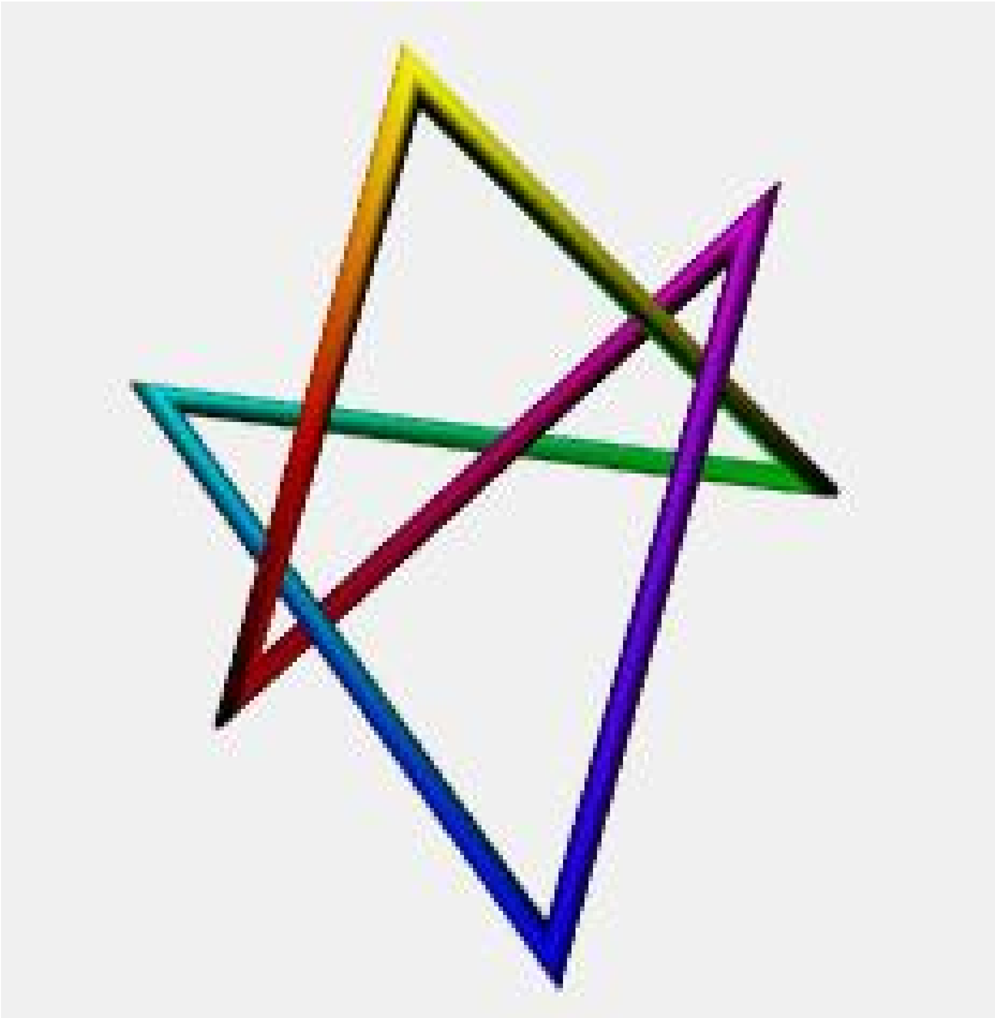


¿Por qué?

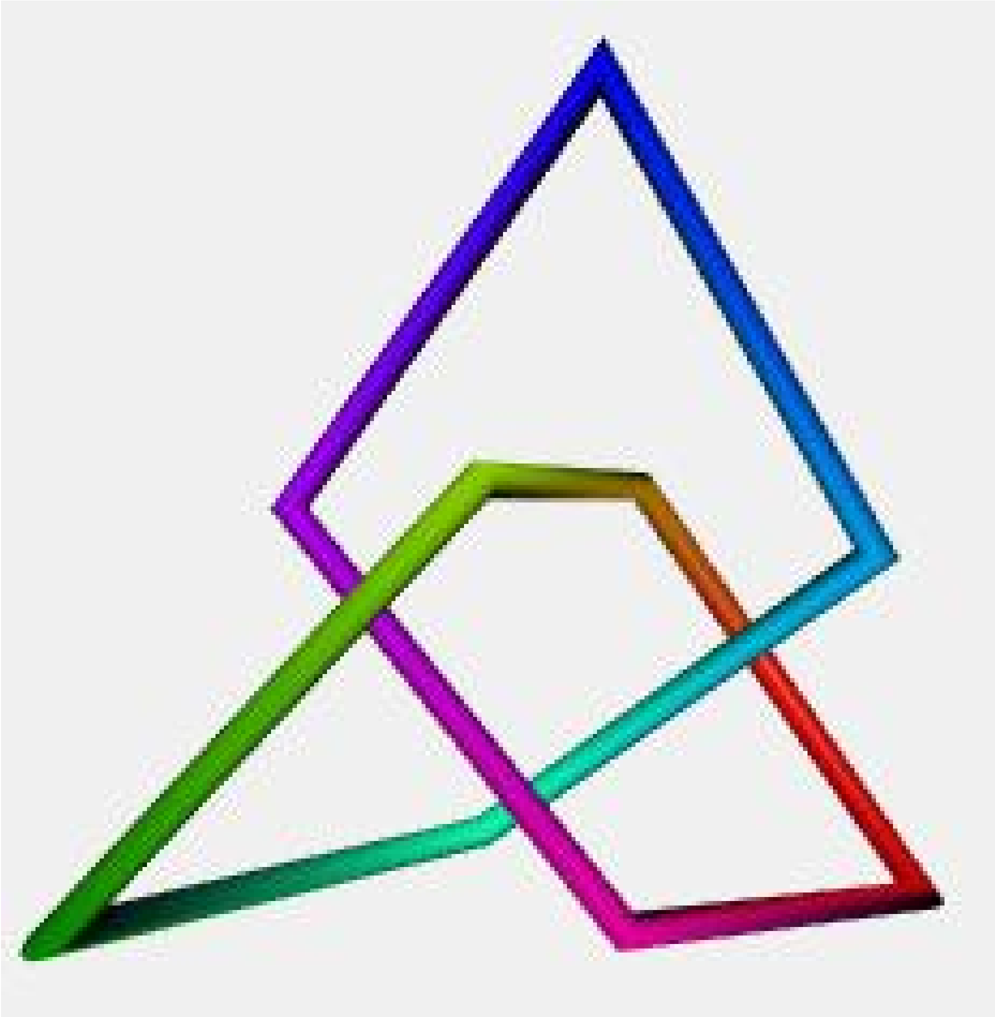
Bueno, primero porque es más fácil.

Y luego:

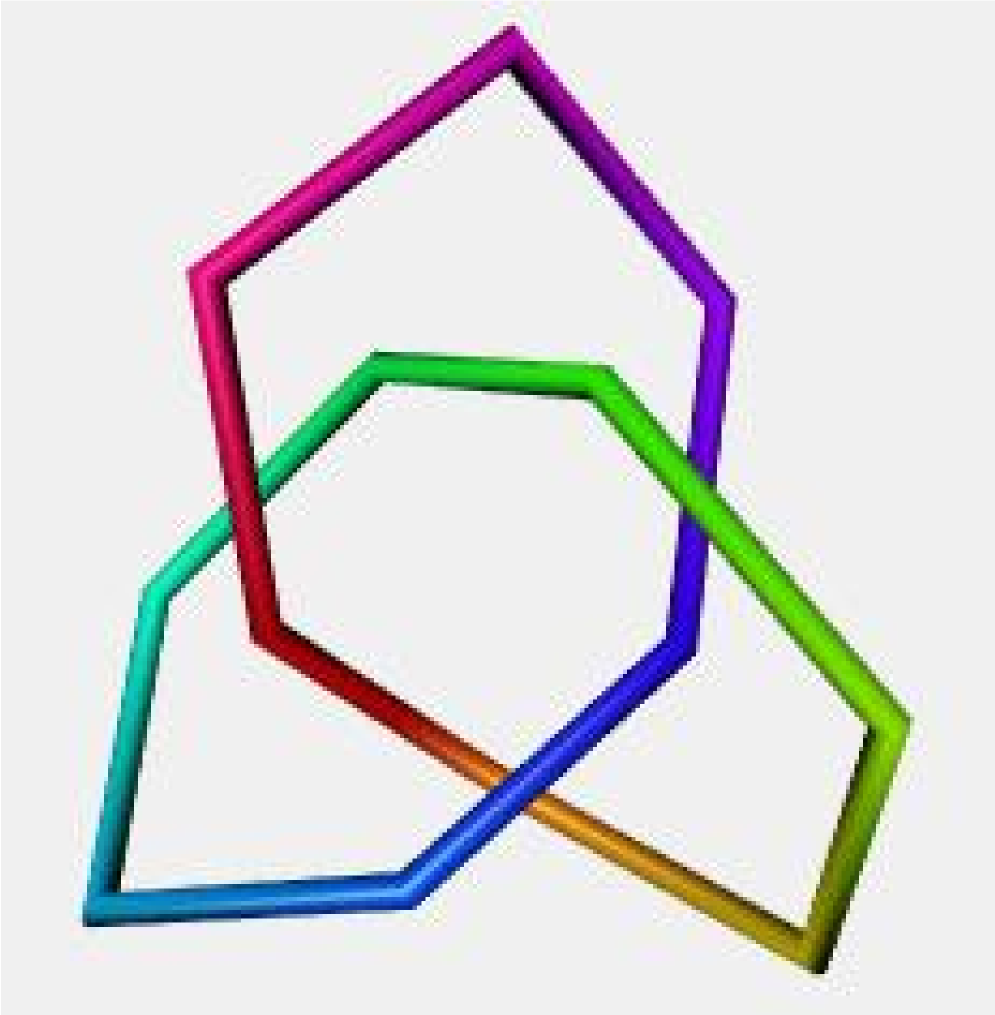
Seis lados



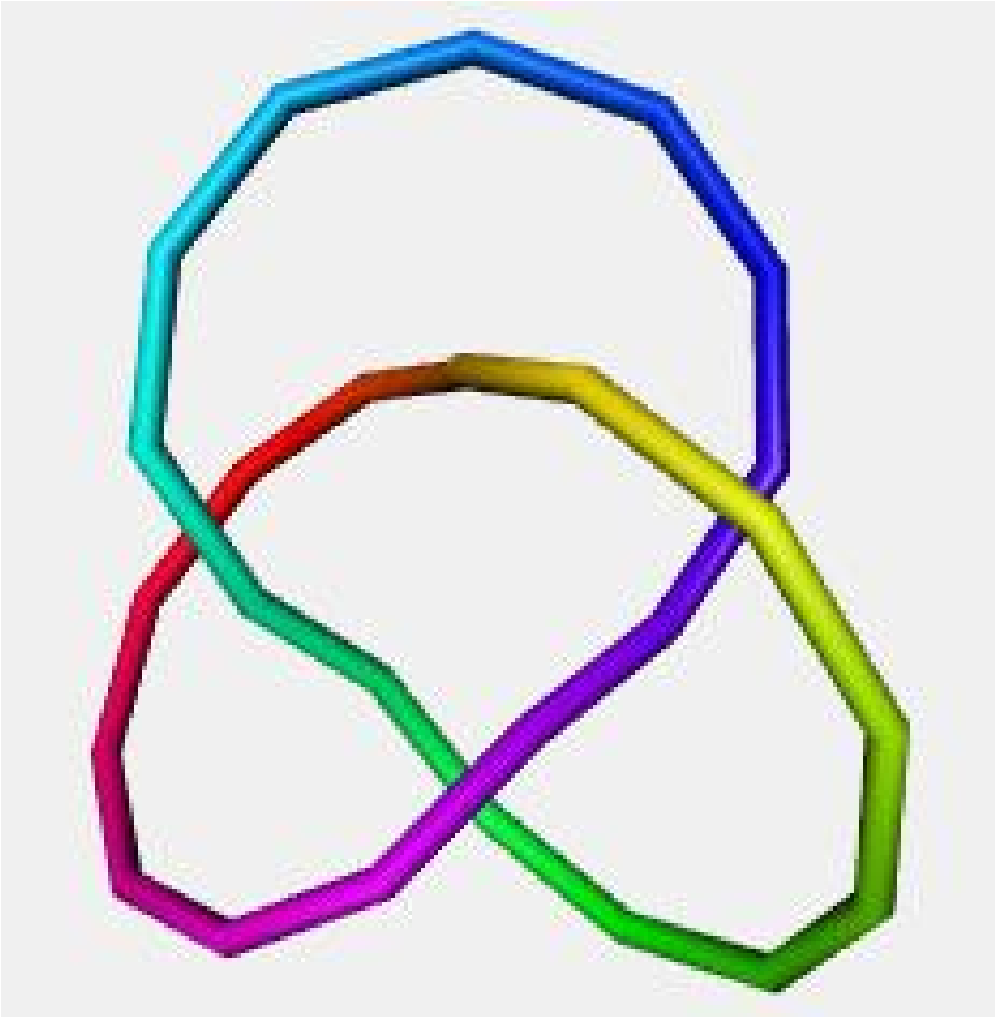
Nueve lados



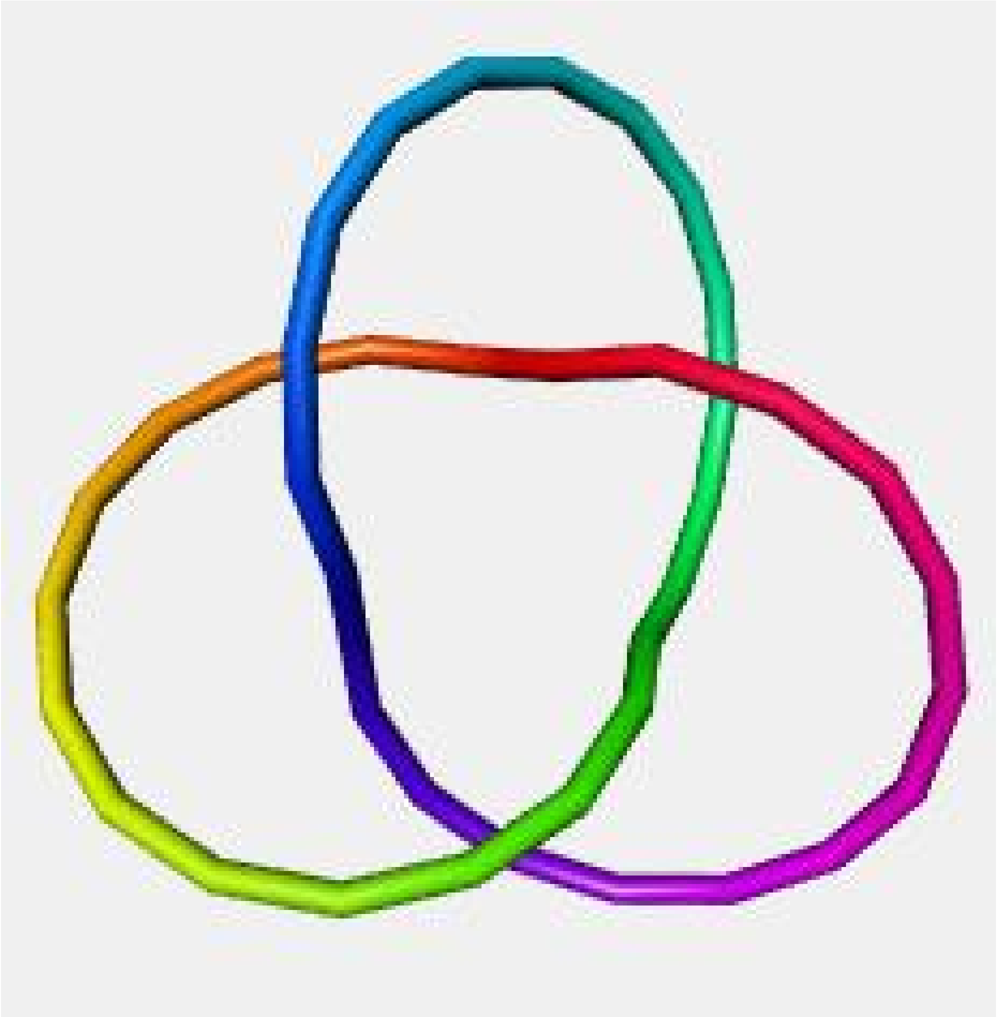
Trece lados



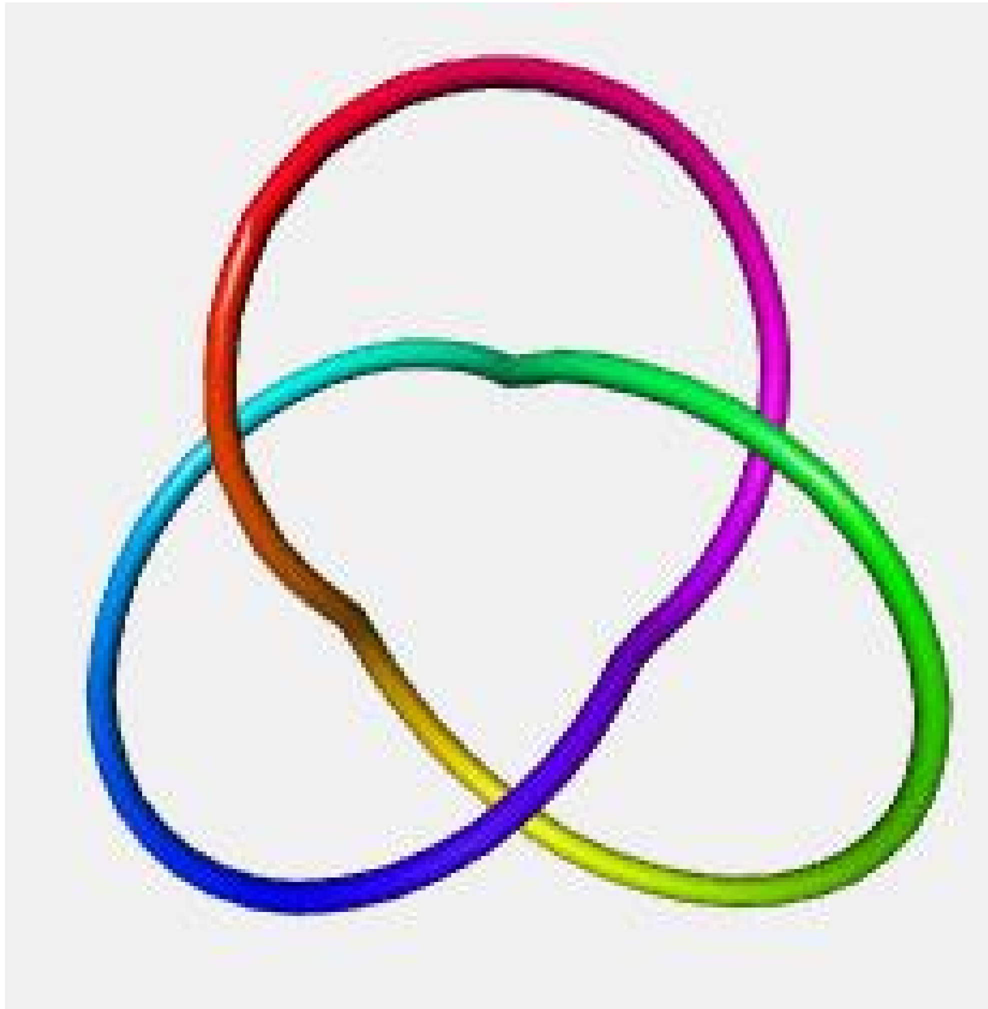
Veintisiete lados



Cuarenta y un lados

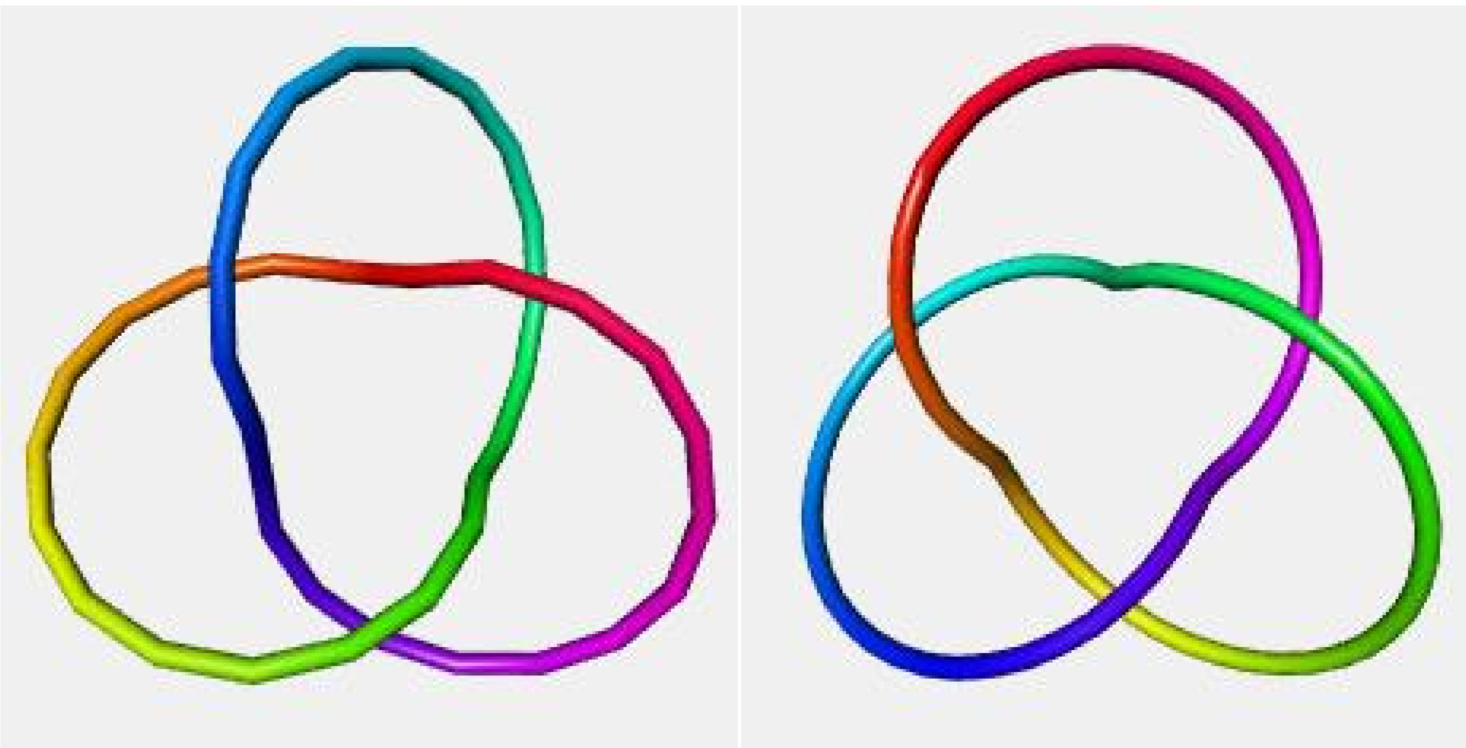


Cien lados



Pero, ¿esos nudos son el mismo nudo?

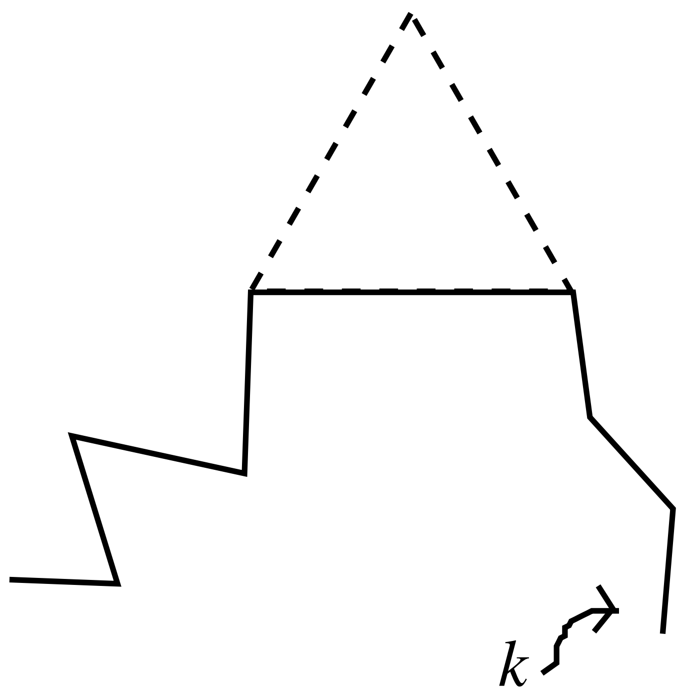
(¿la misma curva?)

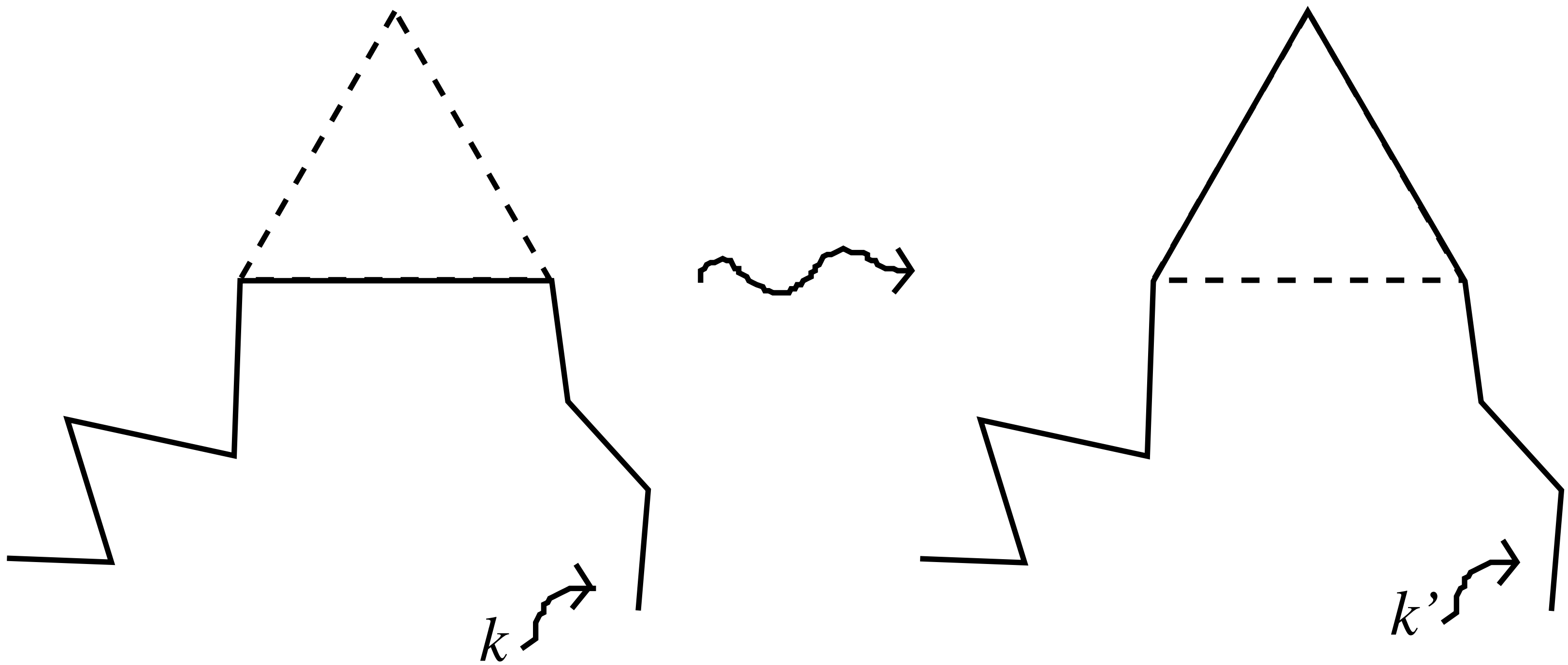


(pues, sí y no)

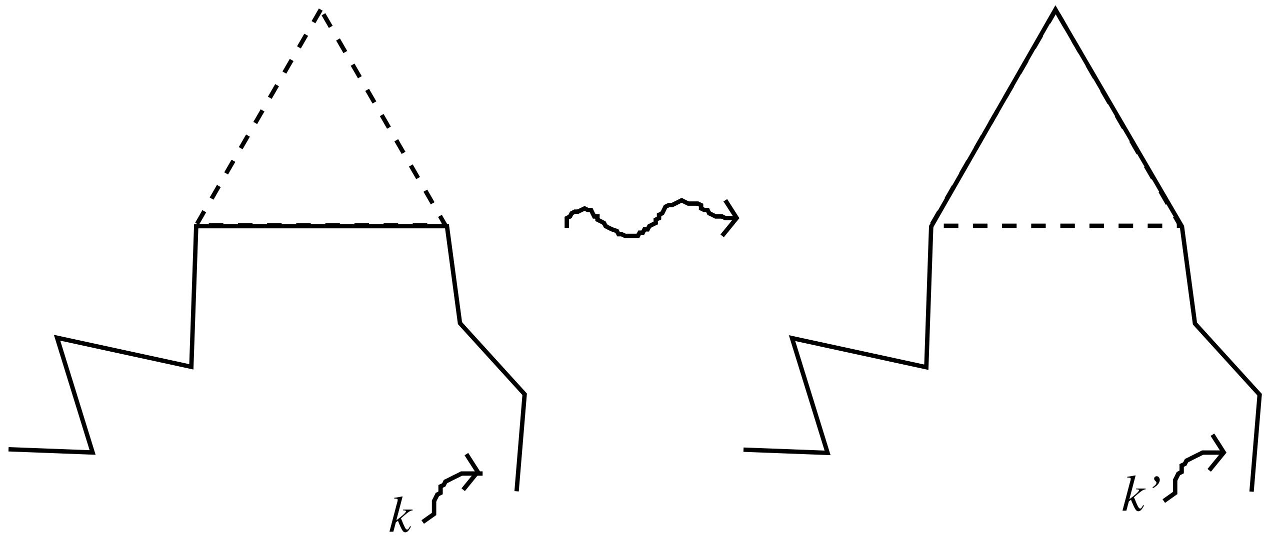
Tenemos que decir cuándo dos curvas son el mismo nudo.

Tomemos un nudo k y un triángulo Δ en el espacio de tal manera que Δ y k se tocan en exactamente un segmento de k y un lado de Δ.





Si hacemos el cambio del dibujo, obtenemos un nuevo nudo k'.

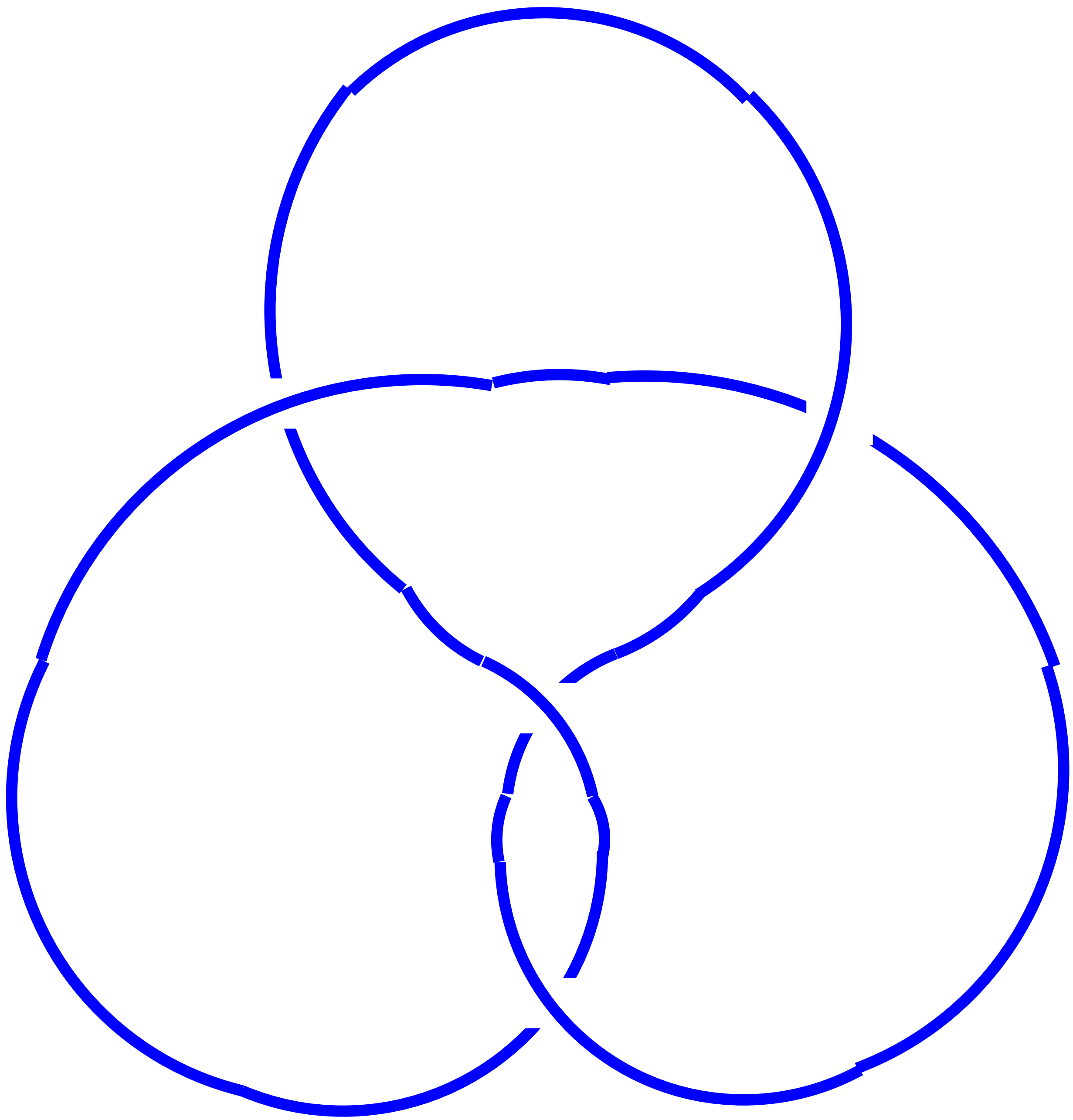


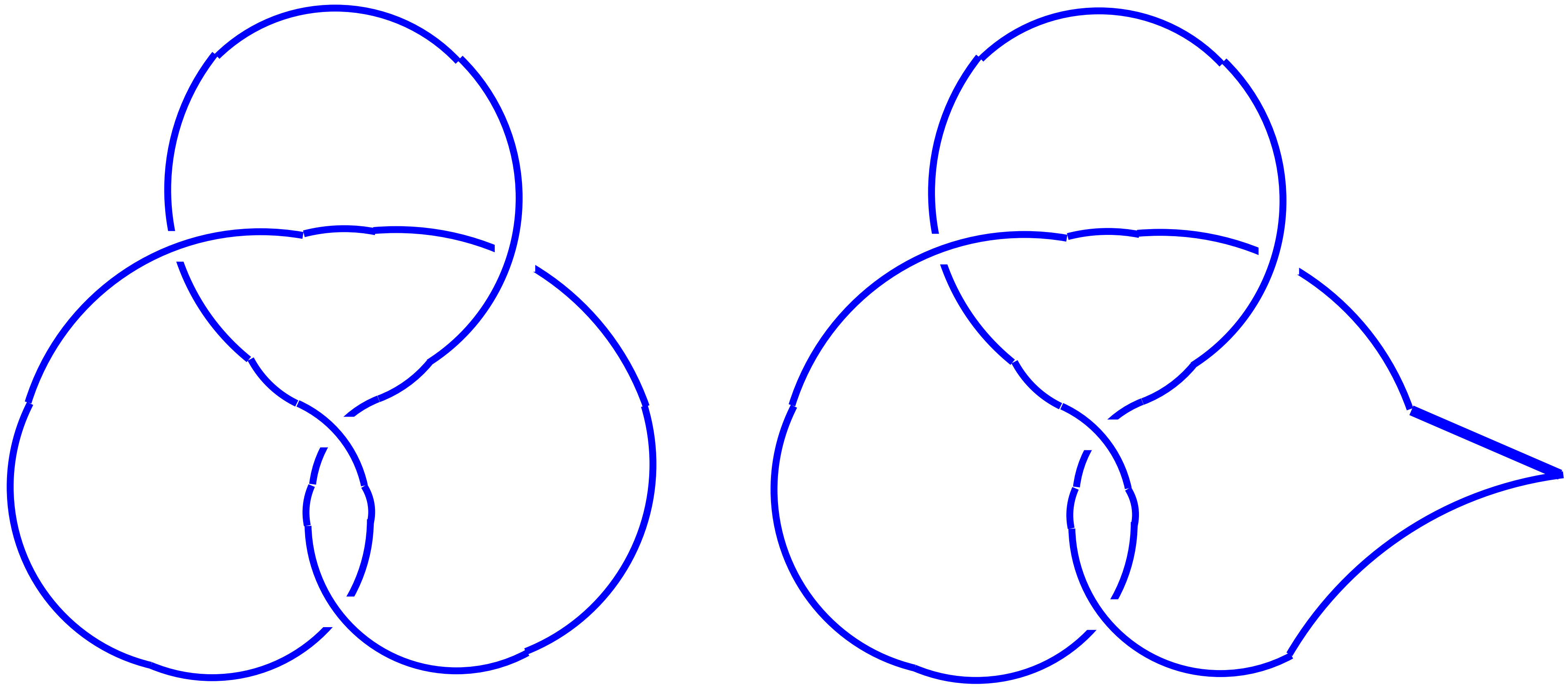
Según el dibujo, decimos que el nudo k' se obtiene del nudo k mediante una movida Δ.

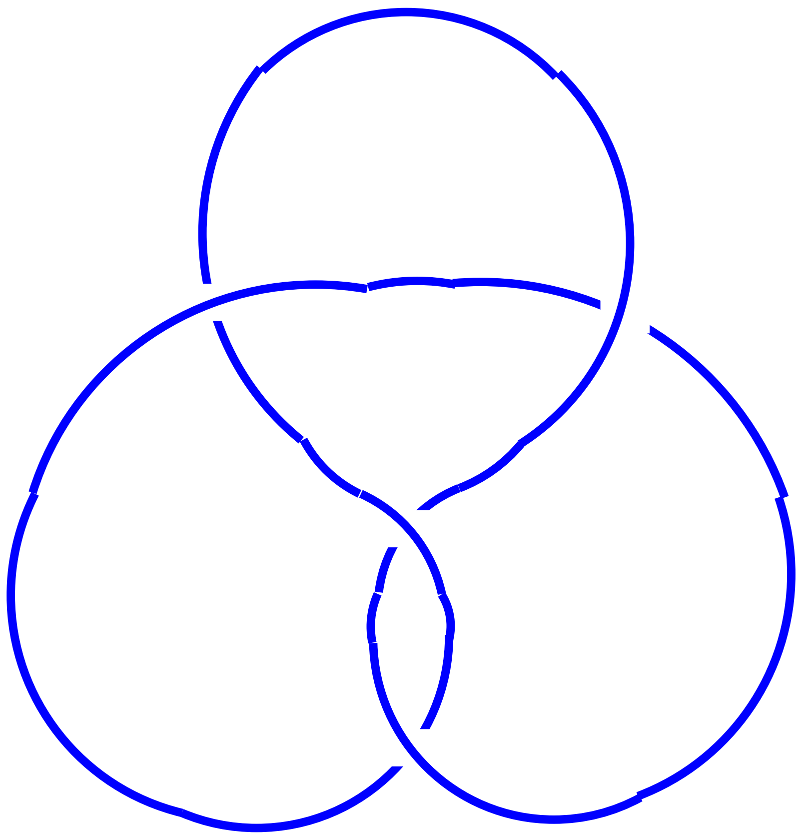
(También decimos que k se obtiene de k' mediante una movida $\bar{\Delta}$).

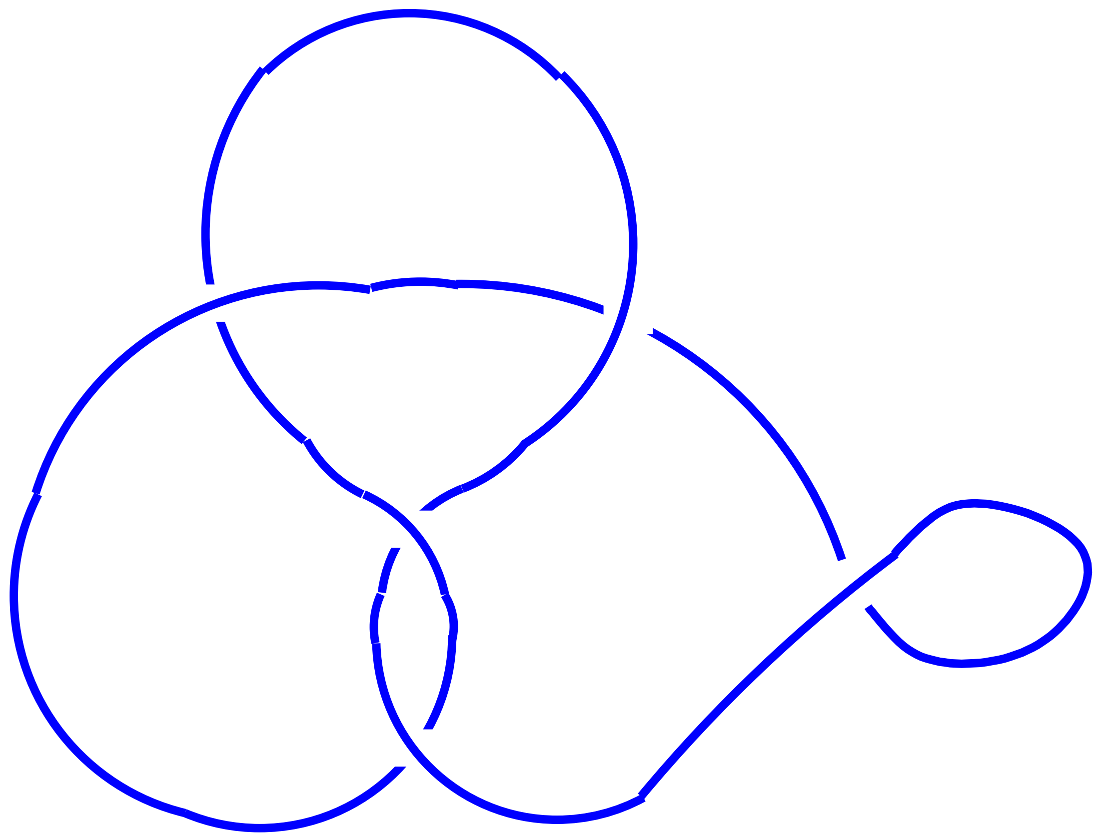
Definición. Dos curvas k y ℓ se dicen equivalentes (o sea, "son el mismo nudo") si una se puede llevar a la otra mediante una sucesión finita de movidas Δ y $\bar{\Delta}$.

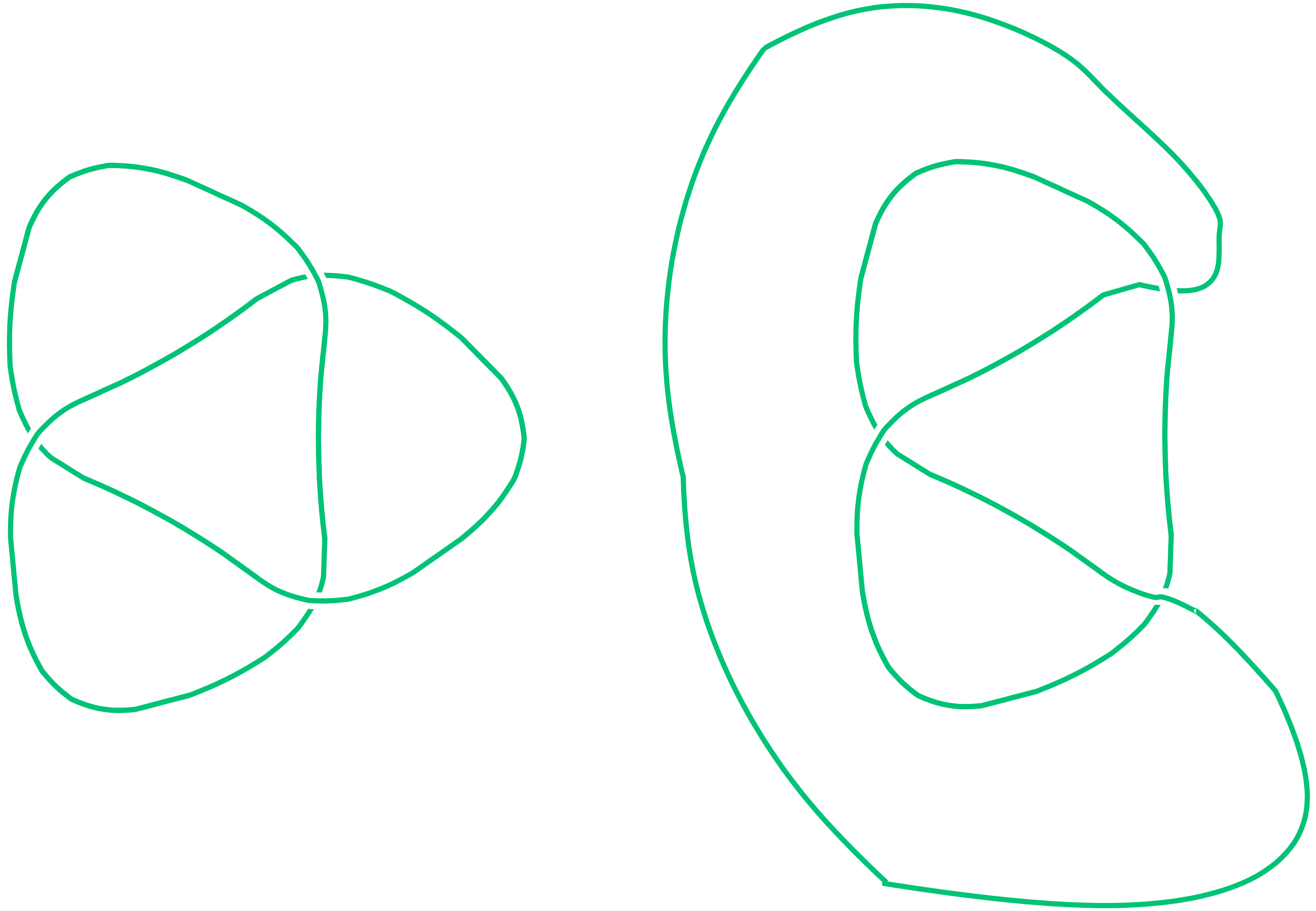
Se escribe "$k \sim \ell$".



