

Enlaces Tricoloreados

Fabiola Manjarrez Gutiérrez

Guanajuato, Gto. Abril 2000

Prólogo

Me enamoré de la Topología estando en el tercer semestre de la licenciatura, aunque no tenía gran idea de lo que trataba; fue así como me decidí a trabajar en un verano con Víctor Núñez (bueno, realmente él me aceptó), y al siguiente verano otra vez. En sexto semestre por fin llevé mi primer curso formal de Topología con Edilberto Rodríguez.

A ellos dos les debo el haberme enseñado con su ejemplo a amar la Topología.

Así es con esta inquietud con la que nace la idea de hacer esta tesis.

Agradezco a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco y a mis profes de la licenciatura la formación matemática que me brindaron.

Agradezco al Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) el haberme permitido contar con sus instalaciones y su ambiente de trabajo.

Agradezco a Ruby Angélica Mendoza Torres el haberme permitido consultar su tesis.

Agradezco al CONACYT su apoyo económico.

Agradezco al Dr. Mario Eudave sus valiosos comentarios.

Agradezco a Víctor Núñez haber asesorado este trabajo, así como su paciencia, apoyo y amistad.

Agradezco a Edilberto Rodríguez haber aceptado ser mi director oficial de tesis.

A
Tere, Bartolomé y Luis
por formar la familia Manjarrez Gutiérrez
por dejarme ser, hacer y deshacer
los amo.

A
Adriana, Rocío y Selem
por tantos años de amistad
y de compartir nuestras vidas.

A
Celina, Maricarmen, Isa, Jasso, Vero, Chuche, Chacho, Brenda
por compartirme sus matemáticas,
por los fines de semana,
por las noches,
y sobre todo por aguantarme.

Índice General

1 Enlaces Tricoloreados	7
Introducción	7
2 Preliminares	9
3 Espacios cubrientes	15
4 C-Homeomorfismos o giros de Lickorish o giros de Dehn	21
5 3-variedades y descomposiciones de Heegaard	31
6 Cubiertas ramificadas	37
6.1 Clasificación de cubiertas ramificadas en dimensión dos	38
6.2 Cubiertas ramificadas simples	41
6.3 Realización de homeomorfismos en cubiertas simples ramificadas	46
6.4 Cubiertas ramificadas del toro	55
6.5 Extensión de cubiertas ramificadas	66
6.6 Cubiertas ramificadas de variedades orientables	70
7 Enlaces tricoloreados	73
7.1 3-variedades con género de Heegaard cero	77
7.2 3-variedades con género de Heegaard uno	78
7.3 3-variedades con género de Heegaard dos	93
7.4 3-variedades con género de Heegaard tres	132
Bibliografía	181

ÍNDICE GENERAL

Capítulo 1

Enlaces Tricoloreados

Fabiola Manjarrez Guti'erez To see a world in a grain of sand
And a heaven in a wild flower,
Hold infinity in the palm of your hand
And eternity in an hour.
(William Blake. Auguries of innocence)

En la teoría de variedades de dimensión tres un problema fundamental es dar una lista completa y sin repeticiones de todas las 3-variedades orientables.

Una cubierta ramificada entre dos 3-variedades M y N es una función $\varphi : M \rightarrow N$ continua, abierta y propia tal que existe un enlace $L \subset N$ que satisface que $\varphi| : M \setminus \varphi^{-1}(L) \rightarrow N \setminus L$ es un espacio cubriente finito.

Alexander probó en [1] que toda 3-variedad es cubierta ramificada de la 3-esfera S^3 . Pero contamos con un resultado aún mejor que probaron Montesinos ([9]) y Hilden ([3]); éste dice que toda 3-variedad M es una cubierta simple ramificada de 3-hojas de S^3 . Es decir para toda M existe $\varphi : M \rightarrow S^3$ cubierta ramificada simple de tres hojas donde $L \subset S^3$ es tricoloreable. Así cada tres variedad M determina un enlace tricoloreado en la 3-esfera.

Además si comenzamos con un enlace tricoloreado $L \subset S^3$ es posible construir una 3-variedad M y una cubierta ramificada simple de tres hojas $\varphi : M \rightarrow S^3$ correspondiente al enlace L .

De esta manera tenemos un método de describir 3-variedades a través de

cubiertas ramificadas muy especiales (simples y de tres hojas).

Resulta interesante generar una lista de enlaces que correspondan, a través de una cubierta ramificada especial, a alguna familia de 3-variedades ordenadas con algún método racional. Así que el objetivo principal de esta tesis es justamente dar una lista de tales enlaces.

A partir de un diagrama de Heegaard de una 3-variedad M es posible construir un enlace $L \subset S^3$ que corresponda a una cubierta ramificada simple de tres hojas $\varphi : M \rightarrow S^3$ y viceversa.

En el Capítulo 1 damos definiciones y teoremas útiles para el desarrollo de la tesis, por ejemplo el Truco de Alexander y la Propiedad Universal del Cociente. En el Capítulo 2 se tratan conceptos básicos de la teoría de espacios cubrientes, en este capítulo la Proposición 3.6 es de mucha importancia; también probamos que cualquier grupo tiene una representación en el grupo simétrico de n símbolos si y sólo si tiene un subgrupo de índice n . En el tercer capítulo platicamos el Teorema de Lickorish ([4]); las técnicas desarrolladas por Lickorish serán de uso invaluable para nosotros en el Capítulo 6. El cuarto capítulo trata de las descomposiciones de Heegaard para 3-variedades; a mí en especial me gusta mucho este tema. En el Capítulo 5 definimos qué es una cubierta ramificada, luego platicamos muchas cosas acerca de las cubiertas para 2-variedades y finalmente extendemos los conceptos para n -variedades; cabe mencionar que este capítulo es una parte sustancial de ([2]), por supuesto que con nuestras propias demostraciones. Y por último en el Capítulo 6 mostramos los resultados que son enlaces de ramificación tricoloreados para algunas 3-variedades de género de Heegaard 0, 1, 2 y 3. Espero que estos dibujos les impresionen tanto como a mí.

Capítulo 2

Preliminares

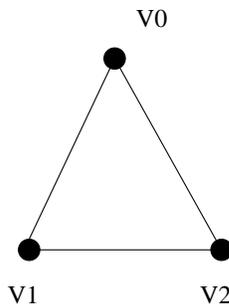
Definición 2.1. Un k -simplejo σ es un conjunto convexo mínimo que contiene a los puntos v_0, v_1, \dots, v_k en \mathbb{R}^m con la propiedad de que $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_k - v_0\}$ es linealmente independiente. Lo denotaremos por $\sigma = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ donde k es la dimensión del simplejo. Si $v \in \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ entonces los coeficientes a_i , con $a_i \geq 0$ y $\sum_{i=0}^k a_i = 1$ tales que $v = \sum_{i=0}^k a_i v_i$, se llaman coordenadas baricéntricas de v .



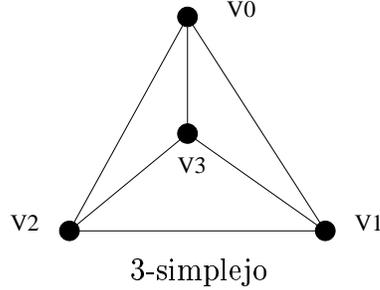
0-simplejo



1-simplejo



2-simplejo



Definición 2.2. Una cara de un k -simplejo $\sigma = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ es un simplejo generado por algún subconjunto $X \subset \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$

Sea $\sigma = \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$ un n -simplejo. Un *pre-orden* es una $(n+1)$ -ada $(v_0, v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$ donde $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ es una permutación de $\{1, 2, \dots, n\}$. Dos pre-ordenes (v_{i_j}) y (v_{k_l}) están relacionados si las permutaciones $\{i_j\}$ y $\{k_l\}$ son ambas pares o impares. Esto es una relación de equivalencia.

Una orientación para σ es una de las clases de equivalencia de los pre-ordenes de σ . La orientación de las permutaciones pares se escribe $+[v_0, v_1, \dots, v_n]$, y la otra se escribe $-[v_0, v_1, \dots, v_n]$.

Si σ tiene la orientación $+$, entonces la orientación inducida en la cara i -ésima $\tau = \langle v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ es $(-1)^i [v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, \bar{v}_i, v_{i+1}, \dots, v_n]$.

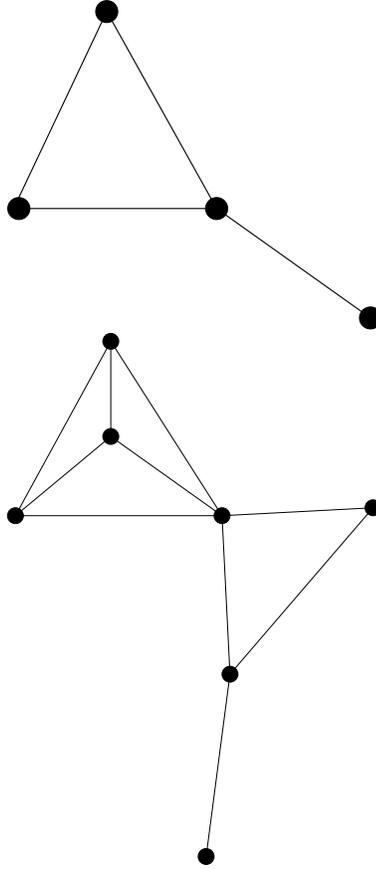
Si σ tiene la orientación $-$, entonces la orientación inducida en la cara i -ésima $\tau = \langle v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ es $(-1)^{i+1} [v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, \bar{v}_i, v_{i+1}, \dots, v_n]$.

Definición 2.3. Un complejo K es un conjunto finito de simplejos en un espacio \mathbb{R}^m tal que

1. Si $\sigma \in K$ entonces todas las caras de σ pertenecen a K
2. Si σ_1 y $\sigma_2 \in K$ entonces $\sigma_1 \cap \sigma_2 \in K$

La dimensión de K es la dimensión máxima entre los simplejos de K .

EJEMPLOS



Definición 2.4. Sea K n -complejo. Sea $r \leq \dim K$. El r -esqueleto K^r de K es la colección

$$K^r = \{\sigma \in K : \dim \sigma \leq r\}$$

Si K es un complejo, $|K|$ denota la unión de los elementos de K , con la topología de subespacio inducida por la topología de \mathbb{R}^m . Tal conjunto recibe el nombre de POLIEDRO.

Las coordenadas baricéntricas de los puntos $p \in \sigma$ son funciones lineales de las coordenadas cartesianas, y viceversa.

Una función $f : \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ es lineal si las coordenadas baricéntricas de un punto $f(p)$ son funciones lineales de las del punto p . Si los vértices también son enviados en vértices, entonces f es simplicial.

Sean G y H colecciones de conjuntos. Si para todo $A \in G$ existe $B \in H$ tal

que $A \subset B$, entonces G se llama refinamiento de H y escribimos $G \leq H$. Sean K y L complejos en \mathbb{R}^n , si $L \leq K$ y $|L| = |K|$, entonces L es subdivisión de K y escribimos $L \leq K$.

Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ continua. Si cada función $f|_\sigma$ con $\sigma \in K$ es simplicial, entonces f es simplicial. Si existe una subdivisión K' de K y una subdivisión L' de L tal que cada función $f|_\sigma$, con $\sigma \in K'$, envía linealmente a σ en un simplejo de L' , entonces f es PL (piecewiselinear o lineal a pedazos).

OBSERVACIÓN: La composición de funciones PL, resulta ser PL. Ver [8].

Definición 2.5. Una n -variedad es un espacio métrico en el que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a \mathbb{R}^n .

Sea K un complejo tal que el espacio $M = |K|$ es una variedad. Entonces M es una n -variedad triangulable.

Diremos que M es una n -variedad orientable si cada simplejo en que se divide M tiene una orientación, y en las caras donde se intersecan los n -simplejos la orientación inducida es contraria.

Definición 2.6 (Isotopía). Sean $f, g : X \rightarrow Y$ homeomorfismos. Una isotopía entre f y g es un homeomorfismo $G : X \times I \rightarrow Y \times I$ tal que $G(x, 0) = (f(x), 0)$ y $G(x, 1) = (g(x), 1)$ para todo $x \in X$ y $G(x, t) \in Y \times \{t\}$ para toda x y para toda t .

Teorema 2.7 (Propiedad Universal del Cociente). Sea (X, τ) un espacio topológico, \sim una relación de equivalencia en X ,

$p : (X, \tau) \rightarrow (\frac{X}{\sim}, \frac{\tau}{\sim})$ la proyección natural. Entonces para toda función $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ continua tal que si $(p(x) = p(y))$ entonces $f(x) = f(y)$, existe una única función $\bar{f} : (\frac{X}{\sim}, \frac{\tau}{\sim}) \rightarrow (Y, \sigma)$ continua tal que $f = \bar{f}p$, es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau) & \xrightarrow{f} & (Y, \sigma) \\ p \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ (\frac{X}{\sim}, \frac{\tau}{\sim}) & & \end{array}$$

conmuta

Demostración. Definimos

$$\begin{aligned} \bar{f} : (\frac{X}{\sim}, \frac{\tau}{\sim}) &\rightarrow (Y, \sigma) \\ [a] &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

con esto ya tenemos que $f = \bar{f}p$. Veamos que \bar{f} es función y es única.