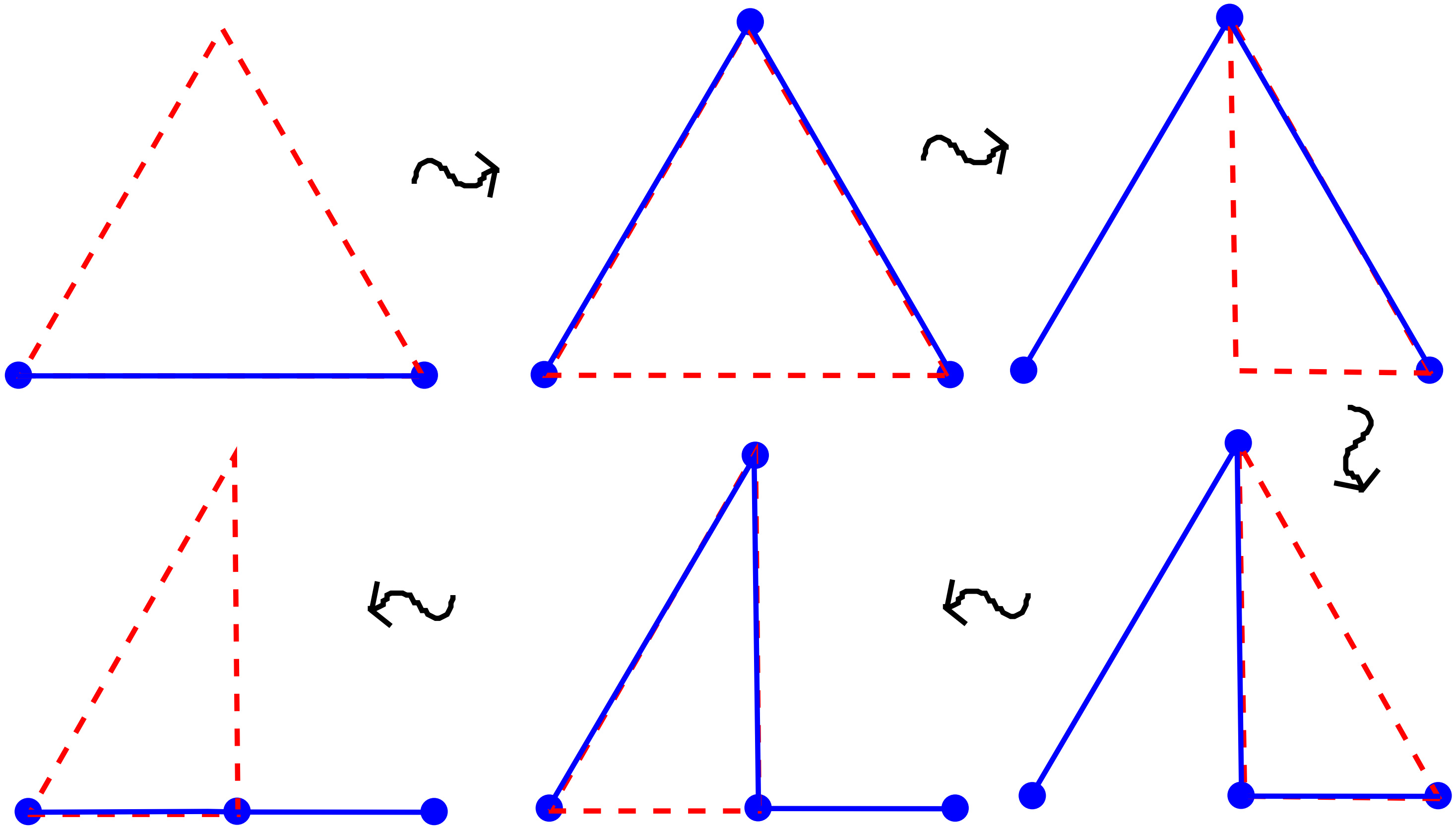




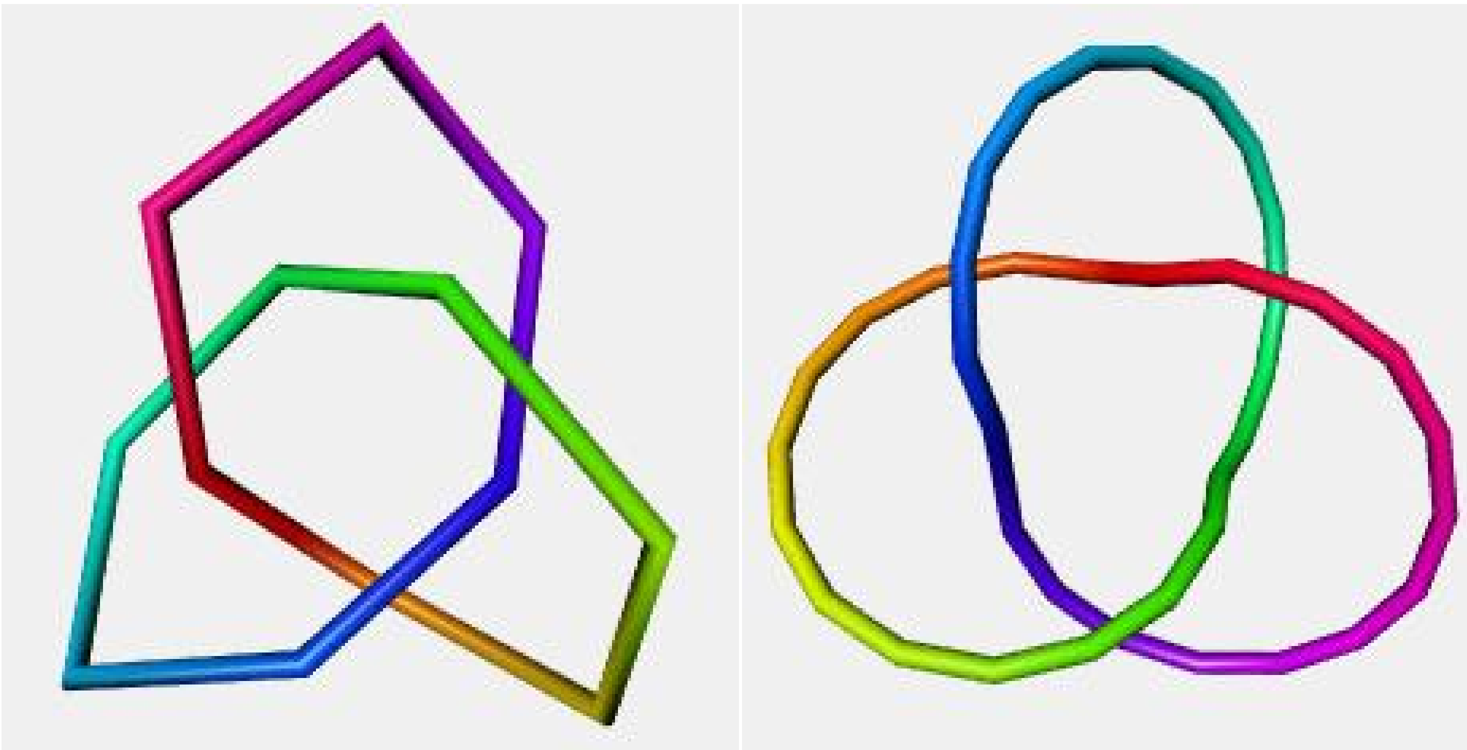




una arista $\sim$ dos aristas

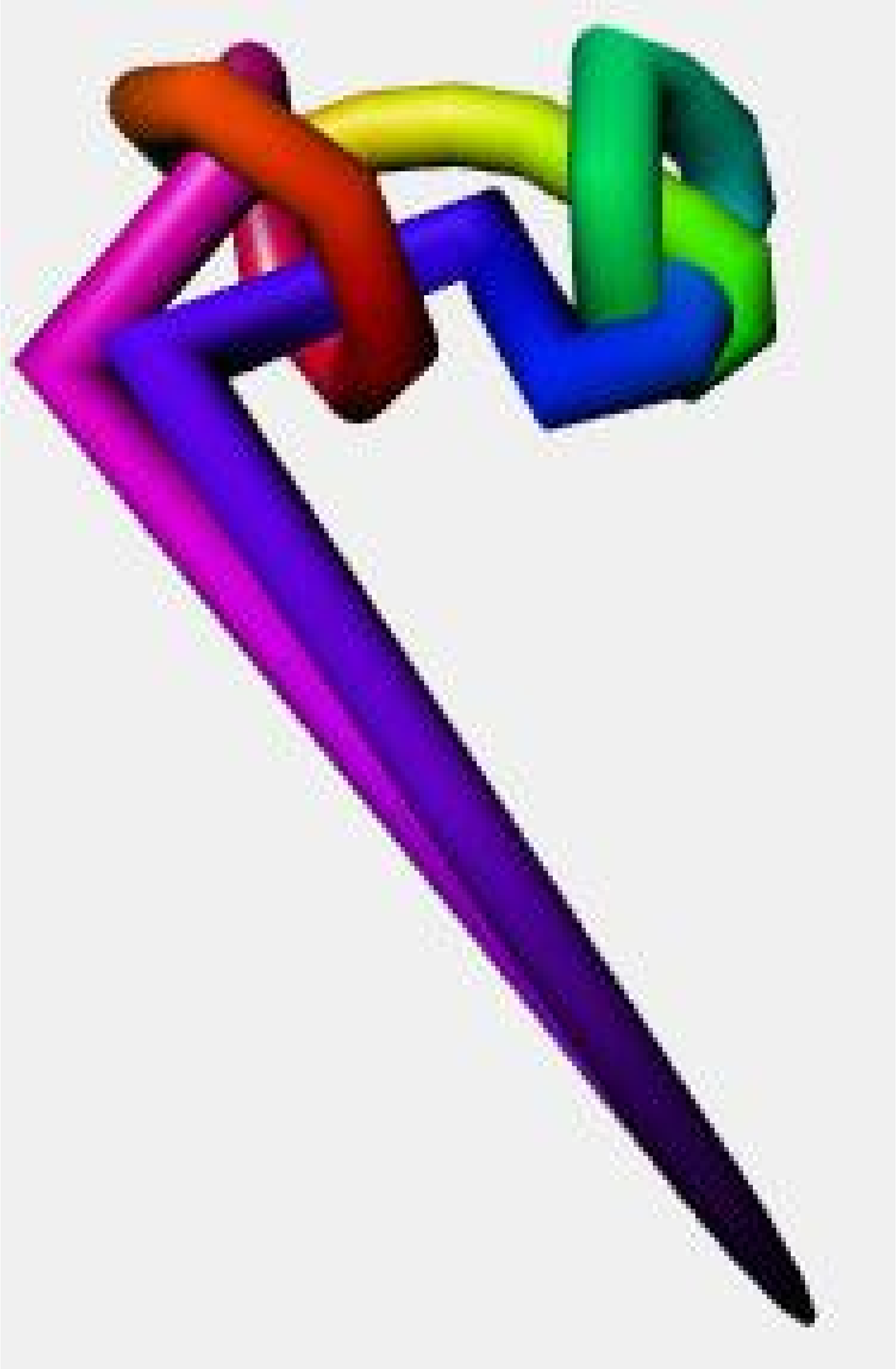


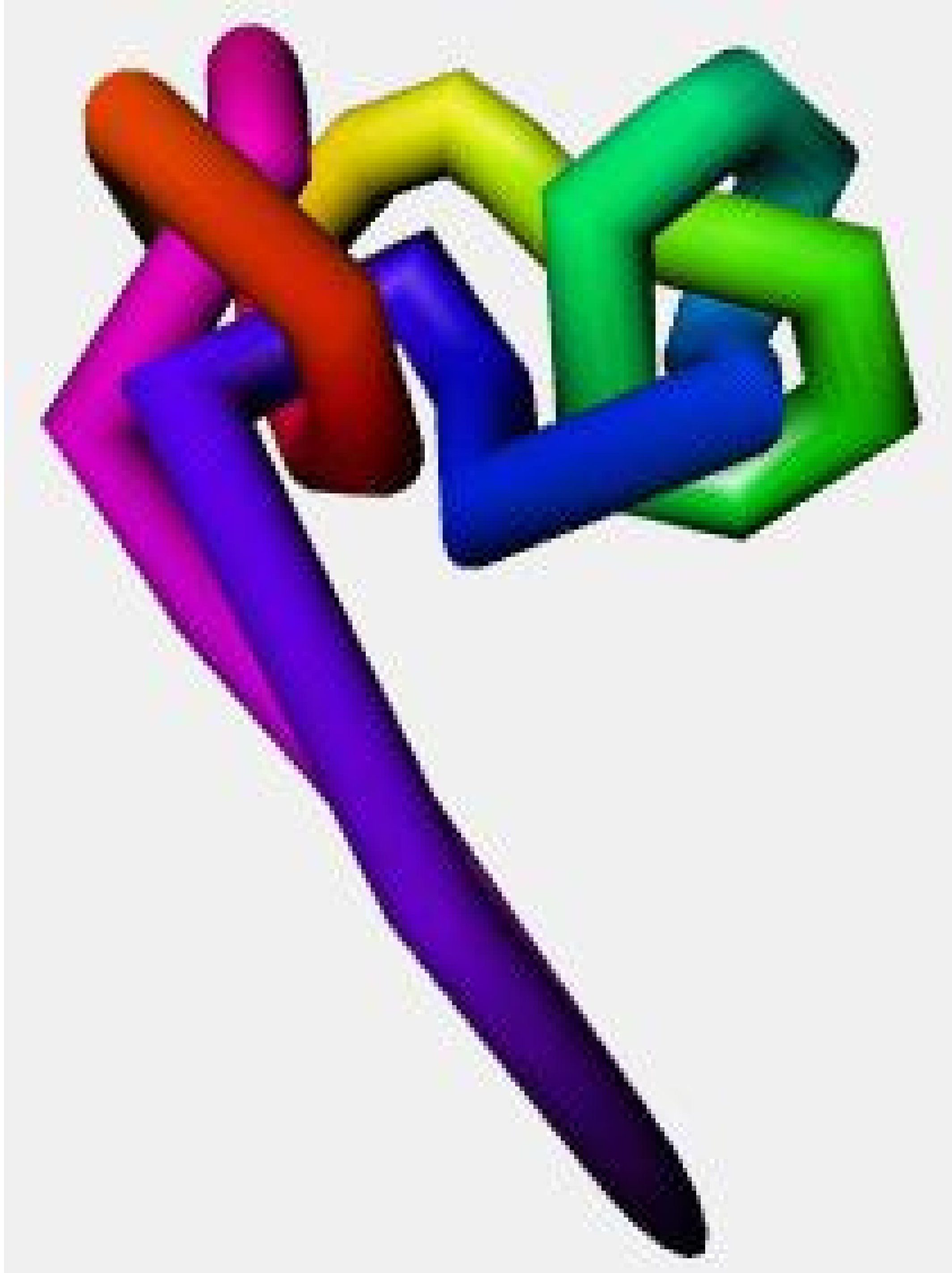
Estos nudos:

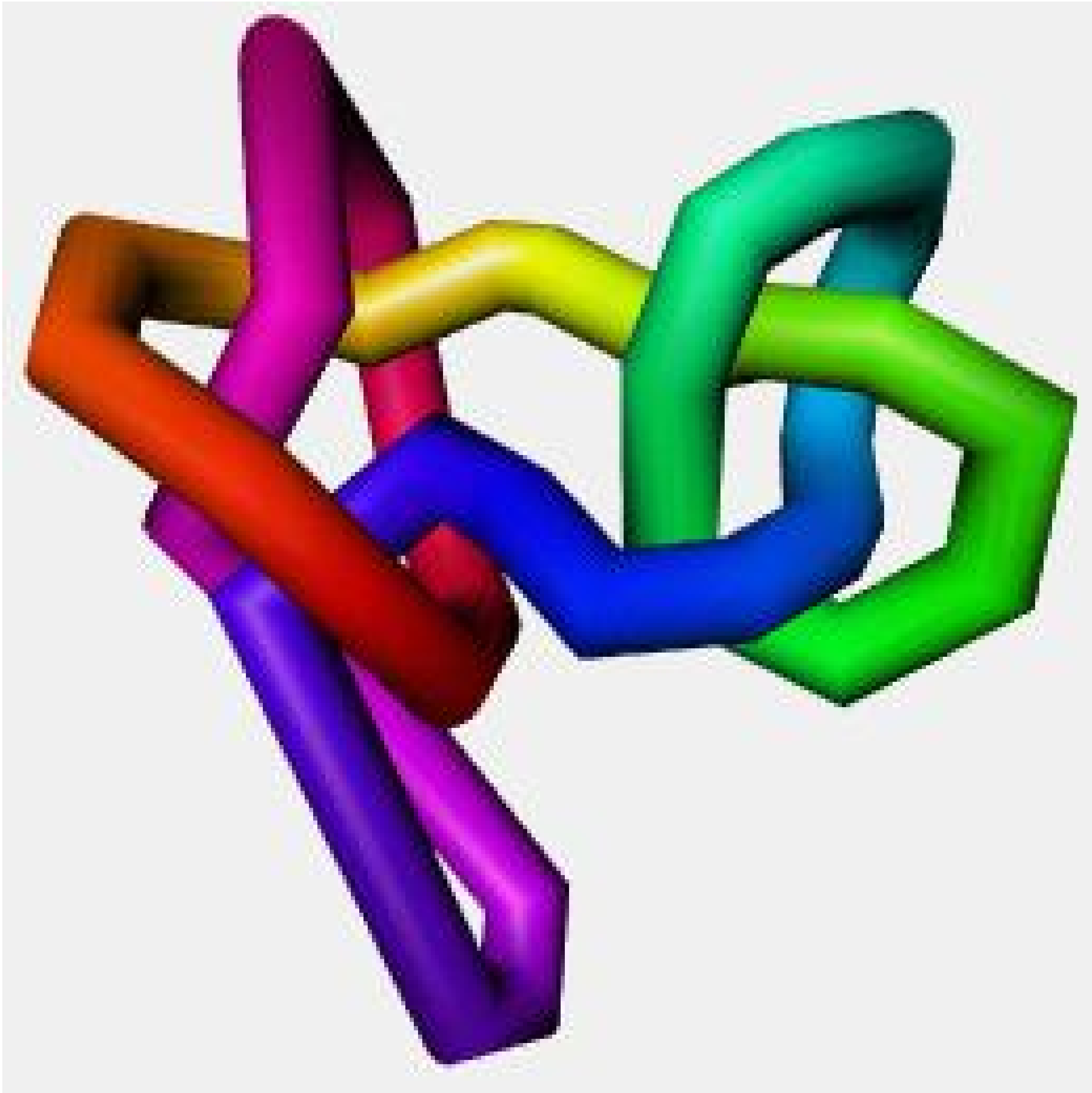


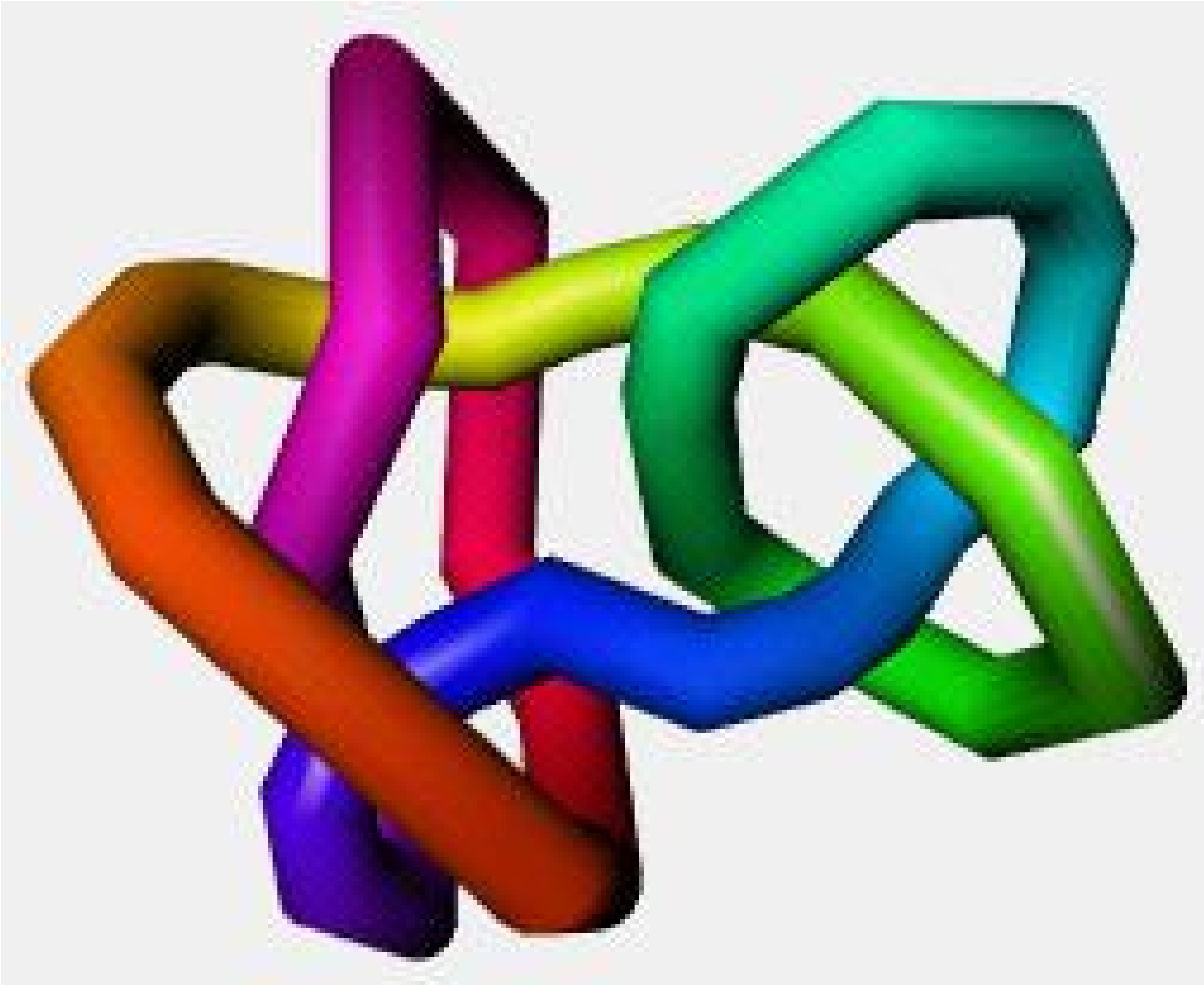
son el mismo nudo

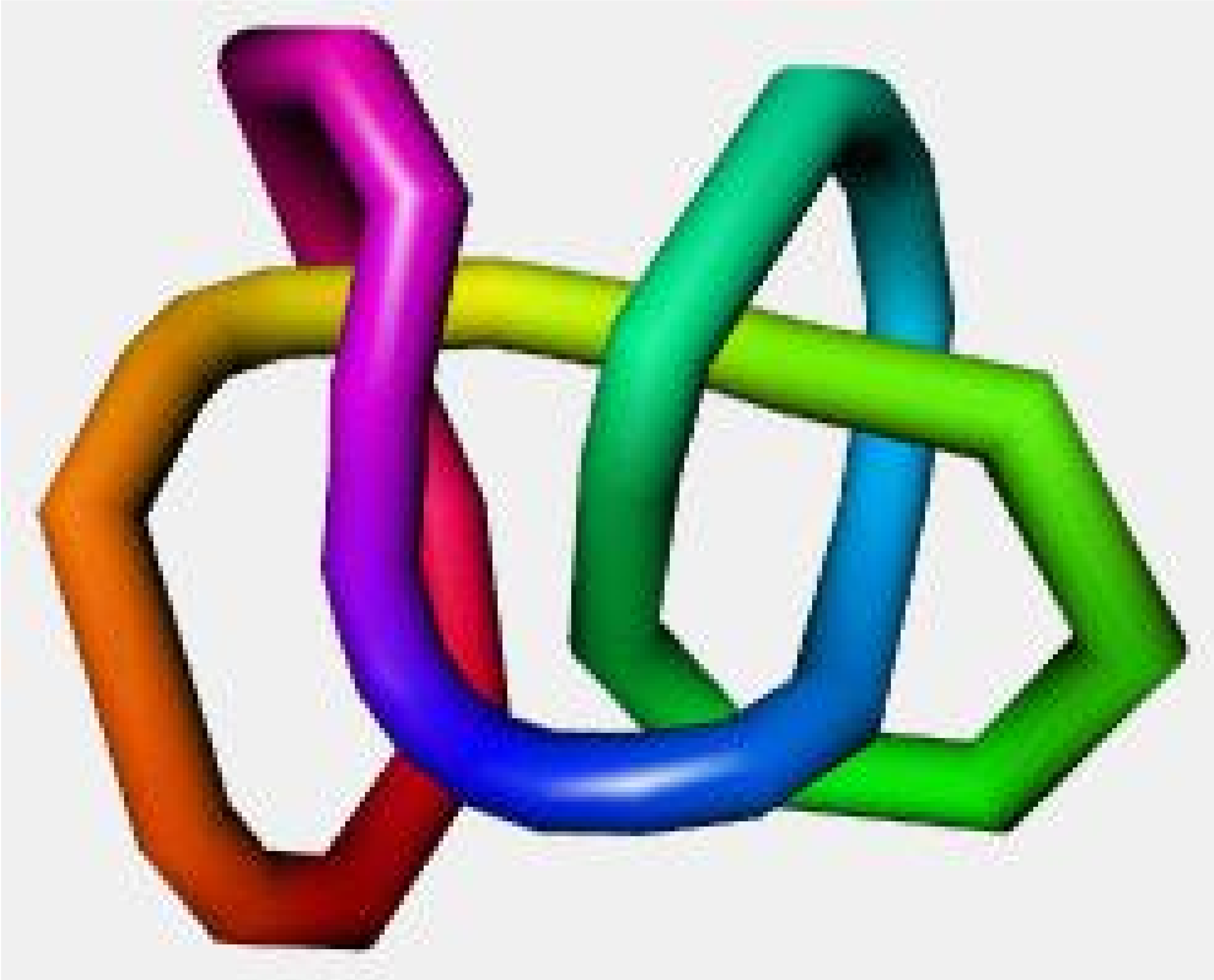
Algo (bastante) más complicado:

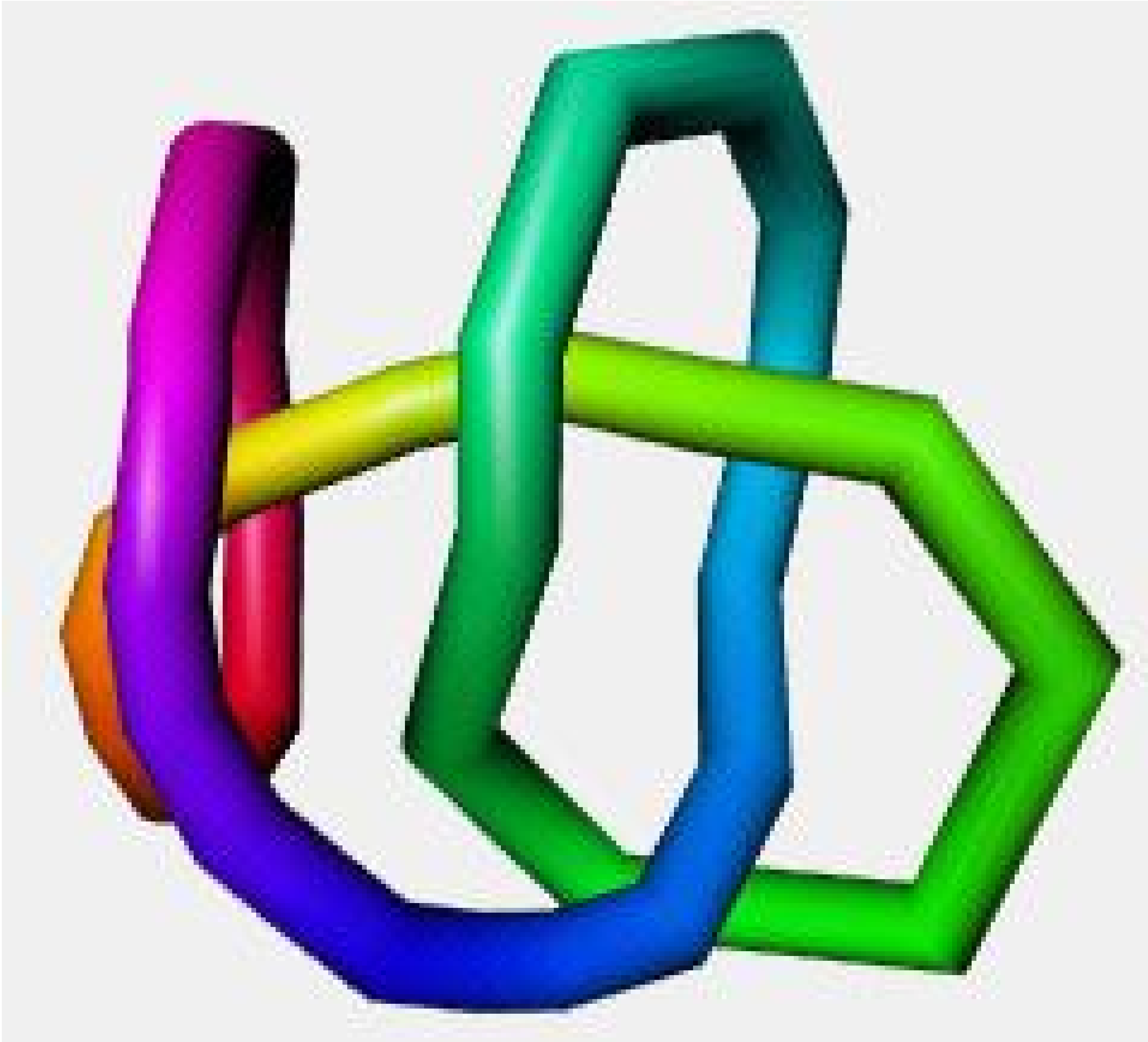


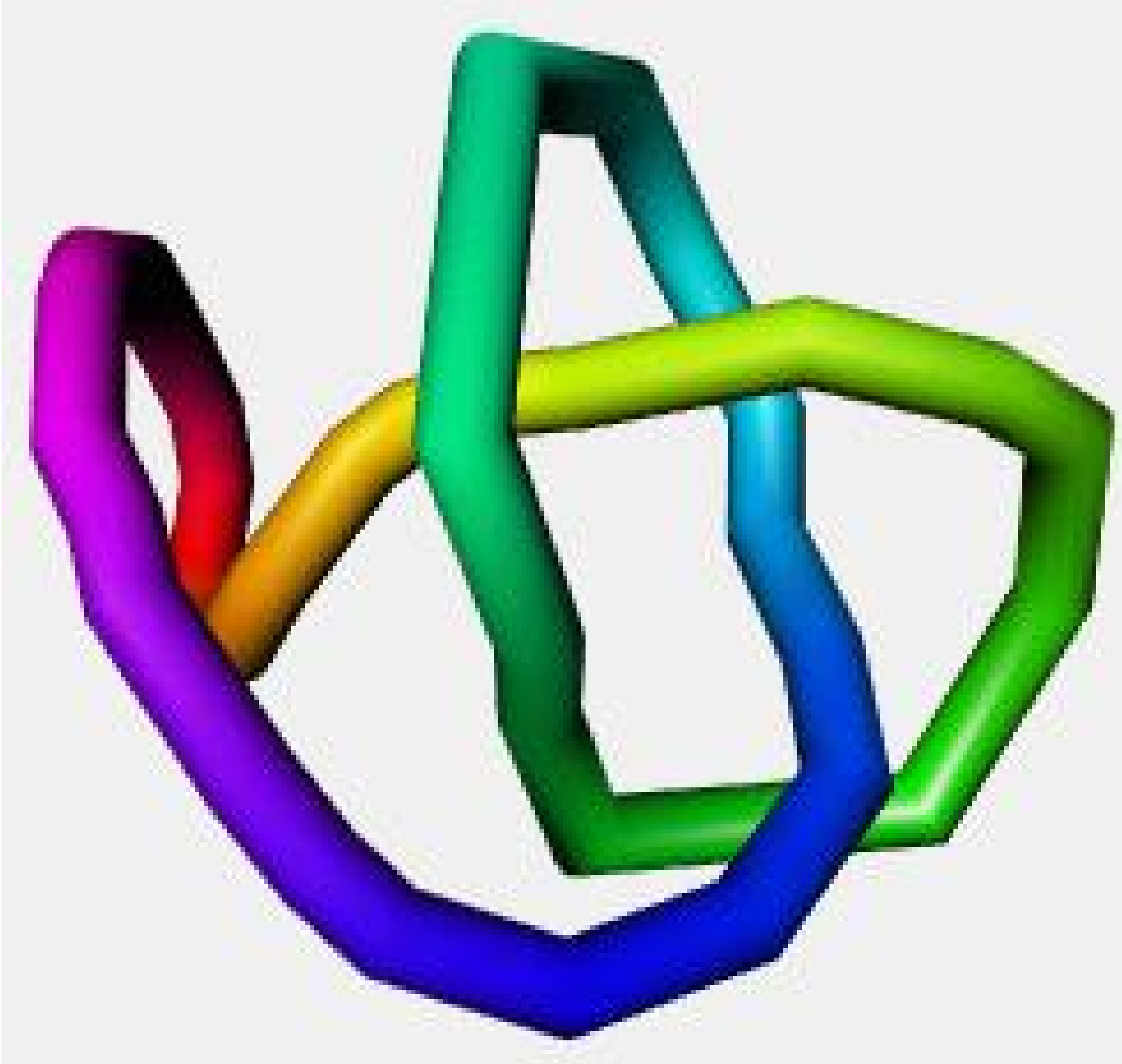


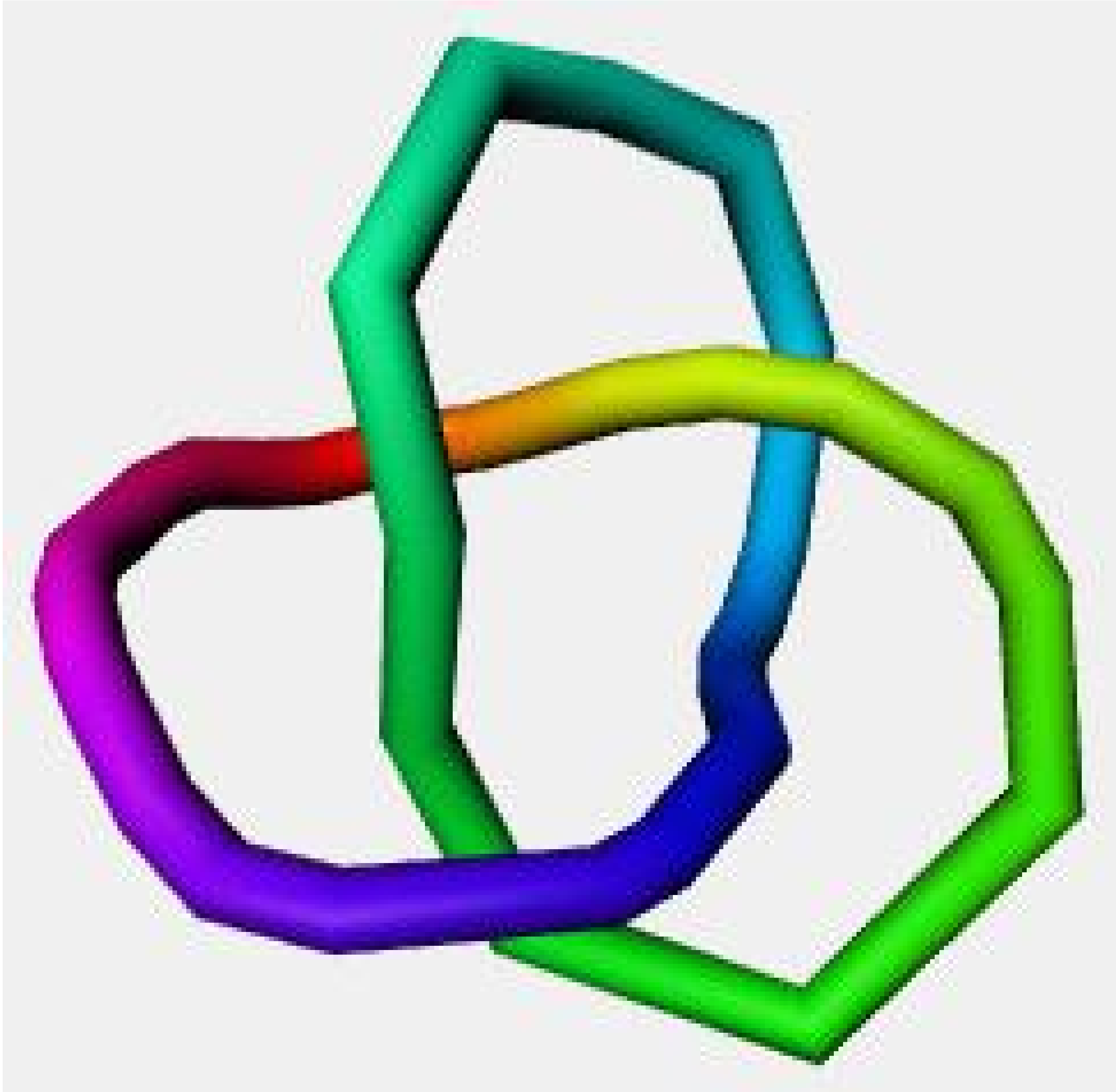


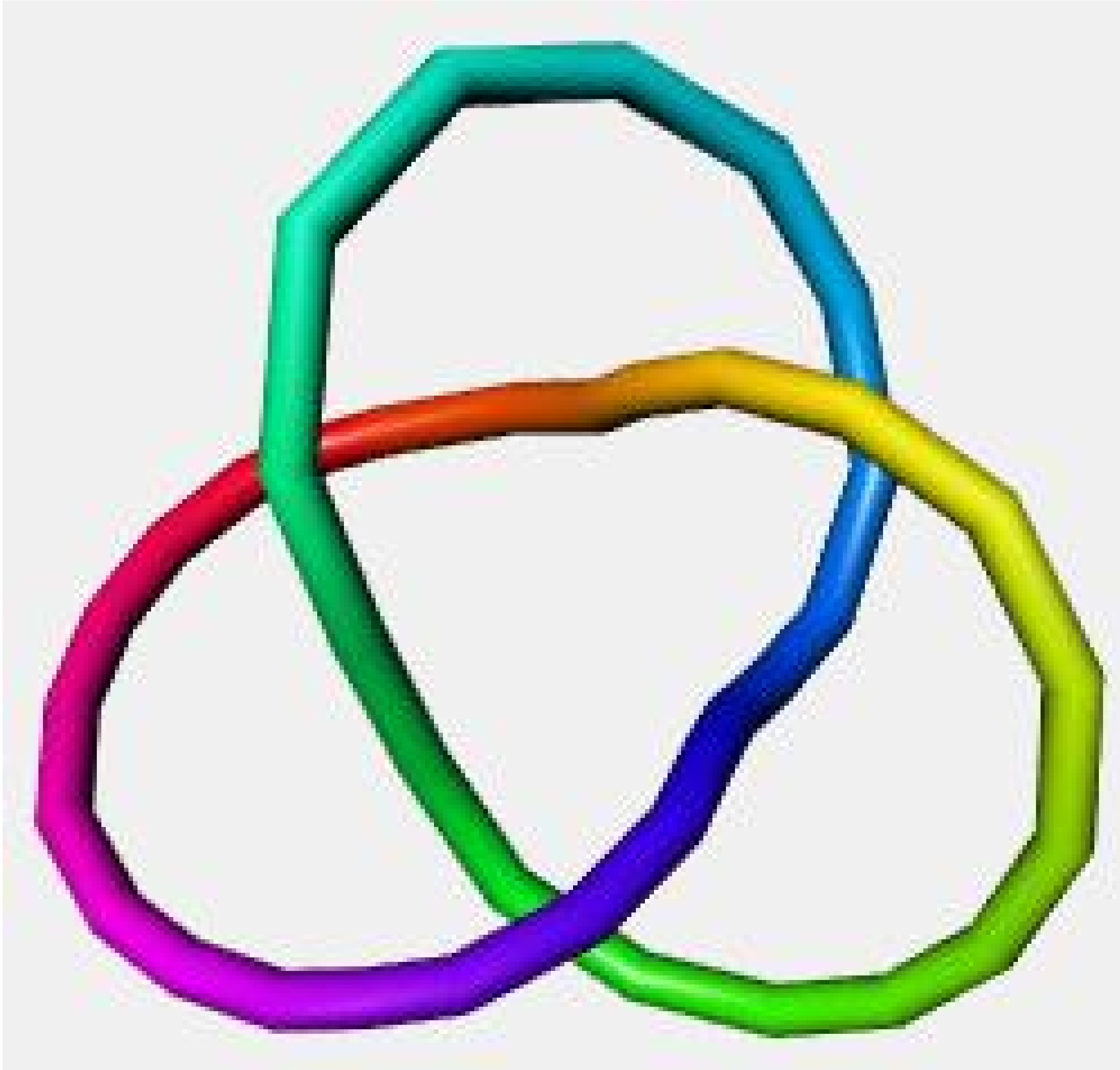


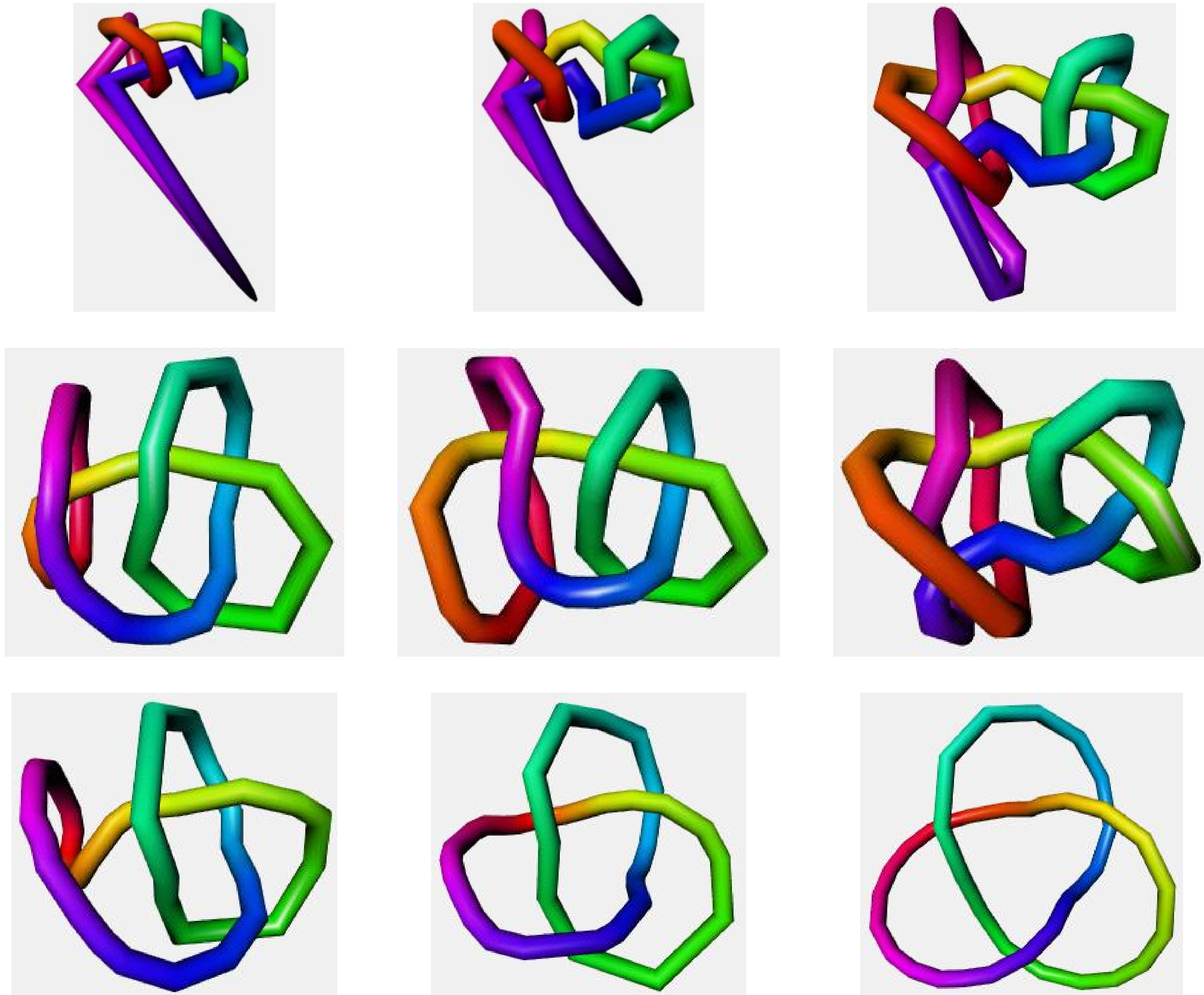












Dibujos De Nudos

Primero: Manipular nudos en el espacio es difícil.

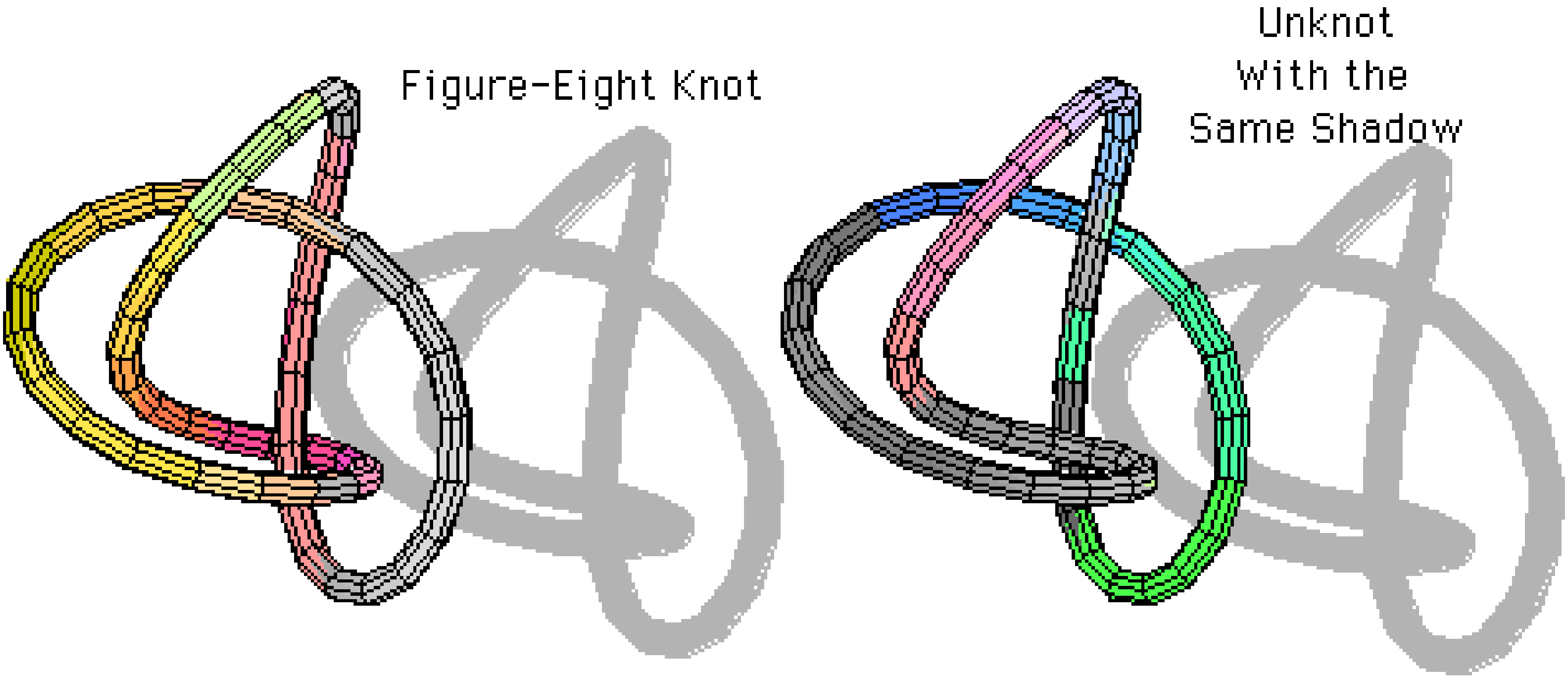
Segundo: Queremos hacer dibujos más fáciles, pero de los que se pueda recuperar el objeto tridimensional.

Proyectemos al nudo sobre un plano.

¿Qué es una proyección?

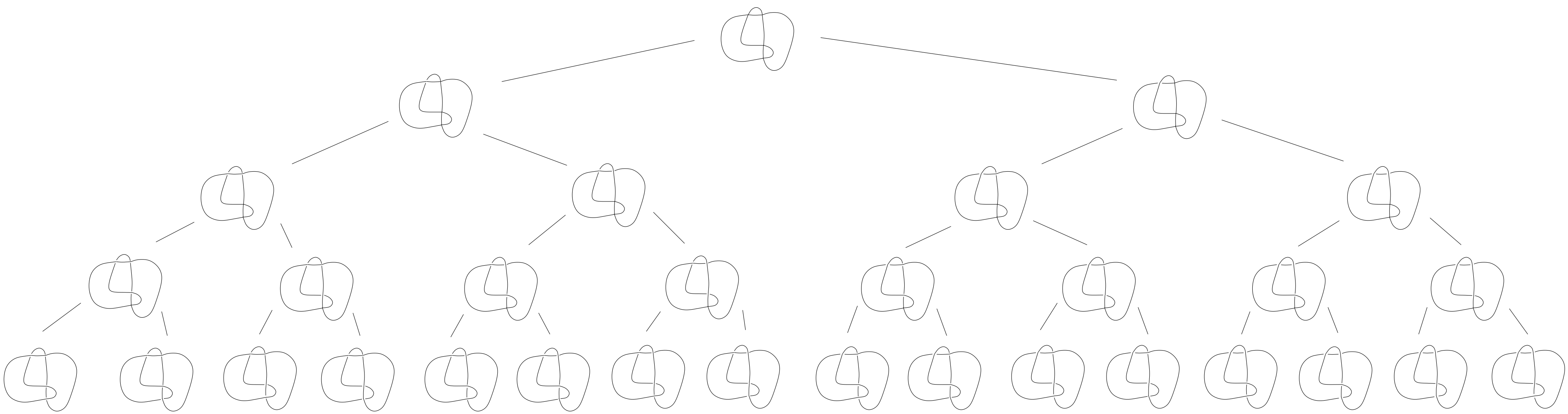
Una proyección no nos permite reconstruir el objeto original.

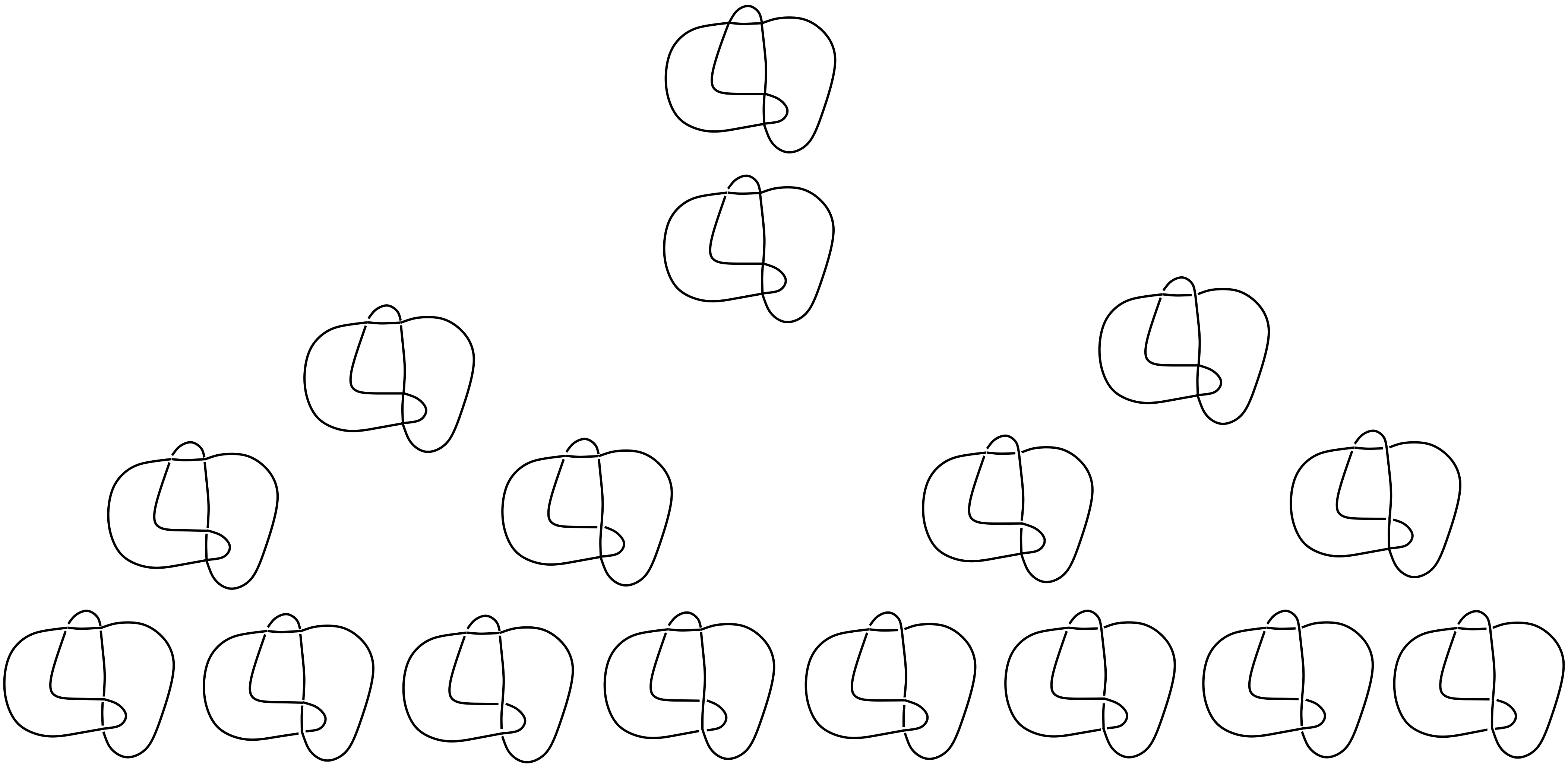
TWO KNOTS WITH THE SAME PROJECTION

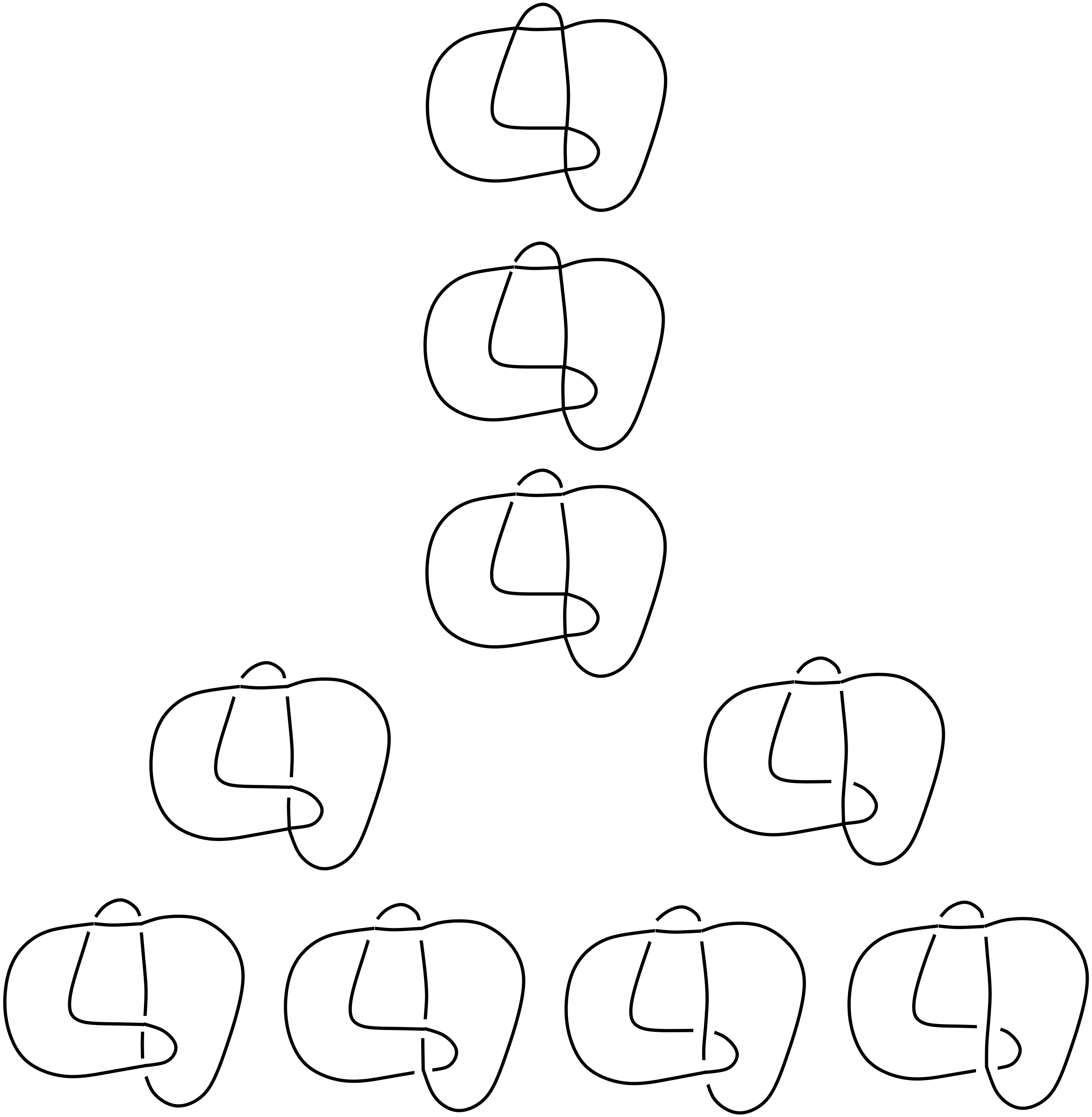


e illustrates the fact that one cannot recognize a particular kno
one of its shadows. The traditional (algebraic/combinatorial) a
eory has been to “decorate” the shadow with labels indicating w
e knot is going over or under which other part whenever the shac
cross itself. A standard graphical way to convey this extra inf
gaps in the shadow.

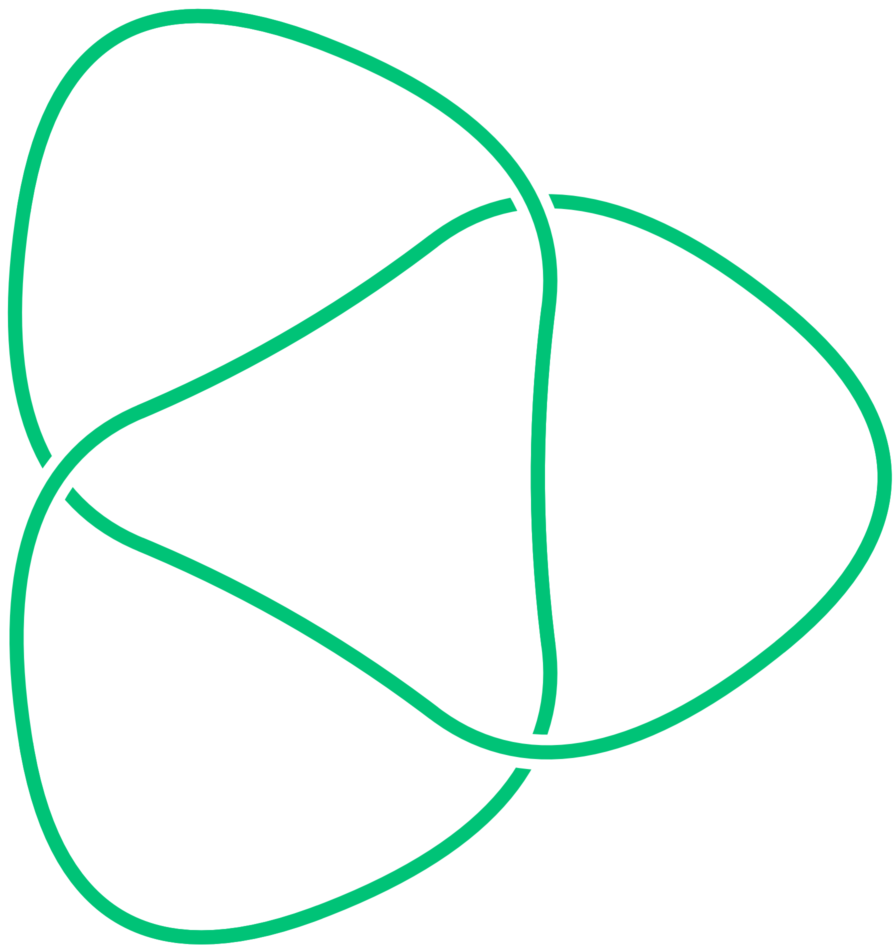
A una proyección le debemos añadir "indicaciones" en los puntos de cruce que nos digan qué puntos están más cerca o más lejos (están por arriba o por abajo).



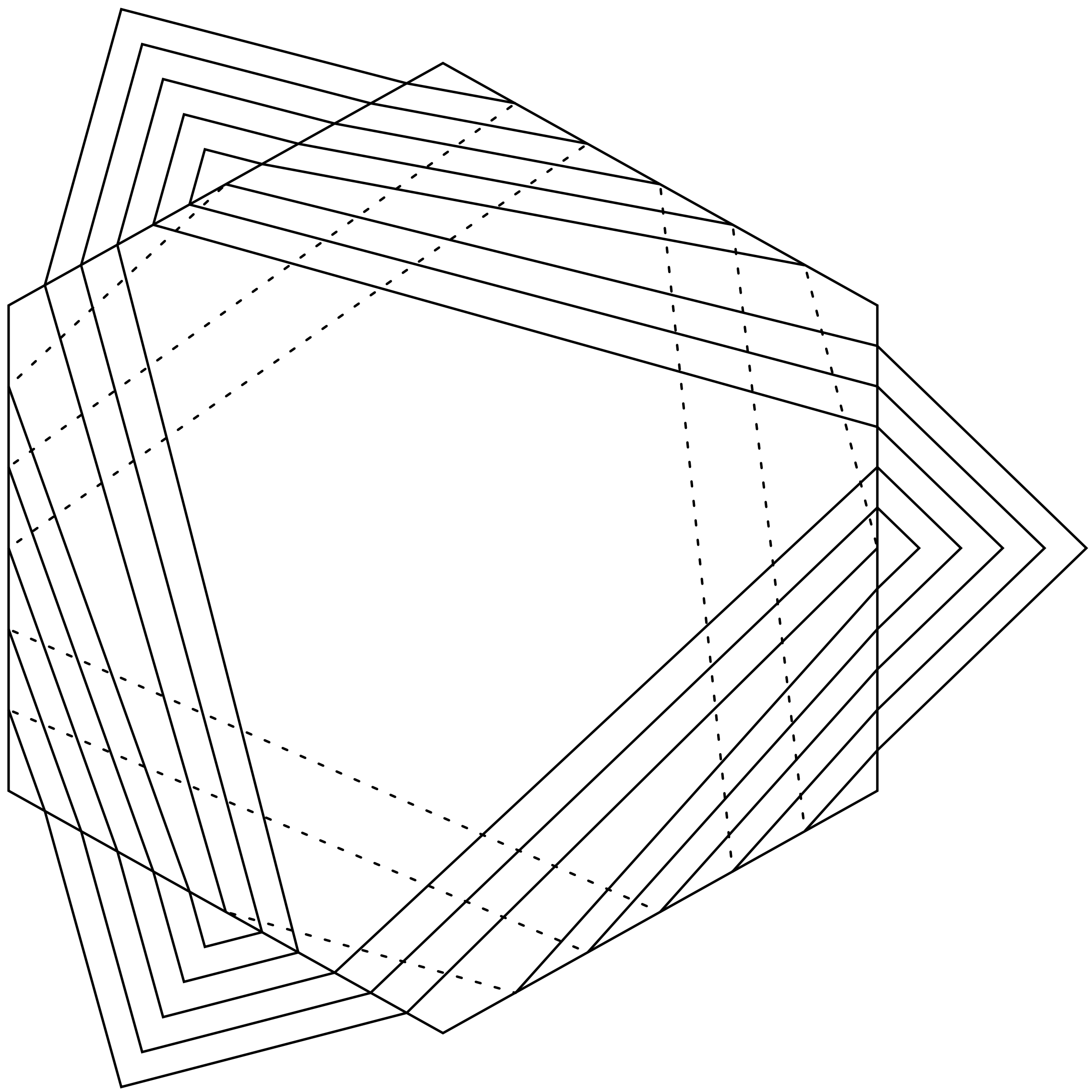




A una proyección le debemos añadir "indicaciones" en los puntos de cruce que nos digan qué puntos están más cerca o más lejos (están por arriba o por abajo).

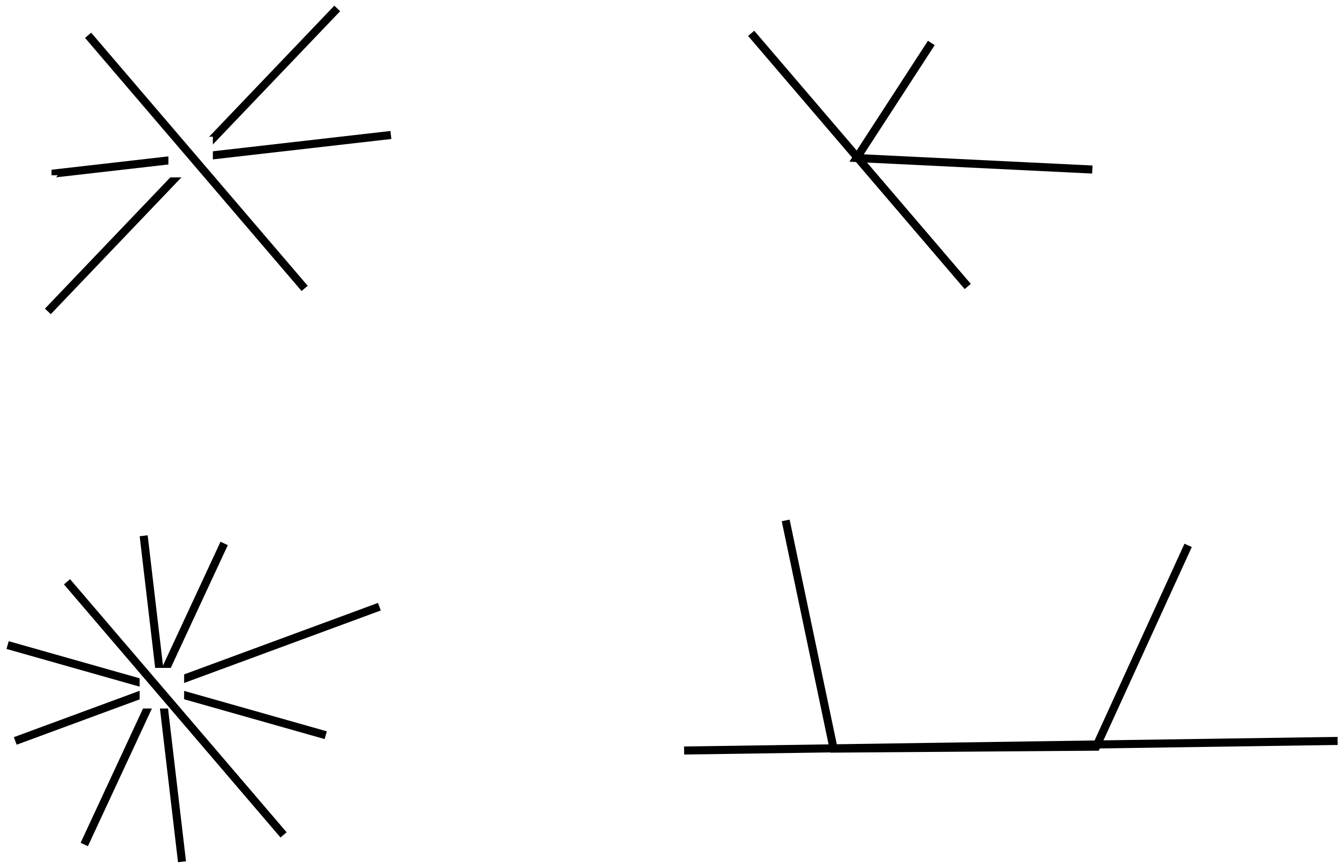


(otra manera)



Pero, para de veras poder reconstruir el nudo, debemos prohibir algunas proyecciones

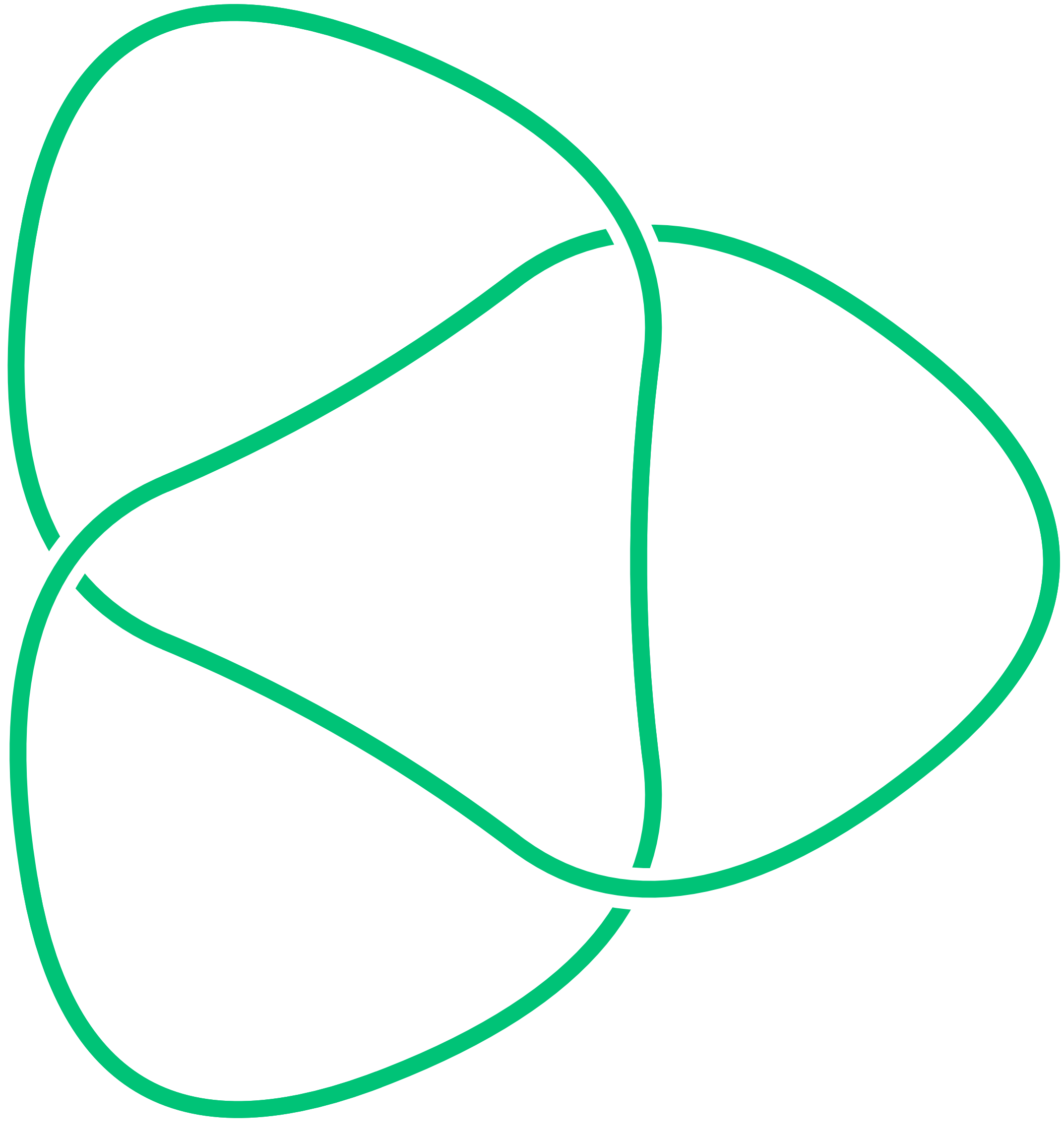
NO:

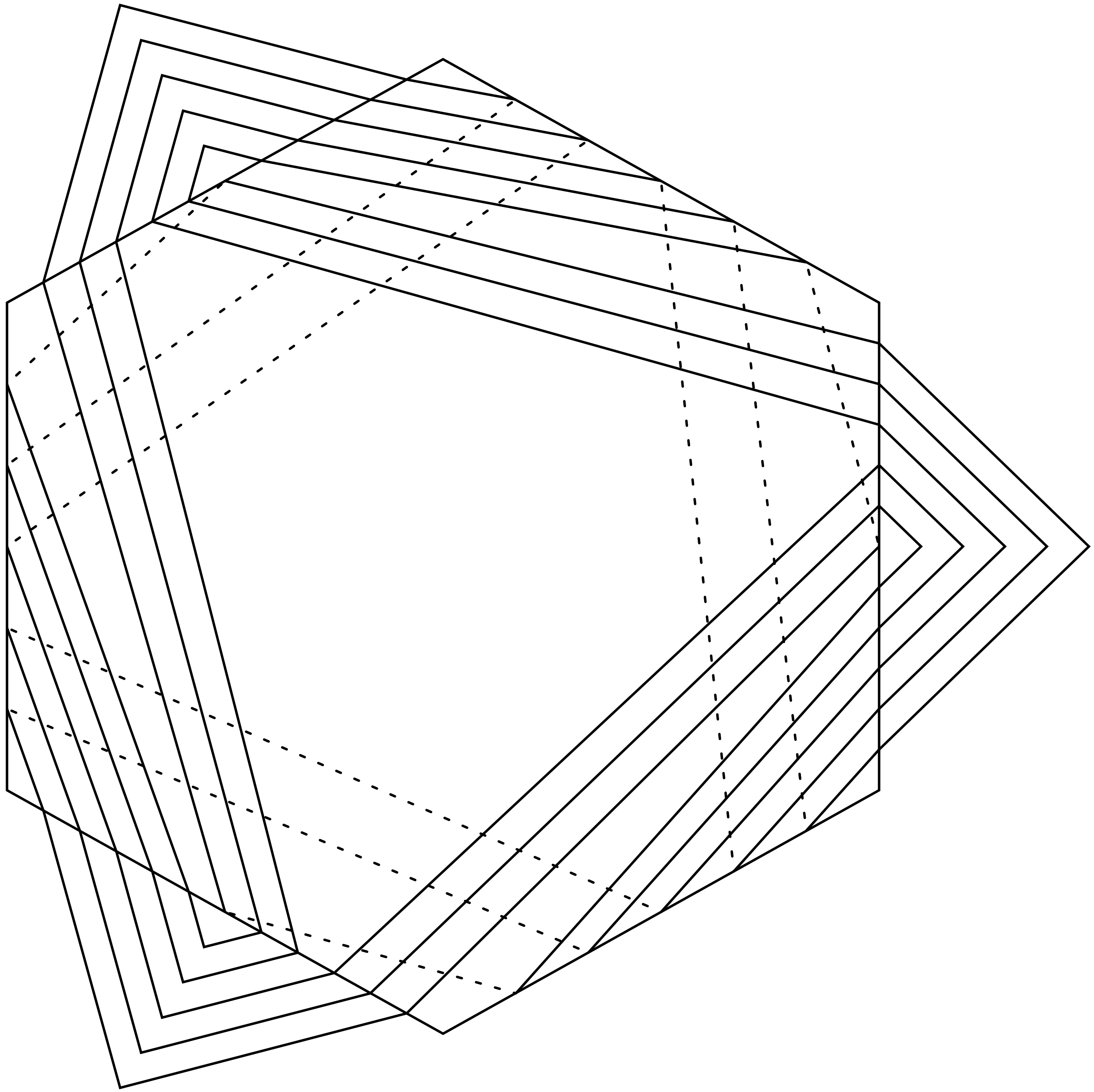


PROHIBIDO!

Definición. Una proyección de un nudo se llama <u>regular</u> si sólo contiene un número finito de puntos dobles y ningún vértice del nudo se proyecta sobre otro punto.

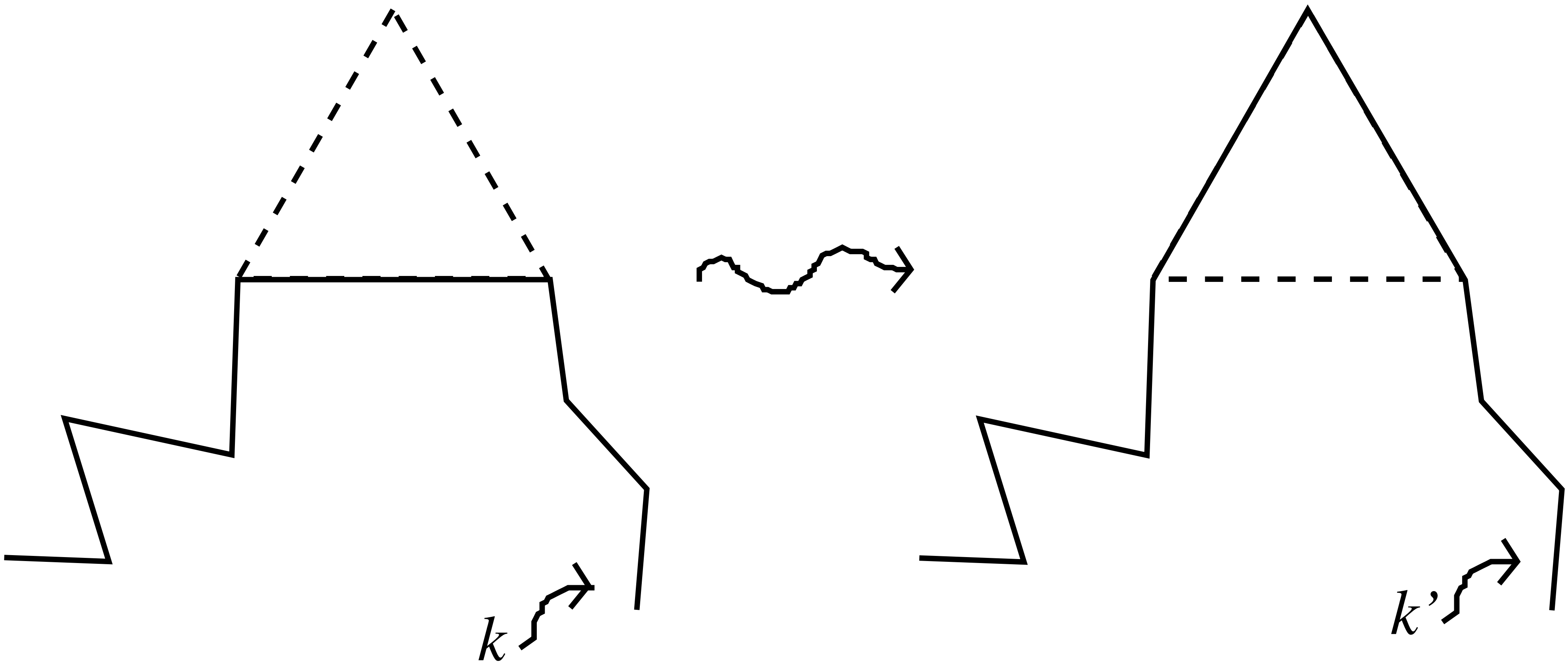
Definición. Una proyección regular de un nudo, k, junto con las indicaciones en los puntos de cruce que nos dicen qué puntos pasan por arriba o por abajo, se llama un <u>diagrama</u> del nudo k.





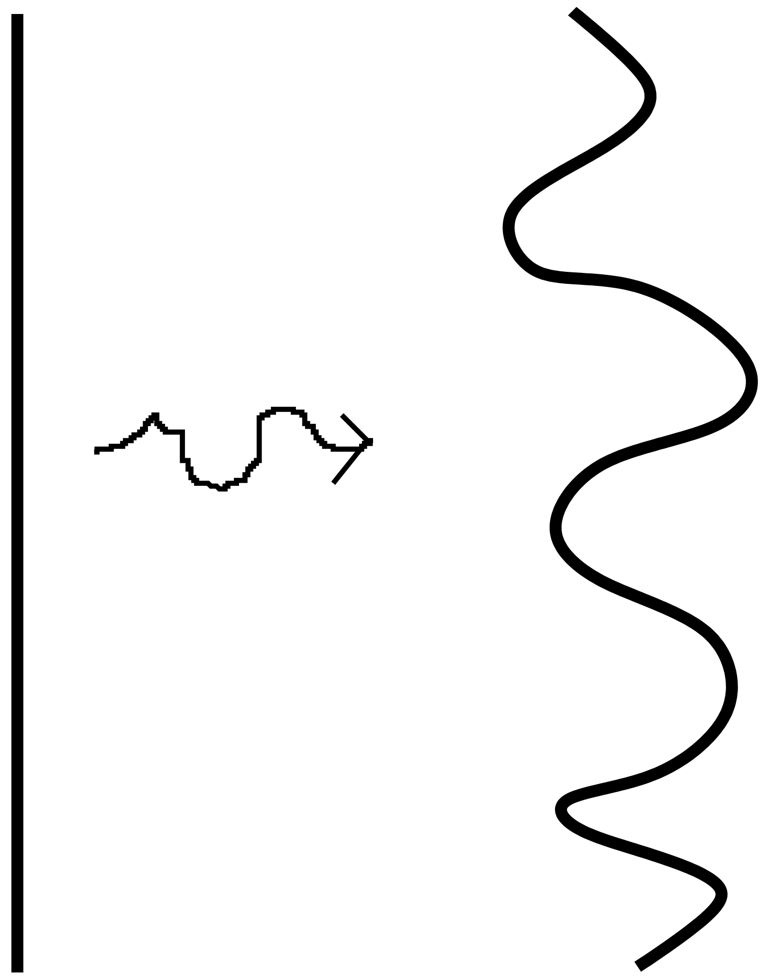
¿Cómo se ven las movidas Δ en un diagrama?

Recordatorio:



Vamos a fijarnos en un pedacito del nudo.
Digamos, vamos a fijarnos en un segmento:

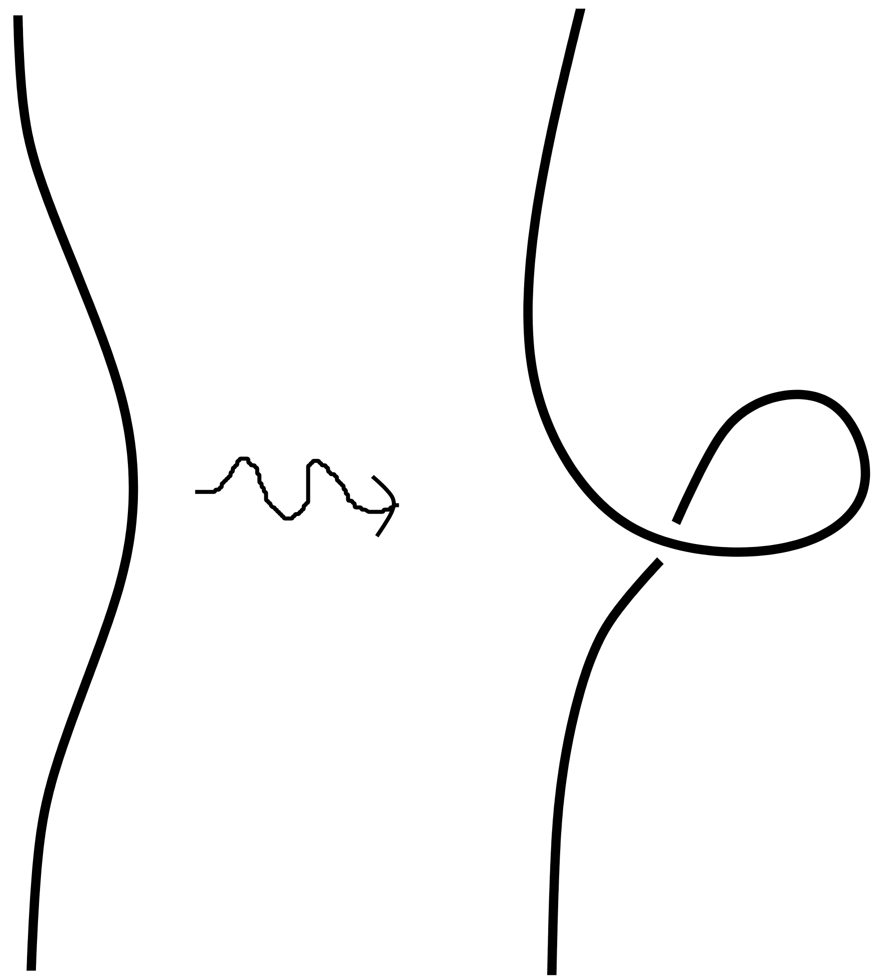
El segmento no toca a otro segmento:



(O sea, puedo desarrugar (o arrugar) el dibujo.)

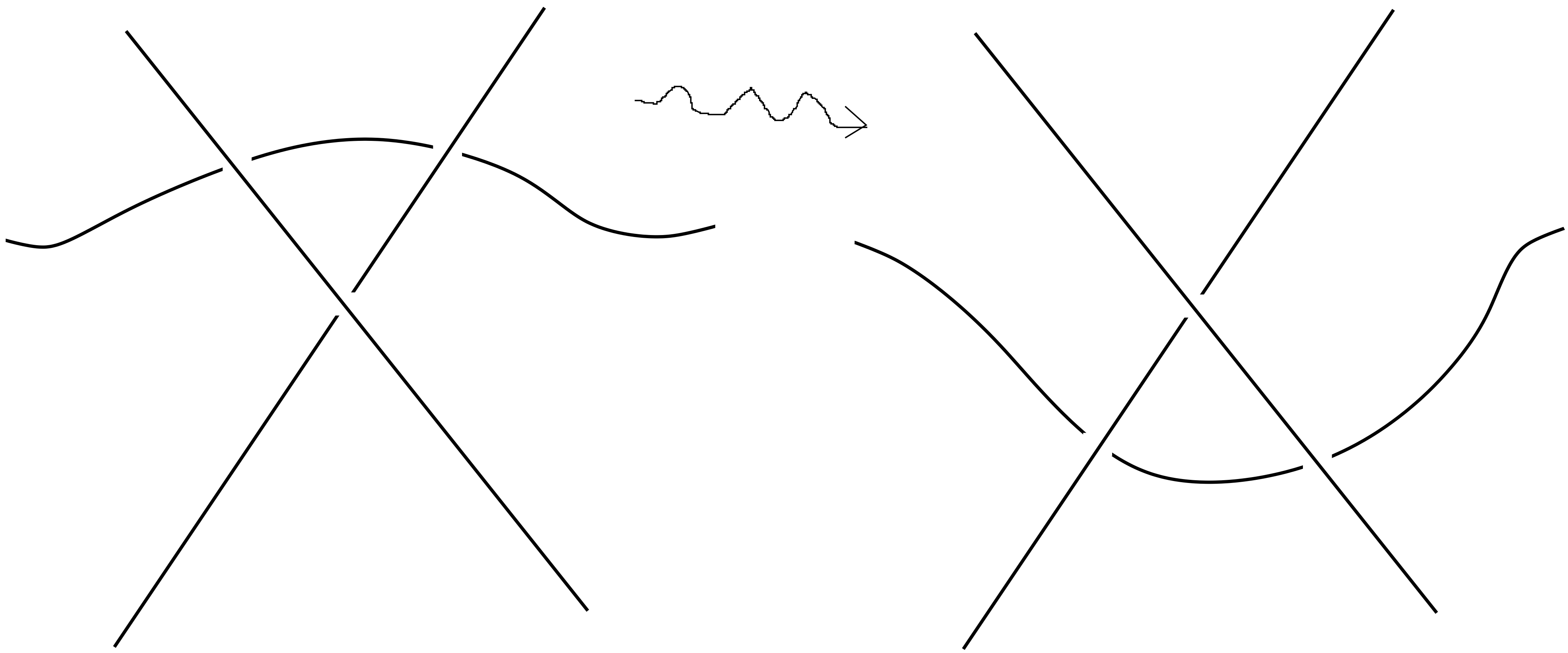
(Este cambio “realmente” no cambia el diagrama.)

El segmento se toca a sí mismo:



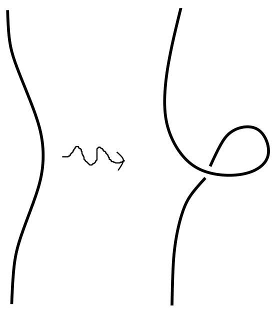
El segmento toca a otro segmento:

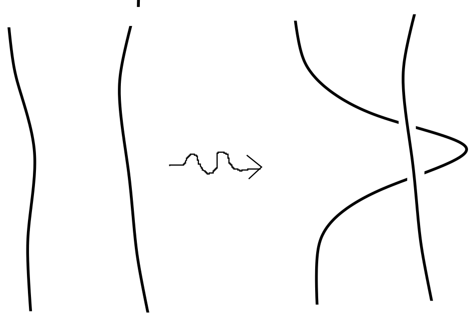
El segmento pasa por un punto de cruce:

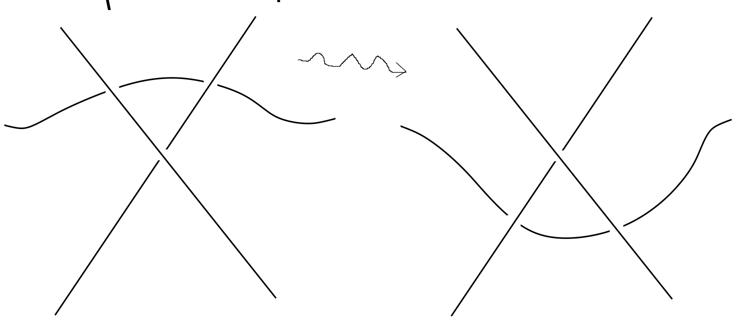


¿Qué más puede pasar?

Nada. Son todas las posibilidades, pues estamos en una proyección regular.

I. 

II. 

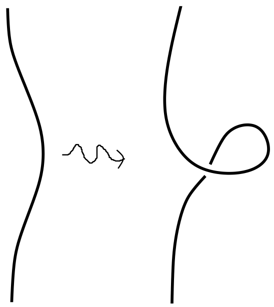
III. 

Estos tres cambios se conocen como

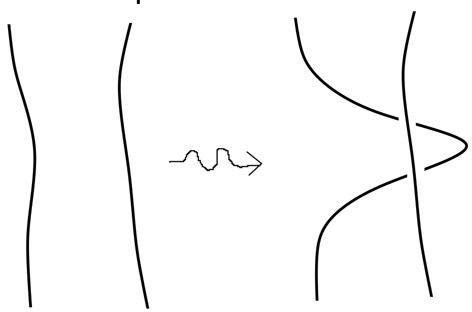
“Las Movidas de Reidemeister”

Movidas de Reidemeister

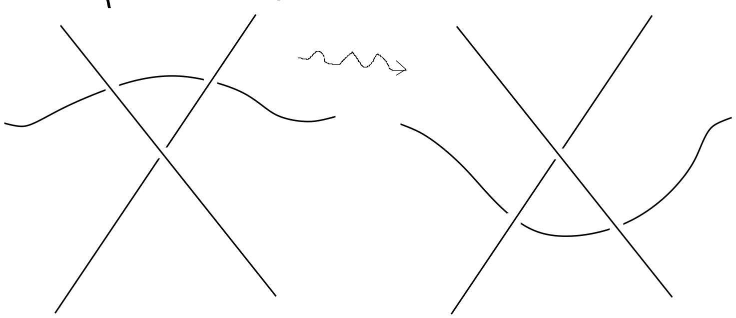
I.