Sea $[a] = [b]$, por demostrar $\bar{f}[a] = \bar{f}[b]$. Como $[a] = [b]$ entonces $p(a) = p(b)$, por hipótesis $f(a) = f(b)$, entonces $\bar{f}[a] = f(a) = f(b) = \bar{f}[b]$, por lo tanto \bar{f} es función.

Para la unicidad supongamos que $f = gp$, entonces $g[a] = gp(a) = f(a) = \bar{f}[a]$.

Por último veamos que \bar{f} es continua. Como $f = \bar{f}p$ es continua y τ es la topología más grande que hace continua a p , por lo tanto \bar{f} es continua. \square

Teorema 2.8 (El truco de Alexander). *Toda función continua $h : \partial D \rightarrow \partial D$, donde ∂D es la frontera de un n -disco D , se extiende a una función continua $H : D \rightarrow D$. Además si h es homeomorfismo entonces también H es homeomorfismo.*

Demostración. Definamos

$$H : D \rightarrow D$$

$$w \mapsto \|w\|h\left(\frac{w}{\|w\|}\right)$$

H satisface el teorema. \square



Capítulo 3

Espacios cubrientes

La teoría de espacios cubrientes está muy relacionada con el estudio del grupo fundamental. Muchas preguntas geométricas acerca de los espacios cubrientes se pueden reducir a preguntas puramente algebraicas sobre el grupo fundamental de los espacios.

Consideraremos a todos los espacios conectables por trayectorias y localmente conectables por trayectorias.

Definición 3.1. Sean X y \tilde{X} espacios topológicos conectables por trayectorias y localmente conectables por trayectorias, $p : \tilde{X} \rightarrow X$ función continua, suprayectiva, finita a uno (es decir que para todo $x \in X$ $\#p^{-1}(x) < \infty$).

Entonces p se llama espacio cubriente si y sólo si:

Para todo $x \in X$ existe U vecindad de x tal que para toda componente $\tilde{U} \subset p^{-1}(U)$ se tiene que $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

Cada vecindad U como antes recibe el nombre de *vecindad fundamental*.

Lema 3.2. Si $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es un espacio cubriente, X y \tilde{X} son conectables por trayectorias, $x \in X$ y $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ es una trayectoria tal que $\alpha(0) = x$ y $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, entonces existe una única trayectoria $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$ y $p\tilde{\alpha} = \alpha$.

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \exists! \tilde{\alpha} & \downarrow p \\ I & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

Demostración. Sea U una vecindad fundamental de x y supongamos que $\tilde{x} \in \tilde{U} \subset p^{-1}(U)$.

1er caso: $\tilde{\alpha}(I) \in \tilde{U}$ definimos $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ como $\tilde{\alpha}(t) = p^{-1}(\alpha(t))$, y esta trayectoria cumple las propiedades requeridas.

2do caso: consideremos para cada $t \in [0, 1]$ una U_t vecindad fundamental de $\alpha(t)$. $\{U_t\}_{t \in I}$ es una cubierta abierta para el compacto $\alpha(I)$ y $\{\alpha^{-1}(U_t)\}_{t \in I}$ es cubierta abierta de I , entonces existe $\lambda > 0$ (número de Lebesgue) tal que para todo $s, t \in I$ para el que $|s - t| < \lambda$, existe r tal que $s, t \in \alpha^{-1}(U_r)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \lambda$, entonces dividimos a I en subintervalos $[0, \frac{1}{n}], [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \dots, [\frac{n-1}{n}, 1]$. Observemos que α envía a cada subintervalo en una vecindad fundamental en X . Definamos $\tilde{\alpha}$ sucesivamente sobre estos subintervalos empezando con $[0, \frac{1}{n}]$ como en el caso anterior. \square

Lema 3.3. *Si $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es un espacio cubriente, X y \tilde{X} conectables por trayectorias, $x \in X$, $\alpha : [0, 1]^n \rightarrow X$ función tal que $\alpha(\bar{0}) = x$ y $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, entonces existe una única $\tilde{\alpha} : [0, 1]^n \rightarrow \tilde{X}$ función tal que $\tilde{\alpha}(\bar{0}) = \tilde{x}$ y $p\tilde{\alpha} = \alpha$.*

Este lema se prueba de manera similar al Lema 3.2.

Teorema 3.4. *Sean \tilde{X} y X conectables por trayectorias, $p : \tilde{X} \rightarrow X$ espacio cubriente. Entonces:*

$$p_{\#} : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, x)$$

es monomorfismo para toda $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$.

Demostración. Definimos $p_{\#}[\tilde{\alpha}] = [p\tilde{\alpha}]$. Sabemos que $p_{\#}$ es homomorfismo. Por demostrar $p_{\#}$ es inyectiva, es decir, por demostrar $\ker(p_{\#}) = \{[\tilde{x}]\}$. Supongamos que $p_{\#}[\tilde{\alpha}] = [x]$, pero $p_{\#}[\tilde{\alpha}] = [p\tilde{\alpha}] = [x]$, por demostrar $[\tilde{\alpha}] = [\tilde{x}]$, es decir, que $\tilde{\alpha}$ es homotópica a \tilde{x} . Como $p_{\#}[\tilde{\alpha}] = [x]$ por lo tanto $p\tilde{\alpha}$ es homotópica a x , es decir, existe $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $h(y, 0) = p\tilde{\alpha}(y)$ y $h(y, 1) = x(y)$. Por el Lema 3.3 existe $\tilde{h} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ tal que $h = p\tilde{h}$. Observemos que $\tilde{h}_0 : [0, 1] \times \{0\} \rightarrow \tilde{X}$ es levantamiento de $p\tilde{\alpha}$ que comienza en \tilde{x} . $\tilde{\alpha}$ también es levantamiento de $p\tilde{\alpha}$, pero los levantamientos son únicos, por lo tanto $\tilde{h}_0 = \tilde{\alpha}$. Por un argumento similar obtenemos que $\tilde{h}_1 = \tilde{x}$. Por lo tanto \tilde{h} es homotopía entre $\tilde{\alpha}$ y \tilde{x} . \square

Teorema 3.5. *Si $G \leq \pi_1(X, x)$ entonces existe $p : \tilde{X} \rightarrow X$ espacio cubriente tal que $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = G$ con $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$.*

CAPÍTULO 3. ESPACIOS CUBRIENTES

La demostración de este teorema puede ser consultada en [6]

Proposición 3.6. Sean X y \tilde{X} espacios topológicos conectables por trayectorias y localmente conectables por trayectorias. $p : \tilde{X} \rightarrow X$ espacio cubriente. Sea U espacio topológico conectable por trayectorias, $f : U \rightarrow X$ continua, entonces existe $\tilde{f} : U \rightarrow \tilde{X}$ continua tal que $p\tilde{f} = f$ si y sólo si $f_{\#}\pi_1(U, x_0) \subset p_{\#}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$, es decir,

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \exists \tilde{f} & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

si y sólo si

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \nearrow \exists \tilde{f}_{\#} & \downarrow p \\ \pi_1(U, x_0) & \xrightarrow{f_{\#}} & \pi_1(X, f(x_0)) \end{array}$$

Esta prueba puede ser consultada en [6].

Definición 3.7. Una función continua $f : X \rightarrow Y$ es primitiva si y sólo si $f_{\#} : \pi_1(X, *) \rightarrow \pi_1(Y, *)$ es suprayectiva.

Proposición 3.8. Sea $f : X \rightarrow Y$ función continua. Entonces existe $f' : X \rightarrow \tilde{Y}$ primitiva y $p : \tilde{Y} \rightarrow Y$ espacio cubriente tales que $f = pf'$, es decir

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{Y} \\ & \nearrow f' & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

conmuta.

Demostración. Sea $p : \tilde{Y} \rightarrow Y$ el espacio cubriente tal que $p_{\#}\pi_1(\tilde{Y}) = f_{\#}\pi_1(X)$, por la proposición anterior existe $f' : X \rightarrow \tilde{Y}$ continua tal que $pf' = f$. Verifiquemos que f' es primitiva, es decir, $f'_{\#}$ es

suprayectiva. Sea $[\tilde{\alpha}] \in \pi_1(\tilde{Y})$, por demostrar que existe $[\alpha] \in \pi_1(X)$ tal que $f'_\#[\alpha] = [\tilde{\alpha}]$.
 $p_\#[\tilde{\alpha}] \in p_\#\pi_1(Y) = f_\#\pi_1(Y)$, entonces $p_\#[\tilde{\alpha}] = [\beta] \in f_\#\pi_1(X)$.
 Sea $[\alpha] \in \pi_1(X)$ tal que $f_\#[\alpha] = [\beta]$, entonces $p_\#f'_\#[\alpha] = f_\#[\alpha] = [\beta]$, pero $p_\#[\tilde{\alpha}] = [\beta]$, así $p_\#f'_\#[\alpha] = p_\#[\tilde{\alpha}]$ y como $p_\#$ es monomorfismo $f'_\#[\alpha] = [\tilde{\alpha}]$.
 Por lo tanto f' es primitiva. \square

Definición 3.9. Si X es un conjunto, el conjunto

$$S(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ es biyectiva}\}$$

tiene estructura de grupo respecto a la composición de funciones. Este grupo recibe el nombre de grupo simétrico en el conjunto de símbolos de X , y cada $f \in S(X)$ se llama una permutación de X .

Si $\#X = \alpha$, entonces escribimos $S_\alpha = S(X)$. Si $\alpha < \infty$, consideraremos $X = \{1, 2, \dots, \alpha\}$.

El subgrupo de permutaciones de $S(X)$ que dejan fijo a $x \in X$ recibe el nombre del estabilizador de X y se denota por $st(x)$.

Definición 3.10. Sea G un grupo y sea $\rho : G \rightarrow S_\alpha$ un homomorfismo, decimos que ρ es transitivo si y sólo si para todo i, j existe $f \in \rho(G)$ tal que $f(i) = j$.

Teorema 3.11. Sea G un grupo y $H < G$ subgrupo tal que $\#(G/H) = \alpha$. Entonces existe $\rho_H : G \rightarrow S_\alpha$ homomorfismo transitivo tal que $\rho^{-1}(st(1)) = H$.

Demostración. Sea $X = \{x_1, x_2, \dots, \}$ un conjunto de representantes de clases laterales izquierdas de G/H , con $x_1 = e$.

Definamos

$$\begin{aligned} \rho_H : G &\rightarrow S(X) \\ g &\mapsto \rho_H(g) = f : X \rightarrow X \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow X \\ x_i &\mapsto x_j \\ \text{si } gx_iH &= x_jH \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. ESPACIOS CUBRIENTES

donde $x_jH = gx_iH$ si y sólo si $x_j^{-1}gx_i \in H$.

Por demostrar que ρ_H es homomorfismo, es decir, $\rho_H(g_1g_2) = (\rho_Hg_1)(\rho_Hg_2)$.

Sea $x_i \in H$, tenemos

$$\begin{aligned}\rho_H(g_1g_2)x_i &= x_j \\ (\rho_Hg_1)(\rho_Hg_2)x_i &= \rho_H(g_1)x_{i1} = x_{i2}\end{aligned}$$

De donde se tiene que

$$\begin{aligned}x_jH &= g_1g_2x_iH \\ x_{i1}H &= g_2x_iH \\ x_{i2}H &= g_1x_{i1}H\end{aligned}$$

esto ocurre si y sólo si

$$\begin{aligned}x_j^{-1}g_1g_2x_i &\in H \\ x_{i1}^{-1}g_2x_i &\in H \\ x_{i2}^{-1}g_1x_{i1} &\in H\end{aligned}$$

multiplicamos las dos últimas ecuaciones y obtenemos

$$\begin{aligned}x_{i2}^{-1}g_1x_{i1}x_{i1}^{-1}g_2x_i &\in H \\ x_{i2}^{-1}g_1g_2x_i &\in H\end{aligned}$$

si y sólo si $x_{i2}H = g_1g_2x_iH$, por lo tanto $x_{i2} = x_j$. \square

Teorema 3.12. Sea $\rho : G \rightarrow S_\alpha$ homomorfismo transitivo y $H = \rho^{-1}(st(1))$ entonces $\rho = \rho_H$, salvo conjugaciones en S_α .

Demostración. Sea $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ representantes de las clases laterales izquierdas de G/H , con $x_1 = e$.

Vamos a demostrar que $\#X = \alpha$. Como ρ es transitivo entonces $\#X \geq \alpha$.