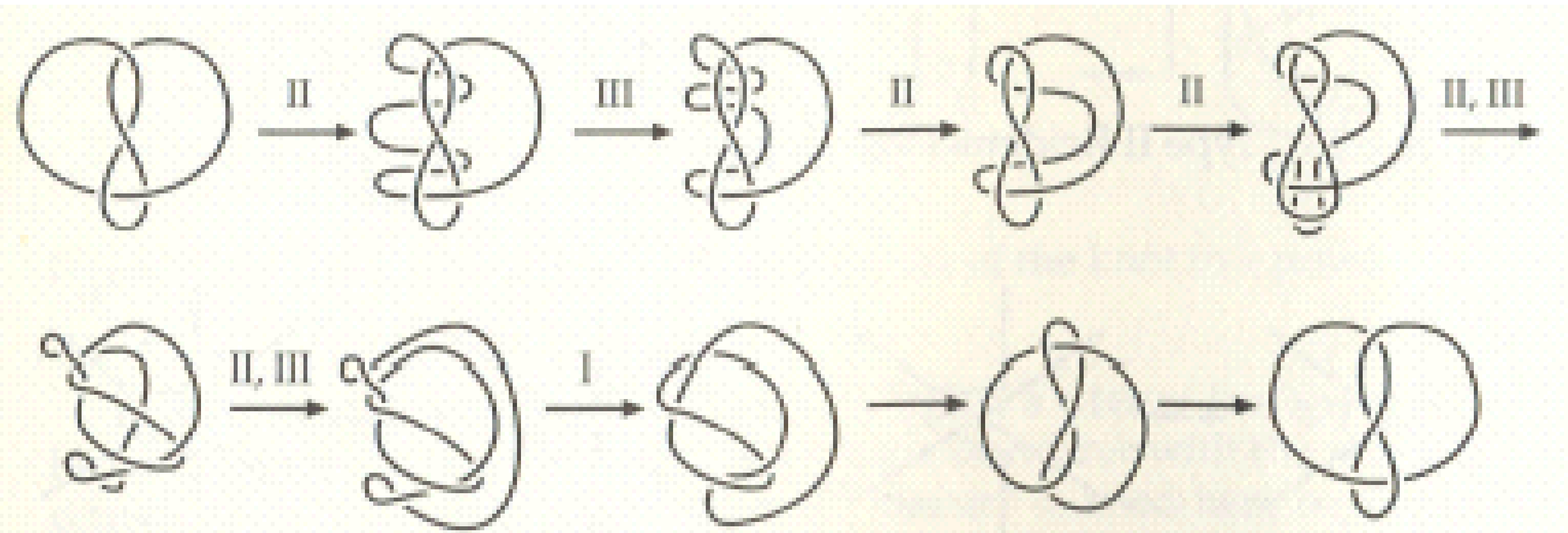
II.



III.



Es claro que dos diagramas que difieren por una sucesión de movidas de Reidemeister representan al mismo nudo.

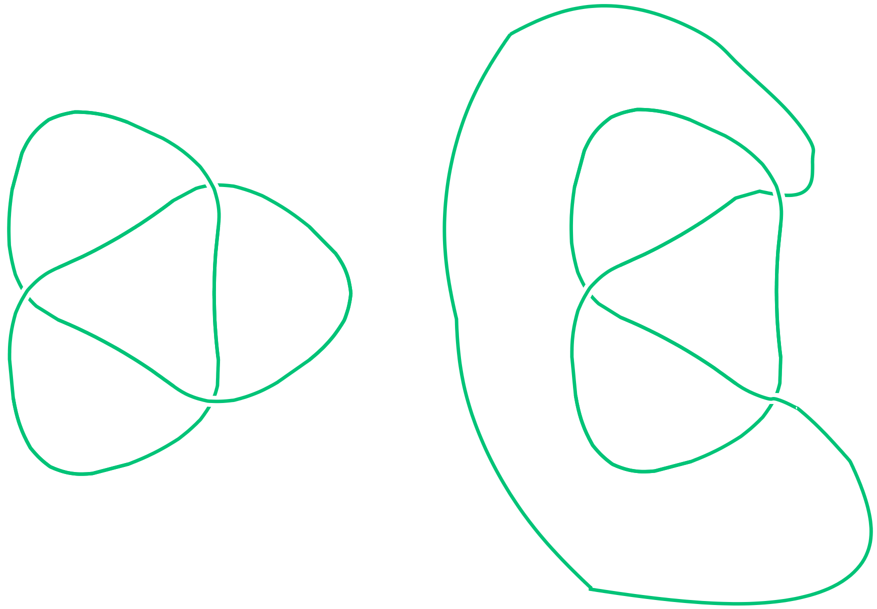


Pero el maestrísimo, el señor don Kurt Reidemeister además demostró:

Teorema. Si dos diagramas representan al mismo nudo, entonces hay una sucesión finita de movidas I, II y III que llevan un diagrama al otro.

Que es un teorema impresionante, pero...

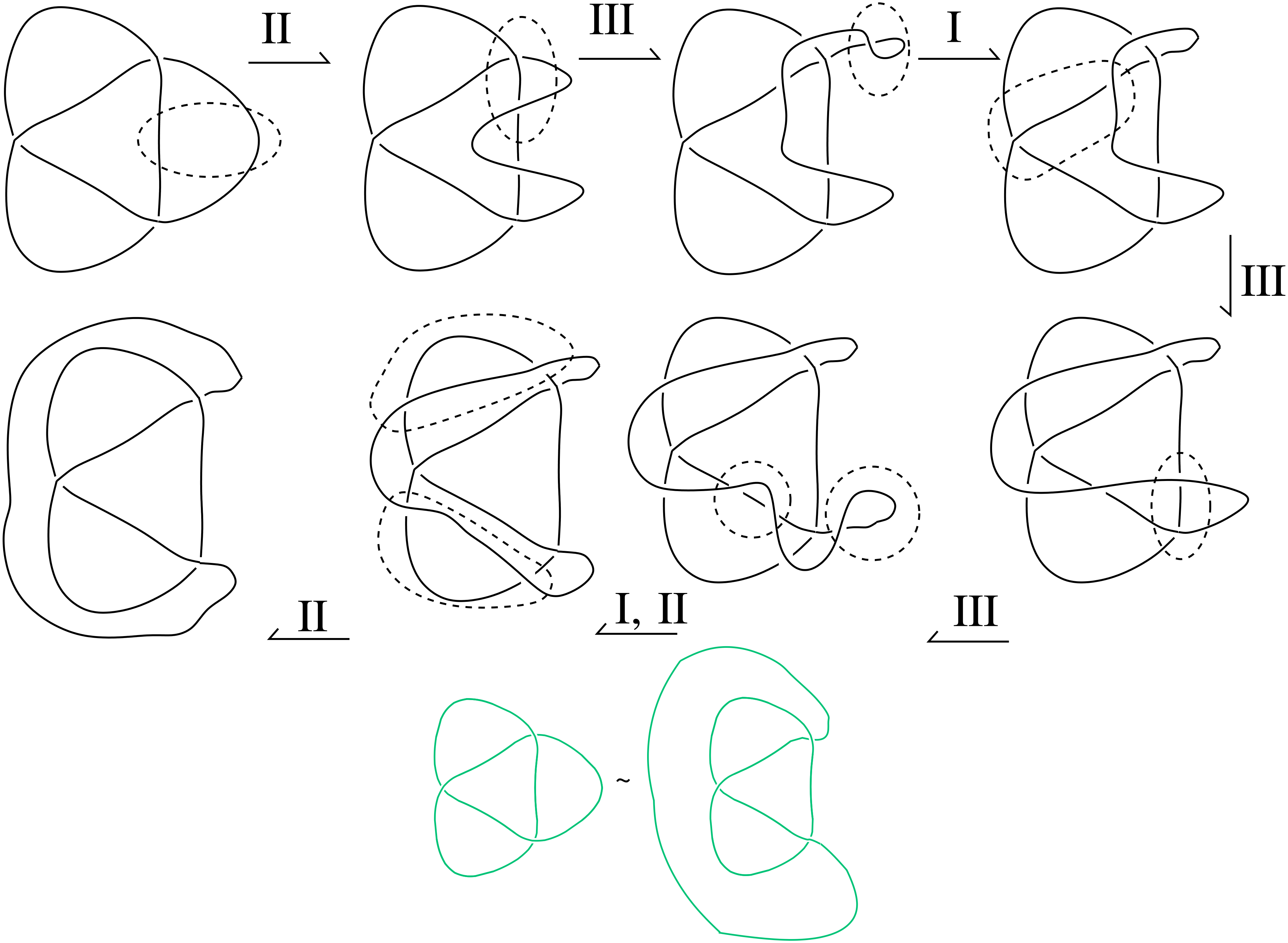
(es una buena noticia que, para verificar la equivalencia de nudos, nos basta con las movidas de Reidemeister.)



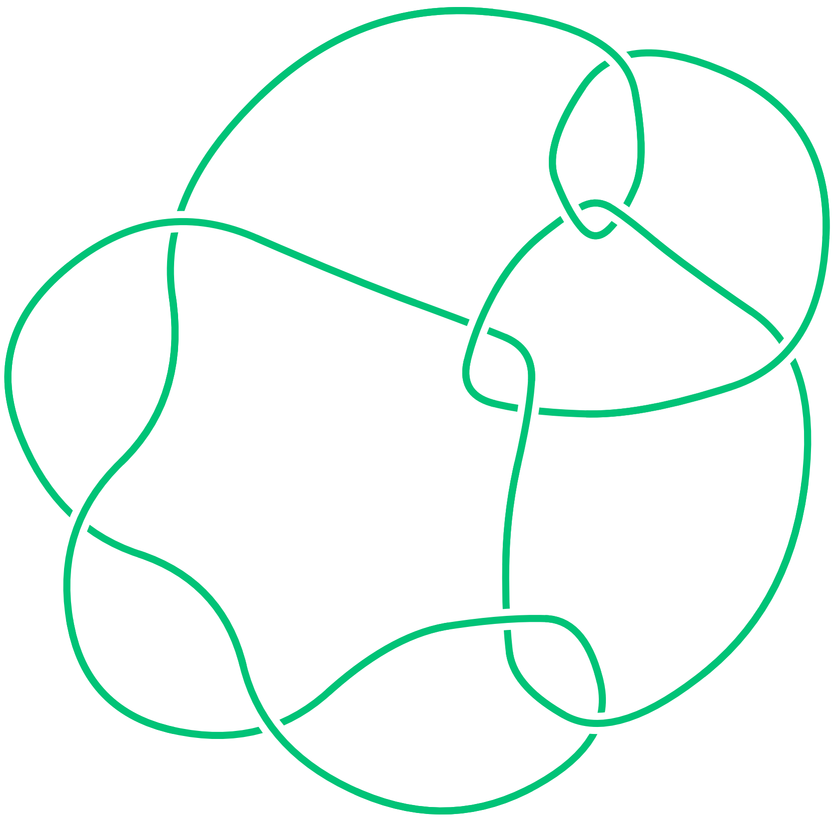
Los dos diagramas representan al mismo nudo.

Por Reidemeister sabemos que podemos llevar un diagrama al otro con una sucesión de movidas sencillas I, II y III.

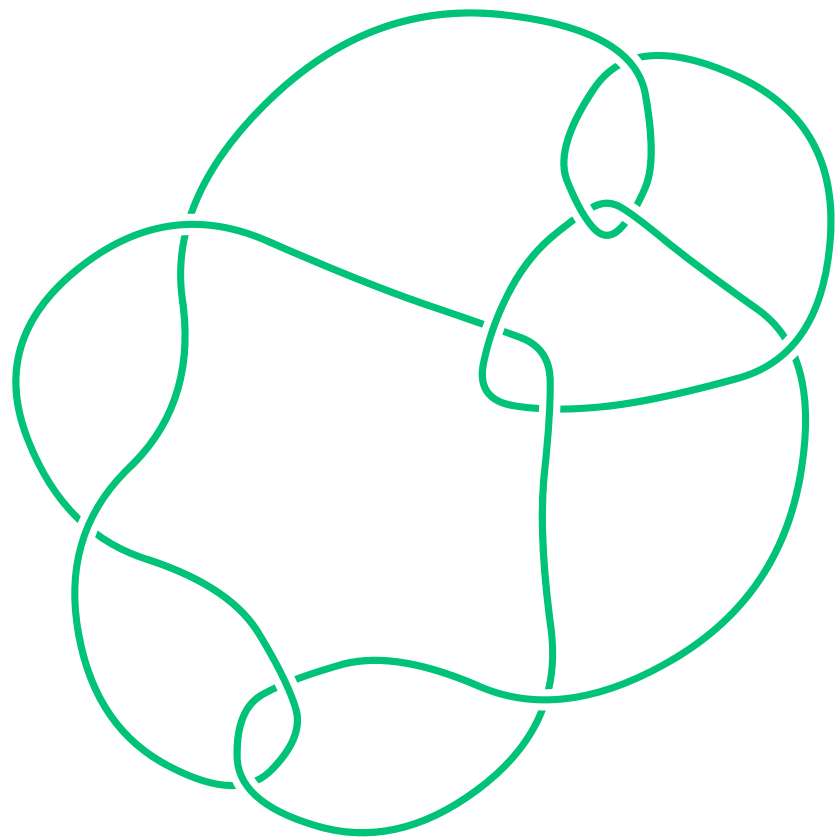
Pero Reidemeister no nos dice cuál es esa sucesión de movidas.



II
III
I
III
II
I, II
III
~



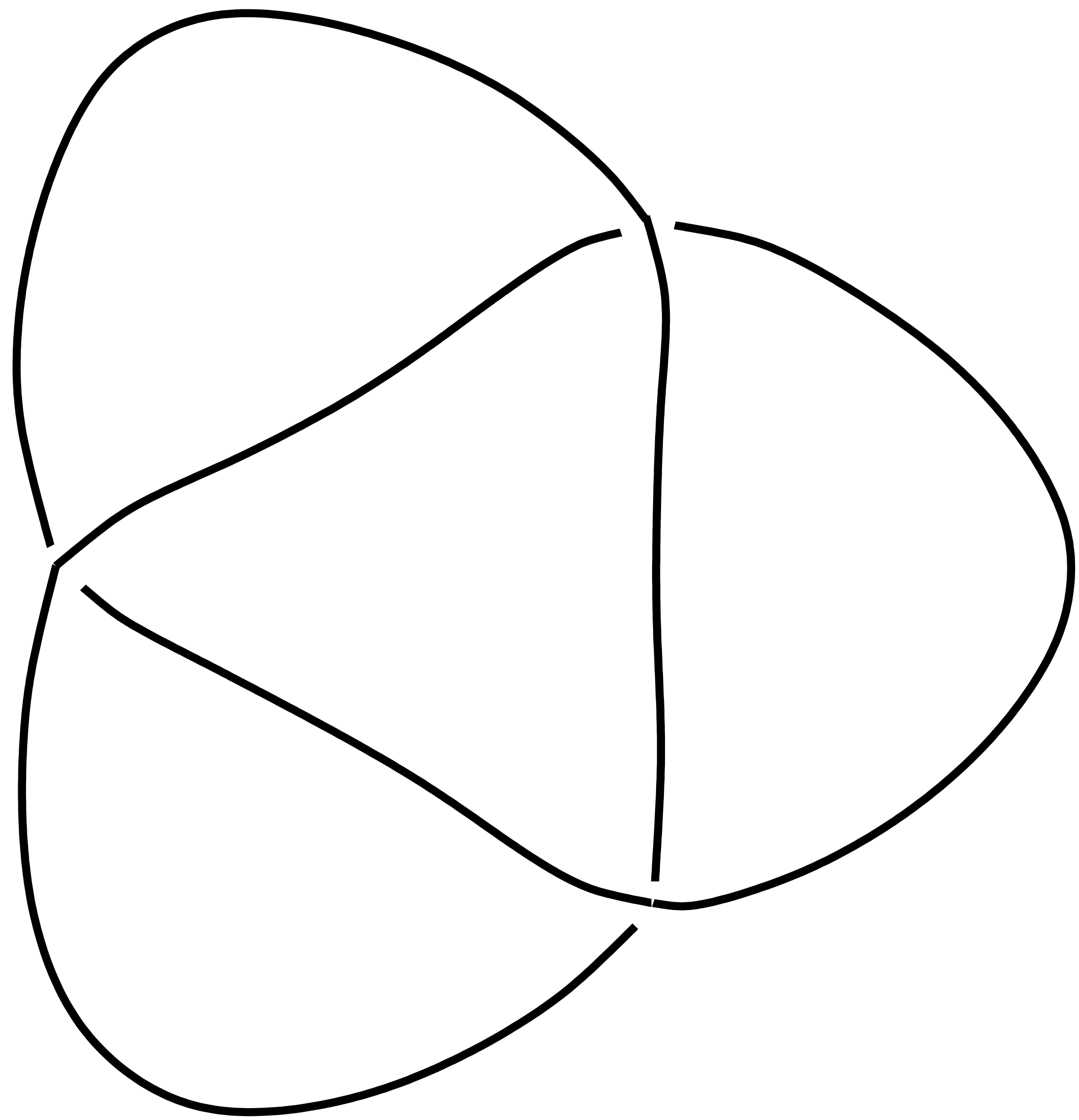
$\sim$



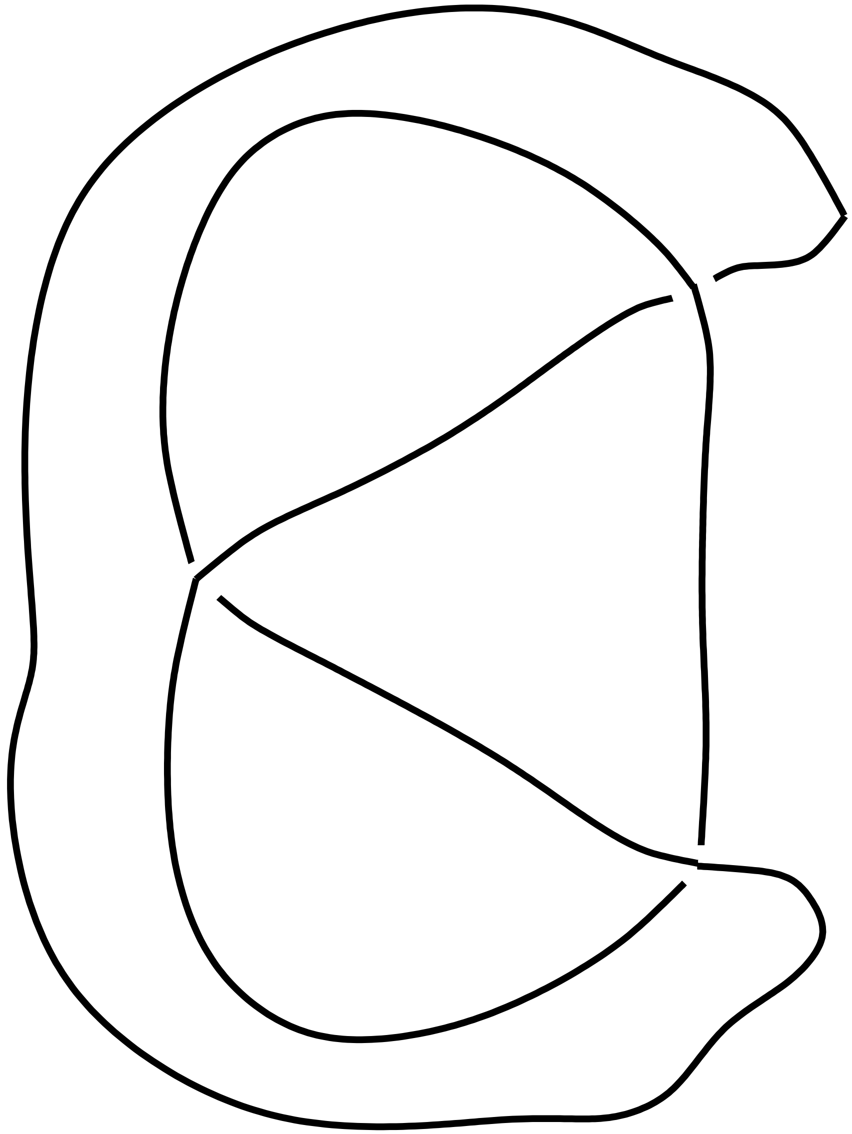
Más despacio

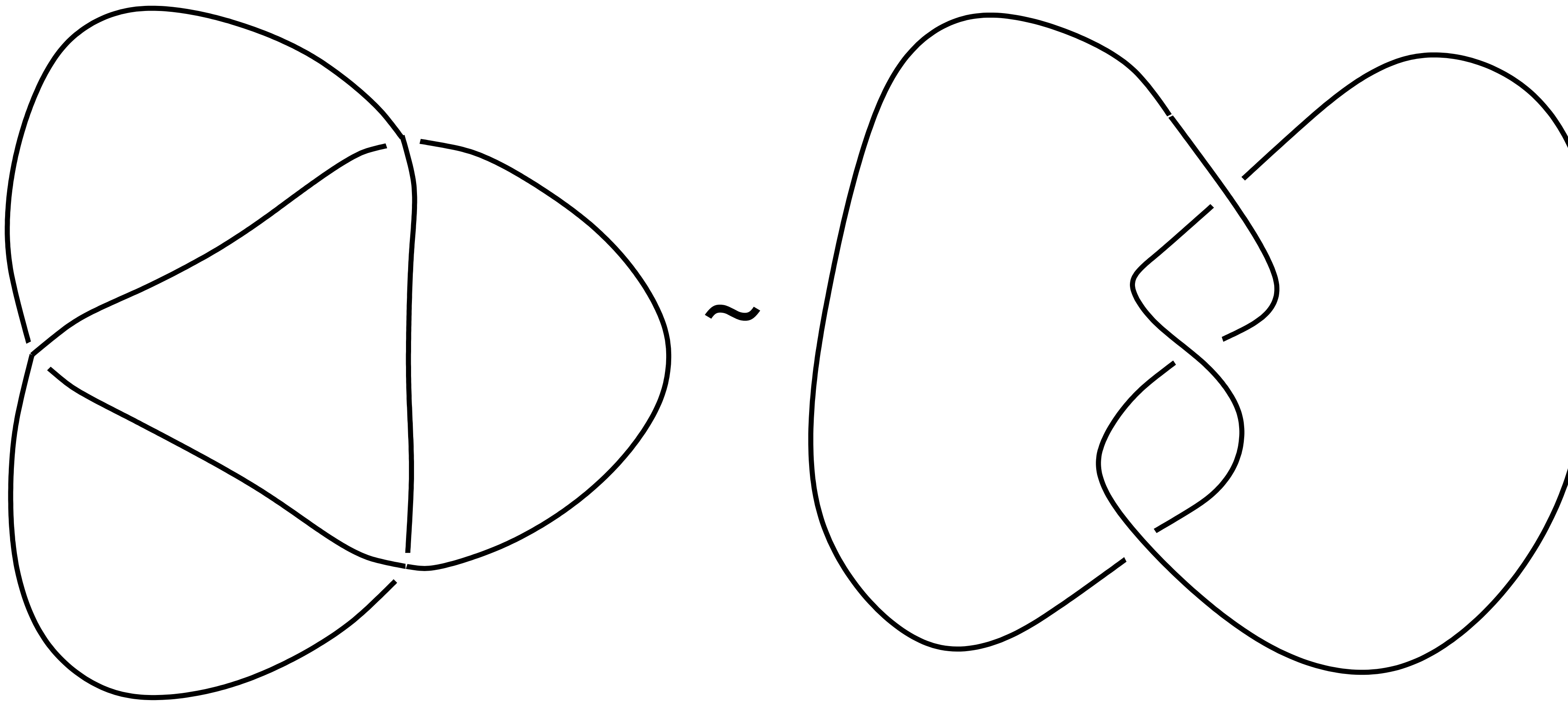
Bueno, pero primero vamos a conocer un poquito más a los nudos.

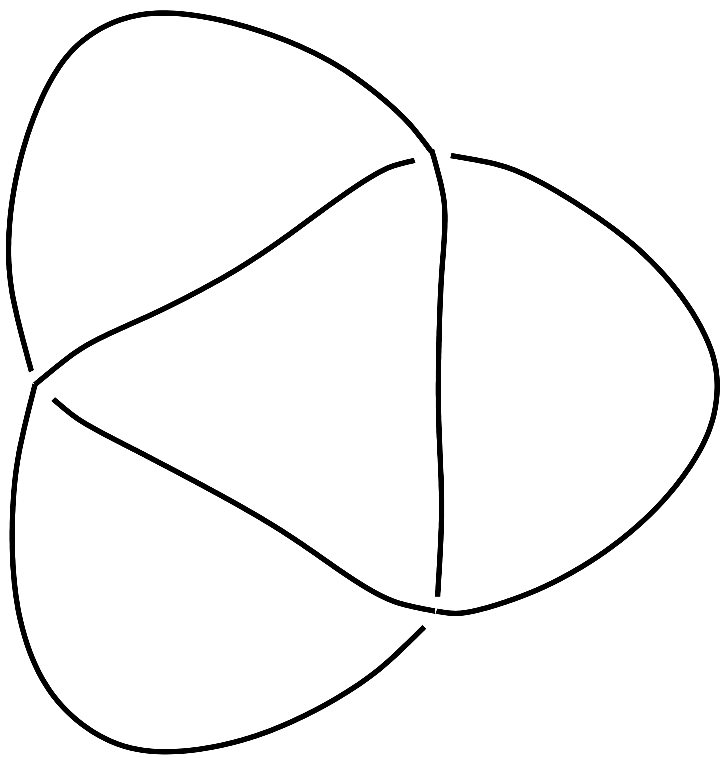
El nudo trébol ($= 3_1$)



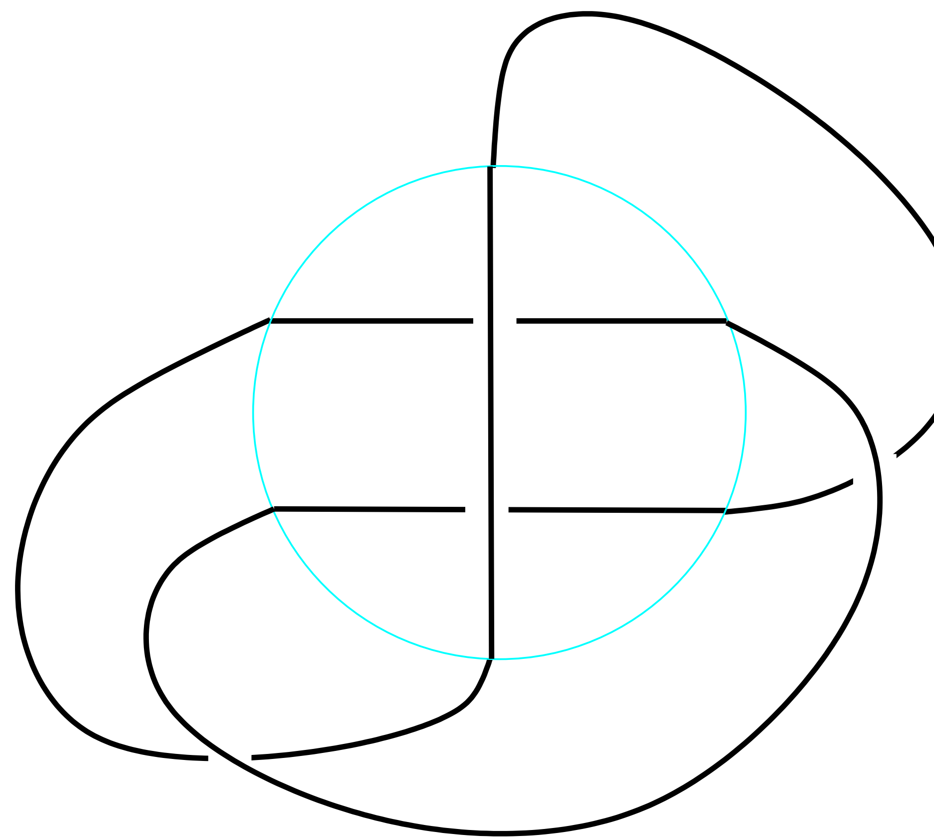
Otra vez el trébol

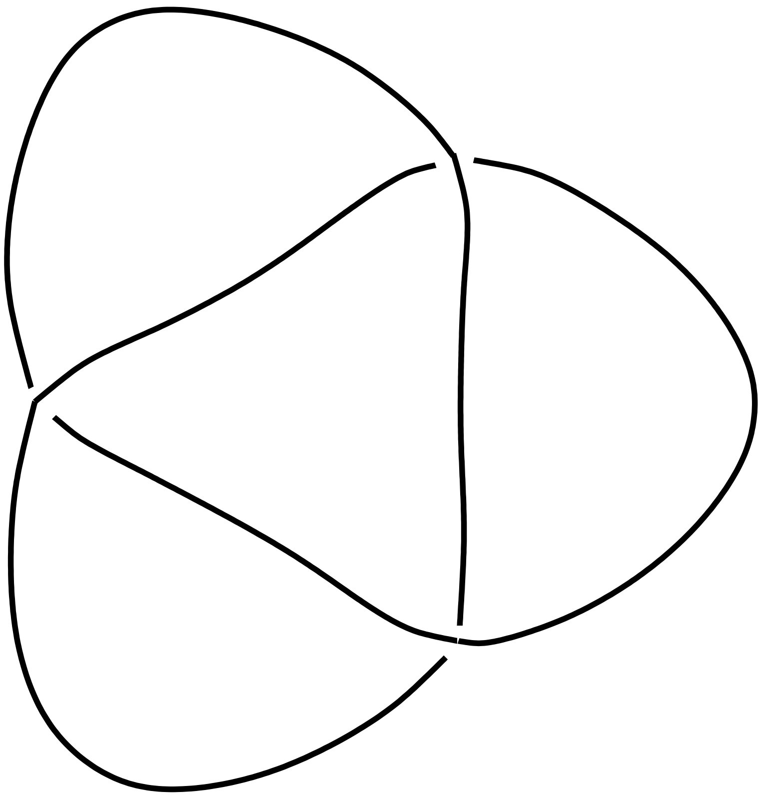




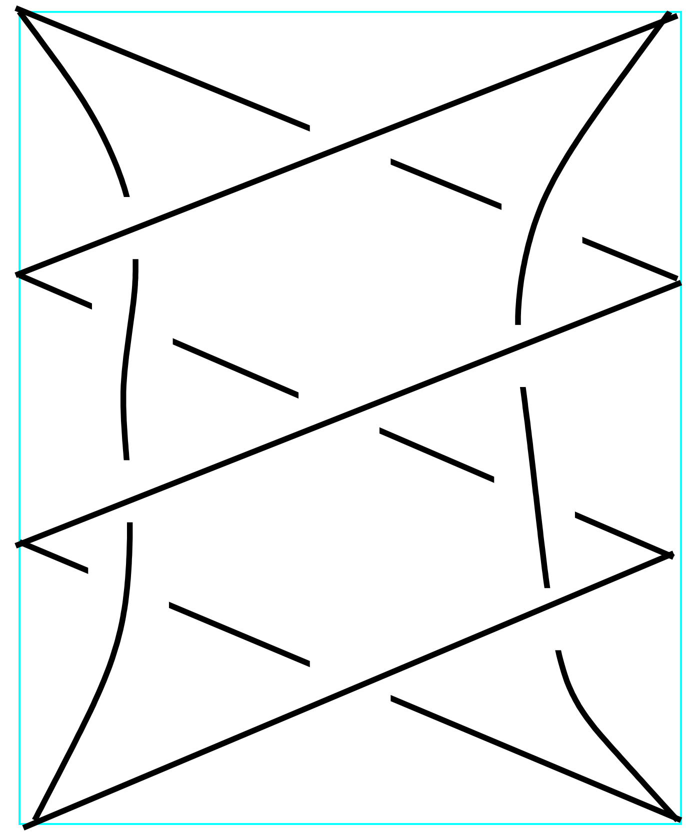


$\sim$

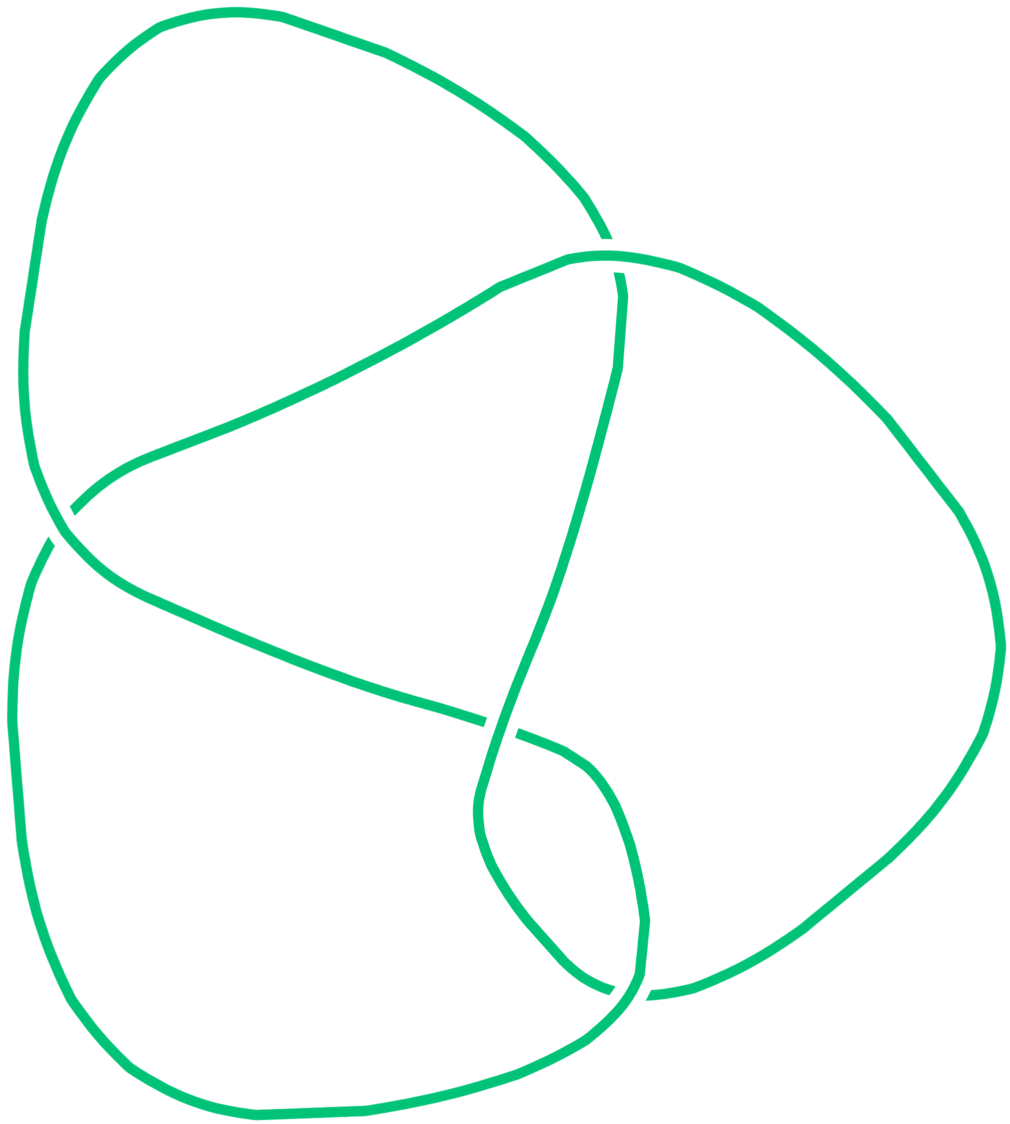


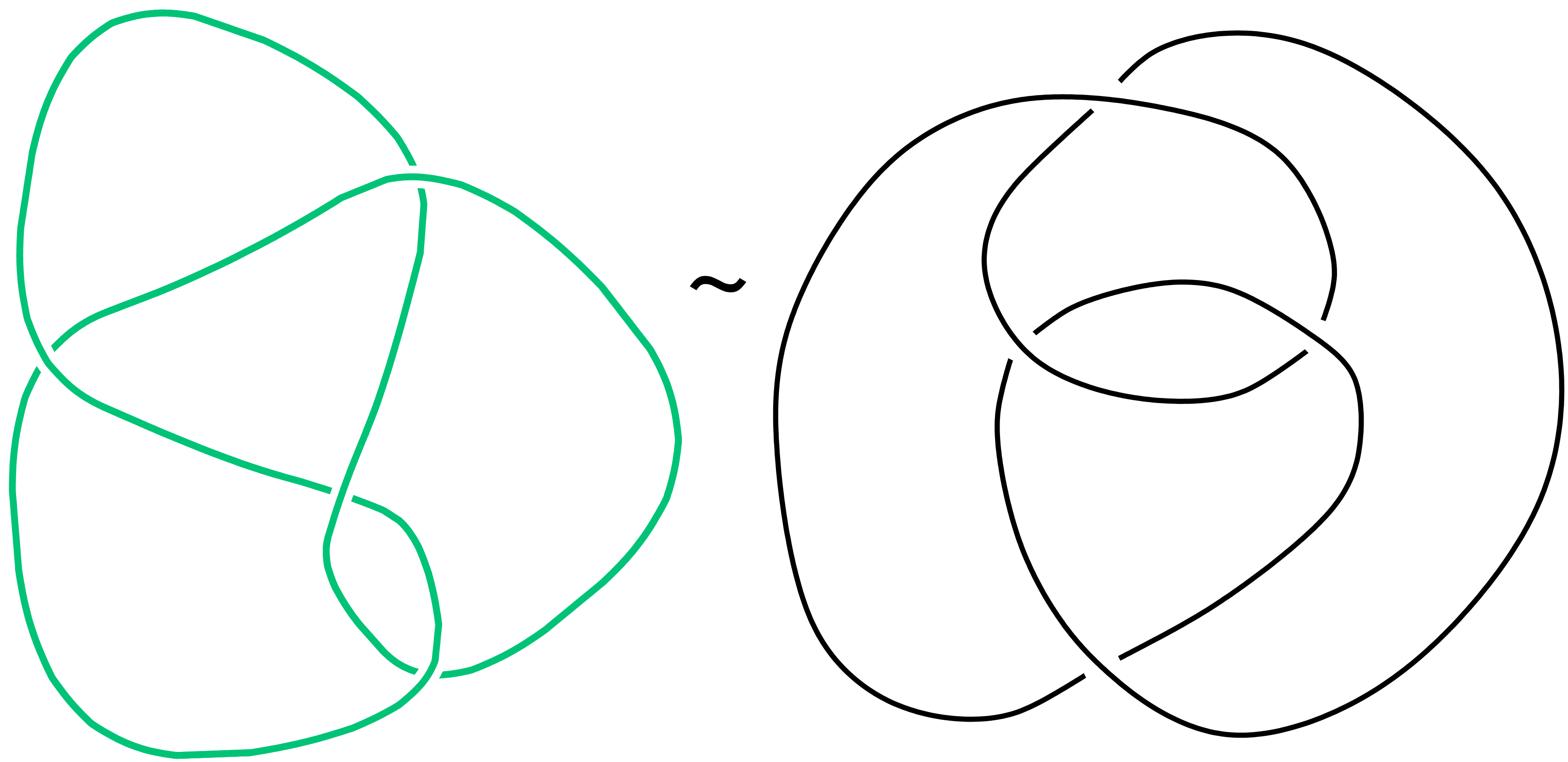


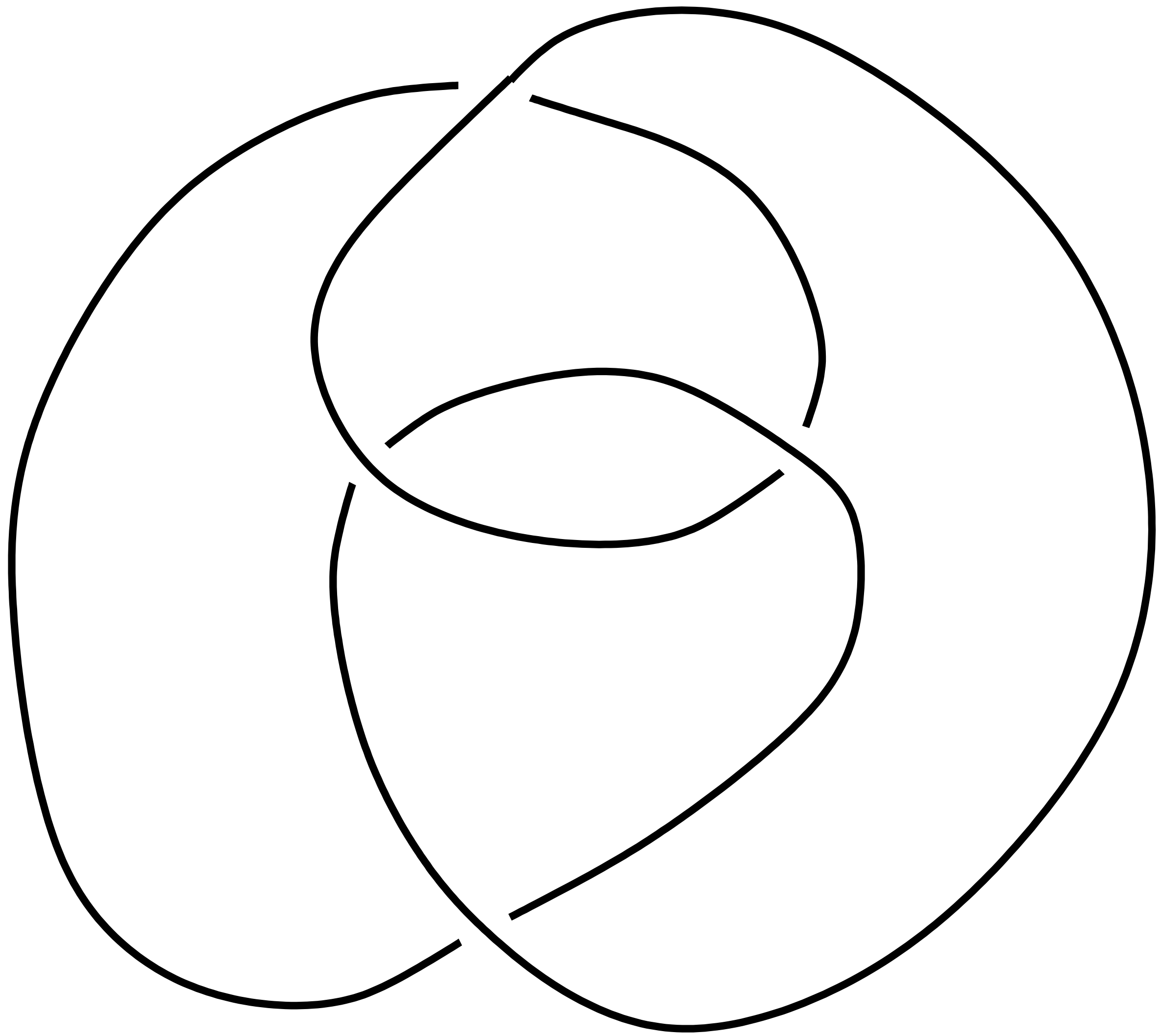
$\sim$



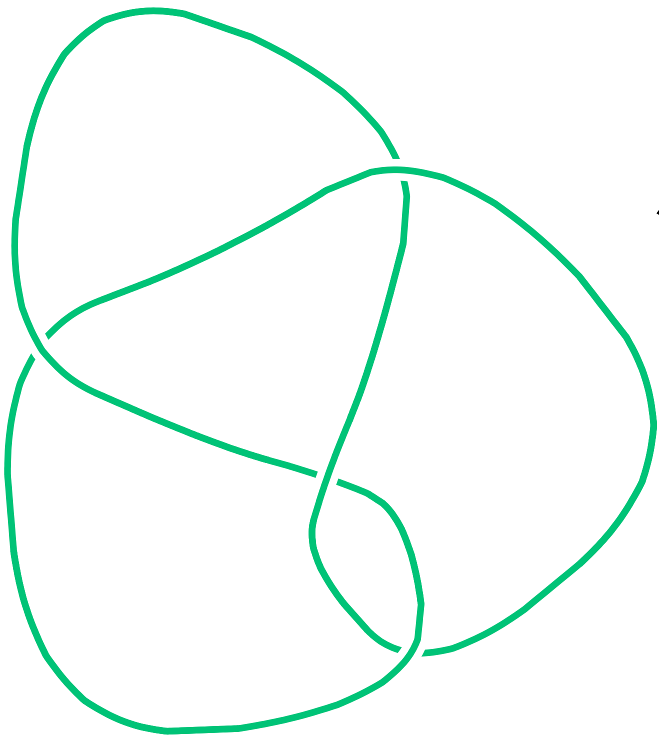
El nudo con figura de ocho ($=$ el ocho $= 4_1$)



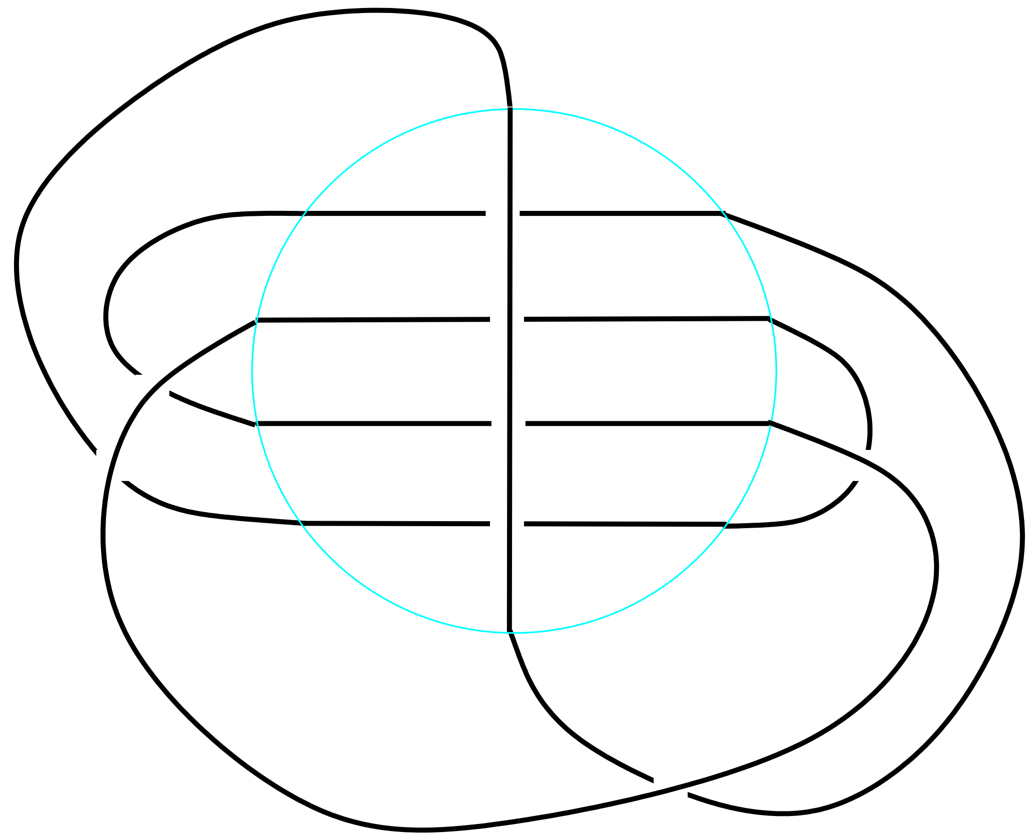


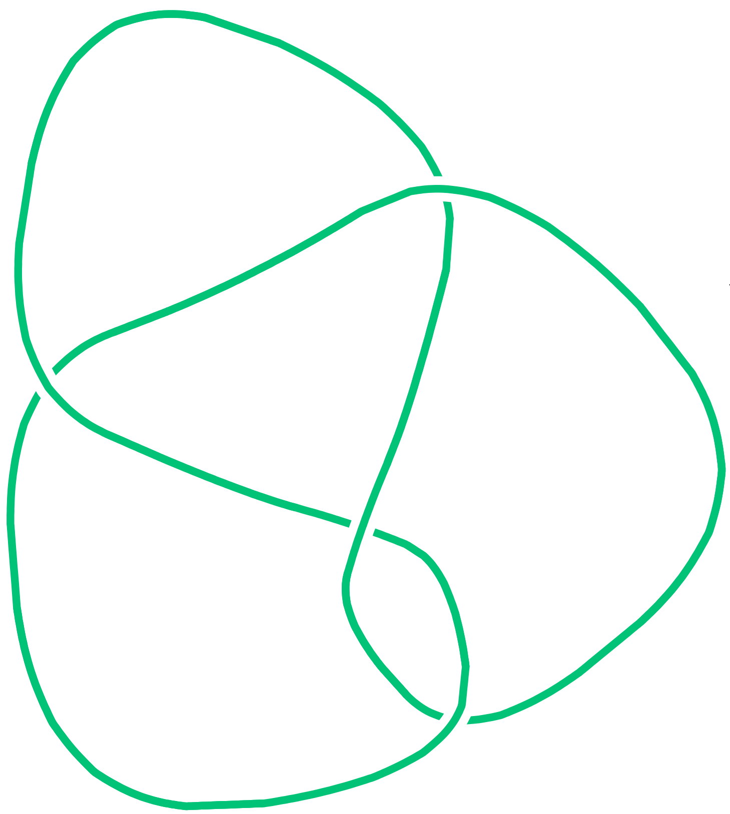


¿qué nudo es éste?

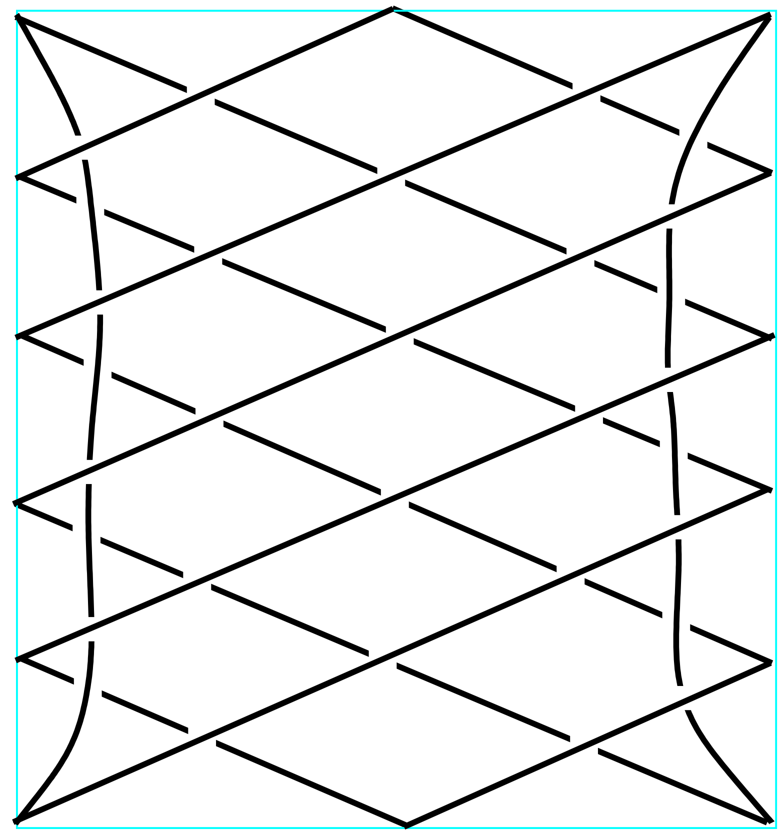


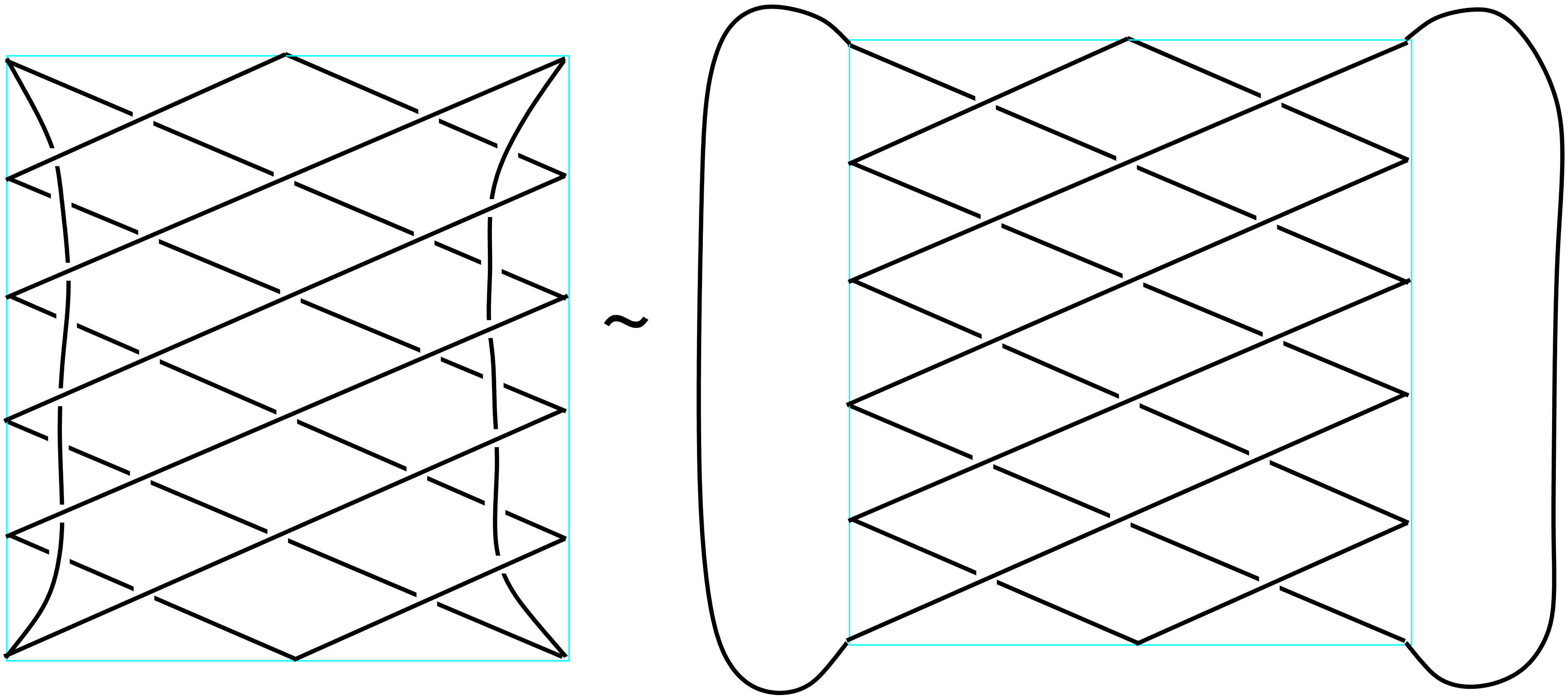
$\sim$





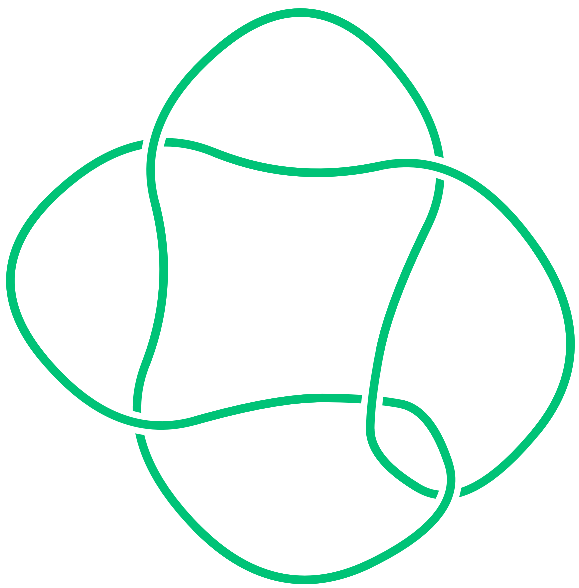
$\sim$

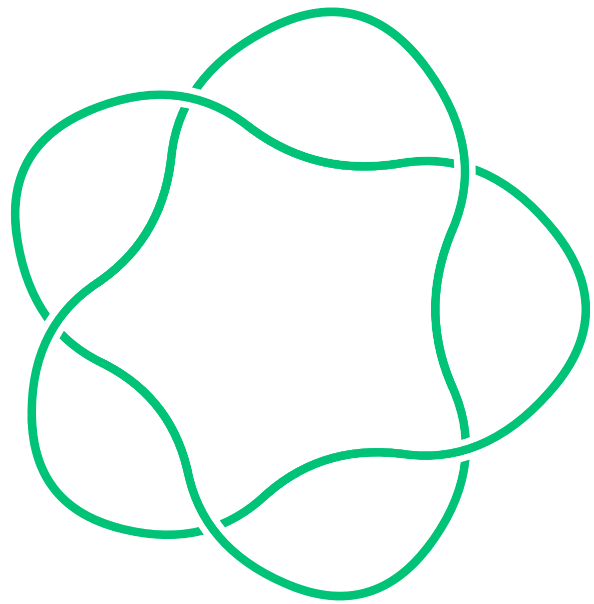




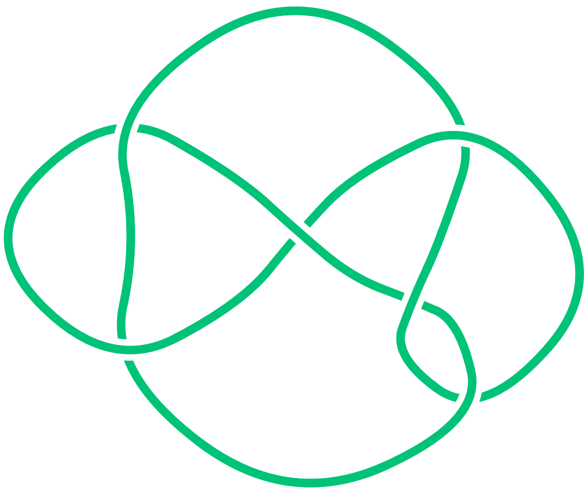
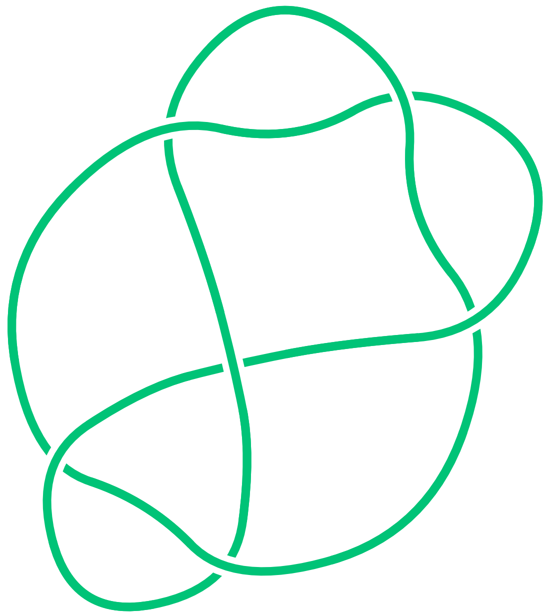
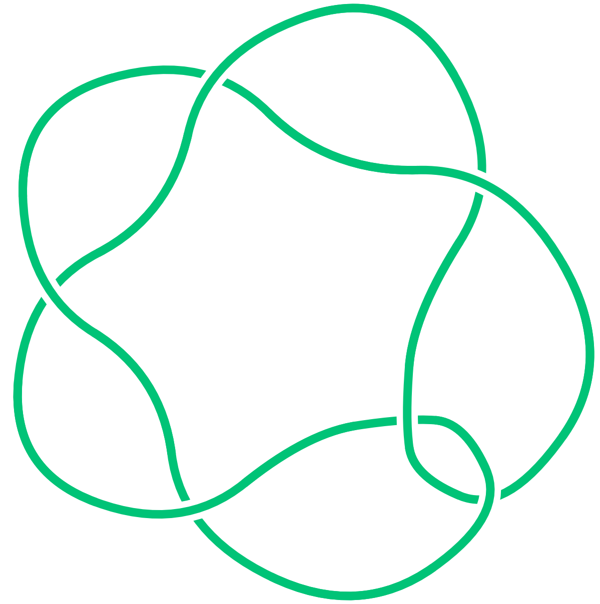
Todos los nudos

Cinco cruces

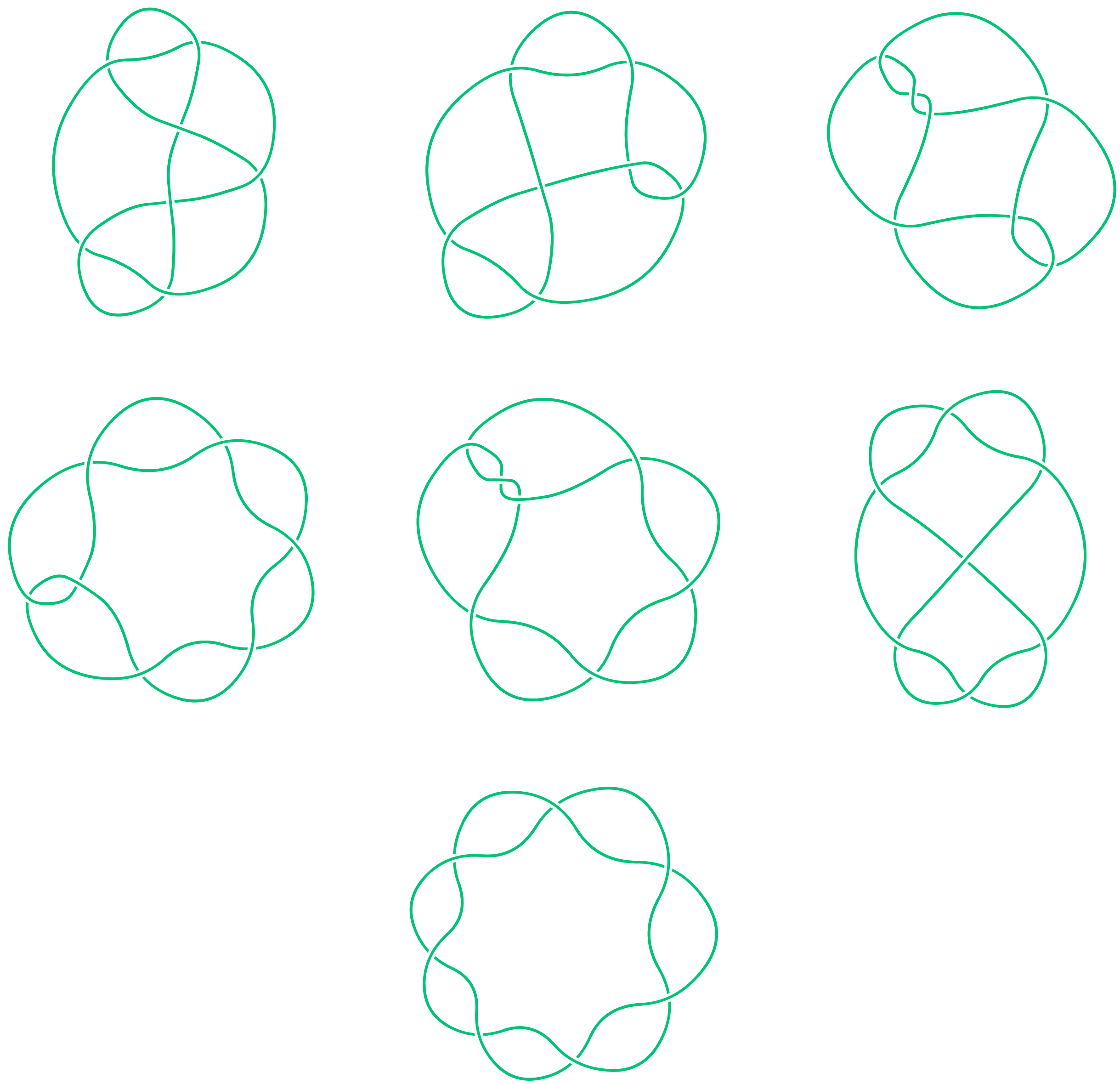




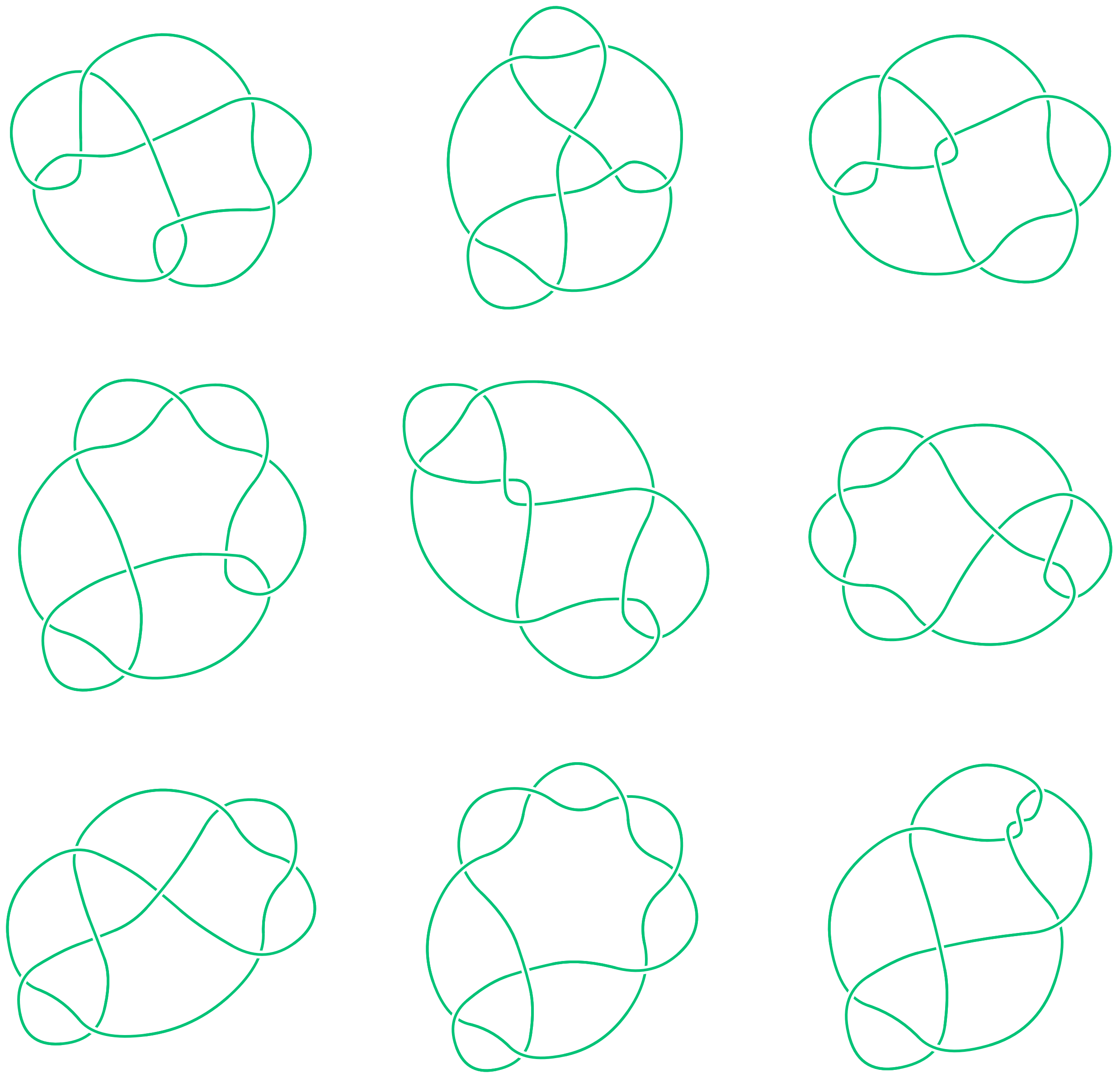
Seis cruces

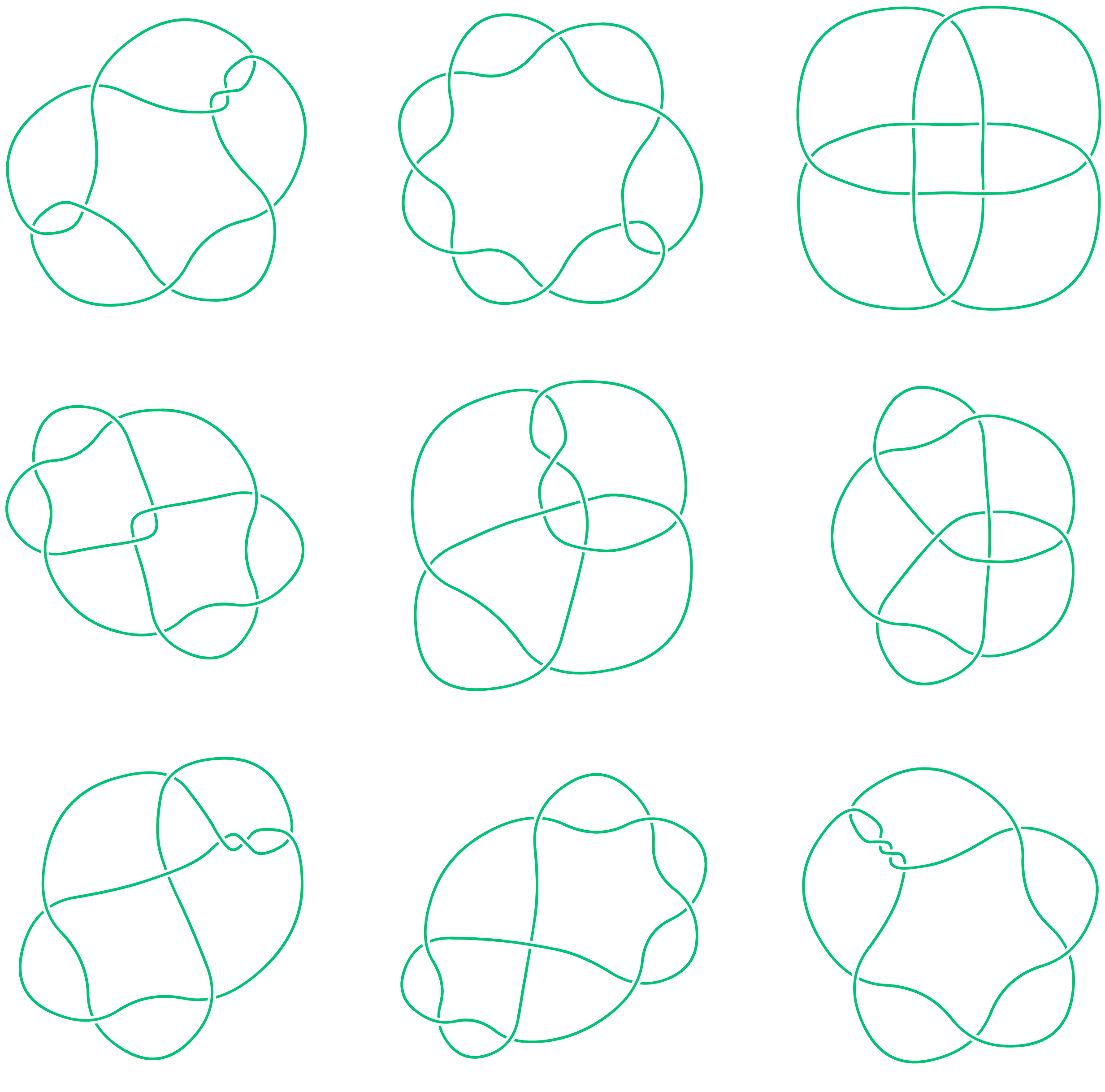
Siete cruces



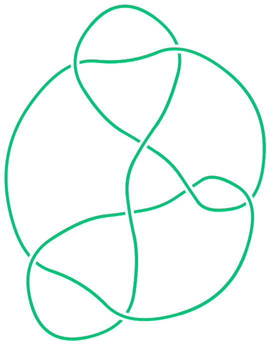
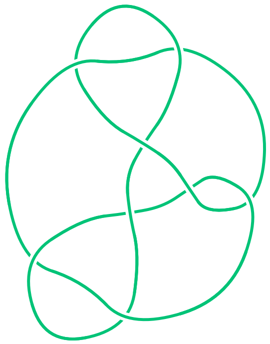
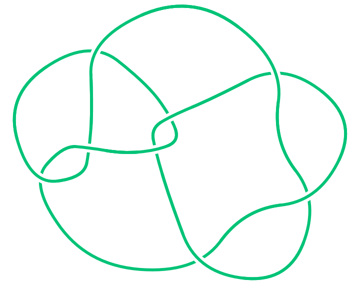
Ocho cruces



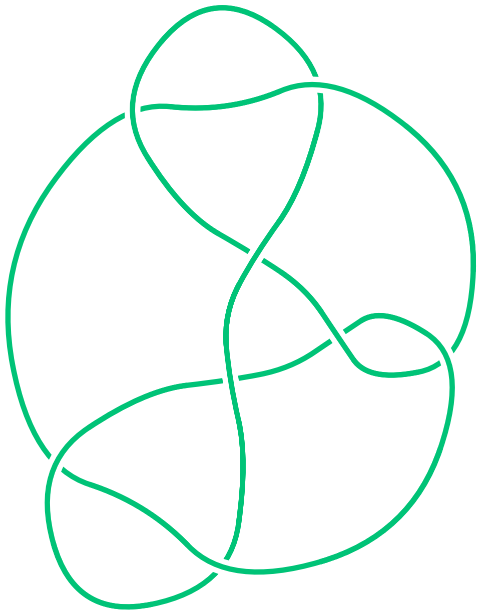
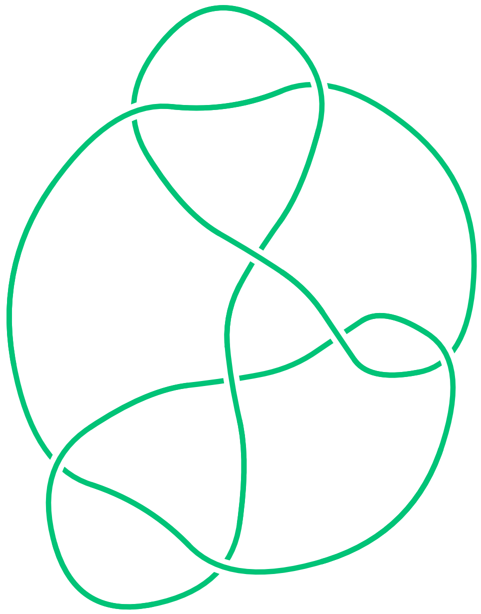
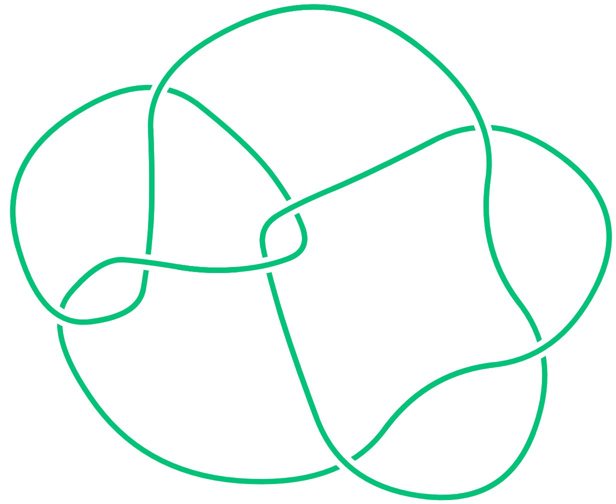
Ocho cruces



Ocho cruces

Ocho cruces no alternantes

etcétera

¡Vamos a construir nudos!

Tomamos dos números enteros.

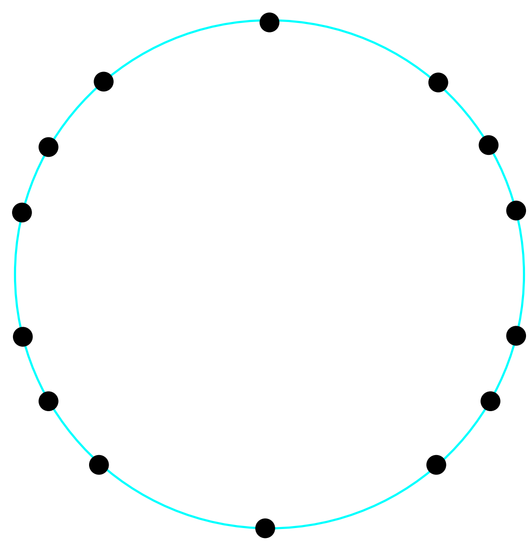
Tomamos dos números enteros p y q de tal manera que la fracción $\frac{p}{q}$ esté reducida.

(En este caso se dice que los números p y q son primos relativos.)

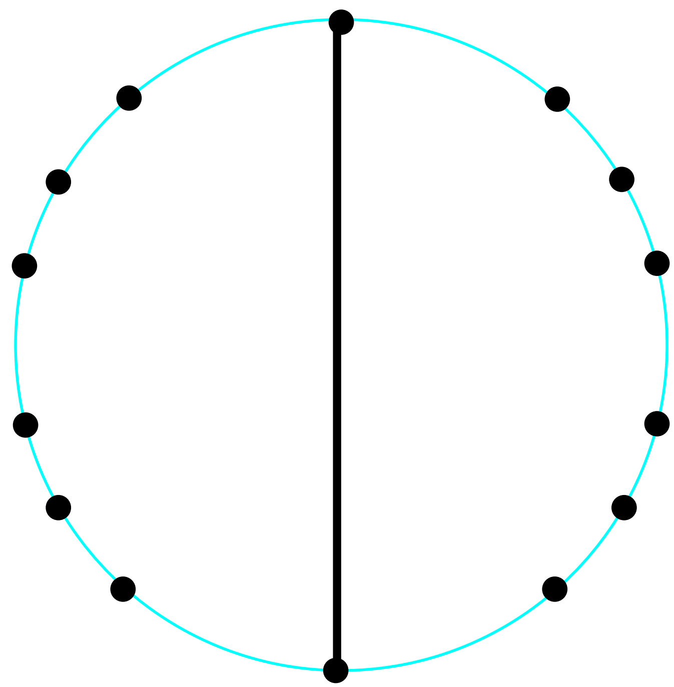
Por ejemplo, el 7 y el 3.

En una circunferencia marcamos $2p$ puntos.

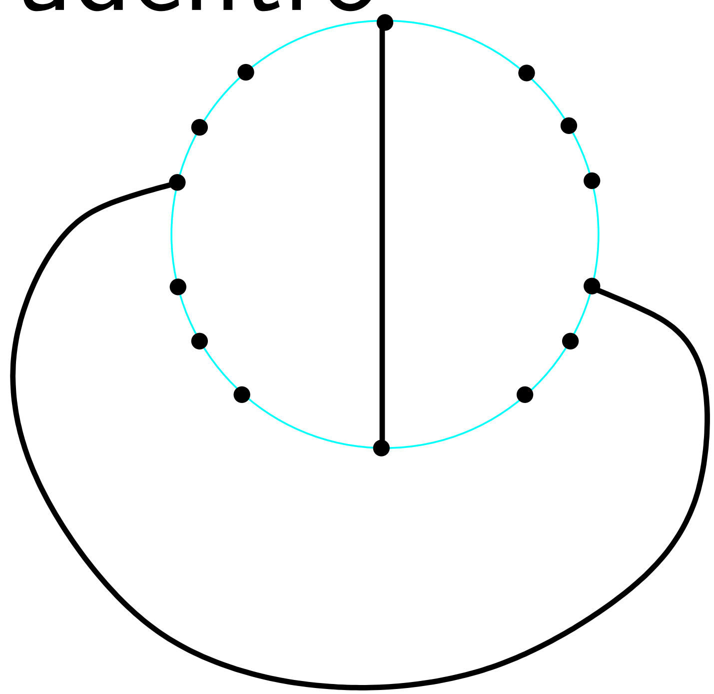
Para nuestro ejemplo, de 7 y 3, marcamos $14 = 2 \times 7$ puntos.



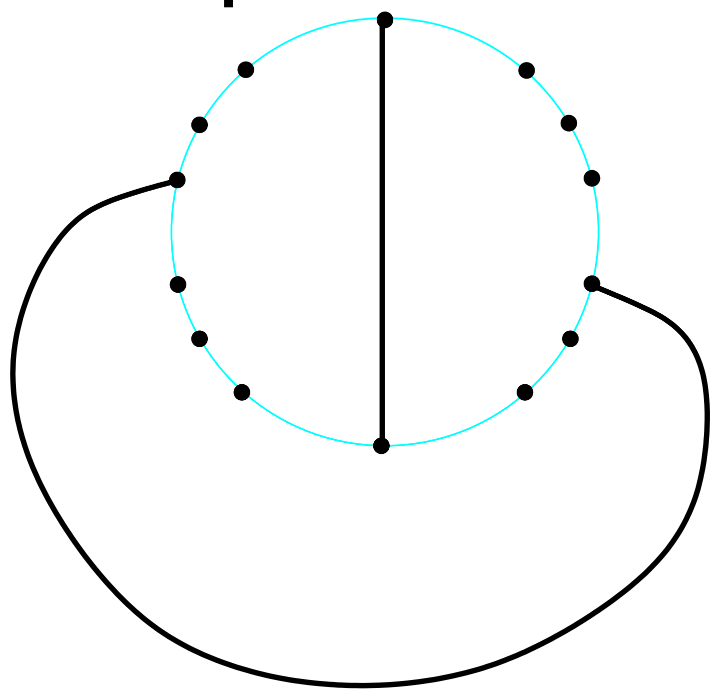
Dentro de la circunferencia trazamos una bisectriz, digamos, una vertical.



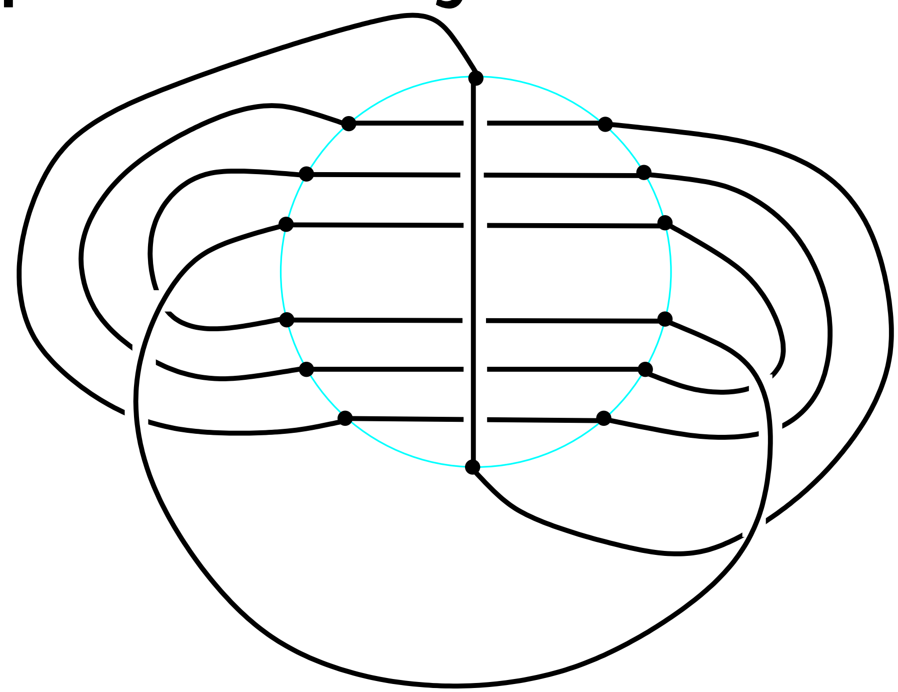
Fuera de la circunferencia trazamos otra bisectriz que empiece en el punto número q (el q-ésimo), con respecto a la bisectriz de adentro



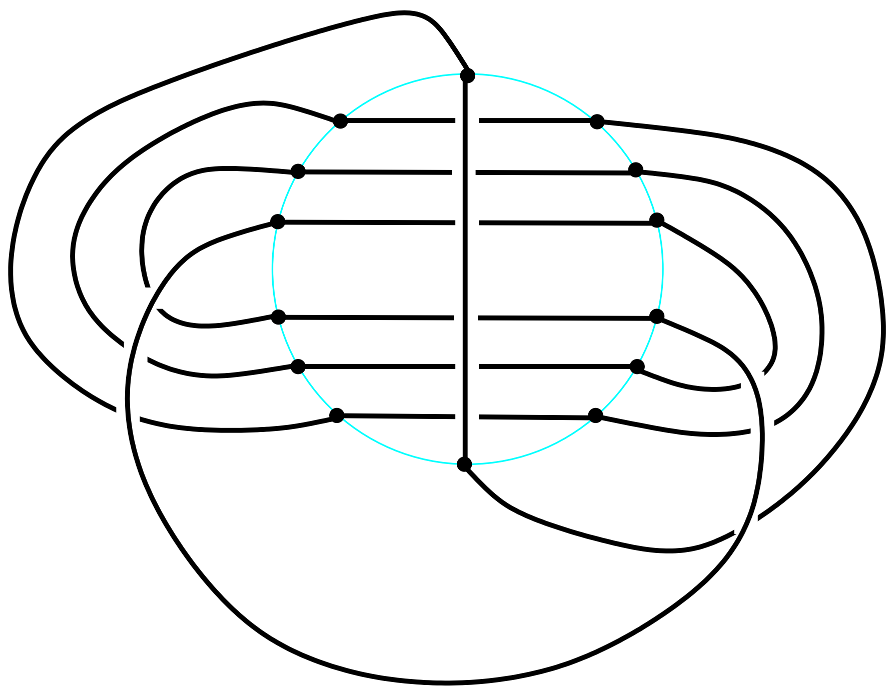
Dentro y fuera de la circunferencia, nos fijamos en las parejas de puntos equidistantes con respecto a las bisectrices



Conectamos los puntos equidistantes (los que aún no estén conectados) con arcos que pasen por debajo de las bisectrices.



El nudo resultante se llama el nudo $c(p, q)$

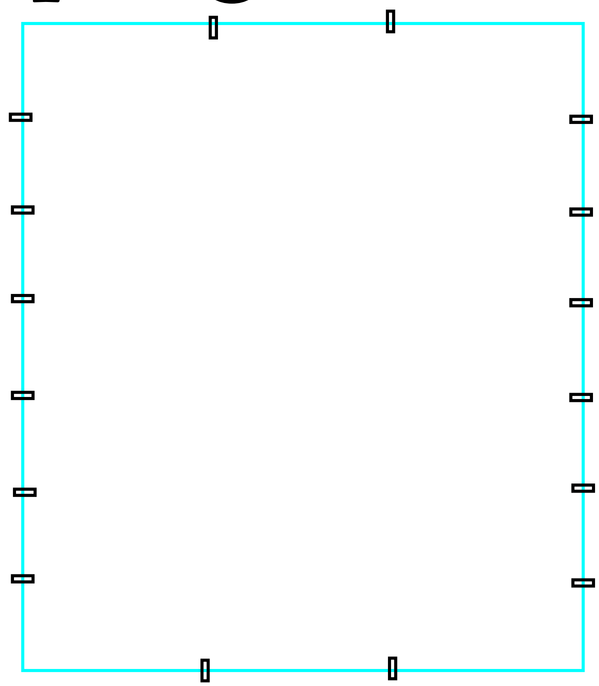


El nudo $c(7, 3)$

Tomamos dos números enteros p y q de tal manera que la fracción $\frac{p}{q}$ esté reducida.

Por ejemplo, 7 y 3 otra vez.

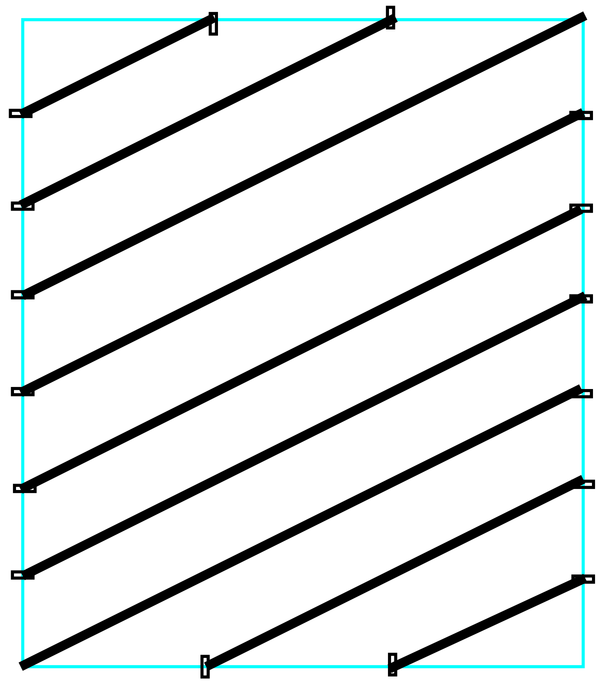
En un rectángulo dividimos los lados verticales en p segmentos y los lados horizontales en q segmentos.



En la parte de enfrente, conectamos los puntos marcados con segmentos de recta de inclinación $\frac{p}{q}$.

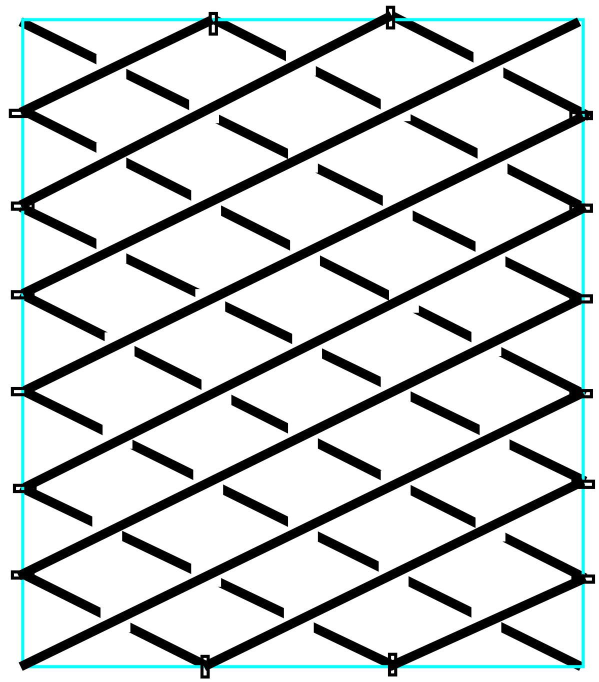
(Por ejemplo, si $\frac{p}{q}$ es positivo, conectamos los puntos más cercanos comenzando por la esquina superior izquierda. Si $\frac{p}{q}$ es negativo, comenzamos en la esquina superior derecha.)

Para nuestro ejemplo de 7 y 3.

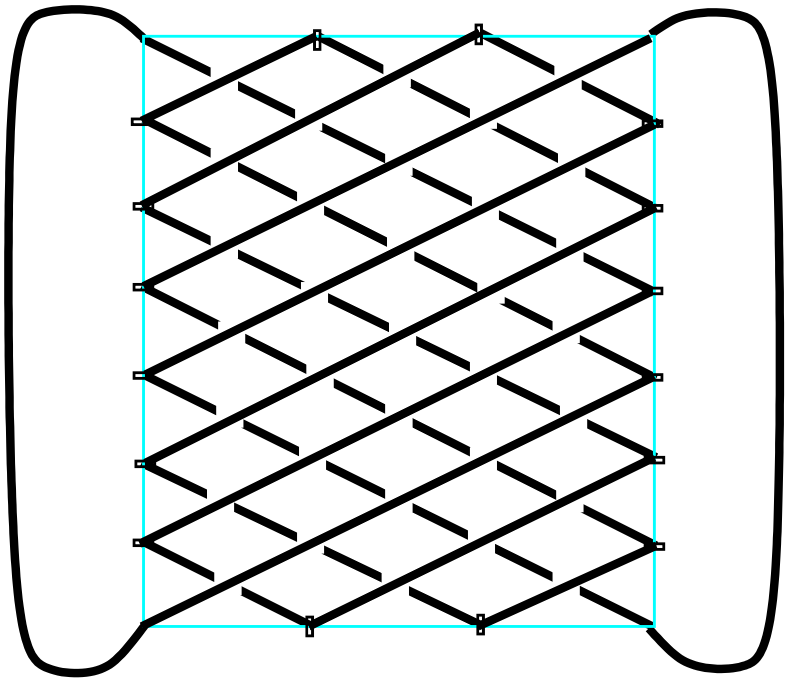


Ahora, en la parte de atrás, conectamos los puntos con segmentos de la inclinación contraria (o sea, $-\frac{p}{q}$). Estos segmentos van debajo de los segmentos ya dibujados.

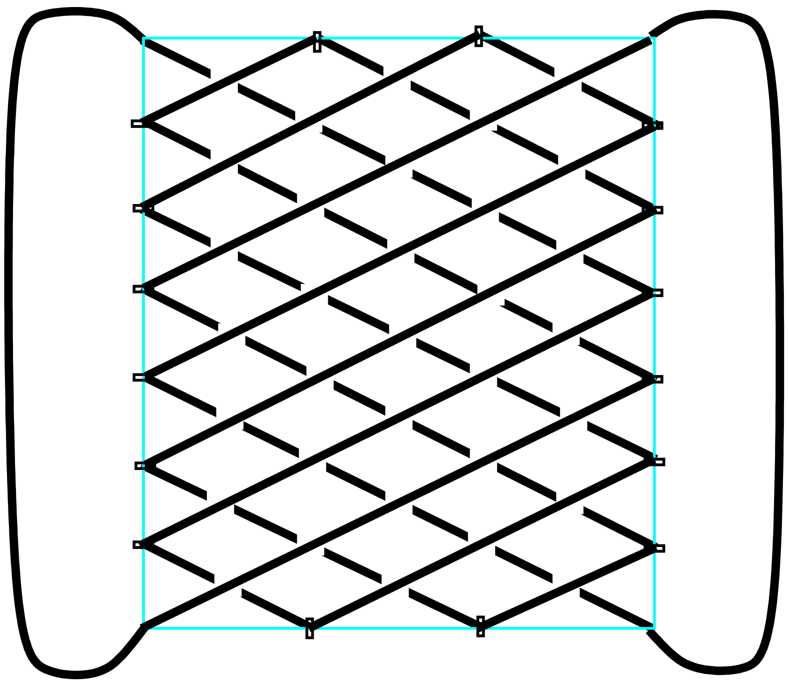
Para 7 y 3.