Sea $i \neq 1$, $\rho x_i(1) = i_1 \neq 1$. Sea $x_j \neq x_i$ y $j \neq 1$ entonces $x_j^{-1}x_i \notin H$ así $\rho(x_j^{-1}x_i)(1) = j_1 \neq 1$. Como ρ es homomorfismo se tiene que $\rho(x_j)^{-1}\rho(x_i)(1) \neq 1$.

En particular $\rho(x_j)(1) \neq \rho(x_i)(1)$, por lo tanto $\#X \leq \alpha$.

Renumeremos a X , es decir, $X = \{x_1, x_2, \dots\} = \{x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots\}$, así tenemos $\rho' = \sigma\rho(g)\sigma^{-1}$. Vamos a demostrar que $\rho_H(g) = \rho'(g)$. Supongamos que $\rho_H(g)(j) = l$, es decir, $gx_jH = x_lH$, entonces $x_l^{-1}gx_j = h \in H$, de aquí tenemos que $g = x_lhx_j^{-1}$. Por otro lado

$$\rho'(g)(j) = \rho'(x_lhx_j^{-1})(j) = \rho'(x_lh)(1) = \rho'(x_l)(1) = l. \text{ Listo!!!} \quad \square$$

A este homomorfismo ρ transitivo le llamamos *representación transitiva*.

Proposición 3.13. Sean M y \widetilde{M} complejos simpliciales y sea $\varphi : \widetilde{M} \rightarrow M$ espacio cubriente de k hojas, entonces $\chi(\widetilde{M}) = k\chi(M)$.

Demostración. Sea T triangulación de M y sea \widetilde{T} triangulación de \widetilde{M} , $\varphi : \widetilde{T} \rightarrow T$ simplicial. Sea $\chi(M) = \chi(T) = v - a + f$, donde v, a, f son el número de vértices, aristas y caras, respectivamente, de la triangulación. Sea σ un n -simplejo en T , entonces $\varphi^{-1}(\sigma)$ consiste de k copias homeomorfas $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k \in \widetilde{T}$, entonces el número de n -simplejos en \widetilde{T} es k veces el número de n -simplejos en T . Así tenemos $\widetilde{v} = kv$, $\widetilde{a} = ka$, $\widetilde{f} = kf$, por lo tanto

$$\chi(\widetilde{M}) = \chi(\widetilde{T}) = k\chi(T) = k\chi(M)$$

□

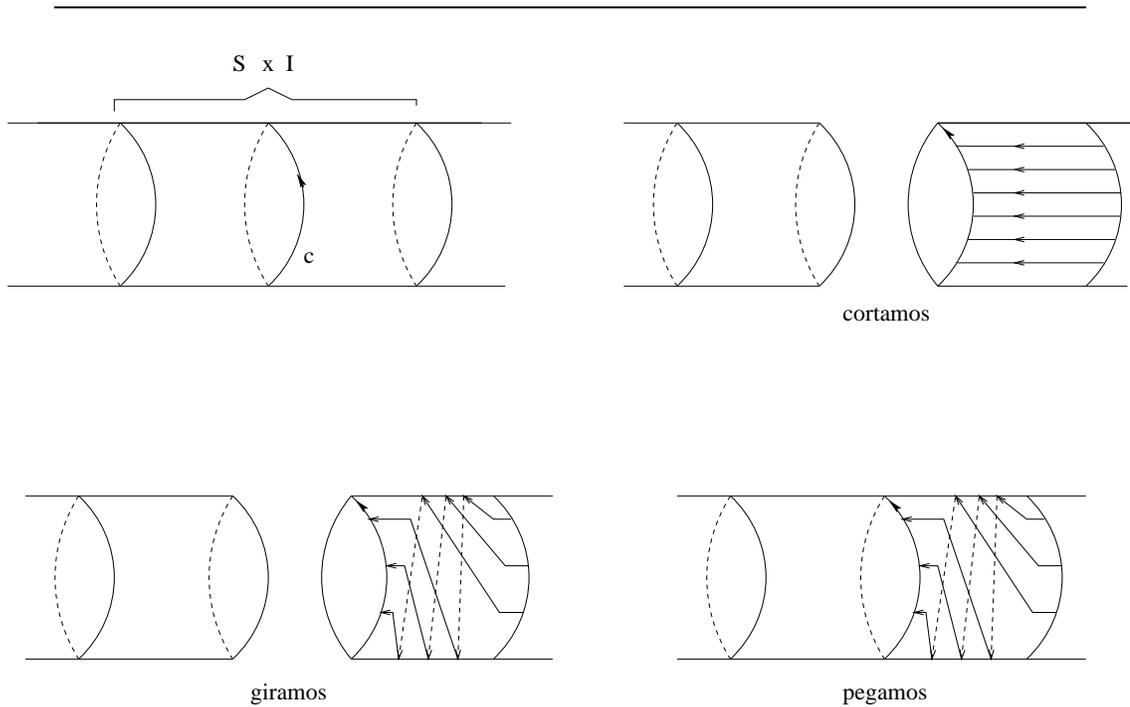
Proposición 3.14. Sea $\varphi : \widetilde{M} \rightarrow M$ espacio cubriente, M n -variedad orientable. Entonces \widetilde{M} es variedad orientable.

Demostración. Supongamos que M y \widetilde{M} están trianguladas y φ es simplicial. Queremos demostrar que los simplejos de \widetilde{M} tienen una orientación de tal manera que la orientación inducida en las caras donde se intersecan sean contrarias. Fijemos una orientación de M y sea σ un n -simplejo orientado de M . Si $\varphi^{-1}(\sigma) = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots$ es unión ajena de n -simplejos (φ es cubriente simplicial) entonces orientamos cada σ_i de tal manera que $\varphi|_{\sigma_i} : \sigma_i \rightarrow \sigma$ conserve la orientación. Sean σ_1 y σ_2 simplejos en M tales que se intersecan en una cara, entonces $\varphi^{-1}(\sigma_1)$ y $\varphi^{-1}(\sigma_2)$ son colecciones de simplejos en \widetilde{M} , como φ es simplicial y continua, y al tomar un simplejo de $\varphi^{-1}(\sigma_1)$ y otro simplejo de $\varphi^{-1}(\sigma_2)$, entonces estos simplejos o bien no se intersecan o se intersecan en una cara y la orientación inducida en ella es contraria pues φ conserva la orientación en cada simplejo, por lo tanto \widetilde{M} es orientable. □

Capítulo 4

C-Homeomorfismos o giros de Lickorish o giros de Dehn

Si M es una 2-variedad orientable podemos definir un homeomorfismo sobre M como sigue: Sea c una curva poligonal simple cerrada en M . Una vecindad de c en M es un cilindro $S^1 \times I$. Cortamos a M a lo largo de c , giramos uno de los extremos del cilindro un ángulo de 2π , y lo volvemos a pegar. Hemos definido un homeomorfismo de M que deja fijo a M excepto en una vecindad de c . Este proceso se ilustra a continuación.



Un homeomorfismo PL de este tipo se llama c -homeomorfismo.
 Sea k un poliedro

$$G_k = \{f : k \rightarrow k \mid f \text{ es homeomorfismo PL}\}$$

es un grupo.

$$N_k = \{f \in G_k \mid f \text{ es isotópico a } id\}$$

N_k es subgrupo normal de G_k . Los elementos de G_k están en la misma clase lateral de N_k si y sólo si son isotópicos.

Definición 4.1. Sea $L_k = \frac{G_k}{N_k}$. L_k es el grupo de clases de isotopía de homeomorfismos PL.

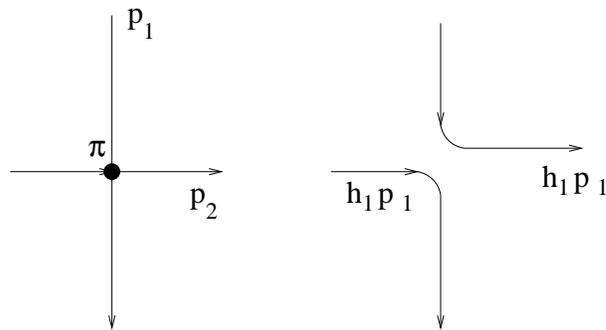
Si p_1 y p_2 son curvas en M diremos que $p_1 \sim_c p_2$ si existe una sucesión de c -homeomorfismos h_1, h_2, \dots, h_m y un elemento $n \in N_M$ tales que $nh_1h_2 \dots h_m p_1 = p_2$.

Como el inverso de un c -homeomorfismo es un c -homeomorfismo y N_M es normal en G_M , \sim_c es una relación de equivalencia en el conjunto de curvas simples cerradas de M .

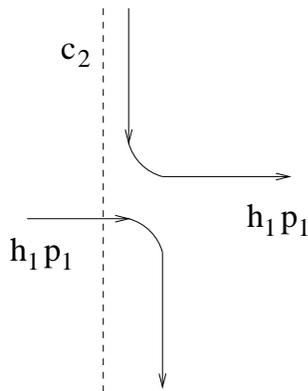
CAPÍTULO 4. C -HOMEOMORFISMOS O GIROS DE LICKORISH O GIROS DE DEHN

Lema 4.2. Si p_1 y p_2 son curvas poligonales cerradas, simples en M , tales que p_1 y p_2 se intersecan en exactamente un punto entonces $p_1 \sim_c p_2$.

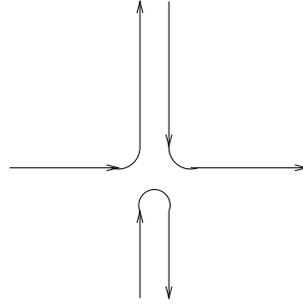
Demostración. Sea h_1 un c -homeomorfismo donde $c = p_2$. Si p_1 y p_2 se intersecan en el punto π , $h_1 p_1$ es una copia de p_1 que se rompe en π con una copia de c insertada en la rotura.



Ahora tomemos c_2 una curva simple, cerrada en una vecindad de p_1



Si h_2 es un c -homeomorfismo con $c = c_2$, entonces $h_2 h_1 p_1$ es lo siguiente



Existe una isotopía de M que manda $h_2 h_1 p_1$ a p_2 , es decir existe $n \in N_M$ tal que $nh_2 h_1 p_1 = p_2$ \square

Corolario 4.3. *Si p_1, p_2, \dots, p_r son curvas poligonales simples cerradas en M tales que p_i interseca a p_{i+1} en un solo punto ($i = 1, 2, \dots, r$) entonces $p_1 \sim_c p_r$.*

Este corolario se sigue del lema anterior y del hecho de que \sim_c es relación de equivalencia.

Lema 4.4. *Sean p y q curvas poligonales simples cerradas en M y sea V una vecindad de q en M . Entonces existe una curva p_* tal que $p \sim_c p_*$, $p_* \cap (M \setminus V) \subset p \cap (M \setminus V)$ y p_* no interseca q , o la interseca precisamente dos veces con intersección algebraica cero.*

Demostración. La prueba es por inducción sobre el número de puntos de intersección r de p y q . Si $r = 1$ por el lema anterior $p \sim_c q$ y existe un $n \in N_M$ tal que $nq \subset V$, pero nq no interseca a q . En este caso tomamos $p_* = nq$.

Si $r = 2$ y p puede orientarse de tal manera que p tenga direcciones contrarias con respecto a la orientación de q , en los puntos de $p \cap q$ el lema es trivial.

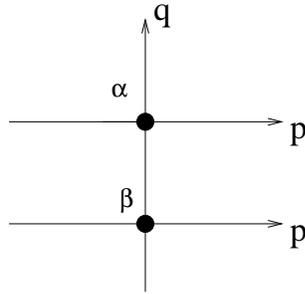
Supongamos que el lema es cierto para curvas p y q con $r < k$.

Sean curvas p y q tales que $r = k$. Orientemos a p y a q .

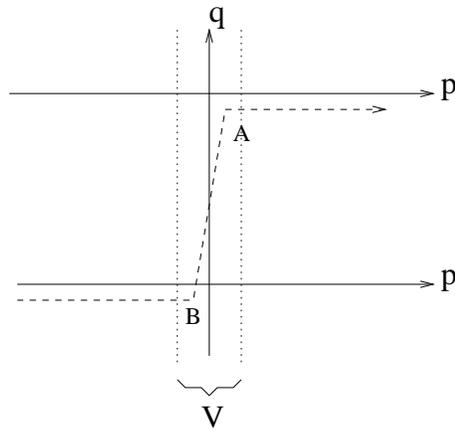
Caso 1

Supongamos que en dos puntos α y β de $p \cap q$, que son adyacentes en q , p está orientado en la misma dirección en α y en β con respecto a la orientación de q .

CAPÍTULO 4. C -HOMEOMORFISMOS O GIROS DE LICKORISH O GIROS DE DEHN



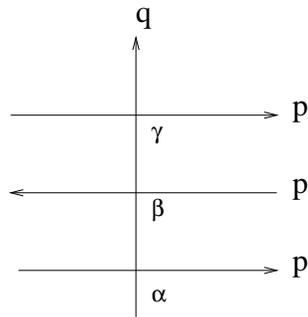
Sea p_1 una curva poligonal cerrada que empieza en un punto A contenido en una vecindad de α , $A \in V$, recorriendo muy cerquita de p (sin intersectarlo) hasta un punto B que está en una vecindad de β , $B \in V$, y llega hasta A de manera que $\overline{BA} \subset V$ y \overline{BA} interseca a p y q en un solo punto.



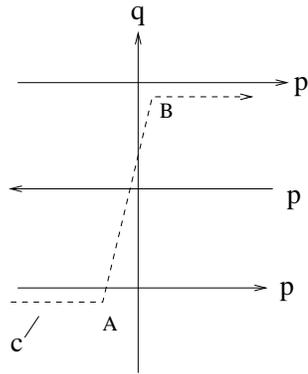
Por el lema anterior $p \sim_c p_1$ y $p_1 \cap q$ contiene menos de k puntos. Existe $n \in N_M$ talque $np_1 \cap (M \setminus V) \subset p \cap (M \setminus V)$ y $np_1 \cap q$ tiene menos de k puntos. La hipótesis de inducción implica la existencia de un p_* tal que $p_* \sim_c np_1 \sim_c p$ que tiene las propiedades que necesitamos.

Caso 2

Supongamos que hay tres puntos consecutivos sobre q de $p \cap q$, digamos α, β, γ tal que p está orientada en direcciones alternadas con respecto a la dirección de q .



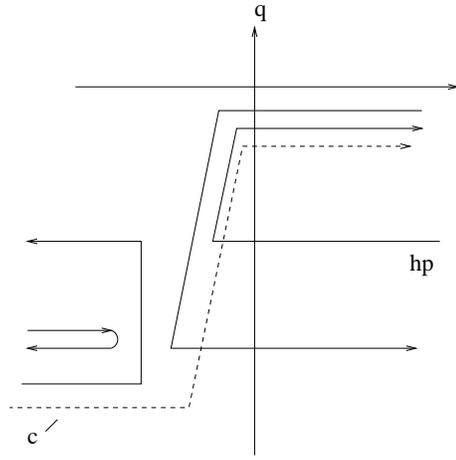
Uno de los segmentos $\overline{\alpha\gamma}$ ó $\overline{\gamma\alpha}$ de p no contiene a β . Supongamos que tal segmento es $\overline{\gamma\alpha}$. Tomemos c la curva cerrada, mostrada a continuación,



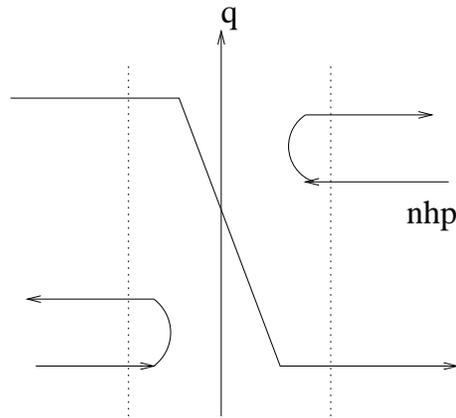
c empieza en un punto $B \in V$ contenido en una vecindad de γ , continúa por una vecindad de p , sin intersectar a p , hasta $A \in V$ cerca de α y sigue hasta B . $\overline{AB} \subset V$, \overline{AB} interseca a p dos veces y a q una vez.

Si h es un c -homeomorfismo definido con esta c , $hp \subset V$ como se muestra.

CAPÍTULO 4. C-HOMEOMORFISMOS O GIROS DE LICKORISH O GIROS DE DEHN



Entonces existe un $n \in N_M$ tal que nhp es como sigue,

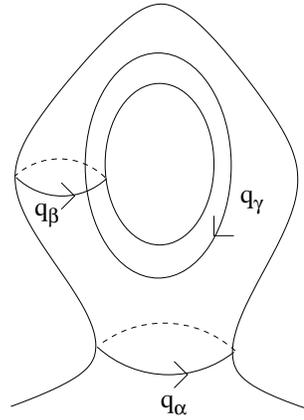


n se escoge de manera que $nhp \cap (M \setminus V) \subset p \cap (M \setminus V)$, y tal que nhp interseca a q dos veces menos de lo que p interseca a q . Ahora $p \sim_c nhp$ y, por hipótesis de inducción, $nhp \sim_c p_*$ es una curva con las propiedades exigidas. \square

Corolario 4.5. Si p, q_1, q_2, \dots, q_r son curvas poligonales simples cerradas en M con $q_i \cap q_j = \emptyset$ si $i \neq j$, existe una curva p_* tal que para $i = 1, 2, \dots, r$ y p_* no interseca a q_i , o p_* interseca a q_i dos veces, con intersección algebraica cero. También $p \sim_c p_*$.

Demostración. Tomemos V_i vecindad de q_i tales que $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Aplicamos el lema a p, q_1 y V_1 para obtener una curva p_1 tal que p_1 interseca a q_1 a lo más dos veces y $p_1 \sim_c p$. Ahora aplicamos el lema a p_1, q_2 y V_2 , para obtener p_2 tal que sólo interseca a q_2 a lo más dos veces y $p_2 \sim_c p_1 \sim_c p$. Como $p_2 \cap (M \setminus V_2) \subset p_1 \cap (M \setminus V_2)$ y $q_1 \subset M \setminus V_2$, p_2 interseca a q_1 a lo más dos veces. Continuando de esta manera obtenemos una p_n tal que $p \sim_c p_n$ y p_n interseca a cada q_i a lo más dos veces. Entonces p_n tiene las propiedades correctas para p_* o p_n interseca algún q_j sólo una vez. En este caso por el Lema 4.2, $p_n \sim_c q_j$ y $q_j \sim_c p_*$ donde p_* no interseca q_i . \square

Ahora tomemos M una 2-variedad cerrada, conexa, PL, orientable, a la que pensaremos como una esfera con asas. Consideremos una asa típica con curvas poligonales $q_\alpha, q_\beta, q_\gamma$. Diremos que una curva p no interseca la asa si no interseca a q_β , y diremos que una curva que no interseca la asa atraviesa la asa si interseca a q_γ un número impar de veces.



Lema 4.6. *Si p es una curva poligonal simple cerrada en M entonces $p \sim_c p_*$, donde p_* no interseca a ninguna de las asas de M .*

Demostración. Sean q_1, q_2, \dots, q_r , el conjunto de curvas poligonales cerradas ajenos en M tales que para cada asa de M , alguna q_i va alrededor de la asa como lo hace q_β y otra q_i va alrededor de la base de la asa como q_α .

El Corolario 4.5 implica que $p \sim_c p_1$ donde p_1 no interseca a q_i o interseca a q_i dos veces; y si ésto último ocurre, entonces p_1 va en direcciones opuestas

CAPÍTULO 4. C-HOMEOMORFISMOS O GIROS DE LICKORISH O GIROS DE DEHN

en cada uno de estos puntos.

Consideremos una asa en M . Si p_1 interseca la asa entonces corta a q_α , se tuerce alrededor de la asa cortando a q_β sólo dos veces y luego corta a q_α y está lejos de la asa en cuestión.

Entonces existe un $n_1 \in N_M$ tal que $n_1 p_1$ no interseca a q_β , y n_1 deja fijo a M en el complemento de la asa.

Un argumento similar aplicado a cada asa permite encontrar una sucesión de elementos de N_M que envía a p en una curva p_* que no interseca a q_β . \square

Después de demostrar estos resultados Lickorish prueba en [4] el siguiente

Teorema 4.7. *Cualquier homeomorfismo h PL de una 2-variedad M cerrada, conexa, orientable, PL, que conserva la orientación, es isotópico al producto de una sucesión de c -homeomorfismos*

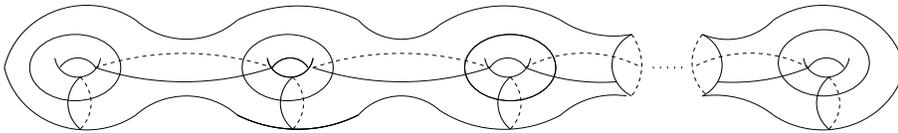
Un esbozo de esta demostración es:

Demostración. Si M es una 2-esfera, por el Truco de Alexander, h es isotópico a la identidad.

Si M tiene género $g > 0$, podemos encontrar una sucesión de giros h_1, h_2, \dots, h_r una $n \in N_M$ tales que $nh_1 h_2 \dots h_r h$ deja fijas a las curvas $q_\alpha, q_\beta, q_\gamma$ de alguna asa de M ; podemos entonces cortar esta asa a lo largo de q_α y cerrar la variedad resultante con un disco para obtener una superficie M' de género $g - 1 < g$; por el Truco de Alexander podemos extender a $nh_1 h_2 \dots h_r h$ al disco con el que cerramos a M' y podemos aplicar inducción sobre el género de M . \square

Un resultado más fuerte que prueba Lickorish en [5], y que será de gran utilidad para este trabajo es el

Teorema 4.8. *Cualquier homeomorfismo h PL de una 2-variedad M cerrada, conexa, orientable, combinatoria es isotópico al producto de una sucesión de c -homeomorfismos sobre la siguiente colección de curvas, seguido posiblemente de una reflexión.*



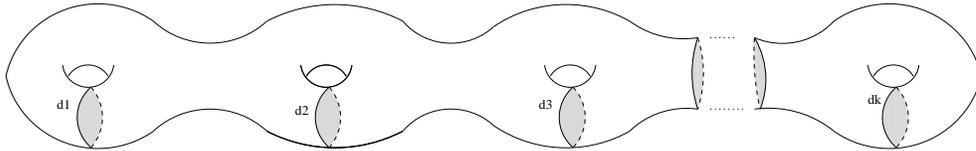


Capítulo 5

3-variedades y descomposiciones de Heegaard

Definición 5.1. *Un cubo con k -asas es una 3-variedad conexa con frontera una superficie tal que existen k discos ajenos propiamente encajados cuyo complemento es una 3-bola.*

Las fronteras de los discos propiamente encajados se llaman *meridianos*. La siguiente figura muestra un ejemplo de un cubo con k -asas.



Teorema 5.2 (Descomposición de Heegaard). *Sea M una 3-variedad cerrada conexa orientable. Entonces existen $V_1, V_2 \subset M$ cubos con asas tales que $M = V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 \cap \partial V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$.*

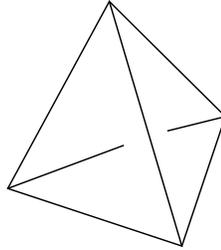
Demostración. Sea K una triangulación de M . Definamos

$V_1 :=$ vecindad regular del 1-esqueleto de K

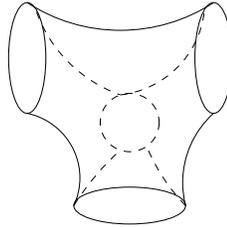
$V_2 := \overline{M \setminus V_1}$

Efectivamente tanto V_1 como V_2 son 3-variedades conexas con frontera una superficie. Verificaremos que cada una tiene k discos cuyo complemento es una 3-bola.

Para V_1 tomemos un disco propiamente encajado por cada arista que corte a V_1 precisamente en esa arista. Supongamos que tenemos r discos d_1, d_2, \dots, d_r cuyo complemento son dos componentes C_1 y C_2 , pegamos C_1 y C_2 por un disco d_1 , entonces los $k = r - 1$ discos de V_1 son d_2, d_3, \dots, d_r . Si existe otra componente C_3 , entonces se la pegamos a $C_1 \cup_{d_1} C_2$ por d_2 , y los $k = r - 2$ discos de V_1 son d_3, d_4, \dots, d_r y d_2 y así sucesivamente, es decir, si tenemos n componentes al cortar por los r discos, entonces $k = r - (n - 1)$.
 Veamos que pasa para V_2 . Supongamos que el 1-esqueleto es



Entonces un pedazo de V_2 se ve como



En general V_2 será unión de cosas como las de la figura anterior pegadas por la frontera, y los k discos de V_2 se obtienen de los 2-simplejos de M . Por lo tanto V_1 y V_2 son los cubos con asas que se buscan (y tienen el mismo género pues V_1 y V_2 comparten la frontera).

□

Definición 5.3. Sea M una 3-variedad conexa, definimos el género de Heegaard de M como sigue

$$h(M) = \min\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : M = V_1 \cup_f V_2, \quad V_i \text{ cubos con asas y } \text{gen}(\partial V_i) = k\}$$

A continuación vamos a demostrar que si $h(M) = 0$ entonces $M \cong S^3$

Demostración. Supongamos que $h(M) = 0$ entonces $\text{gen}(\partial V_i) = 0$ y $\partial V_i \cong S^2$. Luego $V_i \cong B^3$ por lo tanto $M = B^3 \cup_h B^3$.