Finalmente conectamos las esquinas con dos “segmentos verticales”



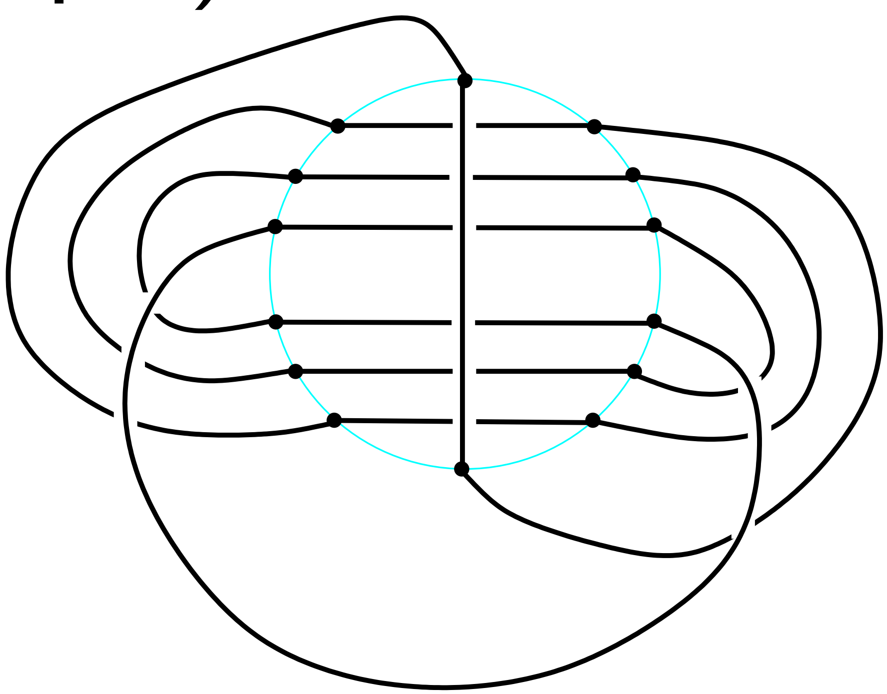
El nudo resultante se llama el nudo $m(p, q)$

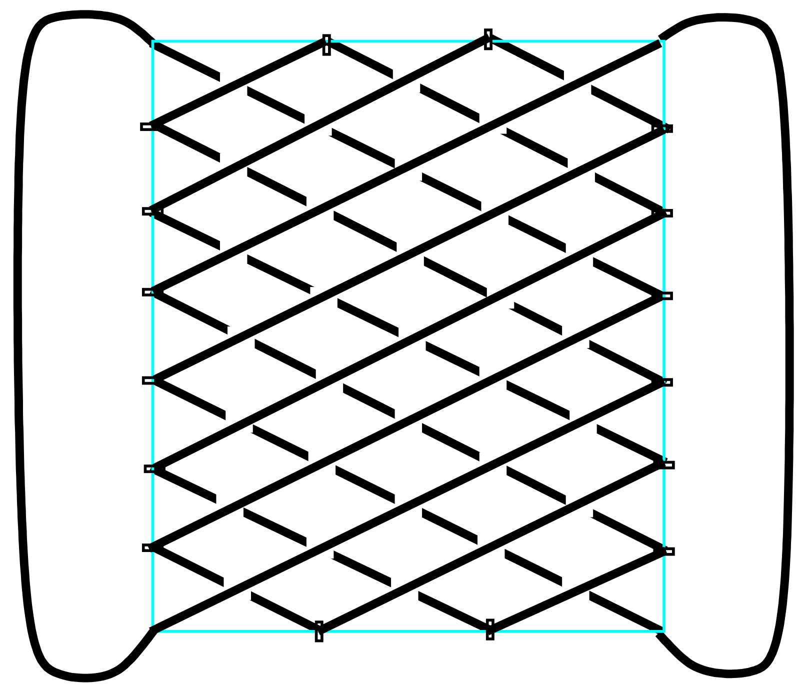


El nudo $m(7, 3)$

¿Qué tiene que ver el nudo $c(p,q)$ con el nudo $m(p,q)$?

(¿qué onda con el $c(7,3)$ y el $m(7,3)$? por ejemplo)





Tomamos dos números enteros p y q de tal manera que la fracción $\frac{p}{q}$ esté reducida.

Por ejemplo, 7 y 3 otra vez.

Escribimos $\frac{p}{q}$ como fracción continua

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_k}}}$$

Por ejemplo $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ (o $\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}}$)

Todavía más nudos

¿...?

Definición. Para números enteros no nulos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ vamos a definir por inducción el símbolo $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$:

1. $[a_1] = a_1$.

2. Si $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ ya está definido, definimos

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}] = a_1 + \frac{1}{[a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}]}$$

Por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
[a_1] &= a_1 \\
[a_1, a_2] &= a_1 + \cfrac{1}{a_2} \\
[a_1, a_2, a_3] &= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} \\
[a_1, a_2, a_3, a_4] &= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}}
\end{aligned}
$$

etcétera.

La expresión (el número) $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ se llama la <u>fracción continua</u> con cocientes parciales $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Tomamos dos números enteros p y q con $q \neq 0$. Entonces el número $\frac{p}{q}$ tiene una expansión como fracción continua.

Proposición. *Si* a, b *son enteros y* $a \neq 0$*, entonces existen únicos enteros* q *y* r *tales que* $b = aq + r$ *y* $0 \leq r < |a|$*.*

1er. caso: $a > 0$. Consideremos el conjunto

$$S = \{y \in \mathbb{N} | \exists x \in \mathbb{Z} \text{ tal que } y = b - xa\}.$$

Si $b \geq 0$, entonces $b = b - 0 \cdot a \in S$; si $b < 0$, entonces $b - ba \in S$. Así que $S \neq \emptyset$. Luego S tiene un elemento más chico $r \in S$. Podemos escribir $r = b - qa$ para cierto $q \in \mathbb{Z}$.

Como $r - a = b - (q+1)a < r$ (pues $a > 0$) y r es el mínimo de S, se sigue que $r - a < 0$; o sea, $r < a$.

Unicidad:

Ahora si $qa + r = q'a + r'$ con $0 \leq r, r' < a$, entonces $r = r'$, pues si, digamos, $r < r'$, entonces $(q - q')a = r' - r > 0$; así que $q > q'$ y $r' - r \geq a$, pero esto es una contradicción (luego no es cierto que $r < r'$). Si suponemos que $r > r'$, obtenemos una contradicción de manera similar.

Debemos concluir que $r = r'$ y, por lo tanto $q = q'$.

2do. caso: $a < 0$. ¡Ejercicio!

Tomamos dos números enteros p y q con $q \neq 0$. Podemos escribir

$$
\begin{aligned}
p &= a_1 q + r_1 \qquad \text{con } 0 \leq r_1 < |q| \\
q &= a_2 r_1 + r_2 \qquad \text{con } 0 \leq r_2 < |r_1| \\
r_1 &= a_3 r_2 + r_3 \qquad \text{con } 0 \leq r_3 < |r_2| \\
&\vdots \\
r_k &= a_{k+2} r_{k+1} + r_{k+2} \qquad \text{con } 0 \leq r_{k+2} < |r_{k+1}| \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Teorema (Euclides) *La sucesión anterior termina; es decir,* $r_k = 0$ *para algún* $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
p &= a_1 q + r_1 \qquad \text{con } 0 \leq r_1 < |q| \\
q &= a_2 r_1 + r_2 \qquad \text{con } 0 \leq r_2 < |r_1| \\
r_1 &= a_3 r_2 + r_3 \qquad \text{con } 0 \leq r_3 < |r_2| \\
&\vdots \\
r_{k-3} &= a_{k-1} r_{k-2} + r_{k-1} \qquad \text{con } 0 \leq r_{k-1} < |r_{k-2}| \\
r_{k-2} &= a_k r_{k-1}
\end{aligned}$$

Si re-escribimos

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= a_1 + \frac{r_1}{q} \\
\frac{q}{r_1} &= a_2 + \frac{r_2}{r_1} \\
\frac{r_1}{r_2} &= a_3 + \frac{r_3}{r_2} \\
&\vdots \\
\frac{r_{k-3}}{r_{k-2}} &= a_{k-1} + \frac{r_{k-1}}{r_{k-2}} \\
\frac{r_{k-2}}{r_{k-1}} &= a_k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= a_1 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}} \\
&= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}} \\
\frac{q}{r_1} &= a_2 + \frac{r_2}{r_1} \\
\frac{r_1}{r_2} &= a_3 + \frac{r_3}{r_2} \\
&\vdots \\
\frac{r_{k-3}}{r_{k-2}} &= a_{k-1} + \frac{r_{k-1}}{r_{k-2}} \\
\frac{r_{k-2}}{r_{k-1}} &= a_k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= a_1 + \frac{1}{\dfrac{q}{r_1}} \\
&= a_1 + \frac{1}{a_2 + \dfrac{r_2}{r_1}} \\
&= a_1 + \frac{1}{a_2 + \dfrac{1}{\dfrac{r_2}{r_1}}} \\
&\vdots \\
&= a_1 + \frac{1}{a_2 + \dfrac{1}{a_3 + \cdots + \dfrac{1}{a_k}}} \\
&= [a_1, a_2, \ldots, a_k]
\end{aligned}
$$

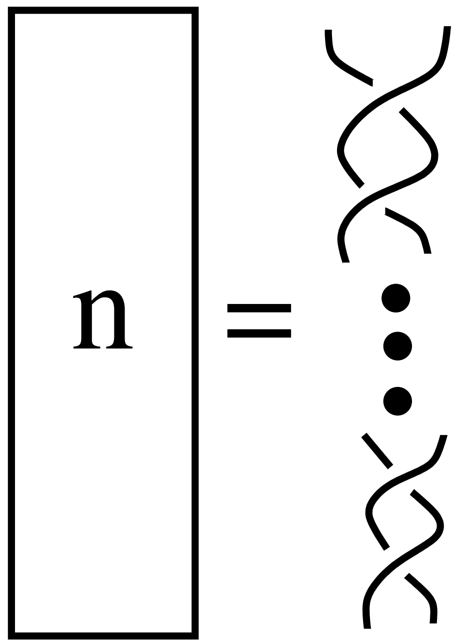
$$
\begin{aligned}
\frac{7}{5} &= 1 + \frac{2}{5} \\
&= 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} \\
&= [1, 2, 2]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{225}{157} &= 1+\frac{68}{157} \\
&= 1+\frac{1}{\frac{157}{68}} \\
&= 1+\frac{1}{2+\frac{21}{68}} \\
&= 1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{68}{21}}}
\end{aligned}
$$

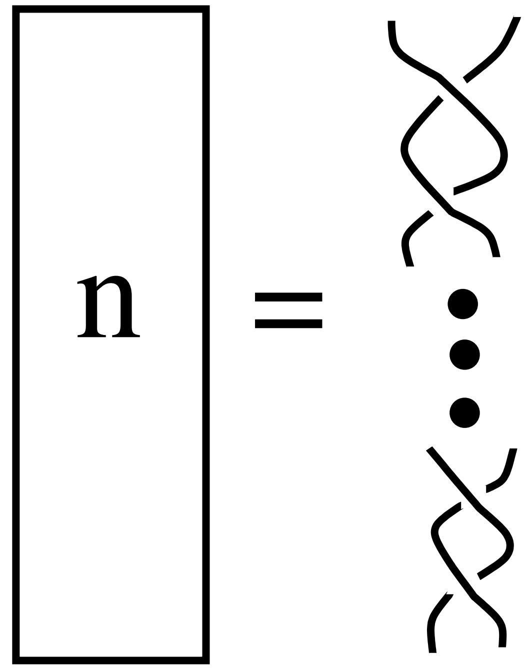
$$
\begin{aligned}
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{5}{21}}} \\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{1}{\frac{21}{5}}}} \\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\frac{1}{5}}}}
\end{aligned}
$$

$$\frac{225}{157} = [1, 2, 3, 4, 5]$$

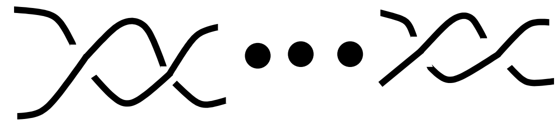
Ahora vamos a dibujar



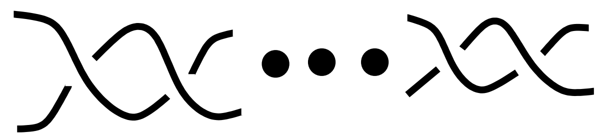
n>0



n<0

$\boxed{n} =$ 

$n>0$

$\boxed{n} =$ 

$n<0$

Tomamos dos números enteros p y q de tal manera que la fracción $\frac{p}{q}$ esté reducida.

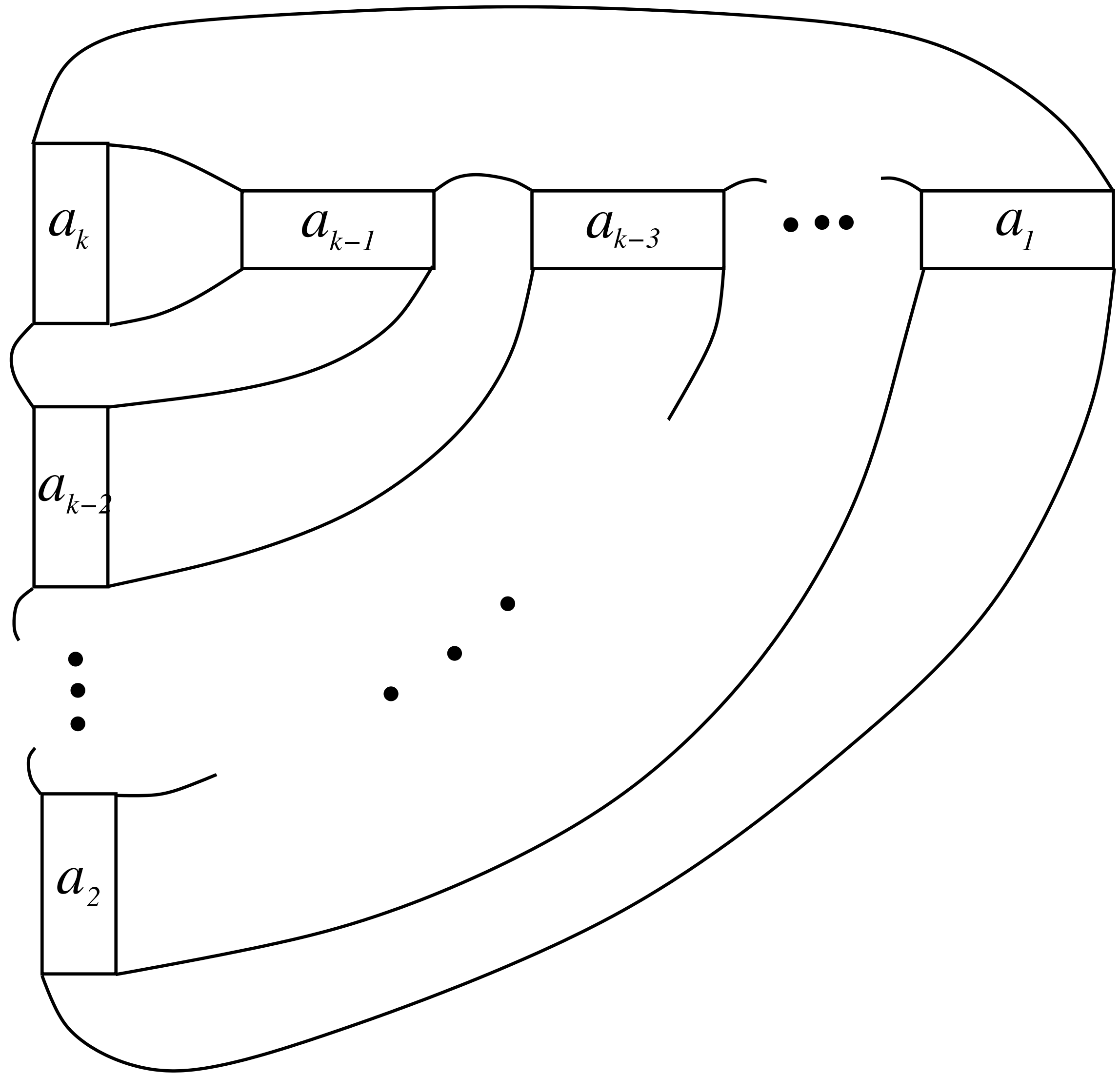
Por ejemplo, 7 y 3 otra vez.

Escribimos $\frac{p}{q}$ como fracción continua

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_k}}}$$

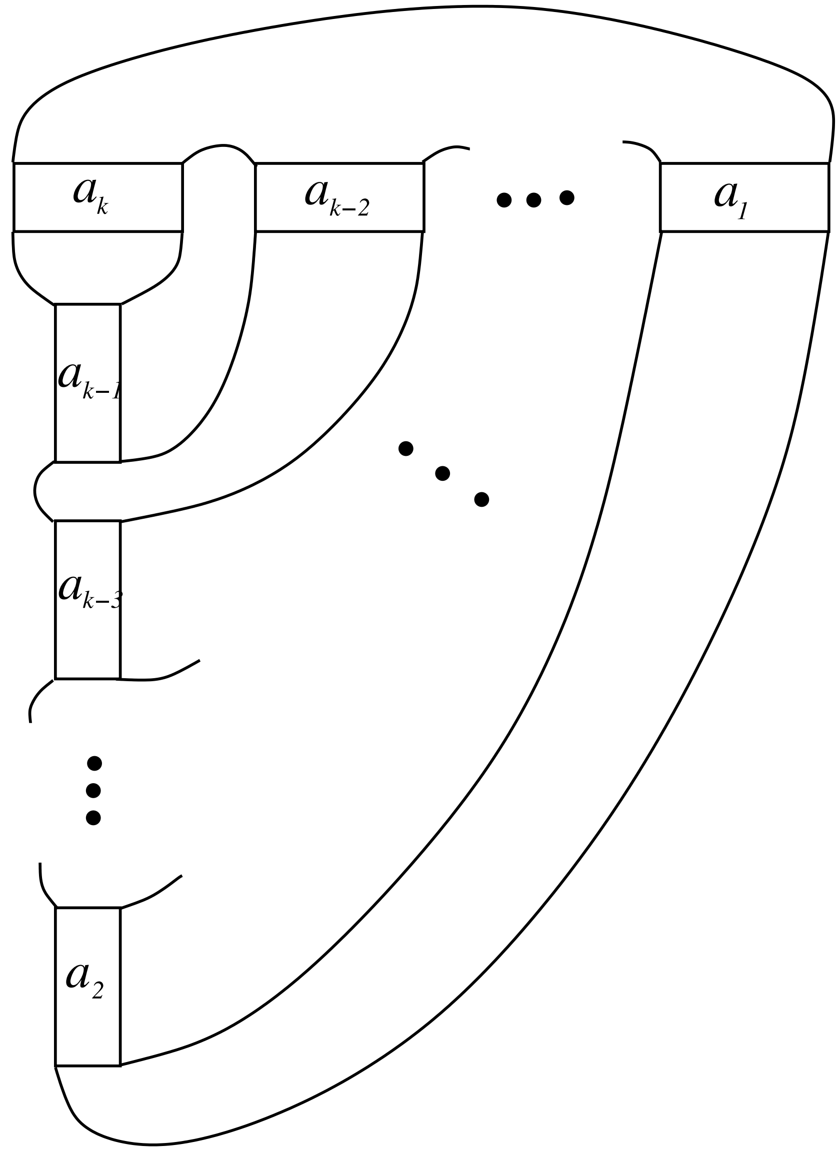
Por ejemplo $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$

Dibujamos (k par)



k par

Dibujamos (k impar)

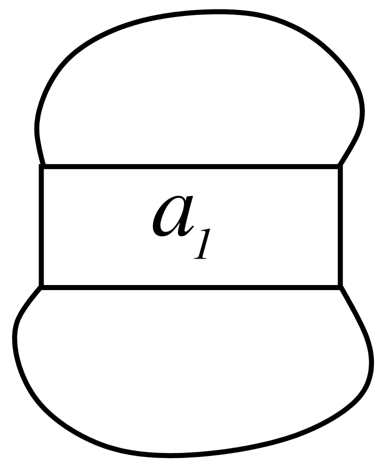


k impar

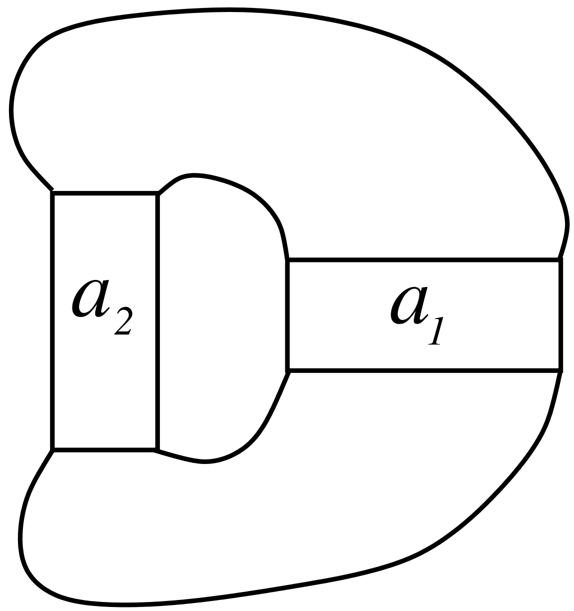
El nudo resultante se llama:

el <u>nudo racional</u> $\ell(p, q)$

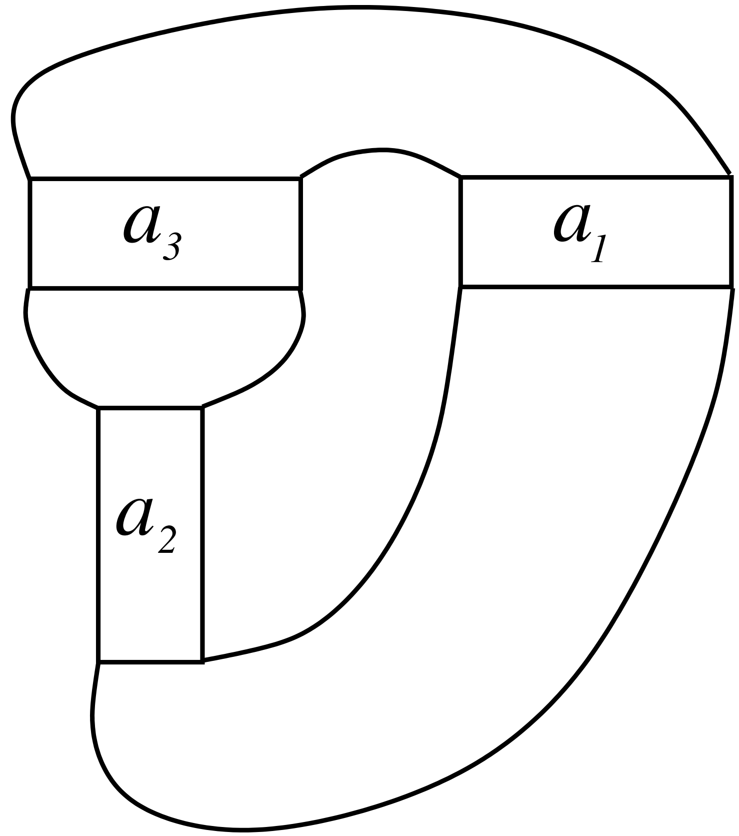
Dibujamos ($k = 1$)



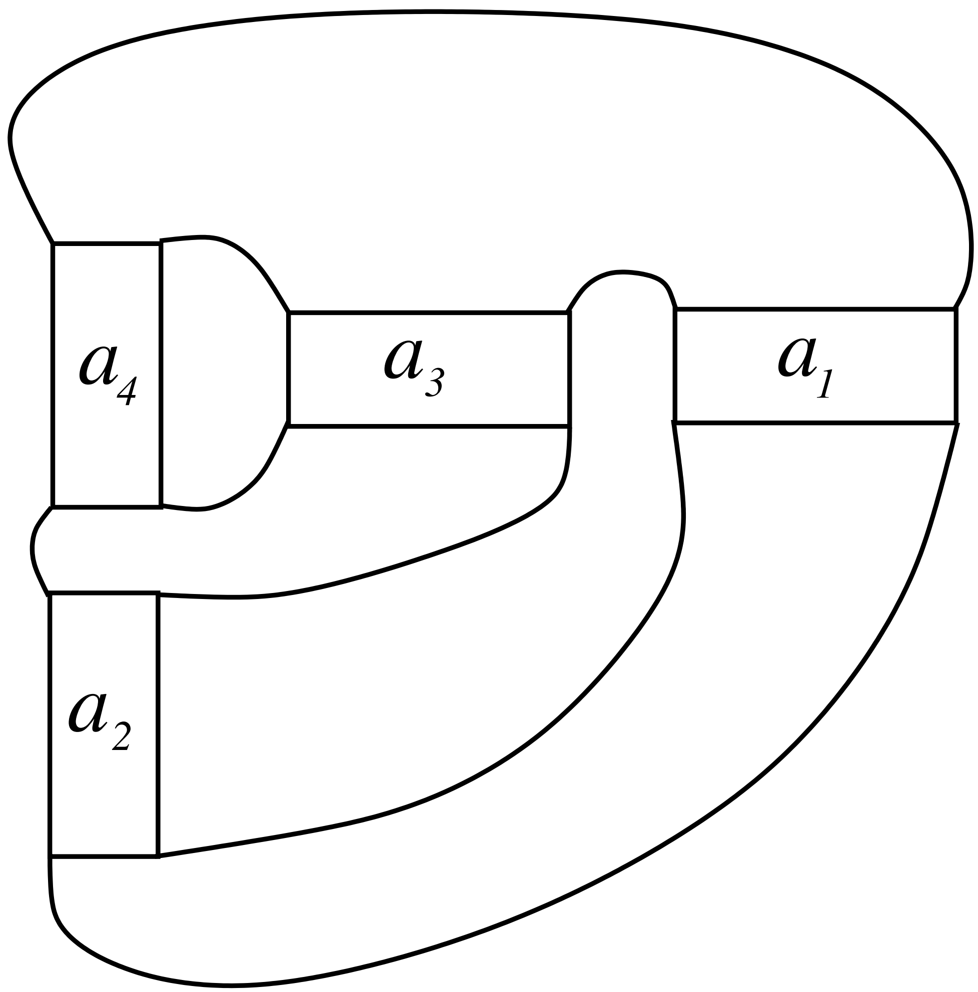
Dibujamos ($k = 2$)



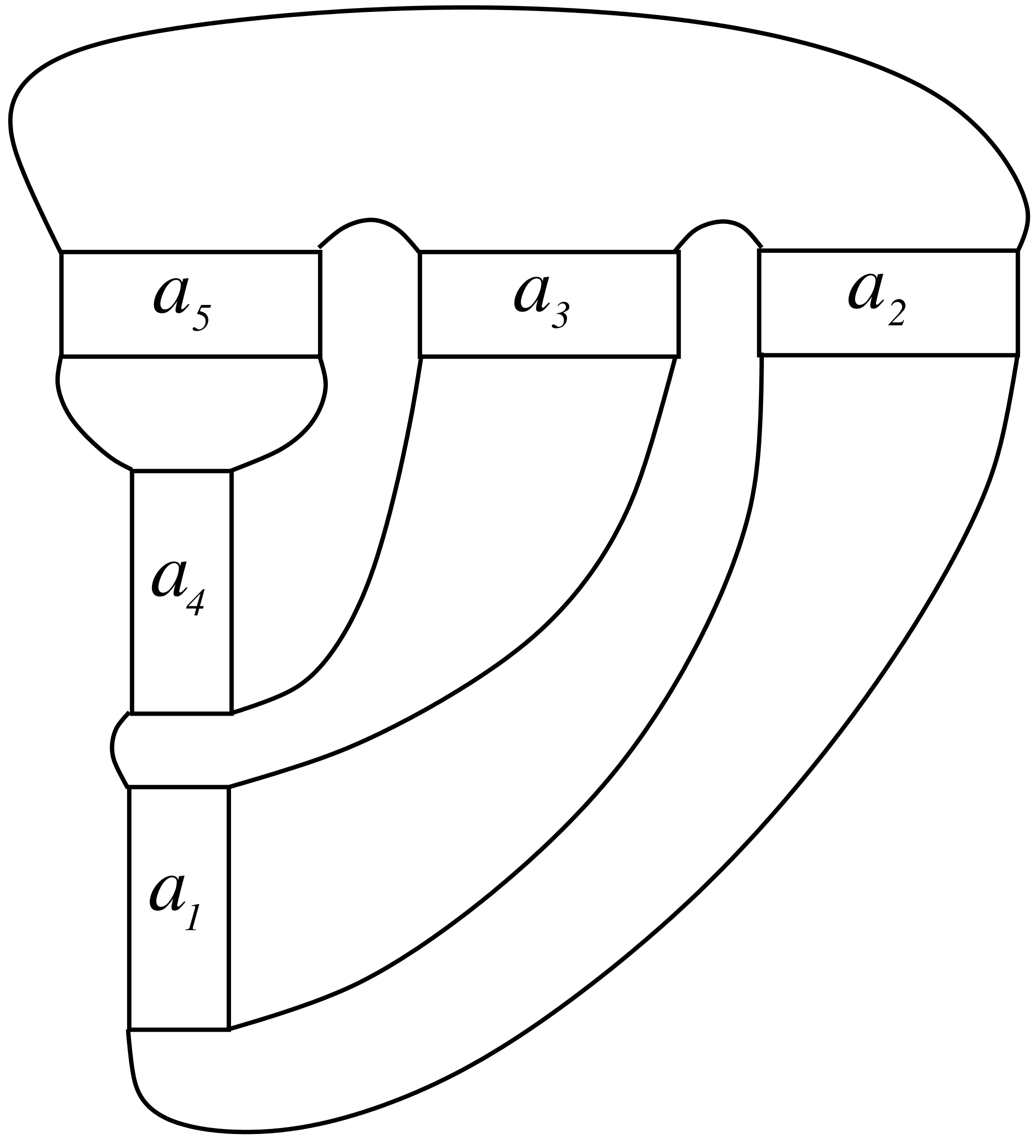
Dibujamos ($k = 3$)



Dibujamos ($k = 4$)

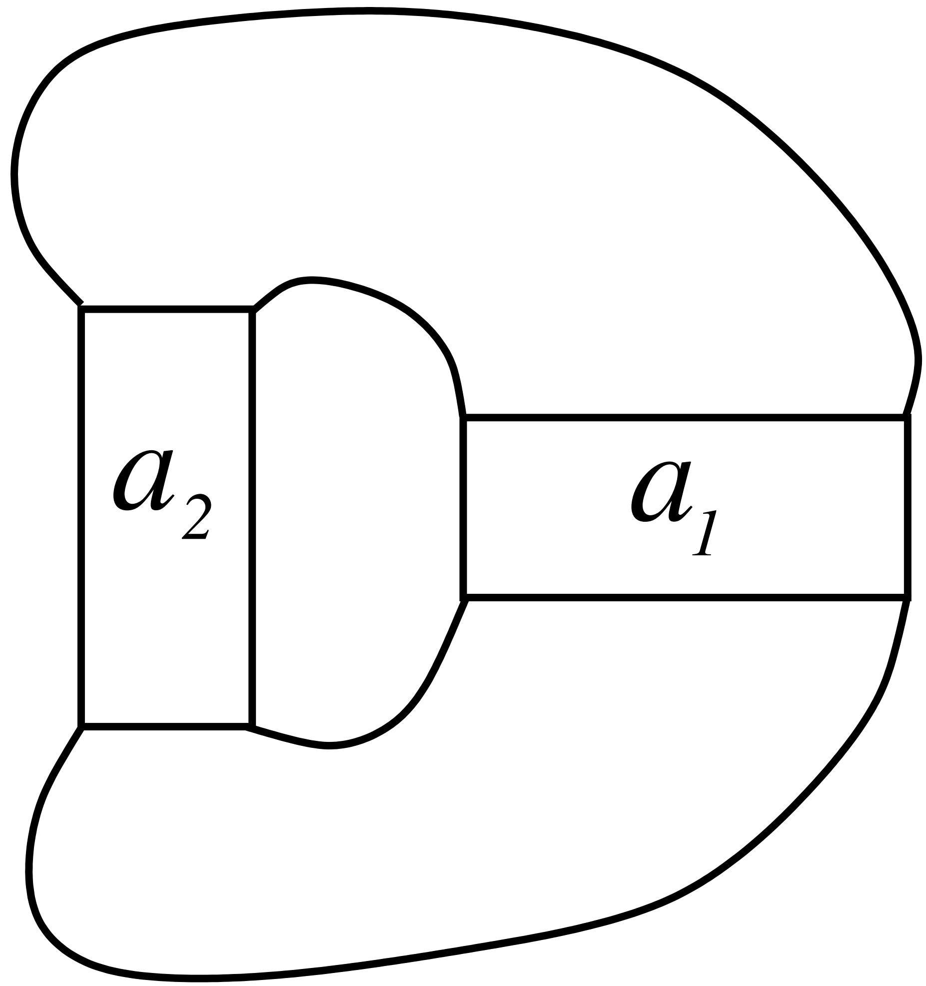


Dibujamos ($k = 5$)



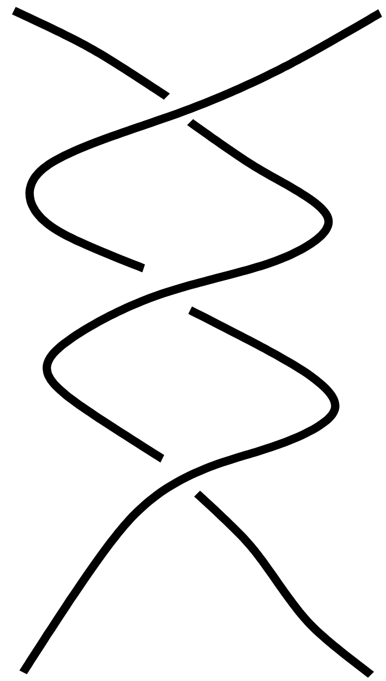
$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = [2, 3]$$

$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = [2, 3]$

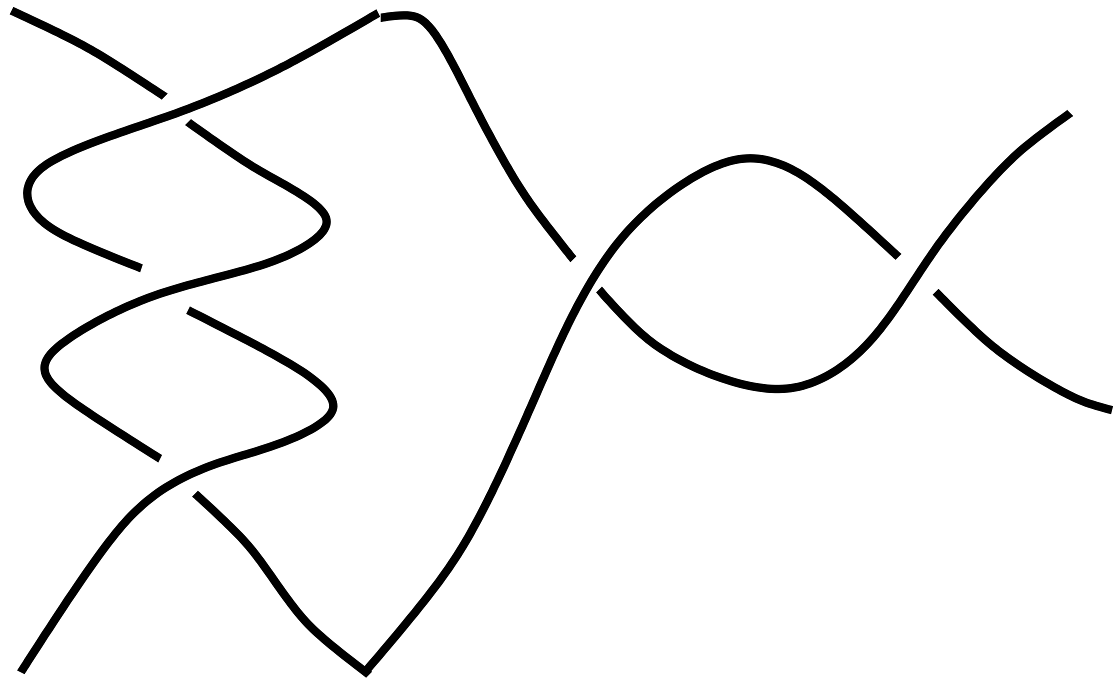


$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = [2, 3]$$

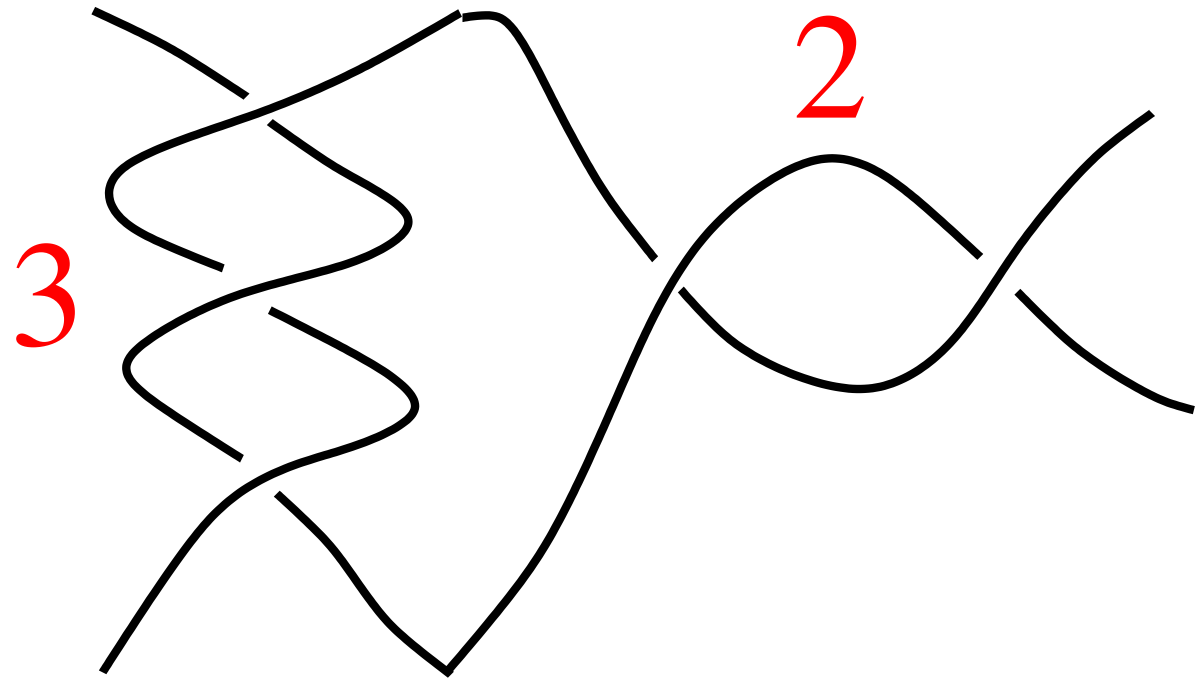
$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = [2, 3]$$



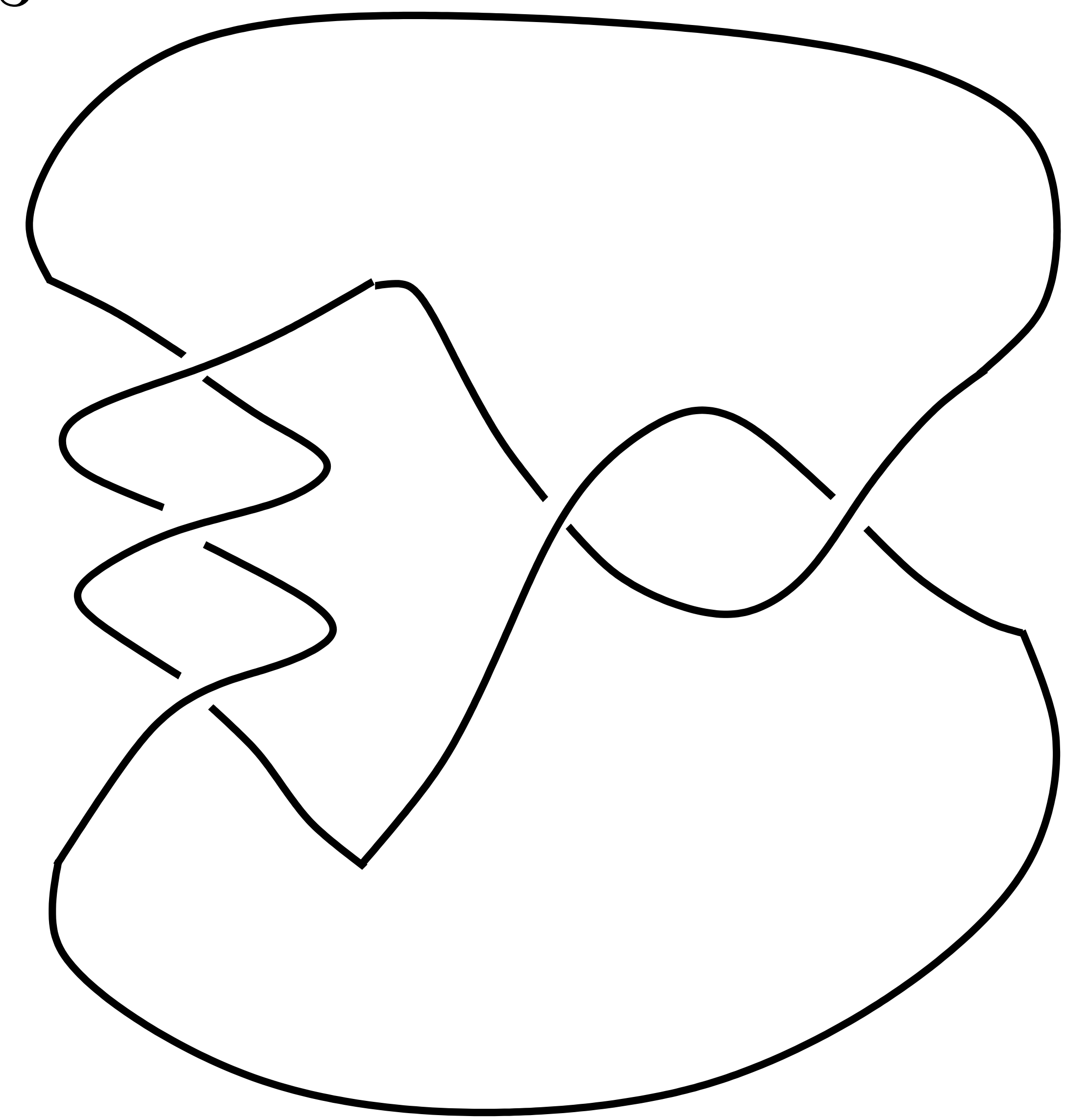
$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = [2, 3]$$