CAPÍTULO 5. 3-VARIEDADES Y DESCOMPOSICIONES DE
HEEGAARD

Sabemos que $S^3 = B^3 \cup_{id} B^3$

Tenemos que:

$$M = \frac{B_1^3 \sqcup B_2^3}{x \sim h(x)} \quad h : \partial B_1^3 \rightarrow \partial B_2^3 \quad S^3 = \frac{B_1^3 \sqcup B_2^3}{x \sim x}$$

Ambos son cocientes

$$\begin{array}{ccc} B_1^3 \sqcup B_2^3 & & B_1^3 \sqcup B_2^3 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ M & & S^3 \end{array}$$

donde p_1 y p_2 son las proyecciones.

Queremos usar la Propiedad Universal del Cociente, es decir, encontrar una $f : B_1^3 \sqcup B_2^3 \rightarrow B_1^3 \sqcup B_2^3$ y usar la composición $p_2 f : B_1^3 \sqcup B_2^3 \rightarrow S^3$ para verificar que si $p_1(x) = p_2(y)$ entonces $p_2 f(x) = p_2 f(y)$ y así existirá una $\bar{f} : M \rightarrow S^3$ que resultará ser homeomorfismo.

Observemos que por el Truco de Alexander h se extiende a un homeomorfismo H

$$\begin{array}{ccc} \partial B_1^3 & \xrightarrow{h} & \partial B_2^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_1^3 & \xrightarrow{H} & B_2^3 \end{array}$$

Definamos:

$$\begin{aligned} f : B_1^3 \sqcup B_2^3 &\rightarrow B_1^3 \sqcup B_2^3 \\ z &\mapsto z \text{ si } z \in B_2^3 \\ z &\mapsto H(z) \text{ si } z \in B_1^3 \end{aligned}$$

Claramente f es continua. Supongamos que $p_1(u) = p_2(v)$ (si y sólo si $u = v$ o $h(u) = v$), queremos demostrar que $p_2 f(u) = p_2 f(v)$. Si $u = v$ es claro. Supongamos $h(u) = v$, es decir, $u \in \partial B_1^3$ y $v \in \partial B_2^3$, entonces $f(u) = H(u)$ y $f(v) = v$, por demostrar $p_2 H(u) = p_2(v)$. De $p_2 H(u) = p_2 h(u) = p_2(v)$. \square

Con una demostración análoga se obtiene el siguiente:

Lema 5.4. Si $M = V \cup_h V$ y $h : \partial V \rightarrow \partial V$ se extiende a $H : V \rightarrow V$, entonces $M \cong V \cup_{id} V$.

Y de este lema se obtiene:

Corolario 5.5. Sean $M = V \cup_h V$ y $N = V \cup_g V$ y $g^{-1}h : \partial V \rightarrow \partial V$ se extiende a $H : V \rightarrow V$. Entonces $M \cong N$.

Proposición 5.6. Sea V cubo con asas, $h : \partial V \rightarrow \partial V$ se extiende a $H : V \rightarrow V$ si y sólo si h manda a un sistema de meridianos de V en un sistema de meridianos de V .

Demostración. Un sistema de meridianos es el conjunto de las fronteras de los k discos ajenos de V cuyo complemento en V es una 3-bola.

\Leftarrow) Supongamos $h : \partial V \rightarrow \partial V$ manda un sistema de meridianos en un sistema de meridianos. Por demostrar que existe $H : V \rightarrow V$ tal que

$$H|_{\partial V} = h.$$

Tenemos $h_i = h|_{m_i} : m_i \rightarrow m_i$ donde m_i son los meridianos. Por el Truco de Alexander cada h_i se extiende a $H_i : k_i \rightarrow k_i$, donde k_i son discos tales que $\partial k_i = m_i$.

Por otro lado sabemos que al cortar a V por los k discos obtenemos una 3-bola B^3 y para la cual tenemos una función $h' : S^2 \rightarrow S^2$ definida por h . h' se extiende a $H' : B^3 \rightarrow B^3$ (otra vez por Alexander). Con todo esto definimos

$$\begin{aligned} H : V &\rightarrow V \\ x &\mapsto H_i(x) \text{ si } x \in k_i \\ x &\mapsto H'(x) \text{ si } x \in V \setminus k_i \end{aligned}$$

\Rightarrow) Obvio. □

Proposición 5.7. Sea M una 3-variedad compacta, $W \subset \text{int}M$ 3-subvariedad conexa compacta. ∂W compacta. $X = \overline{M \setminus W}$. Supongamos $M = X \cup_f W$ con $f : \partial W \rightarrow \partial X$ homeomorfismo. Sea $h : \partial W \rightarrow \partial W$ homeomorfismo y sea $M' = X \cup_{fh} W$. Si h es isotópica a la identidad, entonces $M' \cong M$.

Demostración. Como h es isotópica a id , entonces h^{-1} también es isotópica a la identidad y existe

$$\begin{aligned} H : \partial W \times I &\rightarrow \partial W \times I \quad \text{tal que} \\ H(w, 0) &= (h^{-1}(w), 0) \\ H(w, 1) &= (w, 1) \end{aligned}$$

H es homeomorfismo y $H(w, t) = (\xi(w), t)$ para todo t, w

CAPÍTULO 5. 3-VARIEDADES Y DESCOMPOSICIONES DE
HEEGAARD

Por otro lado sabemos que: Existe $V \subset W$ tal que V es vecindad de ∂W en W y $V \cong \partial W \times I$, es decir, existe $\alpha : V \rightarrow \partial W \times I$ homeomorfismo tal que $\alpha(\partial W) = \partial W \times \{0\}$ y $\alpha(w) = (w, 0)$ para $w \in \partial W$.

Observemos que:

$$M = \frac{X \sqcup W}{x \sim f(x)} \quad M' = \frac{X \sqcup W}{x \sim fh(x)}$$

Queremos definir $g : X \sqcup W \rightarrow X \sqcup W$ tal que si $p_1(u) = p_1(v)$ entonces $p_2g(u) = p_2g(v)$ para completar el siguiente cuadrado (por la Propiedad Universal del Cociente)

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup W & \xrightarrow{g} & X \sqcup W \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ M & \xrightarrow{\bar{g}} & M' \end{array}$$

Definamos

$$g(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \in \overline{W \setminus V} \\ \alpha^{-1}H\alpha(z) & \text{si } z \in V \end{cases}$$

g es continua pues coincide en $V \cap \overline{W \setminus V}$ y está bien definida.

Supongamos $p_1(u) = p_1(v)$ esto pasa si y sólo si $u = v$ o $f(u) = v$. Si $u = v$ entonces $p_2g(u) = p_2g(v)$. Si $f(u) = v$, entonces $u \in \partial W$ y $v \in \partial X$ y por lo tanto $g(v) = v$ y $g(u) = \alpha^{-1}H\alpha(u)$. Por demostrar $p_2g(u) = p_2g(v)$, que es equivalente a demostrar que $fh\alpha^{-1}H\alpha(u) = v$.

$$fh\alpha^{-1}H\alpha(u) = fh\alpha^{-1}(h^{-1}(u), 0) = fh h^{-1}(u) = f(u) = v.$$

Por lo tanto $p_2g(u) = p_2g(v)$. □



Capítulo 6

Cubiertas ramificadas

Definición 6.1. Una función $\varphi : M^m \rightarrow N^m$ entre variedades se llama cubierta ramificada si es finita a uno, abierta, continua y propia. Finita a uno quiere decir que $\#\varphi^{-1}(x)$ es finito para todo $x \in N^m$. Abierta que para todo $U \subset M^m$ abierto $\varphi(U) \subset N^m$ es abierto. Propia que cumpla que $\varphi^{-1}(\partial N^m) = \partial M^m$.

En los ejemplos que nos interesan el conjunto de puntos de M^m en los que φ no es homeomorfismo local, es un subpoliedro de M^m de codimensión dos (se sabe que ésto es cierto en general). Este conjunto se llama conjunto singular. La imagen en N^m del conjunto singular de la cubierta ramificada φ se llama conjunto de ramificación y se denota por B_φ , el cual también es un subpoliedro de codimensión dos. Las fibras de φ son los subconjuntos finitos $\varphi^{-1}(y)$, $y \in N^m$. Una fibra $\varphi^{-1}(y)$ es principal si $y \in N^m \setminus B_\varphi$.

OBSERVACIÓN: $\varphi : M^m \rightarrow N^m$ es una cubierta ramificada si y sólo si φ es continua, abierta y $\varphi : M^m \setminus \varphi^{-1}(B_\varphi) \rightarrow N^m \setminus B_\varphi$ es un espacio cubriente finito.

Dos cubiertas ramificadas $\varphi_0, \varphi_1 : M^m \rightarrow N^m$ son equivalentes si existen homeomorfismos $f : M^m \rightarrow M^m$ y $g : N^m \rightarrow N^m$ tales que $g\varphi_0 = \varphi_1 f$. Son b-homotópicas si existe una homotopía $\theta_t : M^m \rightarrow N^m$, $0 \leq t \leq 1$, tal que $\theta_0 = \varphi_0$, $\theta_1 = \varphi_1$, y cada θ_t es una cubierta ramificada.

Si $\varphi : M^m \rightarrow N^m$ es una cubierta ramificada, el grado de φ o el número de hojas de φ , $\text{grad}(\varphi)$, es la cardinalidad máxima de una fibra.

6.1 Clasificación de cubiertas ramificadas en dimensión dos

OBSERVACIÓN: Si $\varphi : M^2 \rightarrow N^2$ es una cubierta ramificada entre superficies, entonces B_φ es un conjunto finito de puntos de N^2 .

Proposición 6.2. *Sea $\varphi : M^2 \rightarrow N^2$ una cubierta ramificada. Sea $p \in B_\varphi$, $D \subset N^2$ disco tal que $p \in \text{int}(D)$ y $D \cap B_\varphi = \{p\}$. Sea $U \subset \varphi^{-1}(D)$ componente conexa. Entonces*

1. U es un disco
2. $\varphi|_U$ es equivalente a $z \mapsto z^k$ $k \geq 2$, para $z \in D^2 \subset \mathbb{C}$

Demostración. $\varphi|_U : U \rightarrow D$ es sobre, continua, abierta y finita a uno, es decir, es cubierta ramificada. $\varphi|_{U \setminus \varphi^{-1}(p)} : U \setminus \varphi^{-1}(p) \rightarrow D \setminus \{p\}$ es espacio cubriente, sabemos que $\pi_1(D \setminus \{p\}) = \mathbb{Z}$ y $\pi_1(U \setminus \varphi^{-1}(p)) \subset \pi_1(D \setminus \{p\}) = \mathbb{Z}$ Y por el lema siguiente:

Lema 6.3. *Sea $H \leq \mathbb{Z}$ subgrupo entonces $H = \{0\}$ o $H = k\mathbb{Z}$.*

Así que $\pi_1(U \setminus \varphi^{-1}(p)) = k\mathbb{Z}$ y tal k es la de la función $z \rightarrow z^k$. Por otro lado $\varphi|_{U \setminus \varphi^{-1}(p)}$ es finita, orientable, compacta y $\chi(U \setminus \varphi^{-1}(p)) = 0$ por lo tanto $U \setminus \varphi^{-1}(p)$ es un anillo y $\varphi^{-1}(p) = \{\text{punto}\}$, así que U es un disco. \square

A este número k se le llama grado local de $x \in M^2$, y se denota por $\text{grad}(\varphi, x) = k$.

Proposición 6.4. *Sea $\varphi : M^2 \rightarrow N^2$ cubierta ramificada de grado n , entonces*

$$\chi(M^2) = n\chi(N^2) - \Sigma(\text{grad}(\varphi, x) - 1)$$

donde la suma se extiende sobre todo x en el conjunto singular de φ . Esta expresión recibe el nombre de fórmula de Riemann-Hurwitz.

Demostración. Supongamos que $N^2 = D^2$ y que φ sólo tiene un punto de ramificación y $\text{grad}(\varphi, x) = n$.

Entonces $M^2 = D^2$, ya que si tomamos V una vecindad regular de B_φ entonces $\varphi|_{M^2 \setminus \varphi^{-1}(\text{int}V)} : M^2 \setminus \varphi^{-1}(\text{int}V) \rightarrow D^2 \setminus V$ es espacio cubriente, y se tiene que $\chi(M^2 \setminus \varphi^{-1}(\text{int}V)) = 0$ y como $M^2 \setminus \varphi^{-1}(\text{int}V)$ es orientable, conexo y con dos fronteras, entonces es un anillo, por lo tanto $M^2 = D^2$.

Luego $n\chi(D^2) - (n - 1) = n - n + 1 = 1$ y $\chi(M^2) = 1$.

Tomemos N^2 que no sea disco y $B_\varphi = \{q_j\}_{j=1}^m$, sea V una vecindad regular de los puntos de ramificación en N^2 entonces $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_m$ donde $V_j \cong D^2$ es vecindad de q_j y $V_j \cap B_\varphi = \{p_j\}$ para $j = 1, 2, \dots, m$. Entonces $\varphi| : M^2 \setminus \varphi^{-1}(\text{int}V) \rightarrow N^2 \setminus \text{int}V$ es espacio cubriente, por lo tanto

$$\chi(M^2 \setminus \varphi^{-1}(\text{int}V)) = n\chi(N^2 \setminus \text{int}V).$$

$\varphi^{-1}(V_j) = V_{j1} \sqcup V_{j2} \sqcup \dots \sqcup V_{jk_j}$. Sea $p_{jl} \in V_{jl}$ para $l = 1, 2, \dots, k_j$. Sea $d_{jl} = \text{grad}(\varphi, p_{jl})$ y $\sum_{l=1}^{k_j} d_{jl} = n$ para $j = 1, 2, \dots, m$.

$$\begin{aligned} \chi(N^2 \setminus \text{int}(V)) + m &= \chi(N^2) \\ \chi(M^2 \setminus \varphi^{-1}(\text{int}V)) + \sum_{j=1}^m k_j &= \chi(M^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi(M^2) &= \chi(M^2 \setminus \varphi^{-1}(\text{int}V)) + \sum_{j=1}^m k_j = n\chi(N^2 \setminus \text{int}V) + \sum_{j=1}^m k_j = \\ &= n(\chi(N^2) - m) + \sum_{j=1}^m k_j = n\chi(N^2) - nm + \sum_{j=1}^m k_j = \\ &= n\chi(N^2) - \sum_{l=1}^{k_1} d_{1l} - \sum_{l=1}^{k_2} d_{2l} - \dots - \sum_{l=1}^{k_m} d_{ml} + \sum_{j=1}^m k_j = \\ &= n\chi(N^2) - (\sum_{l=1}^{k_1} d_{1l} - k_1) - (\sum_{l=1}^{k_2} d_{2l} - k_2) - \dots - (\sum_{l=1}^{k_m} d_{ml} - k_m) = \\ &= n\chi(N^2) - \sum_{l=1}^{k_1} (d_{1l} - 1) - \sum_{l=1}^{k_2} (d_{2l} - 1) - \dots - \sum_{l=1}^{k_m} (d_{ml} - 1) = \\ &= n\chi(N^2) - \sum_{l=1, j=1}^{k_j, m} (\text{grad}(\varphi, p_{jl}) - 1) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\chi(M^2) = n\chi(N^2) - \sum (\text{grad}(\varphi, x) - 1)$$

donde la suma varía sobre todos los puntos singulares. \square

Una cubierta ramificada $\varphi : M^2 \rightarrow N^2$ está determinada por el espacio cubriente $\varphi_0 : M^2 \setminus \varphi^{-1}(B_\varphi) \rightarrow N^2 \setminus B_\varphi$. Y éste queda determinado por un homomorfismo $\rho_\varphi : \pi_1(N^2 \setminus B_\varphi, *) \rightarrow S_n$, donde S_n denota el n -grupo simétrico en n símbolos y $* \in N^2 \setminus B_\varphi$ es un punto base. La representación ρ_φ está determinada módulo automorfismos interiores de S_n al escoger una correspondencia 1 a 1 $\varphi^{-1}(*) \leftrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ y asignamos a un lazo $\alpha \in N^2 \setminus B_\varphi$ basado en $*$ la permutación de $\{1, 2, \dots, 3\}$ inducida al levantar α en los distintos puntos de $\varphi^{-1}(*)$

Teorema 6.5 (Teorema de Clasificación de Hurwitz). *Dos cubiertas ramificadas $\varphi, \psi : M_i^2 \rightarrow N^2, i = 1, 2$ son equivalentes si y sólo si existe un homeomorfismo $h : (N^2, B_\varphi, *) \rightarrow (N^2, B_\psi, *)$ tal que $\rho_\varphi = \rho_\psi h_*$.*

Demostración. \Rightarrow) Sean $\varphi, \psi : M_i^2 \rightarrow N^2, i = 1, 2$ cubiertas ramificadas equivalentes, entonces existen $f : M_1^2 \rightarrow M_2^2$ y $g : N^2 \rightarrow N^2$ homeomorfismos tales que $\psi f = g\varphi$.

Sea $h = g$ por demostrar

6.1. CLASIFICACIÓN DE CUBIERTAS RAMIFICADAS EN DIMENSIÓN DOS

1. $g(B_\varphi) = B_\psi$,

2. $\rho_\varphi = \rho_\psi g_*$.

1) Sea $x \in g(B_\varphi) \Rightarrow \exists y \in B_\varphi \ni g(y) = x$.

Por demostrar $x \in B_\psi$, es decir para cada vecindad V de x y alguna componente U de $\psi^{-1}(V)$, $\psi|U$ no es homeomorfismo. Sea V' vecindad de y . Sea U' una componente de $\varphi^{-1}(V')$. Tomemos $f(U') = U$ y $g(V') = V$. Entonces $\psi|U$ no es homeomorfismo ya que si lo fuera, implicaría que $\varphi|U'$ sería homeomorfismo también. Por lo tanto $x \in B_\psi$.

Para demostrar que $B_\psi \subset g(B_\varphi)$ se procede de la misma manera sólo que ahora tomamos inversas de f y g .

2) Por demostrar $\rho_\varphi = \rho_\psi g_*$. Sea $w \in \pi_1(N \setminus B_\varphi)$, queremos ver que $\rho_\varphi w = \rho_\psi g_* w$. Sea $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, verificaremos que $\rho_\varphi w(j) = \rho_\psi g_* w(j)$. Si \tilde{w} es un levantamiento de w bajo φ tal que $\tilde{w}(0) = j$, entonces $\tilde{w}(1) := \rho_\varphi w(j)$. Si $\tilde{g}\tilde{w}$ es un levantamiento de $g\tilde{w}$ bajo ψ tal que $\tilde{g}\tilde{w}(0) = f(j)$, entonces $\tilde{g}\tilde{w}(1) := \rho_\psi g_* w(j)$. Como $\psi f = f\varphi$, por lo tanto $f\tilde{w}(1) = \tilde{g}\tilde{w}(1)$.

\Leftrightarrow) Usaremos el teorema de espacios cubrientes:

Sea $\tilde{\varphi} : X \rightarrow Z$, $\tilde{\psi} : Y \rightarrow Z$, espacios cubrientes, si $\tilde{\varphi}_\# \pi_1(X)$ y $\tilde{\psi}_\# \pi_1(Y)$ son conjugados. Entonces existe $f : X \rightarrow Y$ homeomorfismo que conmuta con $\tilde{\varphi}$ y con $\tilde{\psi}$.

Supongamos que existe $h : (N^2, B_\varphi, *) \rightarrow (N^2, B_\psi, *)$ tal que $\rho_\varphi = \rho_\psi h_*$ implica que $\varphi_\# \pi_1(N^2 \setminus B_\varphi)$ y $\psi_\# \pi_1(N^2 \setminus B_\psi)$ son conjugados. Tomemos $\tilde{\varphi} : M_1^2 \setminus \varphi^{-1}(B_\varphi) \rightarrow N^2 \setminus B_\varphi$ y $\tilde{\psi} : M_2^2 \setminus \psi^{-1}(B_\psi) \rightarrow N^2 \setminus B_\psi$ ambos son espacios cubrientes. Entonces existe $\tilde{f} : M_1^2 \setminus \varphi^{-1}(B_\varphi) \rightarrow M_2^2 \setminus \psi^{-1}(B_\psi)$ homeomorfismo. Usamos el Truco de Alexander en vecindades de los puntos de B_φ y B_ψ para extender \tilde{f} y obtener $f : M_1^2 \rightarrow M_2^2$ homeomorfismo, y a la vez extendemos $\tilde{\varphi}$ y $\tilde{\psi}$ y por lo tanto $\psi f = h\varphi$ y por lo tanto φ y ψ son equivalentes. \square

Teorema 6.6 (Teorema de Existencia de Hurwitz). *Para un conjunto finito $B \subset N^2$ y una representación transitiva $\rho : \pi_1(N^2 \setminus B, *) \rightarrow S_n$ existe una cubierta ramificada de n hojas $\varphi : M^2 \rightarrow N^2$ con $B_\varphi \subset B$ y $\rho_\varphi = \rho$.*

Demostración. Para esta esta prueba es necesario el siguiente:

Lema 6.7. Sean M y N superficies, $B \subset N$, $A \subset M$ conjuntos finitos, $\tilde{\varphi} : M \setminus A \rightarrow N \setminus B$ espacio cubriente. Entonces existe $\varphi : M \rightarrow N$ cubierta ramificada tal que $\varphi|_{M \setminus A} = \tilde{\varphi}$.

Demostración. Lo que deseamos hacer es extender $\tilde{\varphi}$. Supongamos que $\#B = 1$, $B = \{x\}$. Sea D un disco alrededor de x . Tomemos $\tilde{\varphi}(D)$, tenemos los siguientes casos:

i) $\tilde{\varphi}^{-1}(D) \in M \setminus A$, en este caso $\varphi = \tilde{\varphi}$

ii) $\tilde{\varphi}^{-1}(D) \in A$ y la imagen no está en B , aquí tampoco hay problema

iii) $\tilde{\varphi}^{-1}(D) \in A$ y la imagen no está en B . Usamos el Truco de Alexander.

El resto es por inducción sobre $\#B$. \square

Para el teorema tenemos que $\rho : \pi_1(N^2 \setminus B, *) \rightarrow S_n$ induce un espacio cubriente de alguna M^2 , así tenemos $\tilde{\varphi} : M^2 \rightarrow N^2 \setminus B$ espacio cubriente. Por el lema, existe $\varphi : M^2 \sqcup F \rightarrow N^2$ cubierta ramificada tal que $B_\varphi \subset B$, la representación de esta cubierta es $\rho_\varphi : \pi_1(N^2 \setminus B, *) \rightarrow S_n$, para la cual se tiene que $\rho_\varphi(a_i) = 1$ si $a \in B \setminus B_\varphi$, y $\rho_\varphi(a_i) = \rho(a_i)$ si $a_i \in B_\varphi$ y $a_i \notin B$, por lo tanto $\rho_\varphi = \rho$. \square

6.2 Cubiertas ramificadas simples

Definición 6.8. Una cubierta ramificada $\varphi : M^m \rightarrow N^m$ de grado $n \geq 2$ es simple si para cada $x \in N^m$ la fibra $\varphi^{-1}(x)$ sobre x consiste de al menos $n - 1$ puntos. Y, por lo tanto, contiene a lo más un punto singular de grado local dos en cada fibra.

En el caso de una cubierta simple ramificada $\varphi : M^2 \rightarrow N^2$, donde M^2 y N^2 son 2-variedades, la fórmula de Riemann-Hurwitz toma la forma

$$\chi(M^2) = n\chi(N^2) - k$$

donde k es la cardinalidad del conjunto de ramificación B_φ y $n = \text{grad}(\varphi)$. Similarmente el sistema de Hurwitz para φ es especialmente simple ya que todas sus permutaciones resultan ser transposiciones en S_n .

Teorema 6.9 (Teorema de Unicidad). Si M^2 es una 2-variedad conexa, entonces cualesquiera dos cubiertas simples $\varphi_0, \varphi_1 : M^2 \rightarrow S^2$ de n hojas son equivalentes.

6.2. CUBIERTAS RAMIFICADAS SIMPLES

Por el Teorema de Clasificación de Hurwitz la prueba se reduce a la manipulación combinatoria de “sistemas de Hurwitz”.

Por la fórmula de Riemann-Hurwitz observamos que:

$$\chi(M^2) = n\chi(S^2) - \#B_{\varphi_0}$$

$$\chi(M^2) = n\chi(S^2) - \#B_{\varphi_1}$$

implica $\#B_{\varphi_0} = \#B_{\varphi_1} = \#B$, es decir, se puede suponer que ambas cubiertas tienen el mismo conjunto de ramificación B . Por una isotopía de S^2 podemos tomar el mismo punto base $* \in S^2 \setminus B$. Sean $\rho_0, \rho_1 : \pi_1(S^2 \setminus B, *) \rightarrow S_n$ las representaciones correspondientes que determinan a φ_0 y φ_1 . Por el Teorema de Clasificación de Hurwitz es suficiente encontrar un homeomorfismo $f : (S^2, B, *) \rightarrow (S^2, B, *)$ tal que

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^2 \setminus B, *) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(S^2 \setminus B, *) \\ & \searrow \rho_0 & \swarrow \rho_1 \\ & S_n & \end{array}$$

conmuta.

Escogemos una orientación de S^2 y describimos ρ_0 (o ρ_1) por una sucesión $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ de permutaciones en S_n tal que

- 1) $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k = 1$.
- 2) Cada α_i es transposición (φ_0 es simple).
- 3) $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ genera un grupo transitivo en S_n para algún n .