$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = [2, 3]$$

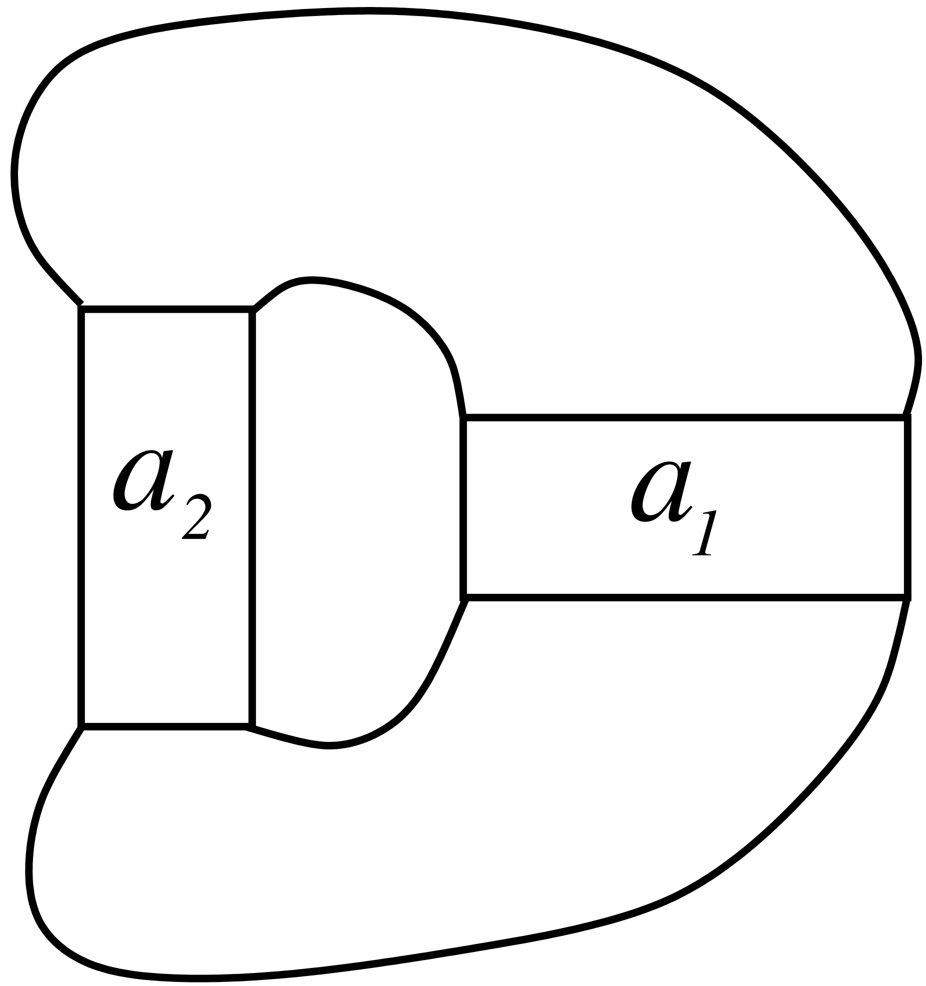


$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = [2, 3]$$



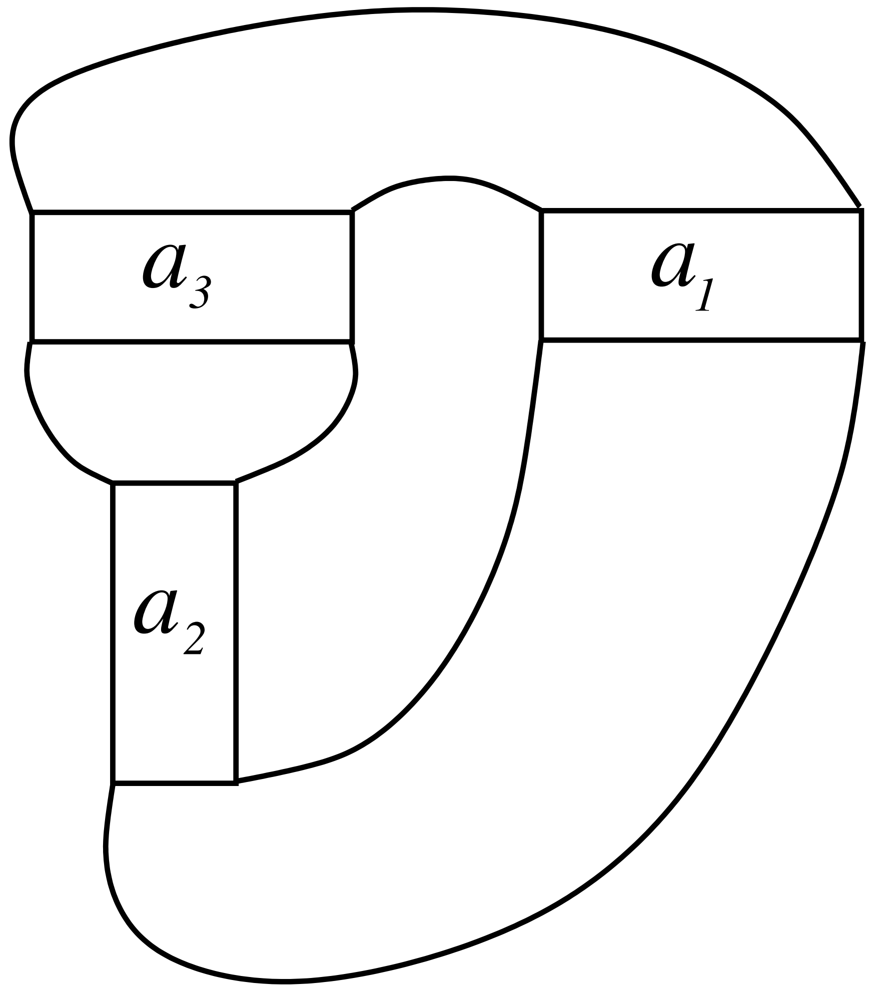
$\ell(7, 3)$

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = [2, 3]$$



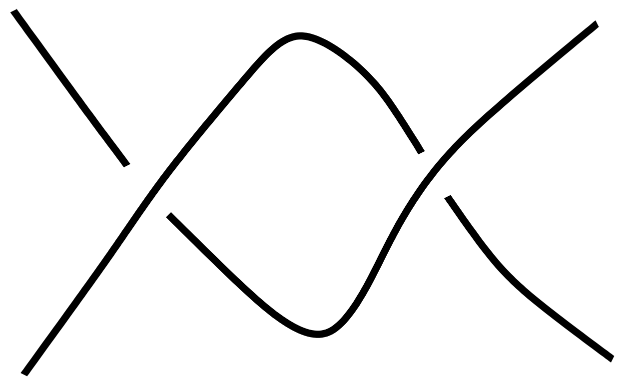
$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = [1, 2, 2]$$

$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = [1, 2, 2]$$

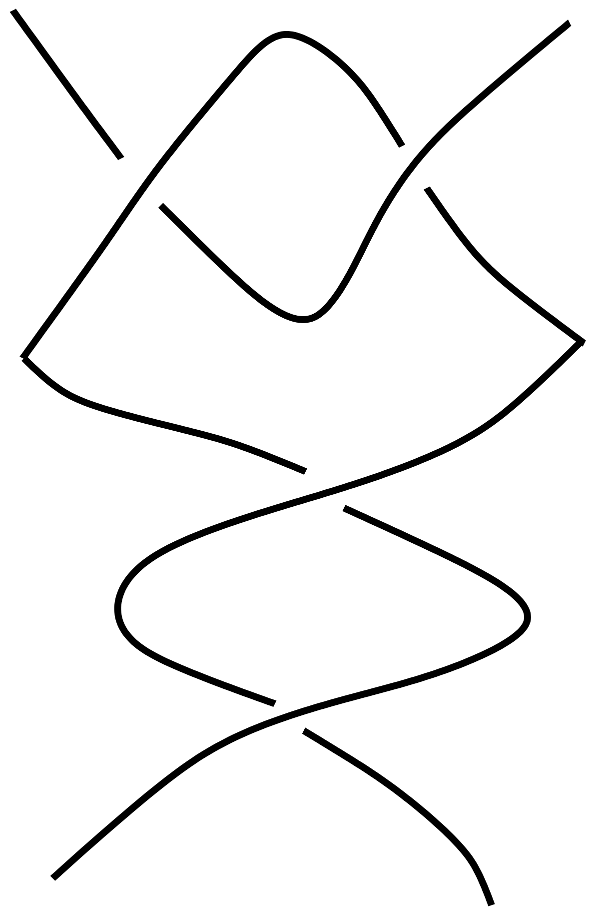


$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = [1, 2, 2]$$

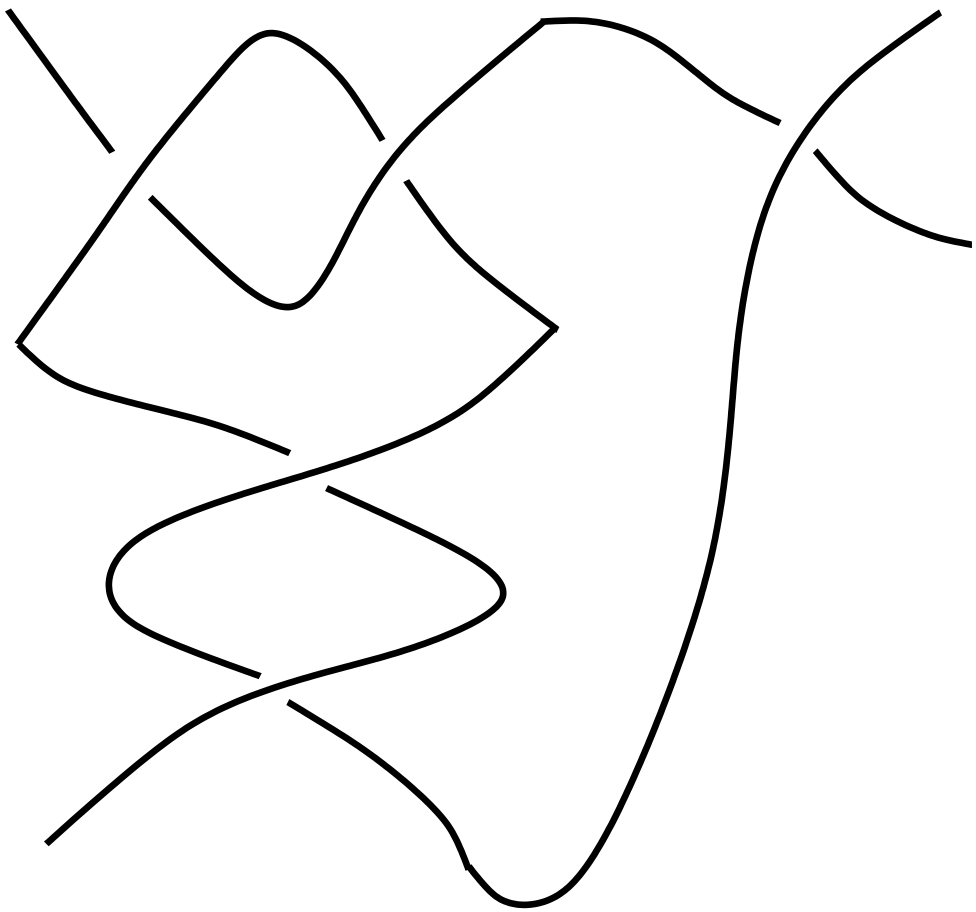
$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = [1, 2, 2]$$



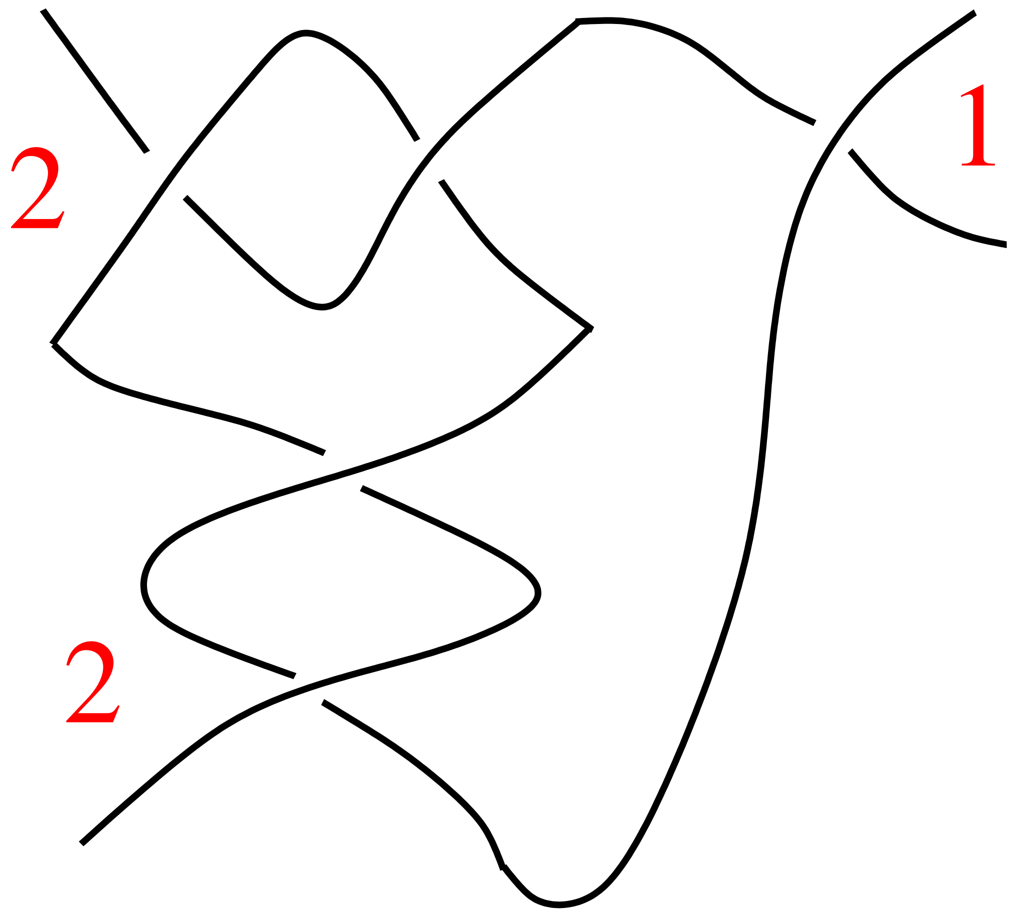
$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = [1, 2, 2]$$



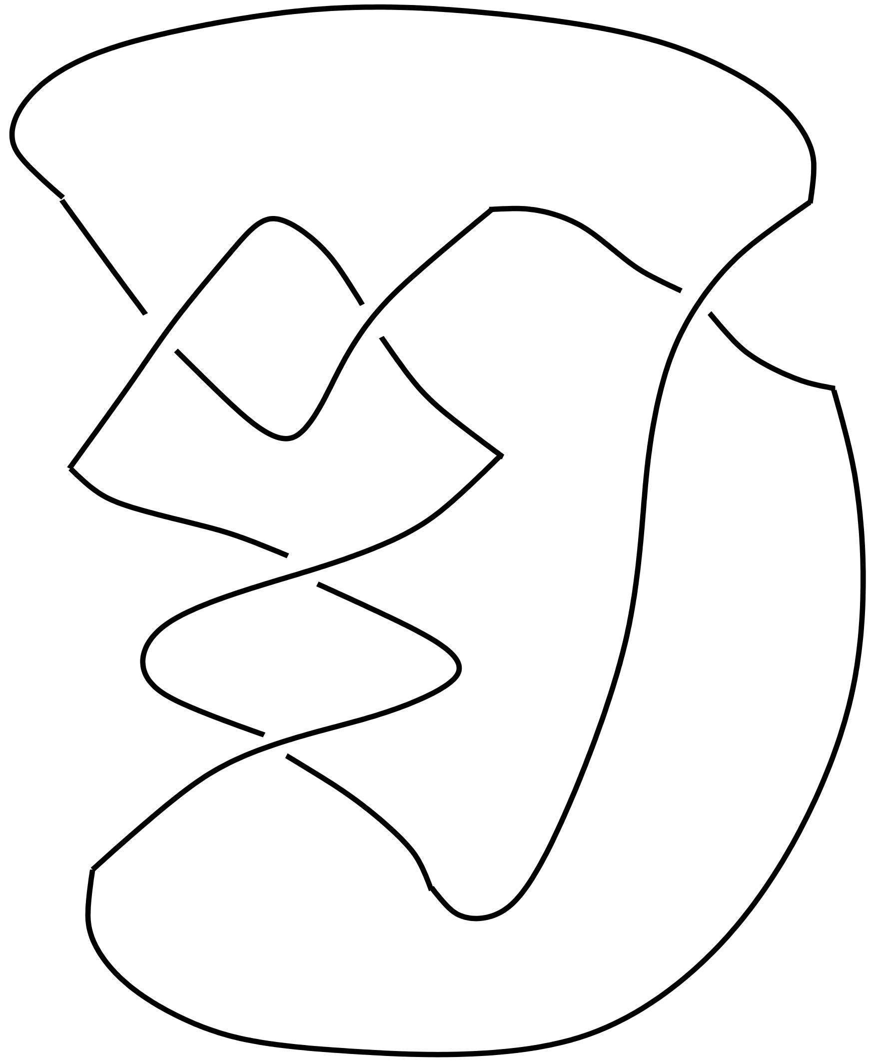
$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = [1, 2, 2]$$



$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = [1, 2, 2]$$

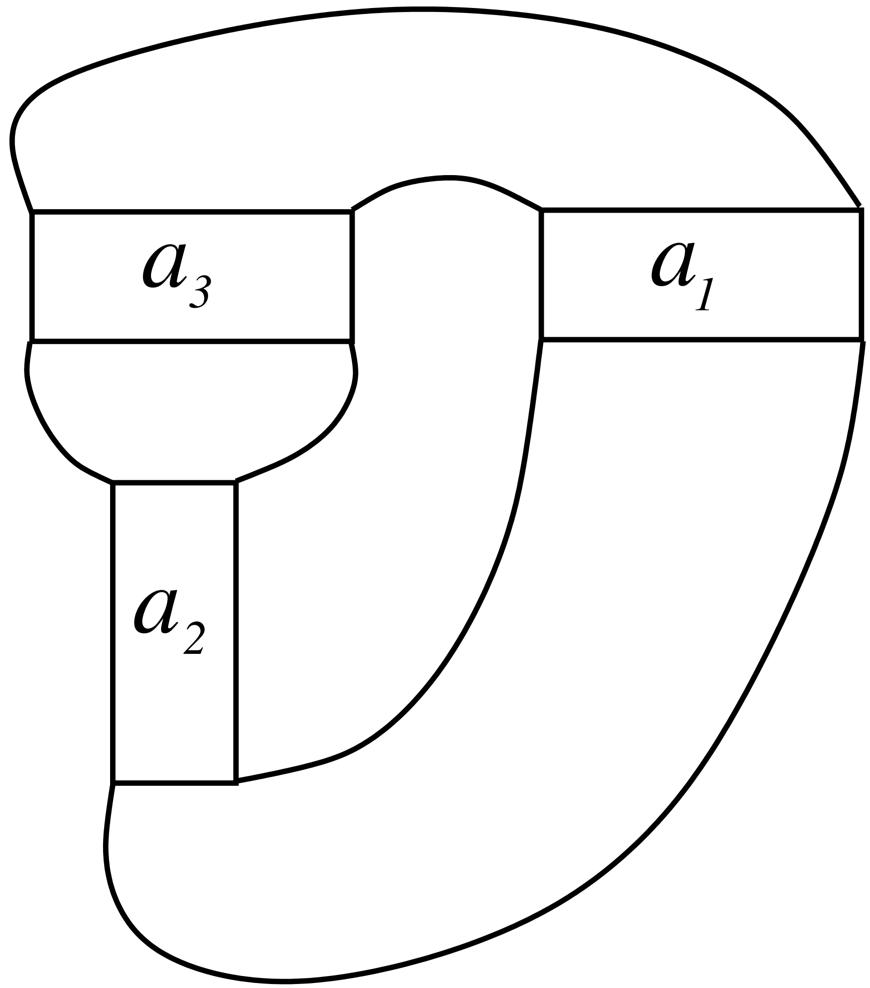


$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = [1, 2, 2]$$



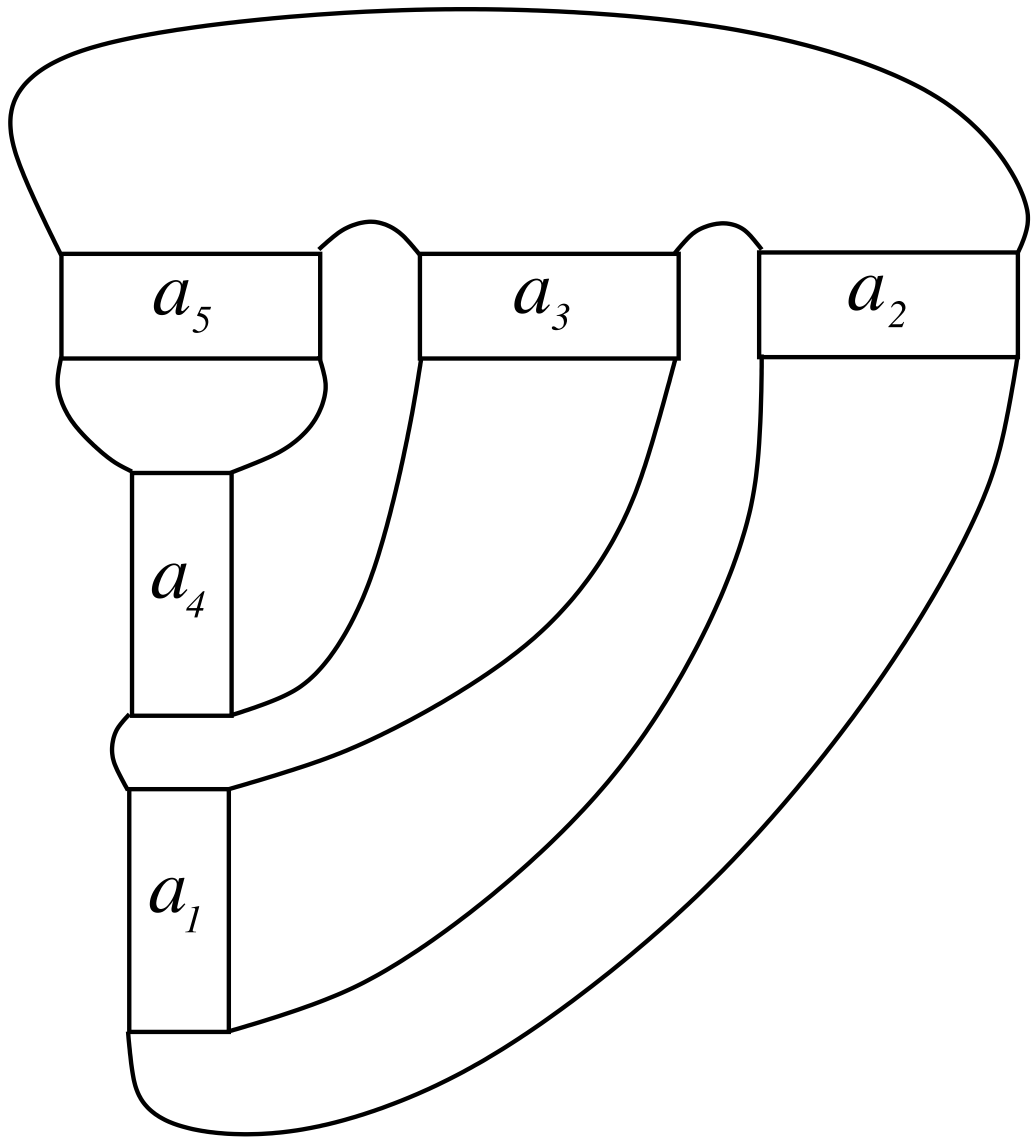
$\ell(7, 5)$

$(k = 3)$

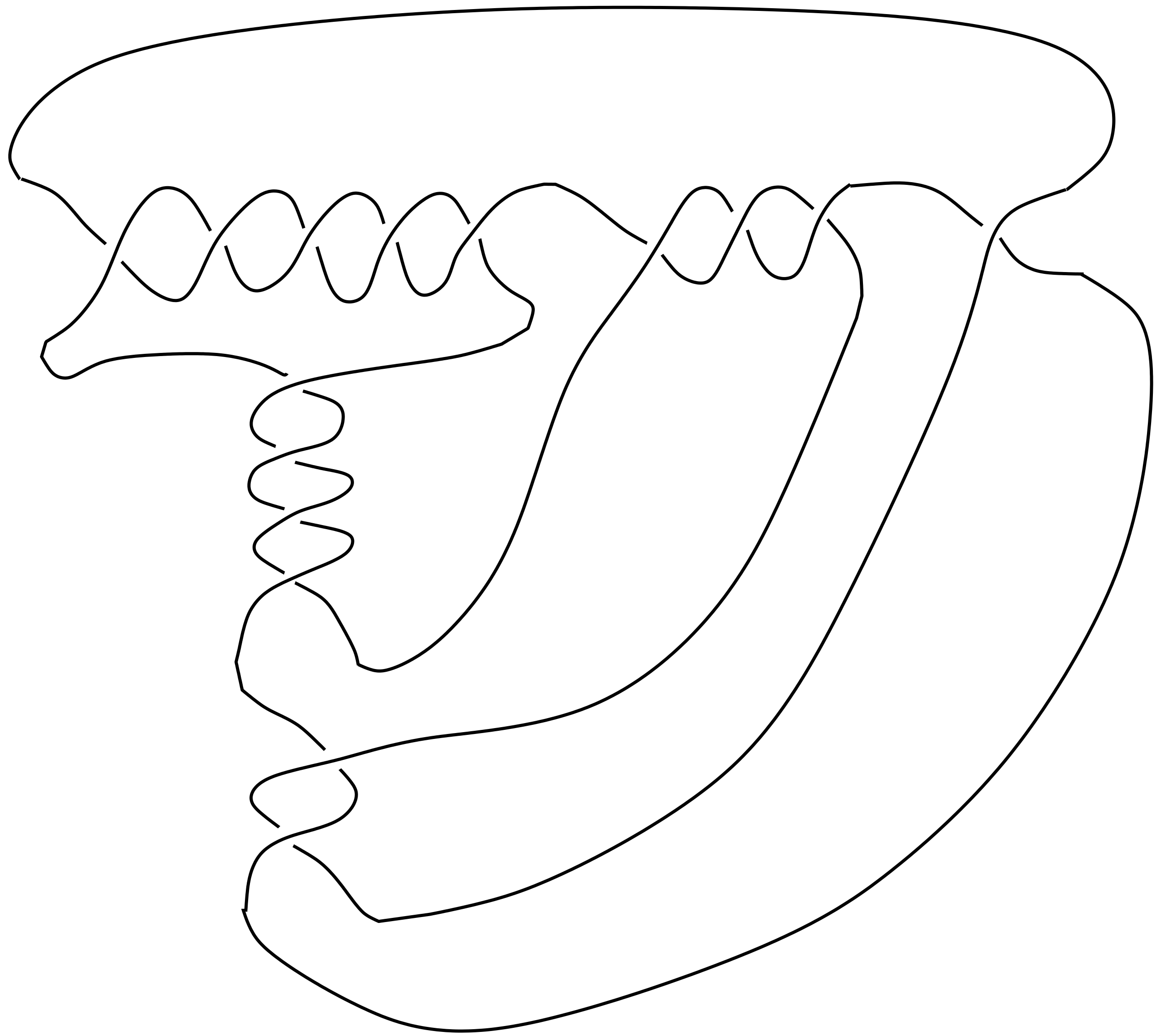


$$\frac{225}{157} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{5}}}} = [1, 2, 3, 4, 5]$$

$$\frac{225}{157} = [1, 2, 3, 4, 5]$$



$$\frac{225}{157} = [1, 2, 3, 4, 5]$$



$\ell(225, 157)$

Nótese que esto está mal definido.

Sabemos que

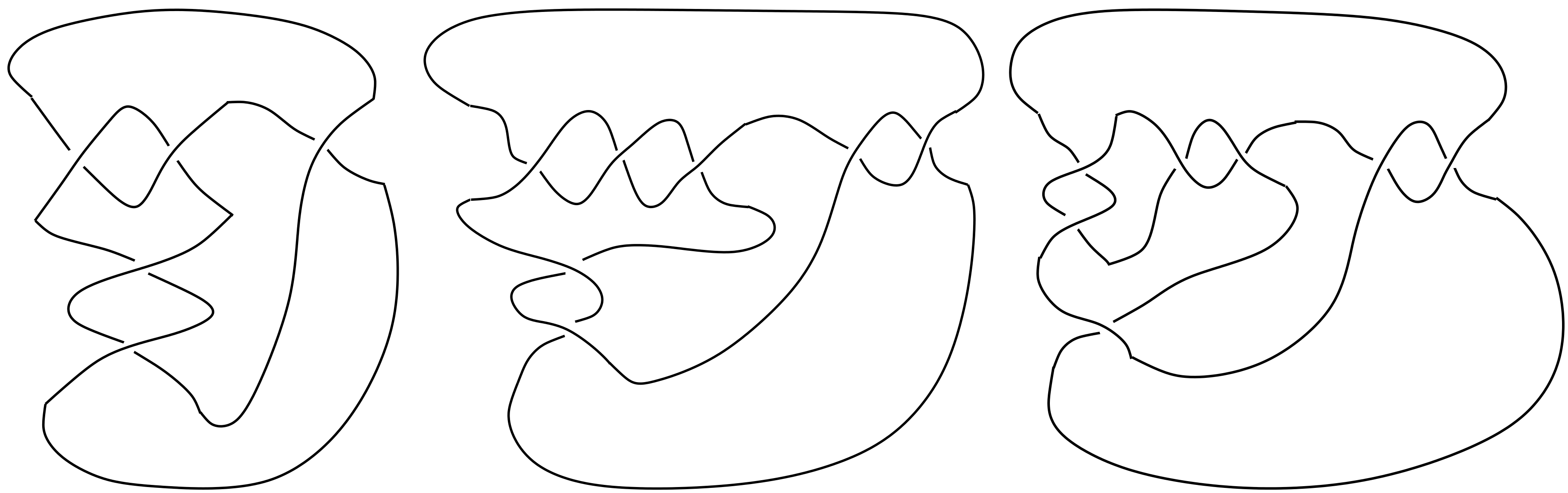
$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}},$$

pero...

$$
\begin{aligned}
\frac{7}{5} &= 2 - \frac{3}{5} \\
&= 2 + \frac{1}{\frac{-5}{3}} \\
&= 2 + \frac{1}{-1 - \frac{2}{3}} \\
&= 2 + \frac{1}{-1 + \frac{1}{\frac{-3}{2}}} \\
&= 2 + \frac{1}{-1 + \frac{1}{-2 + \frac{1}{2}}} \\
&= [2, -1, -2, 2]
\end{aligned}
$$

O bien

$$
\begin{aligned}
\frac{7}{5} &= 2 - \frac{3}{5} \\
&= 2 + \frac{1}{\frac{-5}{3}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{-2 + \cfrac{1}{3}} \\
&= [2, -2, 3]
\end{aligned}
$$



$$\frac{7}{5} = [1, 2, 2] = [2, -2, 3] = [2, -1, -2, 2]$$

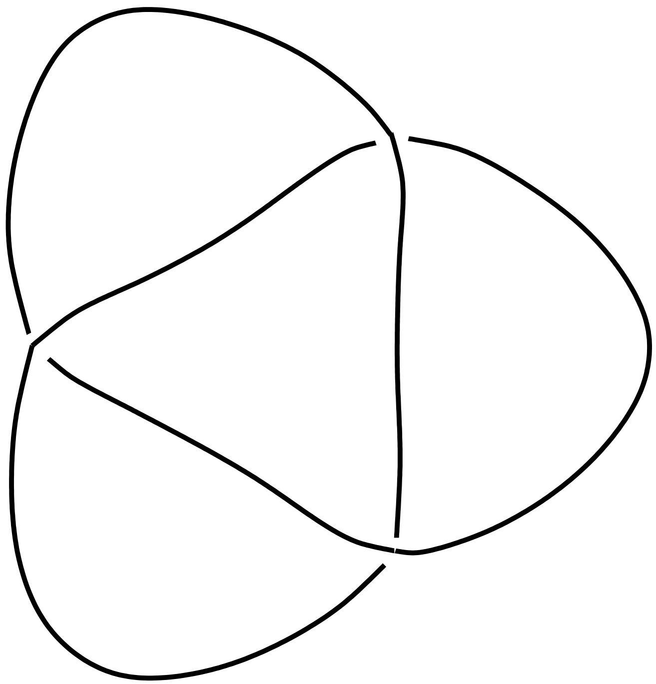
Un resumen

Vimos lo que es un nudo, la noción de equivalencia de nudos, lo que es un diagrama de un nudo y sabemos cómo probar que dos diagramas representan al mismo nudo: Sólo hay que encontrar una sucesión de movidas de Reidemeister que lleven un diagrama al otro.

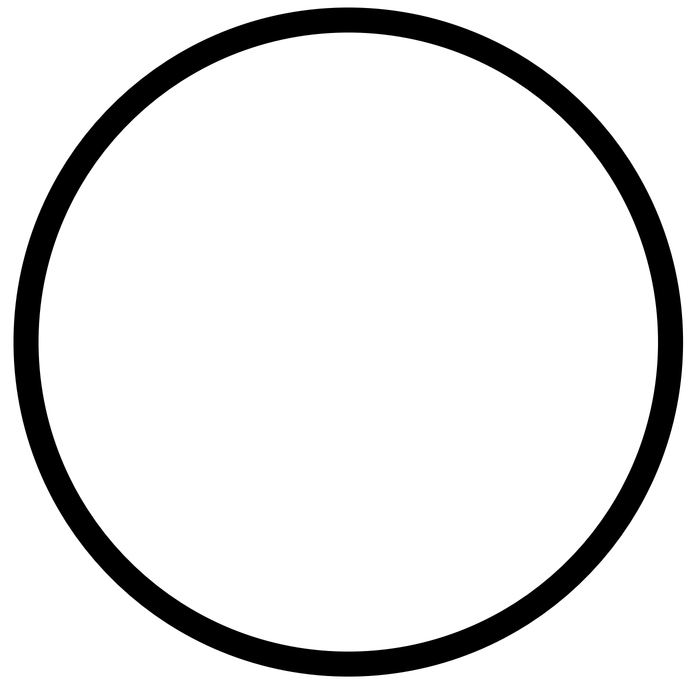
Sabemos cómo probar que dos nudos son el mismo.

¿Pero cómo le hacemos para probar que dos nudos no son el mismo?

¿Cómo sé que



$\not\sim$



?

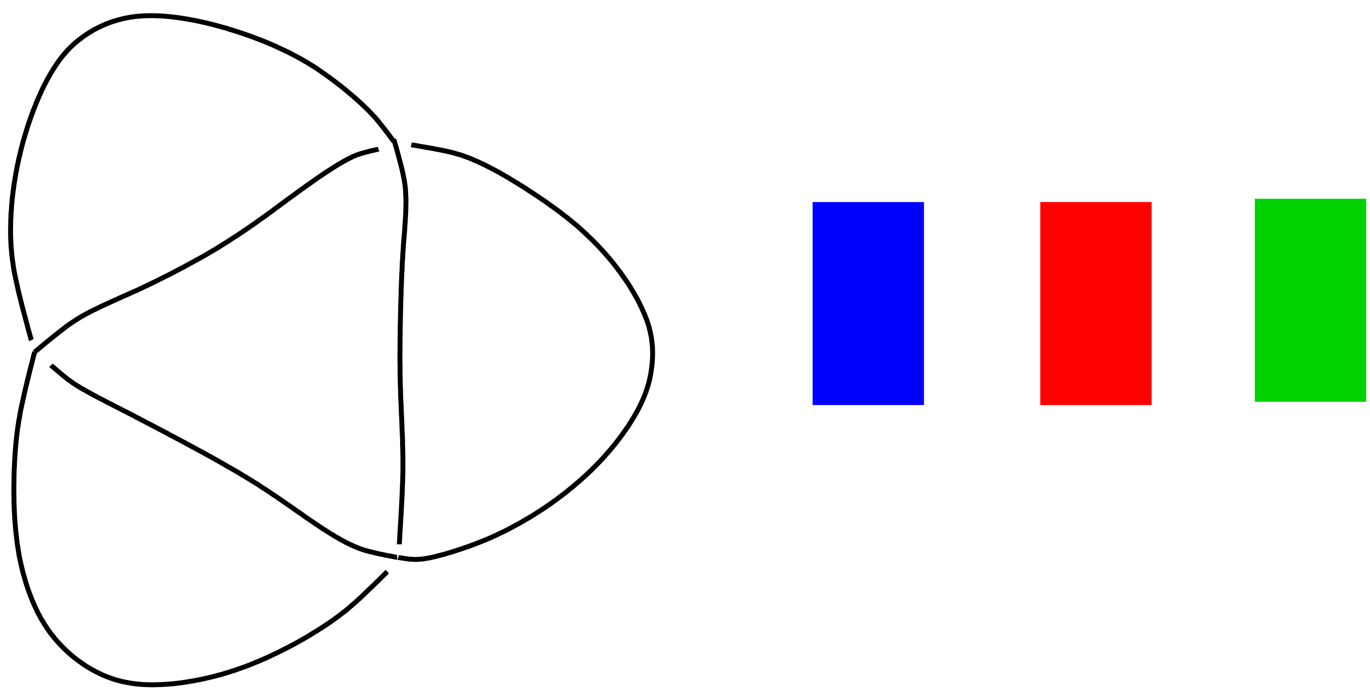
Tendría qué probar que, por más que deforme al trebol (sin romperlo), no lo voy a poder desanudar.

O sea, tendría que probar que ninguna sucesión de movidas de Reidemeister me puede llevar del diagrama del trébol al “no nudo”.

¿Qué se hace en estos casos?

Vamos a ver un truco de matemáticos

Tomemos el diagrama de un nudo k y pensemos en tres colores.



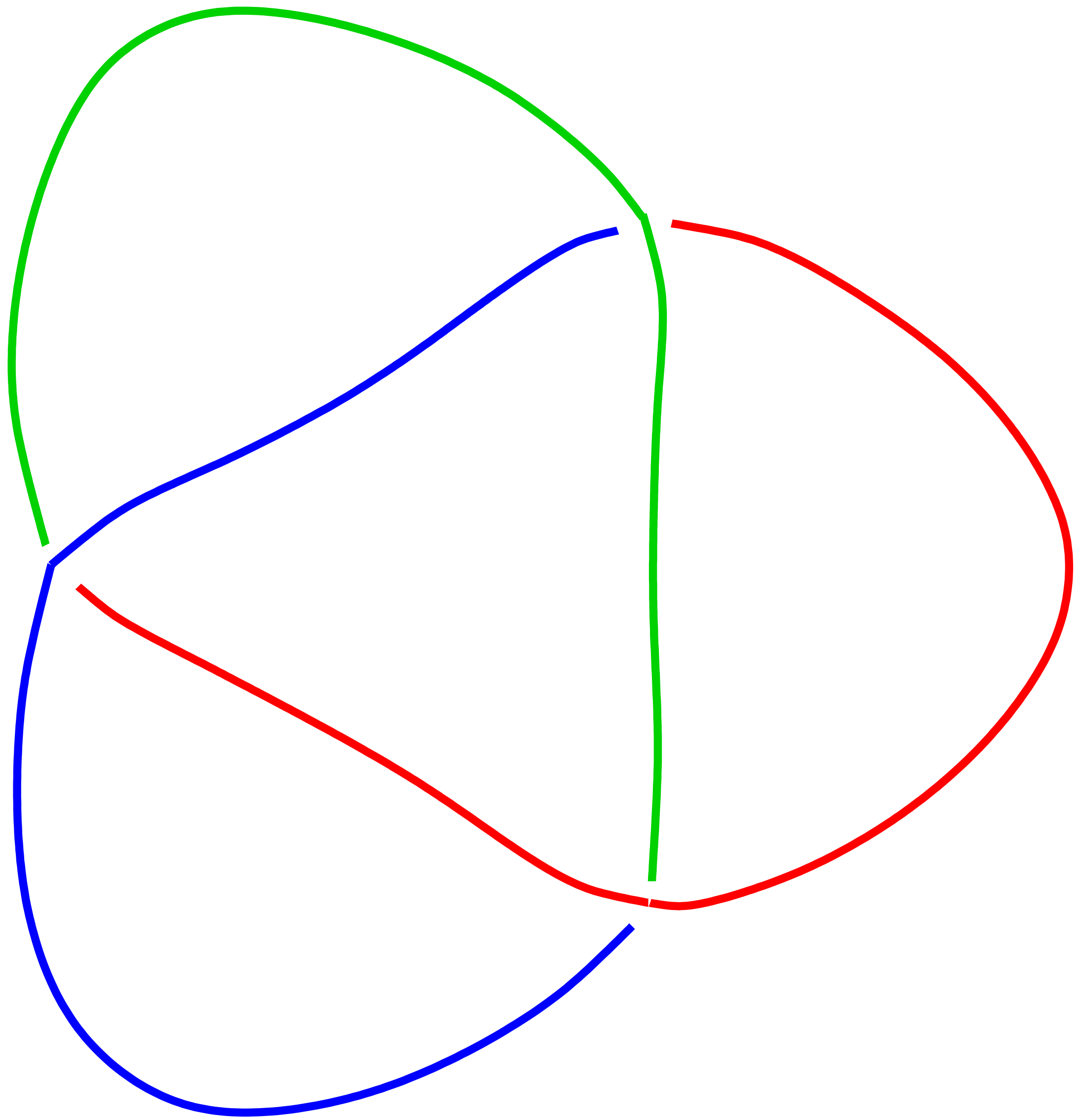
Decimos que este diagrama de k se puede tricolorear, si podemos pintar cada arco del diagrama con un color de tal manera que

1) En cada punto de cruce hay exactamente un color o hay exactamente tres colores distintos.

2) Se usan los tres colores (todos).

Hmmm... ¿el trébol se puede tricolorear?

Colores



Tenemos el siguiente resultado:

Teorema. Tomemos un nudo k y un diagrama D de k. Si D se puede tricolorear, entonces todos los diagramas de k se pueden tricolorear.

Colores

¿...?

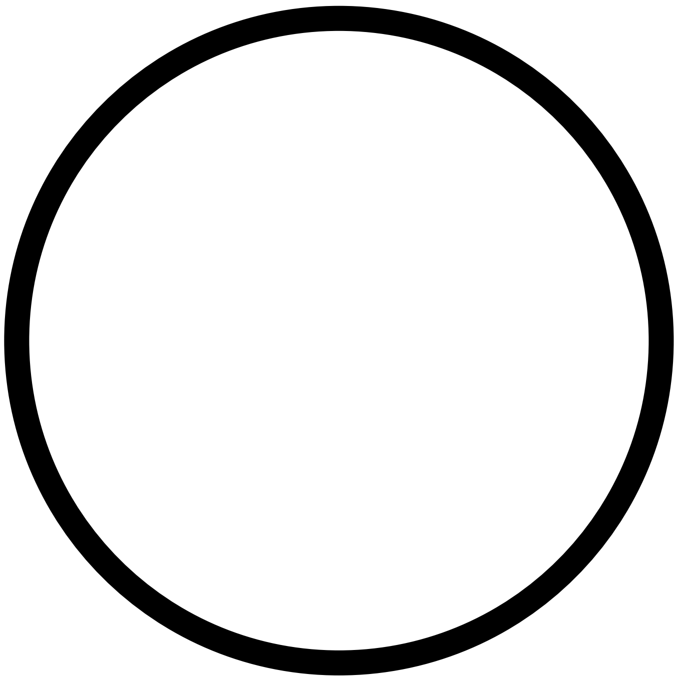
Primero, ahora podemos hablar de “nudos tricoloreables”, no sólo de “diagramas tricoloreables”.

Definición. Un nudo k se llama tricoloreable, si algún diagrama de k se puede tricolorear.

Segundo, resulta que ahora sabemos lo siguiente:

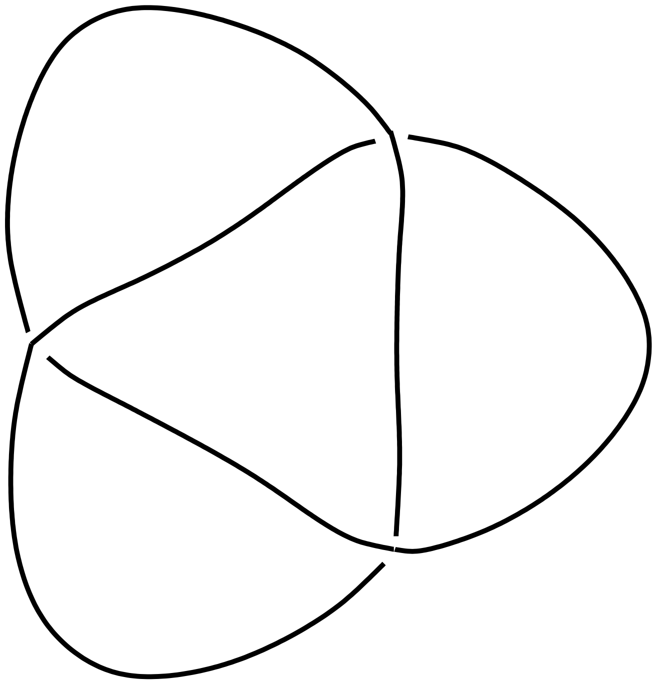
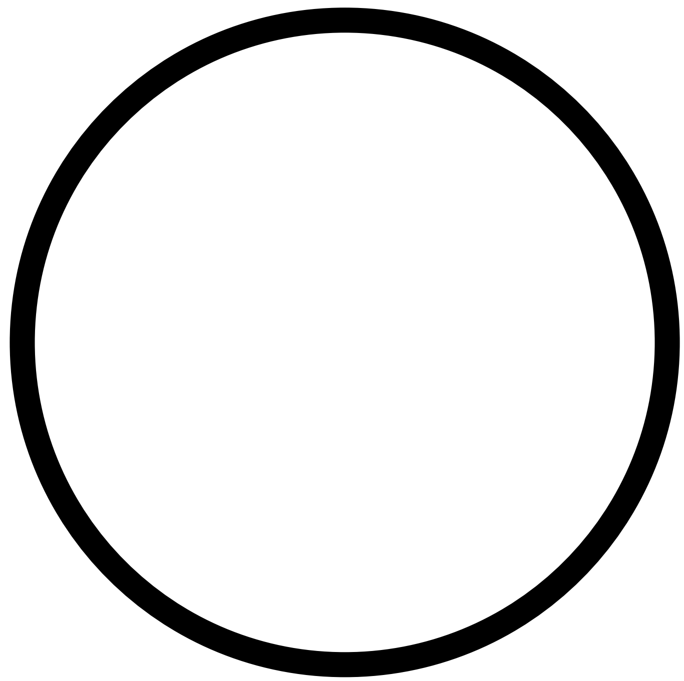
Si dos nudos k y ℓ son equivalentes y, digamos, k es tricoloreable, entonces ℓ también es tricoloreable.