Es suficiente encontrar un homeomorfismo $f : (S^2, B, *) \rightarrow (S^2, B, *)$ que convierta a A en una sucesión de transposiciones para φ_1 . Mejor aun es suficiente poner la sucesión A en una forma canónica que sólo dependa de n y k .

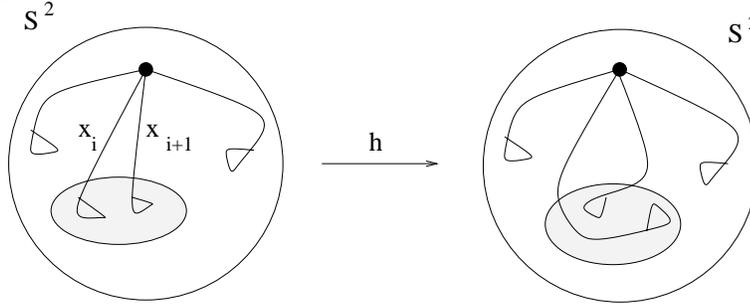
La operación básica está dada por el:

Lema 6.10. *Existe un homeomorfismo $h : (S^2, B, *) \rightarrow (S^2, B, *)$ que efectúa el siguiente cambio:*

$$(\dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \dots) \mapsto (\dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i \alpha_{i+1} \alpha_i, \alpha_i, \alpha_{i+2}, \dots)$$

CAPÍTULO 6. CUBIERTAS RAMIFICADAS

Demostración. Escogemos un disco que contiene a b_i y b_{i+1} en S^2 y giramos b_i, b_{i+1} junto con el interior del disco 180 grados hacia la izquierda y vemos el efecto que tiene sobre A . Fuera del disco no sucede nada.



$$h_* : \pi_1(S^2 \setminus B) \rightarrow \pi_1(S^2 \setminus B)$$

$$x_1 \mapsto x_1$$

$$x_2 \mapsto x_2$$

$$\vdots$$

$$x_{i-1} \mapsto x_{i-1}$$

$$x_i \mapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1}$$

$$x_{i+1} \mapsto x_i$$

$$x_{i+2} \mapsto x_{i+2}$$

$$\vdots$$

$$x_k \mapsto x_k$$

Además esta operación conserva la transitividad, es decir, si: $\{\dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots\}$ es transitiva entonces $\{\dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i \alpha_{i+1} \alpha_i, \alpha_i, \dots\}$ es transitiva. Para ver este hecho supongamos que

$$\alpha_i = (x_1 x_2) \text{ y}$$

$$a) \alpha_{i+1} = (x_2 x_3) \text{ o}$$

$$b) \alpha_{i+1} = (x_3 x_4) \text{ o}$$

$$c) \alpha_{i+1} = (x_1 x_2)$$

Si pasa (a) se tiene $\alpha_i \alpha_{i+1} \alpha_i = (x_1 x_3)$.

Si pasa (b), entonces $\alpha_i \alpha_{i+1} \alpha_i = (x_3 x_4)$.

6.2. CUBIERTAS RAMIFICADAS SIMPLES

Y si pasa (c) se tiene $\alpha_i \alpha_{i+1} \alpha_i = (x_1 x_2)$.

En los tres casos se conserva la transitividad. \square

Esta operación y su inversa no alteran las propiedades (1),(2) y (3) de A .

Lema 6.11. *Sea $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ la sucesión con las propiedades (1), (2) y (3). Si $\alpha_1 = (x_1 \ x_2)$ y z es un símbolo, entonces A es equivalente a*

$$(\beta_1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1})$$

donde $\beta_1 = (z \ x_2)$.

Demostración. Sea $\alpha_1 = (x_1 x_2)$ entonces podemos encontrar algún subsecuente $\alpha_i = (x_2 x_3)$. De no ser así se tendría que $\alpha_i(x_2) = x_2$ para todo i , es decir, x_2 se queda fijo y $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k(x_1) = x_2$, lo que es una contradicción. Al aplicar la inversa de la operación del Lema 6.10 podemos asumir que $\alpha_i = \alpha_2$ y similarmente para $\alpha_3 = (x_3 x_4), \alpha_4 = (x_4 x_5), \dots$, hasta encontrar un $\alpha_r = (x_r z)$. Movemos α_{r-1} al r -ésimo lugar

$$(\dots, (x_{r-1} x_r), (x_r x_1), \dots) \mapsto (\dots, (x_{r-1} x_1), (x_{r-1} x_r) \dots)$$

y obtenemos un nuevo $\alpha_{r-1} = (x_{r-1} z)$. Aplicamos esta operación hasta hallar $\alpha_2 = (x_2 z)$, al cambiar a α_2 al primer lugar obtenemos la sucesión

$$((x_2 z), (x_1 x_2), \dots, (x_{r-1} x_r)).$$

\square

Ahora el Teorema de Unicidad se reduce al siguiente resultado:

Proposición 6.12. *Cualquier sucesión $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ en S_n que satisfice (1),(2) y (3) se puede poner de manera canónica*

$$(12), (12), \dots, (12), (12), (23), (23), (34), (34), \dots, (n-1 \ n), (n-1 \ n)$$

usando la operación del Lema 6.10 y su inversa.

Demostración. De $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k = 1$ se tiene que k es par, de otra manera se tendría que $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{k-1} = \alpha_k$, el lado izquierdo de esta igualdad es una permutación par y el lado derecho es impar, lo cual es una contradicción.

Usaremos inducción sobre k para demostrar que podemos reordenar a A de tal manera que $\alpha_{2i-1} = \alpha_{2i}$ para $i = 1, 2, \dots, m$ y $k = 2m$.

Si $k = 2$ entonces $A = (\alpha_1, \alpha_2)$ por la propiedad (1) se tiene $\alpha_1 \alpha_2 = 1$ lo que implica $\alpha_1 = \alpha_2$.

Supongamos que la Proposición es cierta para $n < k$. Supongamos que

CAPÍTULO 6. CUBIERTAS RAMIFICADAS

$\alpha_1 = (x_1x_2)$ entonces por el lema anterior, tenemos $\alpha_2 = \alpha_1$. Si x_1 o x_2 aparece en algún α_i para $i > 2$, volvemos a aplicar el lema anterior hasta obtener una sucesión

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2i}, \alpha_{2i+1}, \dots, \alpha_k)$$

tal que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{2i} = (x_1x_2)$ y α_j deja fijo a x_1 o a x_2 para $j = 2i + 1, \dots, k$.

Entonces por hipótesis de inducción la sucesión

$$(\alpha_{2i+1}, \dots, \alpha_k)$$

aplicada al simétrico con un símbolo menos, cumple lo que deseamos.

Así tenemos la sucesión

$$(x_1x_2), (x_1x_2), \dots, (x_1x_2), (x_1x_2), (x_2x_3), (x_2x_3), \dots, (x_{r-1}x_r), (x_{r-1}x_r).$$

Usamos el lema anterior para obtener

$$(12), (12), (12), (12), \dots, (12), (12), (23), (23), \dots, (34), (34), \dots, (r-1 \ r), (r-1 \ r)$$

Observemos que puede haber mas de dos transposiciones $(i-1 \ i)$ para $i \geq 3$, pero con las siguientes operaciones que se derivan del Lema 6.10

- 1.- $(\dots, x, x, y, \dots) \rightarrow (\dots, y, x, x, \dots)$
- 2.- $(\dots, x, x, y, y, \dots) \rightarrow (\dots, yxy, yxy, y, y, \dots)$

podemos obtener la sucesión con un número par de transposiciones (12) y parejas de transposiciones $(i-1 \ i)$ para $i \geq 3$.

Por ejemplo, sea la sucesión

$$(12), (12), (12), (12), (23), (23), (23), (23)$$

por (1)

$$(12), (12), (23), (12), (12), (23), (23), (23)$$

otra vez por (1)

$$(12), (12), (23), (23), (12), (12), (23), (23)$$

usamos (2)

$$(12), (12), (23), (23), (13), (13), (23), (23)$$

nuevamente por (2)

$$(12), (12), (12), (12), (13), (13), (23), (23)$$

6.3. REALIZACIÓN DE HOMEOMORFISMOS EN CUBIERTAS
SIMPLES RAMIFICADAS

y finalmente usamos (2)

$$(12), (12), (12), (12), (12), (12), (23), (23).$$

□

6.3 Realización de homeomorfismos en cubiertas simples ramificadas

Definición 6.13 (Giro de arco). Sea a un arco en N^2 definimos el giro de arco $t(a) : N^2 \rightarrow N^2$ como sigue: Sea D un disco vecindad de a ; fuera de D definimos $t(a)$ como la identidad, en D definimos $t(a)$ como un giro de 180 grados en la dirección de la orientación de ∂D , de manera que manda al arco a en sí mismo con los extremos intercambiados.

OBSERVACIÓN: Un giro de arco es isotópico a la identidad.

Teorema 6.14. Sea M^2 una 2-variedad conexa, sea $\varphi : M^2 \rightarrow S^2$ una cubierta simple ramificada de $n \geq 3$ hojas y sea $f : M^2 \rightarrow M^2$ un homeomorfismo. Entonces existen homeomorfismos $h : M^2 \rightarrow M^2$ y $\bar{h} : S^2 \rightarrow S^2$ tales que h es isotópica a f y el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M^2 & \xrightarrow{h} & M^2 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ S^2 & \xrightarrow{\bar{h}} & S^2 \end{array}$$

conmuta.

Demostración. Antes necesitamos el siguiente:

Lema 6.15. Sea $\varphi : A \rightarrow D$ una cubierta de dos hojas donde A es un anillo, D un 2-disco, y el conjunto de ramificación es $B = \{y_1, y_2\} \subset D$. Entonces el giro sobre el arco a que conecta y_1 con y_2 en D se levanta (salvo isotopía rel frontera en A) a un giro en el ánima de A , $t(\varphi^{-1}(a))$.

Demostración. Lo que se quiere demostrar es que

$$\begin{array}{ccccc} & & & & A \\ & & & & \downarrow \varphi \\ A & \xrightarrow{t(\varphi)} & D & \xrightarrow{t(a)} & D \end{array}$$

CAPÍTULO 6. CUBIERTAS RAMIFICADAS

Por la Proposición 3.6 esta demostración se reduce a demostrar que

$$t(a)_\# \varphi_\# \pi_1(A \setminus \varphi^{-1}(B)) \subset \varphi_\# (\pi_1(A \setminus \varphi^{-1}(B)))$$

Veamos que $\varphi_\# \pi_1(A \setminus \varphi^{-1}(B_\varphi)) = \langle x_1^2, x_1 x_2^{-1}, x_1 x_2 \rangle$ y

$$\begin{aligned} t(a)_\#(x_1) &= x_2 \\ t(a)_\#(x_2) &= x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 \end{aligned}$$

Aplicamos $t(a)_\#$ a cada generador de $\varphi_\# \pi_1(A \setminus \varphi^{-1}(B_\varphi))$

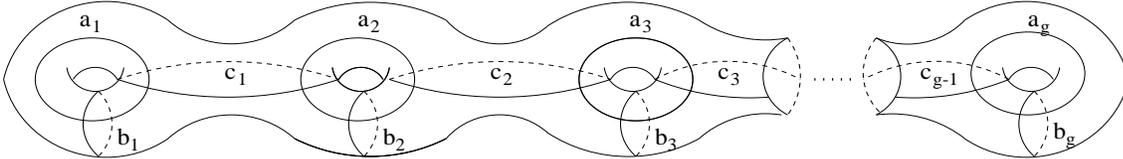
$$\begin{aligned} t(a)_\#(x_1^2) &= x_2^2 \\ t(a)_\#(x_1 x_2^{-1}) &= x_1 x_2 \\ t(a)_\#(x_1 x_2) &= x_1^{-1} x_2 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\langle x_2^2, x_1 x_2, x_1^{-1} x_2 \rangle \subset \varphi_\# \pi_1(A \setminus \varphi^{-1}(B_\varphi))$$

□

Sea S^2 con una orientación fija y M^2 orientada de manera que φ conserve la orientación. Sea M^2 de género g y sean a_i, b_i con $i = 1, 2, \dots, g$ y c_i con $i = 1, 2, \dots, g-1$ las curvas en M^2 que se indican en la siguiente figura