Si nos fijamos que

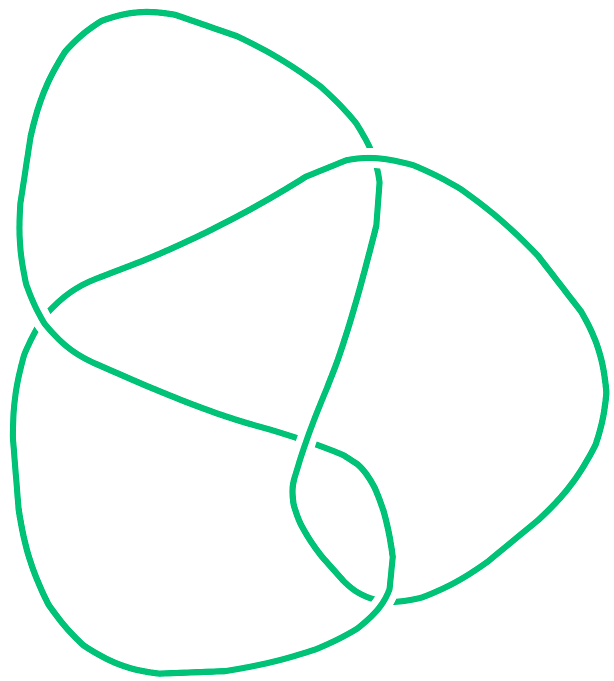


no se puede tricolorear

concluimos que

 $\nsim$ 

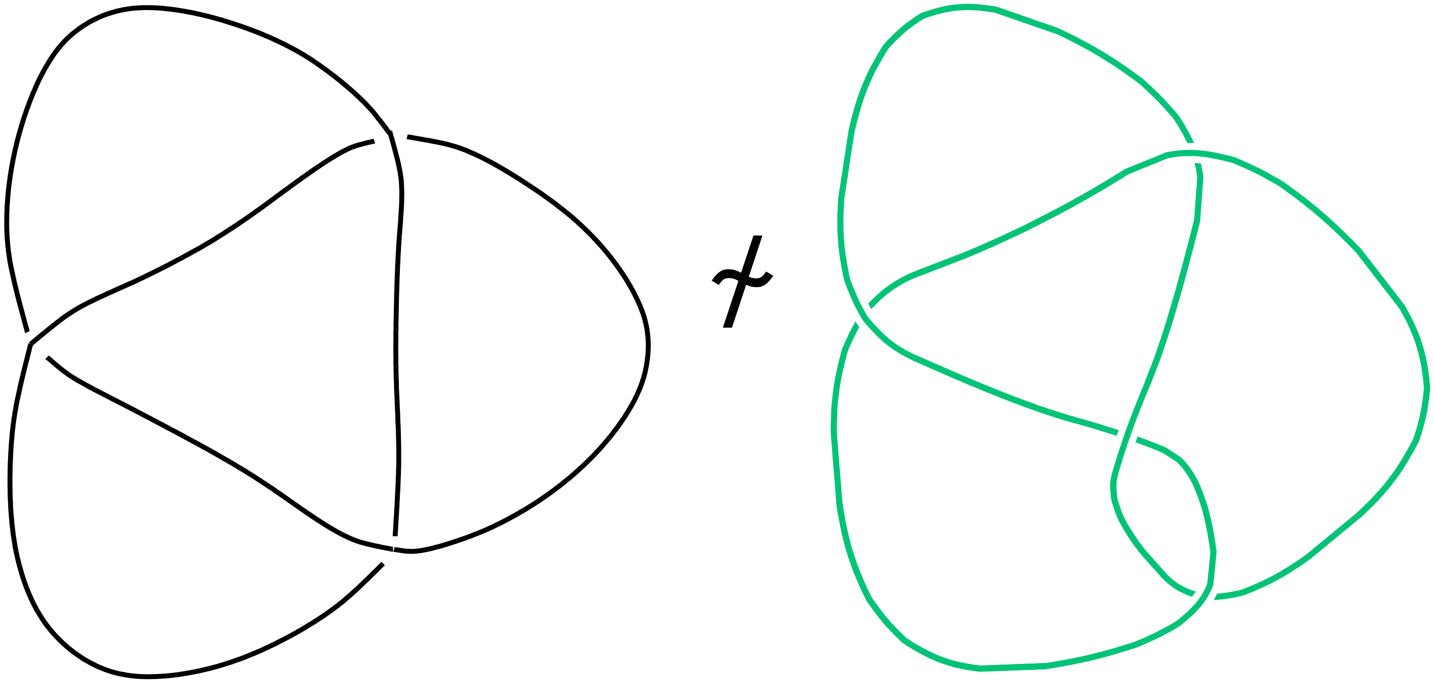
Pero, por ejemplo, el ocho,

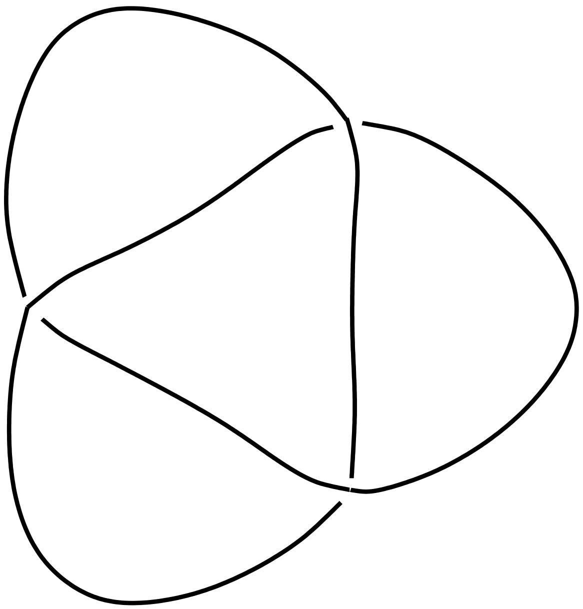
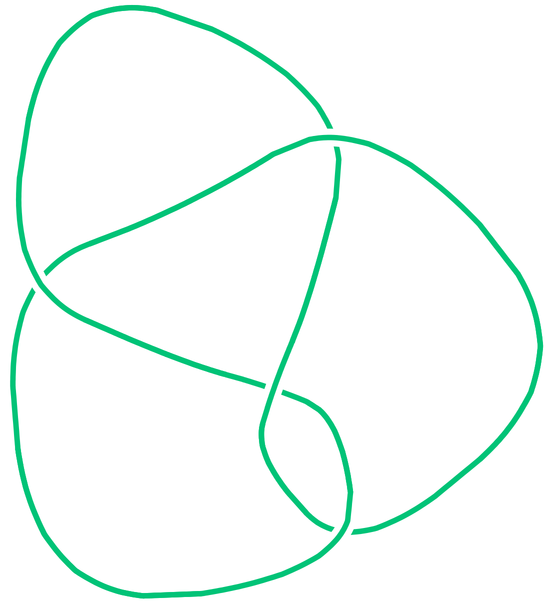
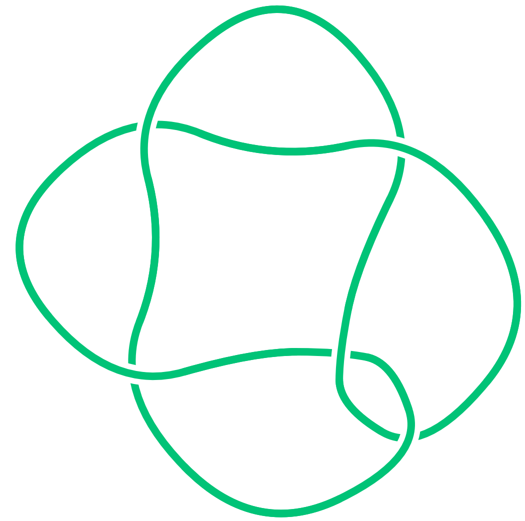
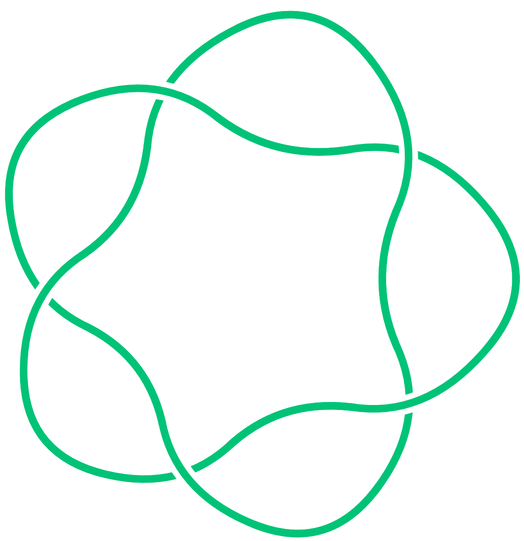
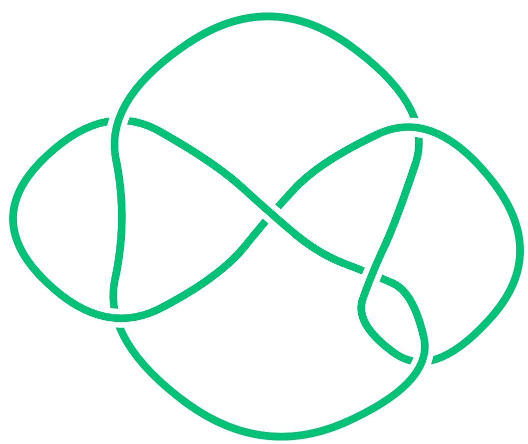
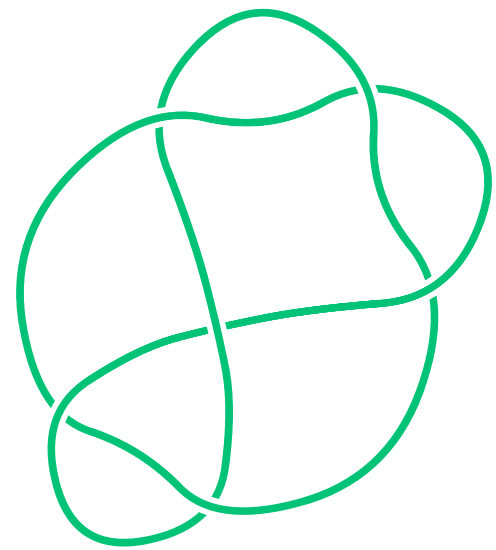


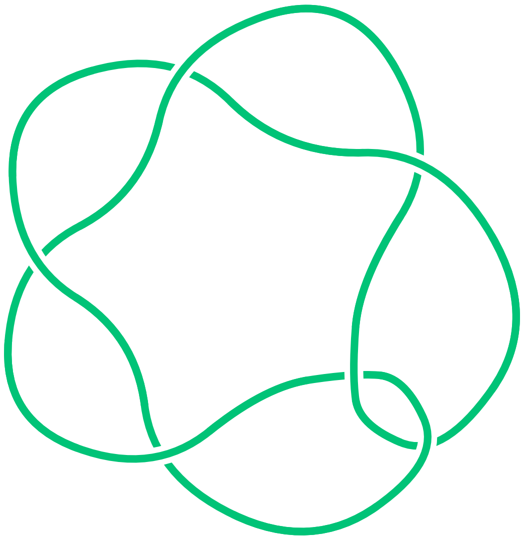
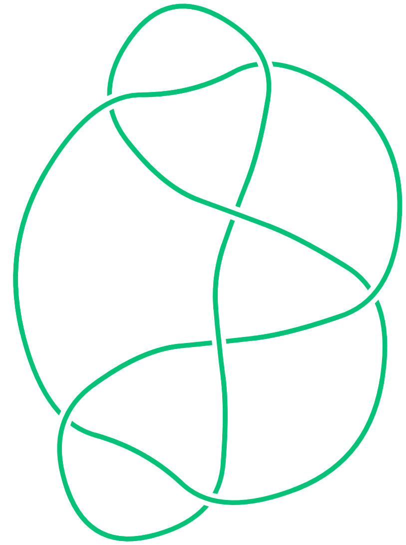
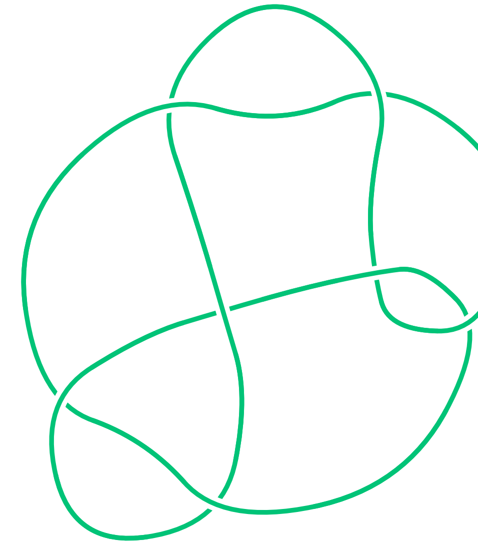
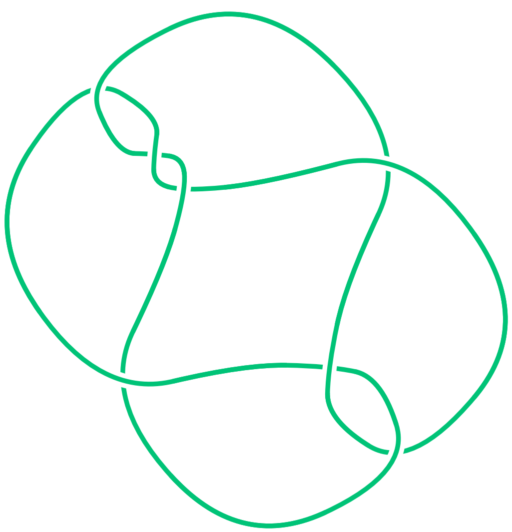
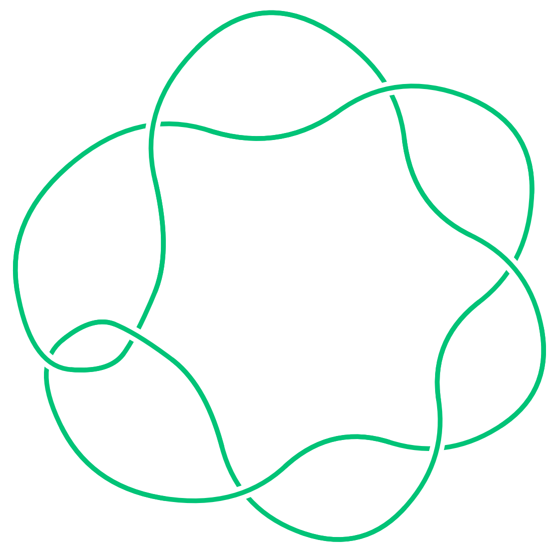
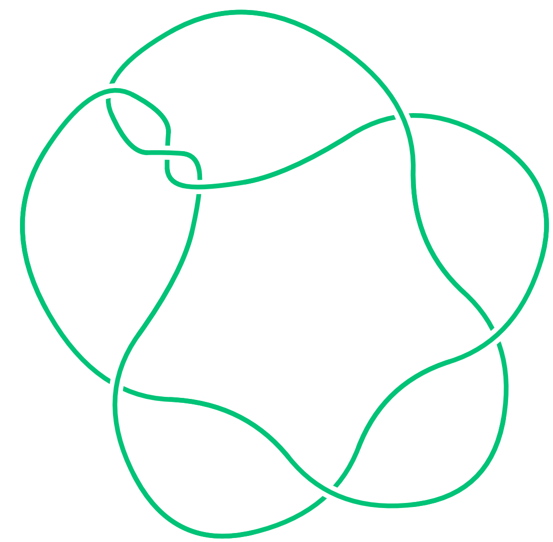
tampoco se puede tricolorear.

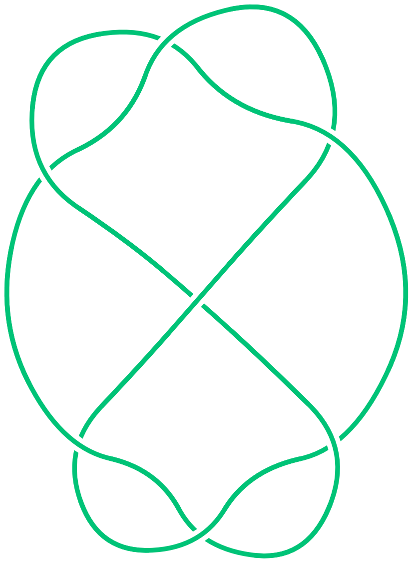
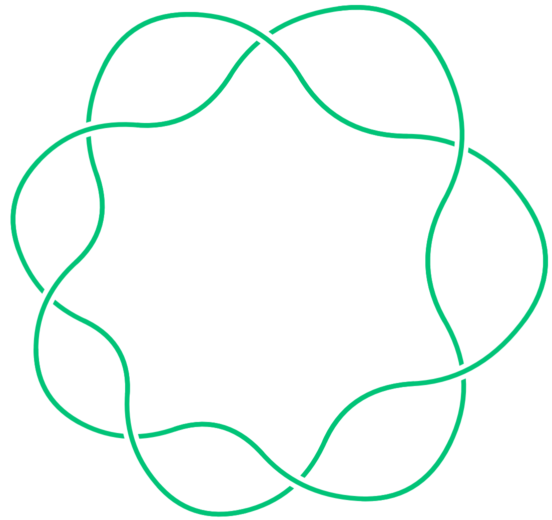
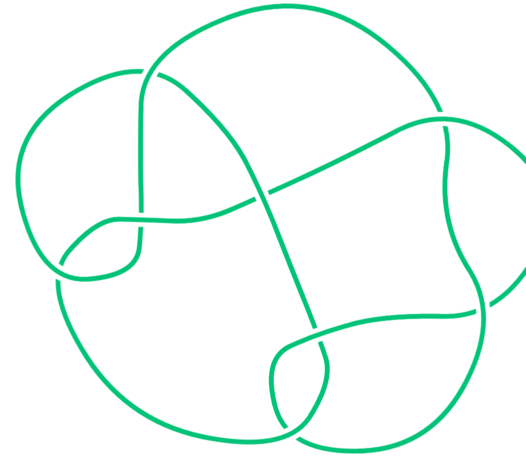
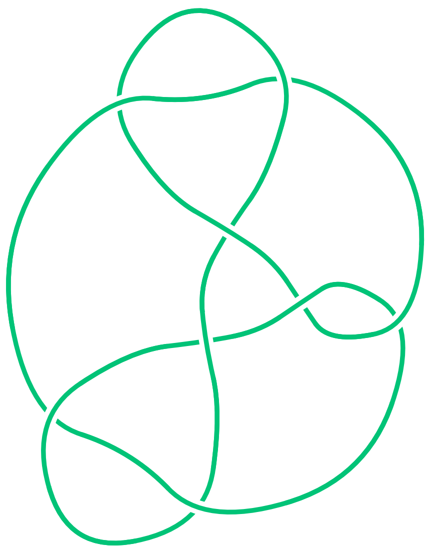
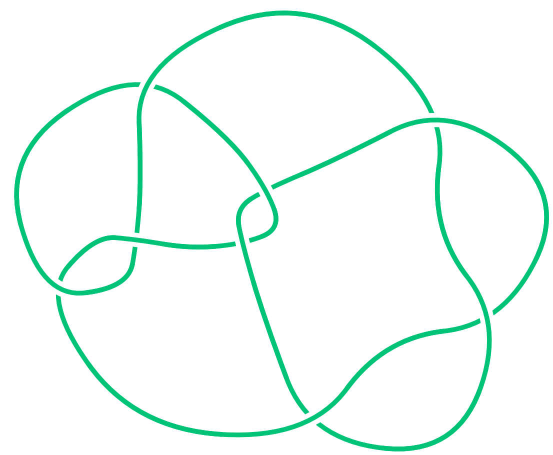
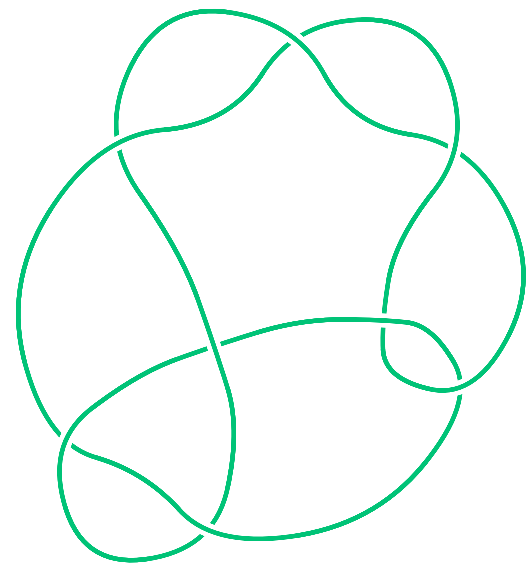
¿...?

Así que podemos concluir que



Sabemos, entonces, que hay dos tipos de nudos

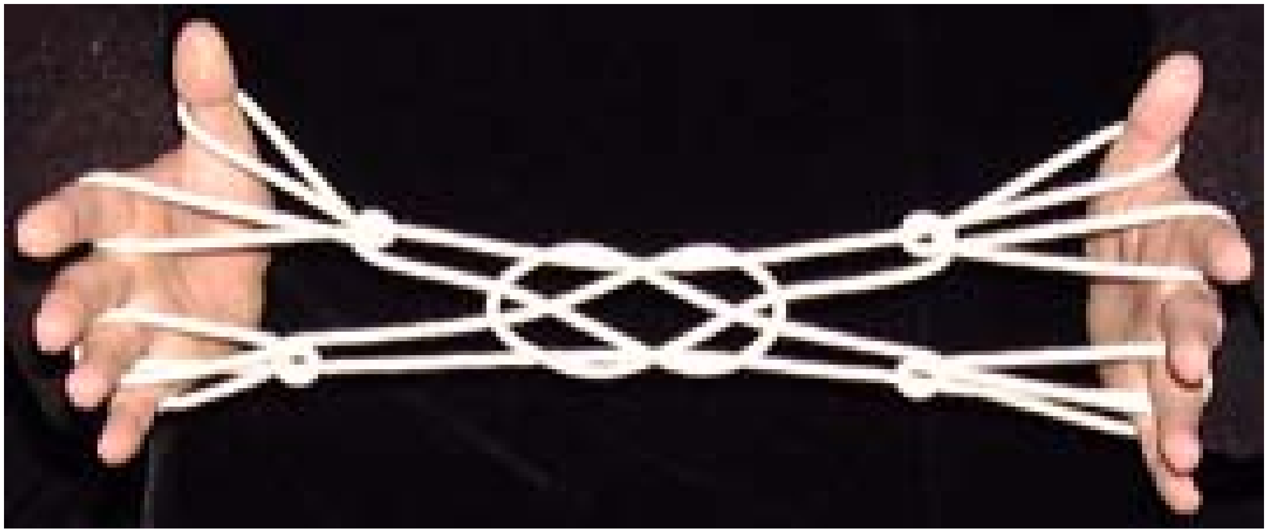
(los tricoloreables y los no tricoloreables)

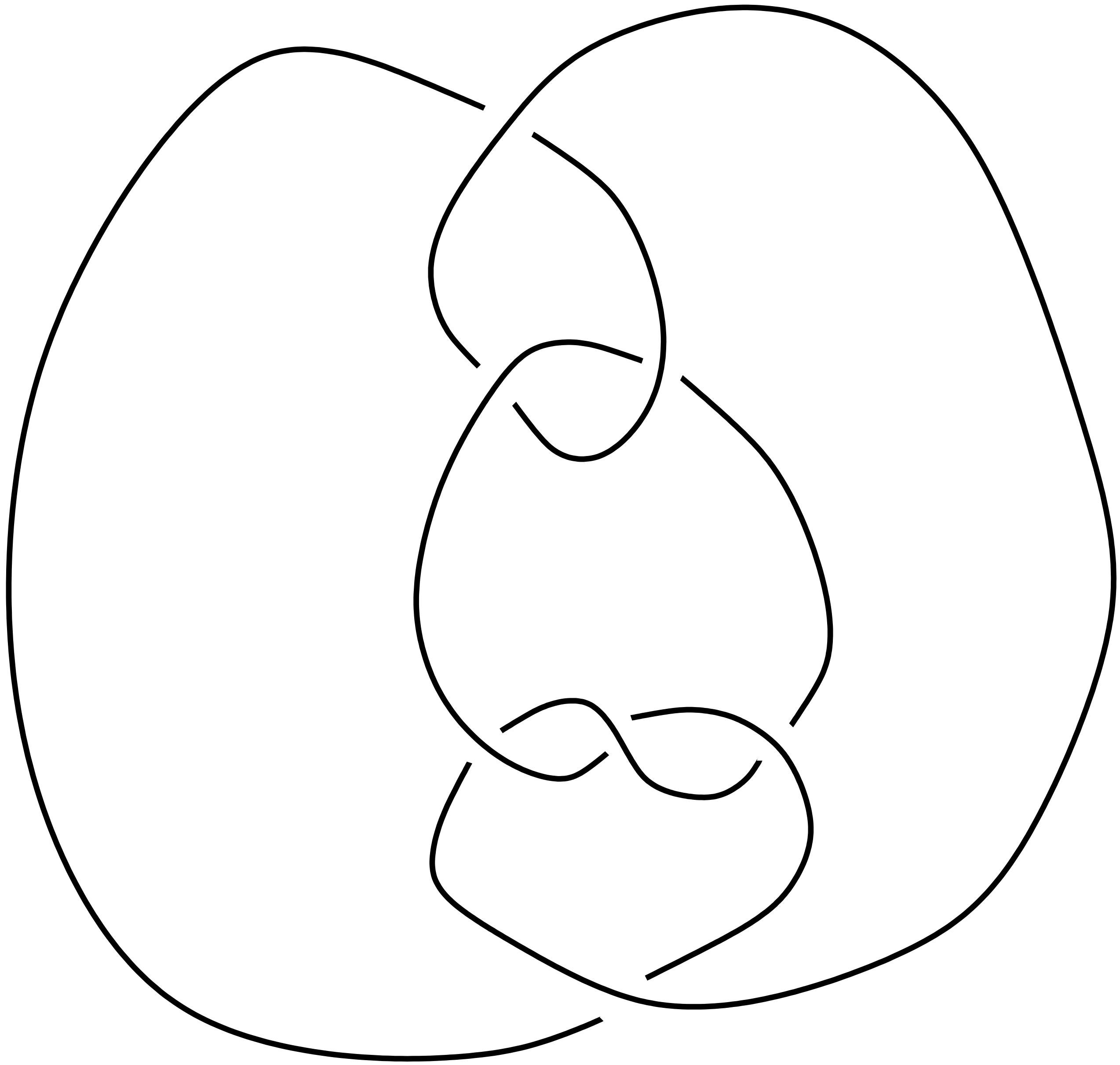
Pero no sabemos (todavía) si el nudo ocho se puede desanudar.

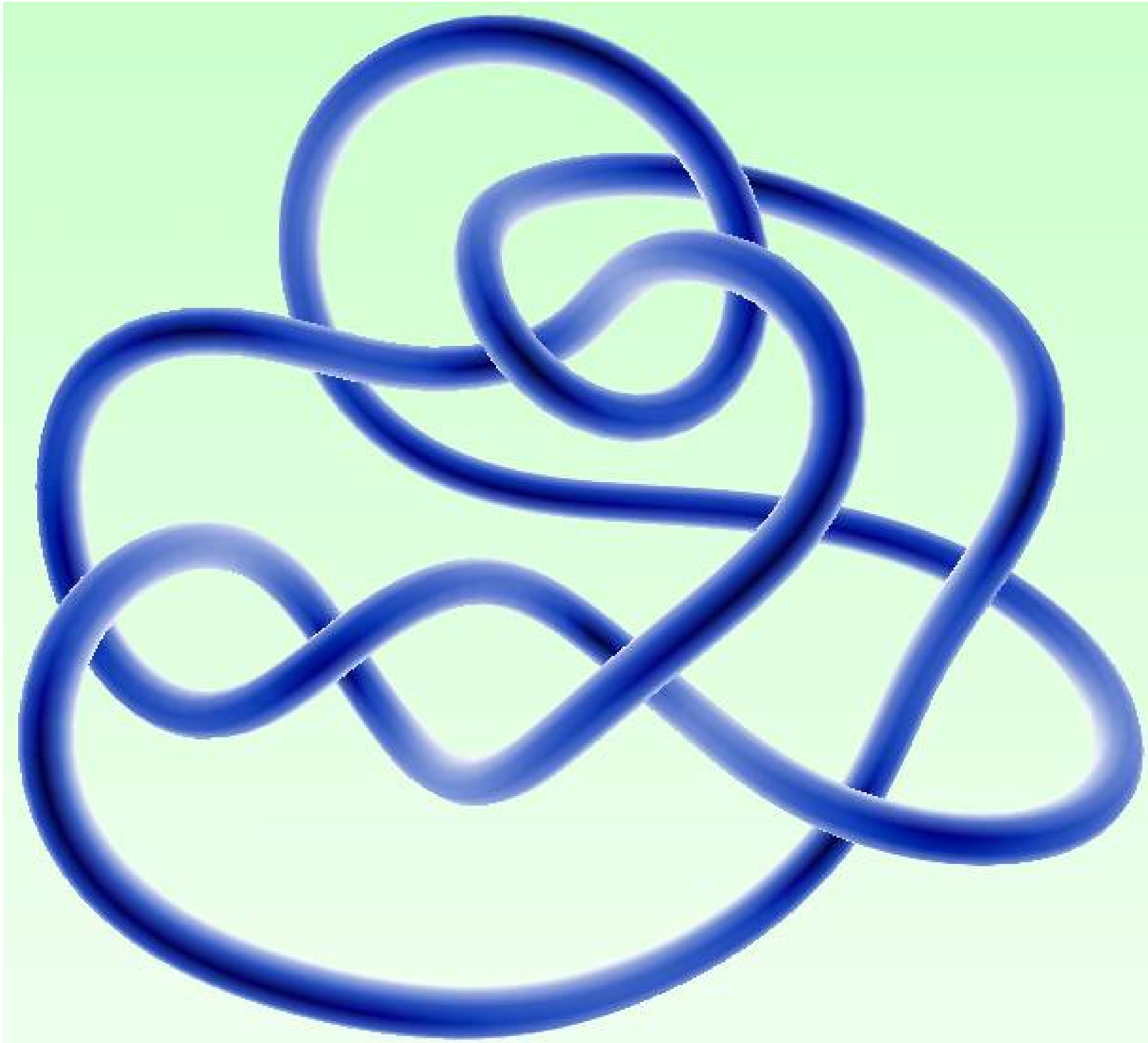
Claro que es claro que al nudo ocho no lo podemos desanudar, ¿qué no?

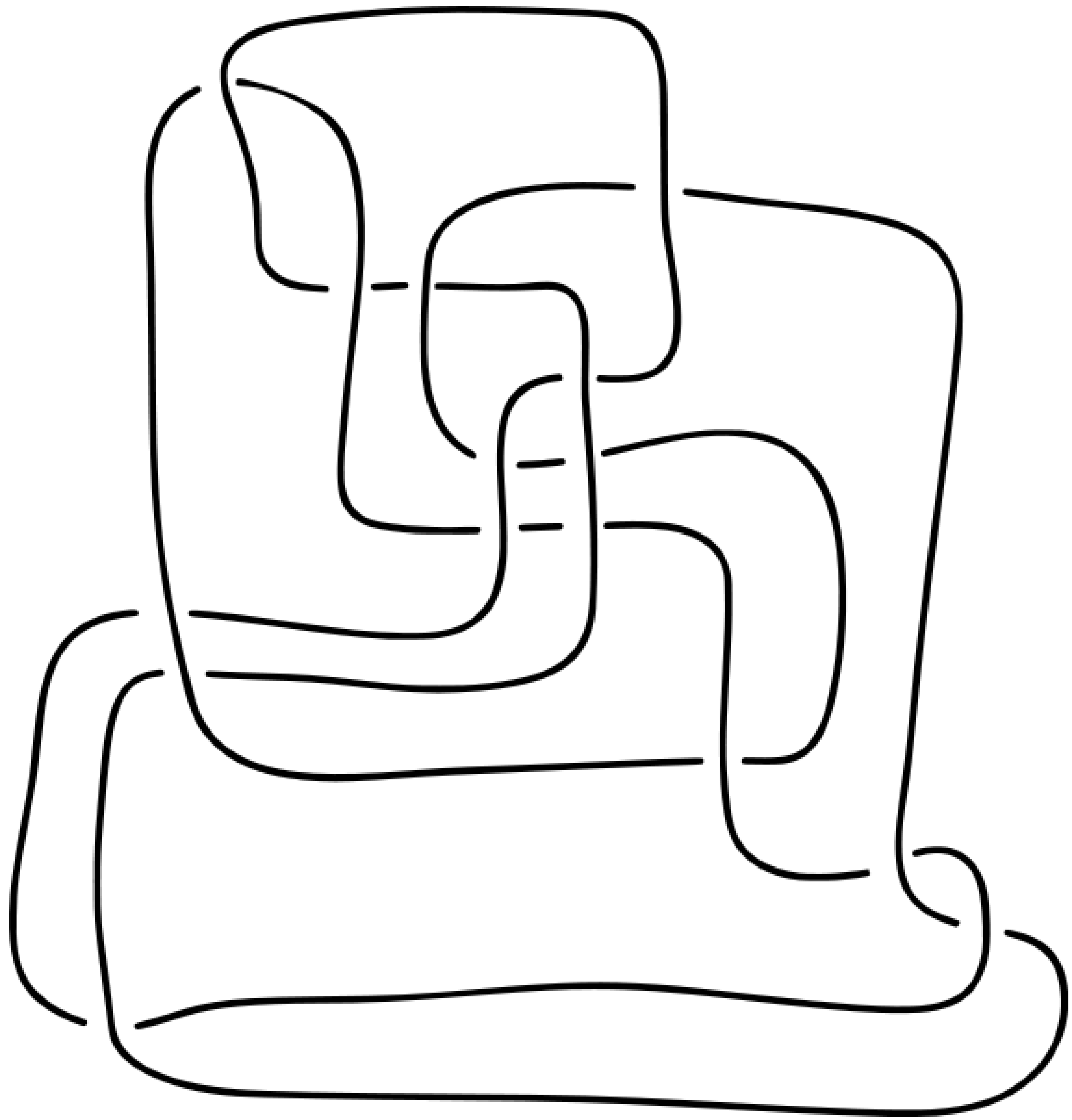
pero NO estamos seguros de que al nudo ocho no lo podemos desanudar

(¿cosas de matemáticos?)









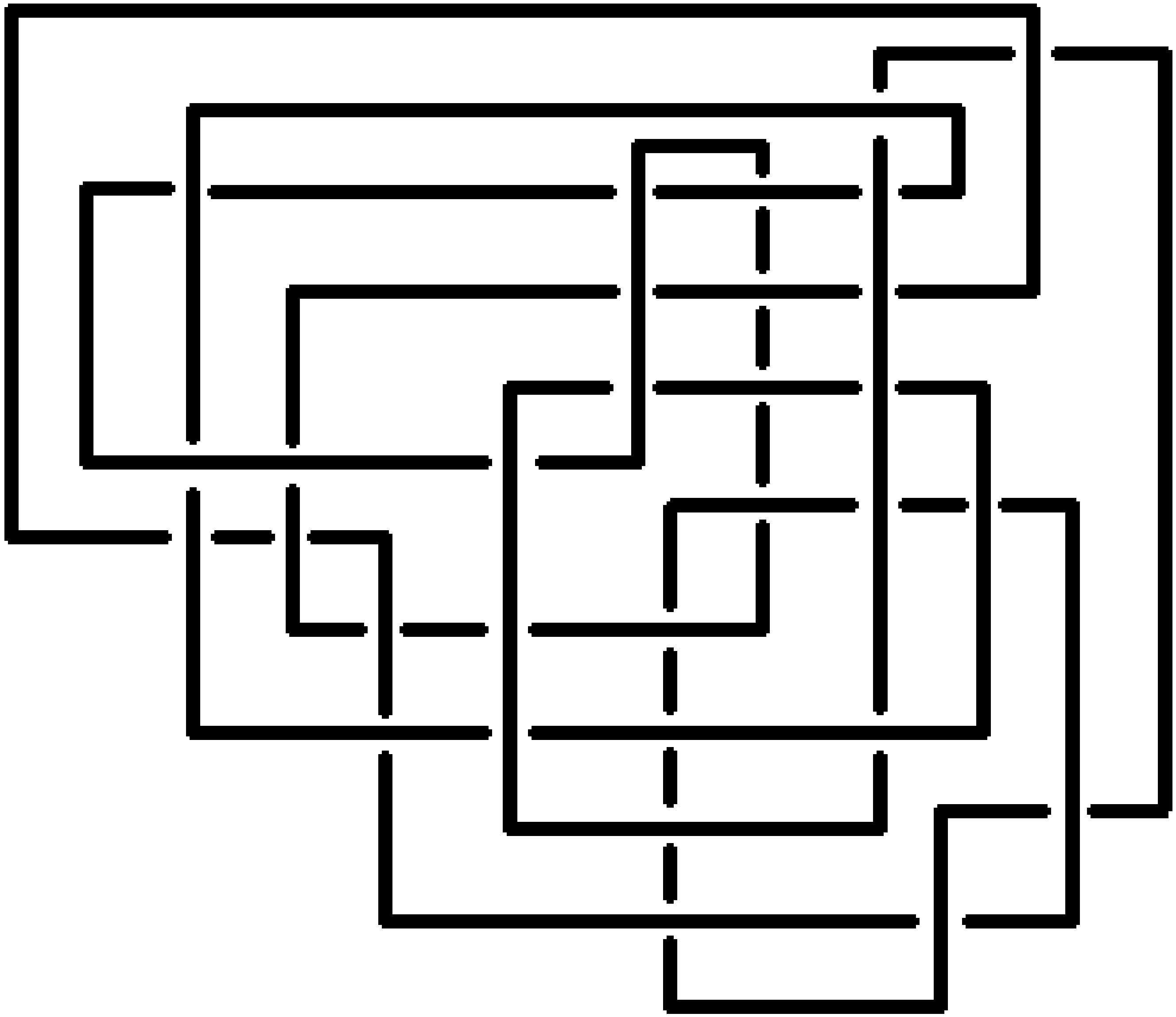
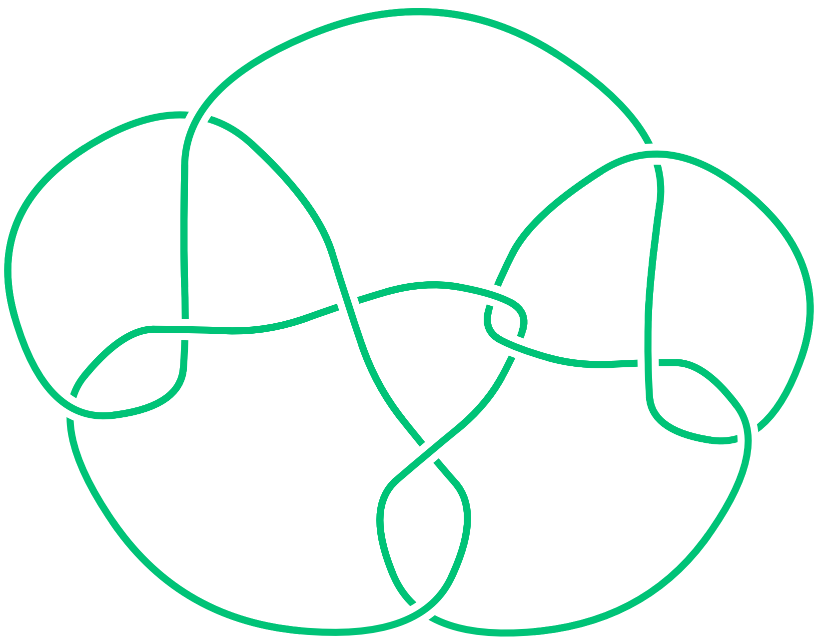


Figure 3.5. Wolfgang Haken's "Gordian knot."

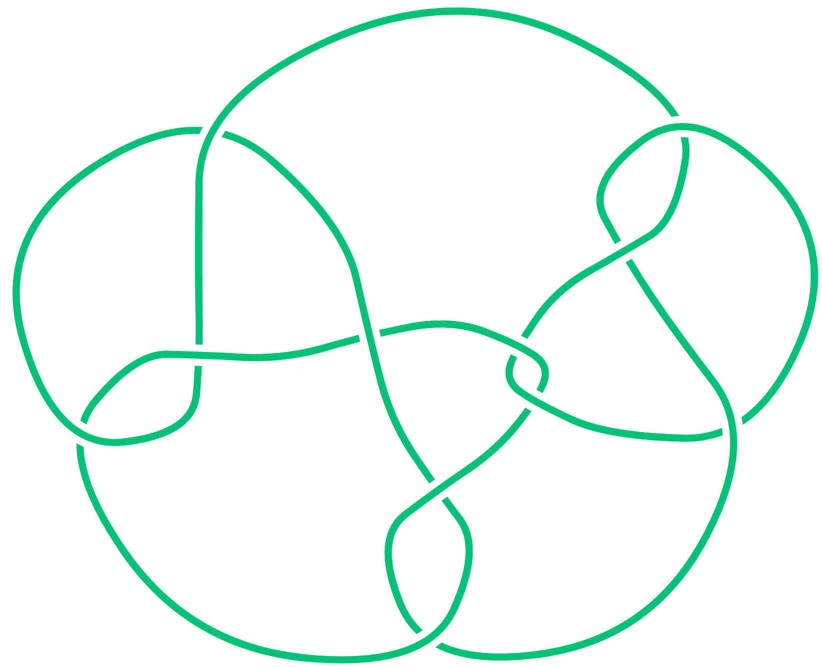
Pero, insisto, si dos nudos están anudados, ¿cómo sé si son el mismo nudo o no?

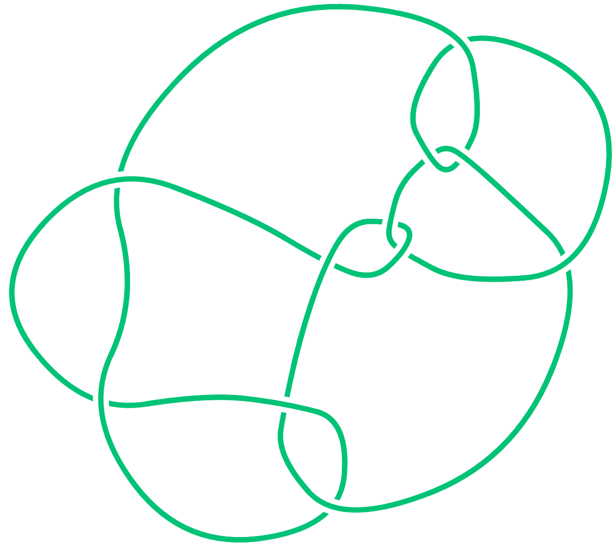
Para saber si dos nudos son el mismo, debo transformar (deformar) un diagrama en el otro.

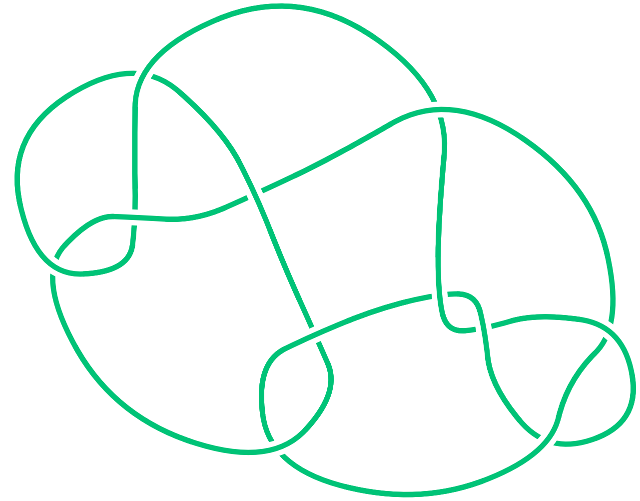
(es la única herramienta que tenemos)

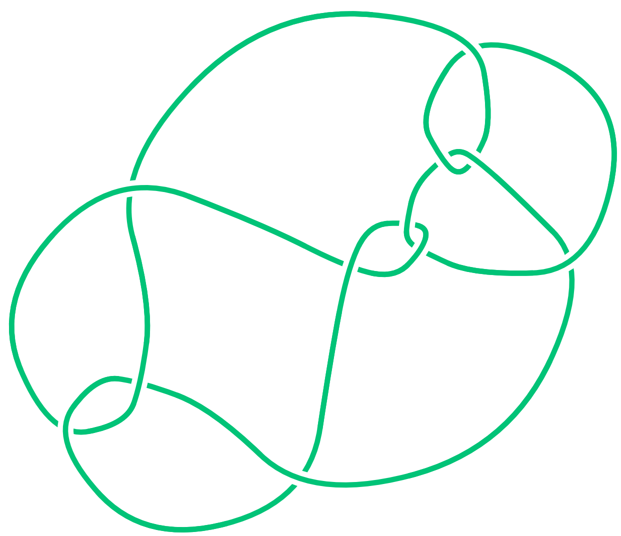


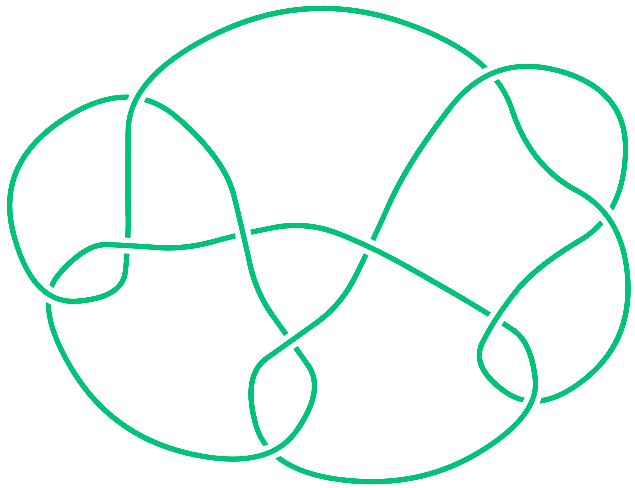
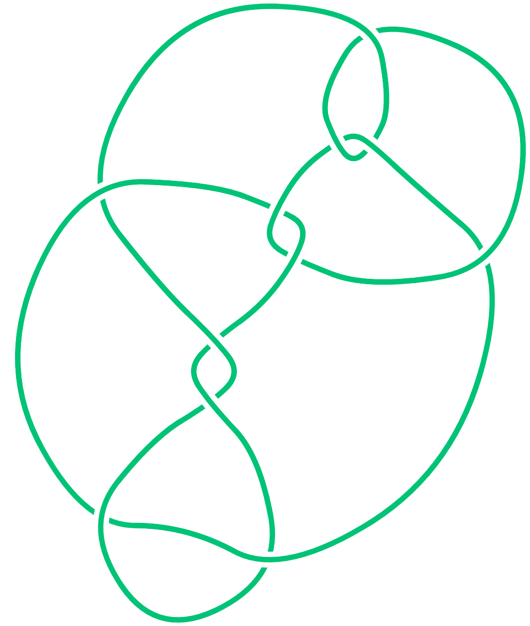
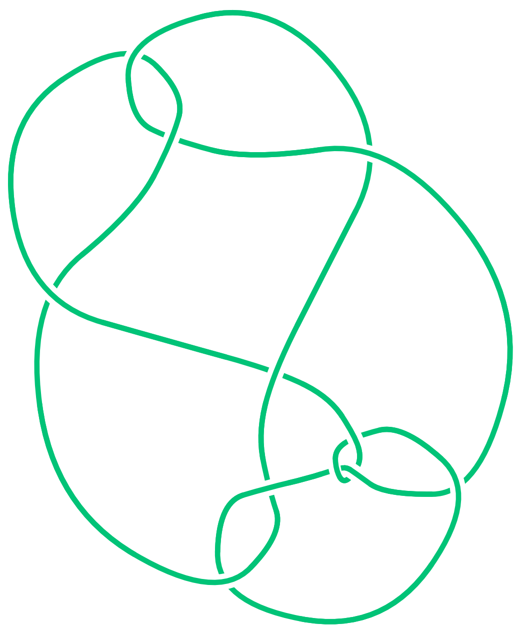
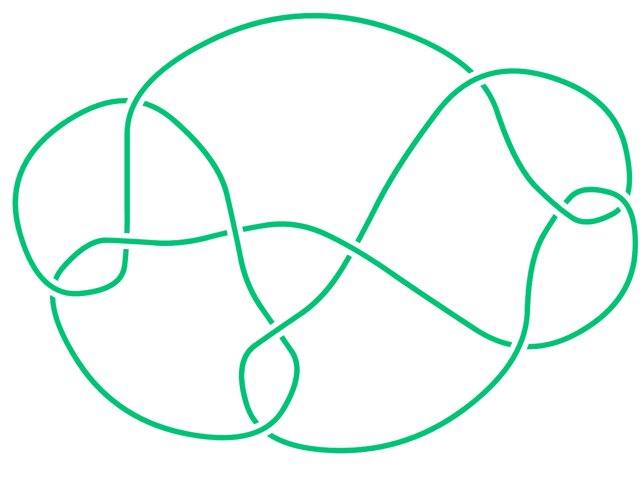
$\sim$









Pero, para distinguir dos nudos...