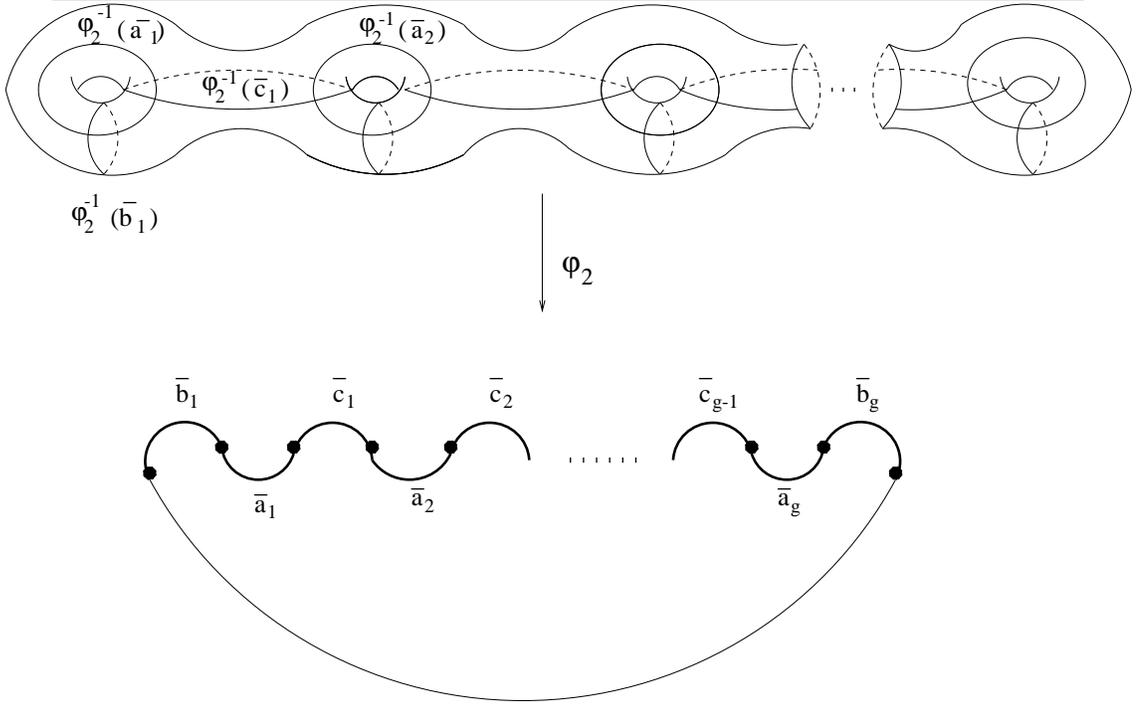


Probaremos que cada uno de los giros en estas $3g - 1$ curvas se realiza salvo isotopía por un levantamiento de giros en S^2 . Esto completa la prueba cuando f conserva la orientación ya que Lickorish ha mostrado que tal f es isotópica a una composición de giros en esta colección de curvas. Ver el Capítulo 3.

Sea M_0^2 una copia de M^2 y sea $\varphi_2 : M_0^2 \rightarrow S^2$ una cubierta ramificada de dos hojas, que es la proyección natural del cociente de la involución T que gira M_0^2 180 grados sobre el eje horizontal, (cubierta de dos hojas).

$\#B_{\varphi_2} = 2g + 2$, y el sistema de Hurwitz le asigna a las curvas alrededor de estos puntos la transposición $(12) \in S_2$. Por la fórmula de Riemann-Hurwitz φ_2 es efectivamente una cubierta de S^2 .

6.3. REALIZACIÓN DE HOMEOMORFISMOS EN CUBIERTAS
SIMPLES RAMIFICADAS



Veamos que si tomamos una vecindad regular anular de las curvas $\varphi_2^{-1}(\bar{a}_i), \varphi_2^{-1}(\bar{c}_i), \varphi_2^{-1}(\bar{b}_1)$ y $\varphi_2^{-1}(\bar{b}_g)$ resulta que φ_2 es equivalente a la cubierta ramificada del Lema anterior. Así tenemos que el giro en estos arcos \bar{a}_i, \bar{c}_i se levanta a giros en las curvas a_i, c_i, b_1, b_g . No es claro que que los giros en b_2, b_3, \dots, b_{g-1} se puedan realizar de esta manera y por un cálculo como en el Lema anterior, de hecho es imposible.

Sea $(n-2)S^2$ la unión ajena de $(n-2)$ copias de S^2 y extendemos φ_2 a una cubierta de grado n

$$\varphi'_n : M_0^2 \cup (n-2)S^2 \rightarrow S^2$$

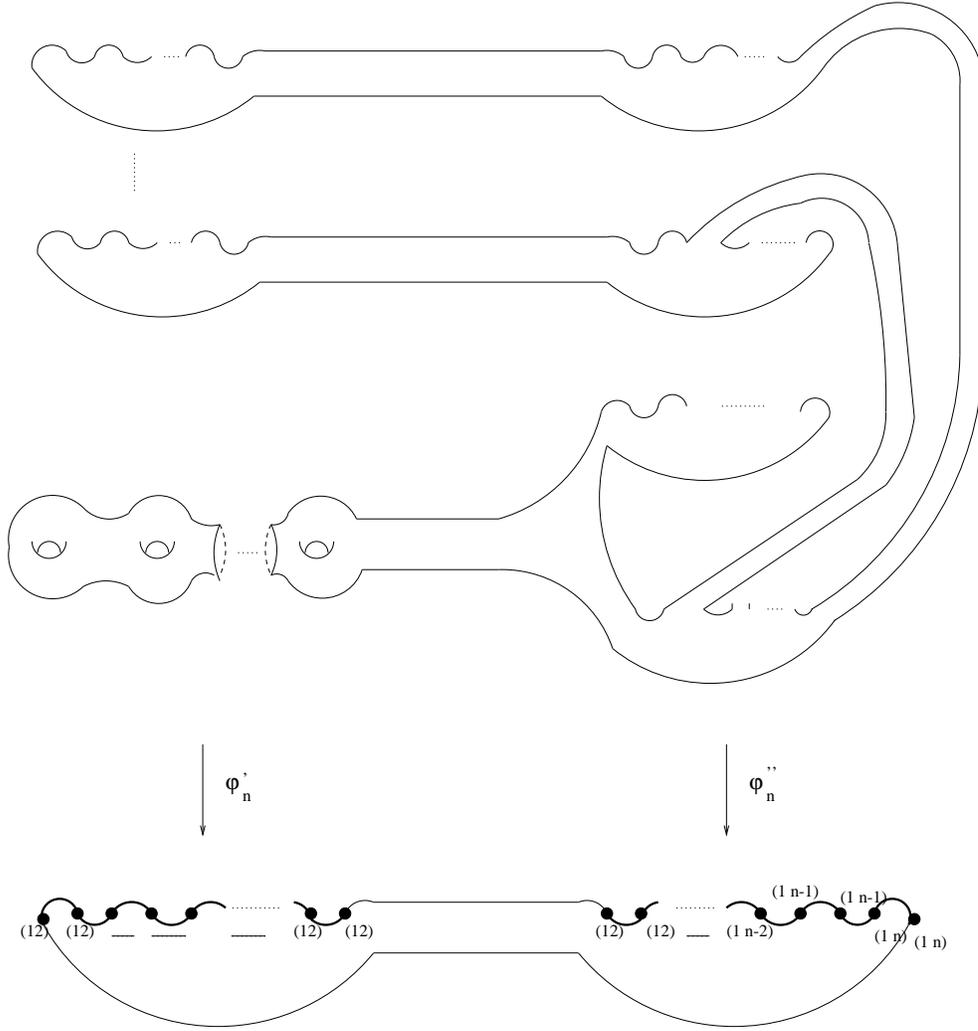
para $(n-2)S^2$ definimos a φ'_n como la identidad. Sea φ''_n una cubierta simple de grado n , $\varphi''_n : S^2 \rightarrow S^2$. Su sistema de Hurwitz le asigna, por el Teorema de Existencia de Hurwitz, las transposiciones:

$$(12), (12), (13), (13), \dots, (1n), (1n)$$

al conjunto de ramificación.

Sea $\varphi_n : (M_0^2 \cup (n-2)S^2) \#_f S^2 \rightarrow S^2 \# S^2$ obtenida de φ'_n y de φ''_n mediante

la suma conexas en un punto de ramificación el que le corresponda una transposición (12)

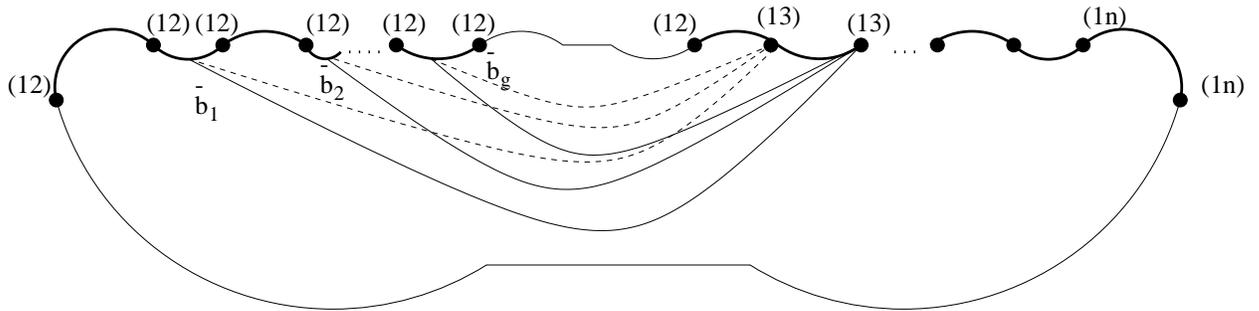


Como $(M_0^2 \cup (n-2)S^2) \#_f S^2 \cong M^2$ podemos tomar a φ_n como modelo para φ (por el Teorema 6.9).

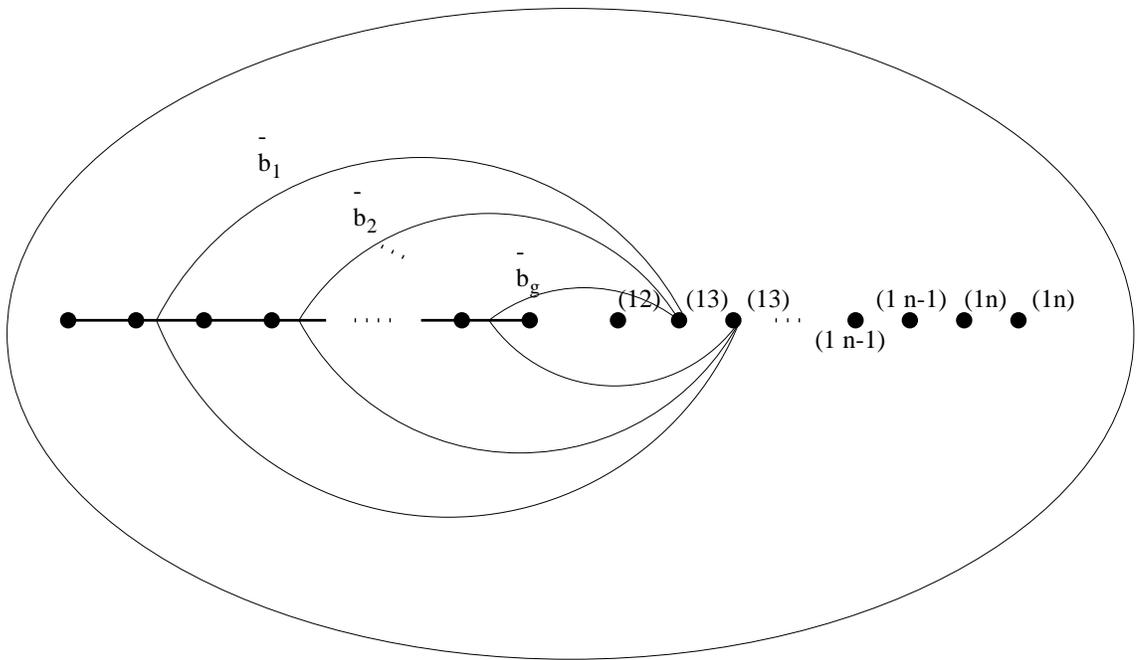
Ahora $\varphi_n^{-1}(\bar{a}_i)$ consiste de las curvas a_i en M_0^2 y $(n-2)$ arcos que son enviados homeomorfamente por φ_n . Por lo tanto el giro $t(\bar{a}_i)$ se levanta a la composición de $t(a_i)$ y $(n-2)$ giros, estos últimos son isotópicos a la identidad, así que el levantamiento de $t(\bar{a}_i)$ es isotópico a $t(a_i)$. Similarmente ocurre para $t(\bar{c}_i)$, es decir el levantamiento de $t(\bar{c}_i)$ es isotópico a $t(c_i)$.

6.3. REALIZACIÓN DE HOMEOMORFISMOS EN CUBIERTAS
SIMPLES RAMIFICADAS

Solo falta encontrar arcos \bar{b}_i en S^2 tales que los levantamientos de $t(\bar{b}_i)$ sean isotópicos a $t(b_i)$. Tomemos los siguientes arcos \bar{b}_i en S^2 .



visto desde “arriba” tenemos



Un arco \bar{b}_i se levanta en n arcos $d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in}$, que tienen interiores ajenos, y los arcos d_{i1}, d_{i3} tienen los mismos extremos y los demás arcos son ajenos.

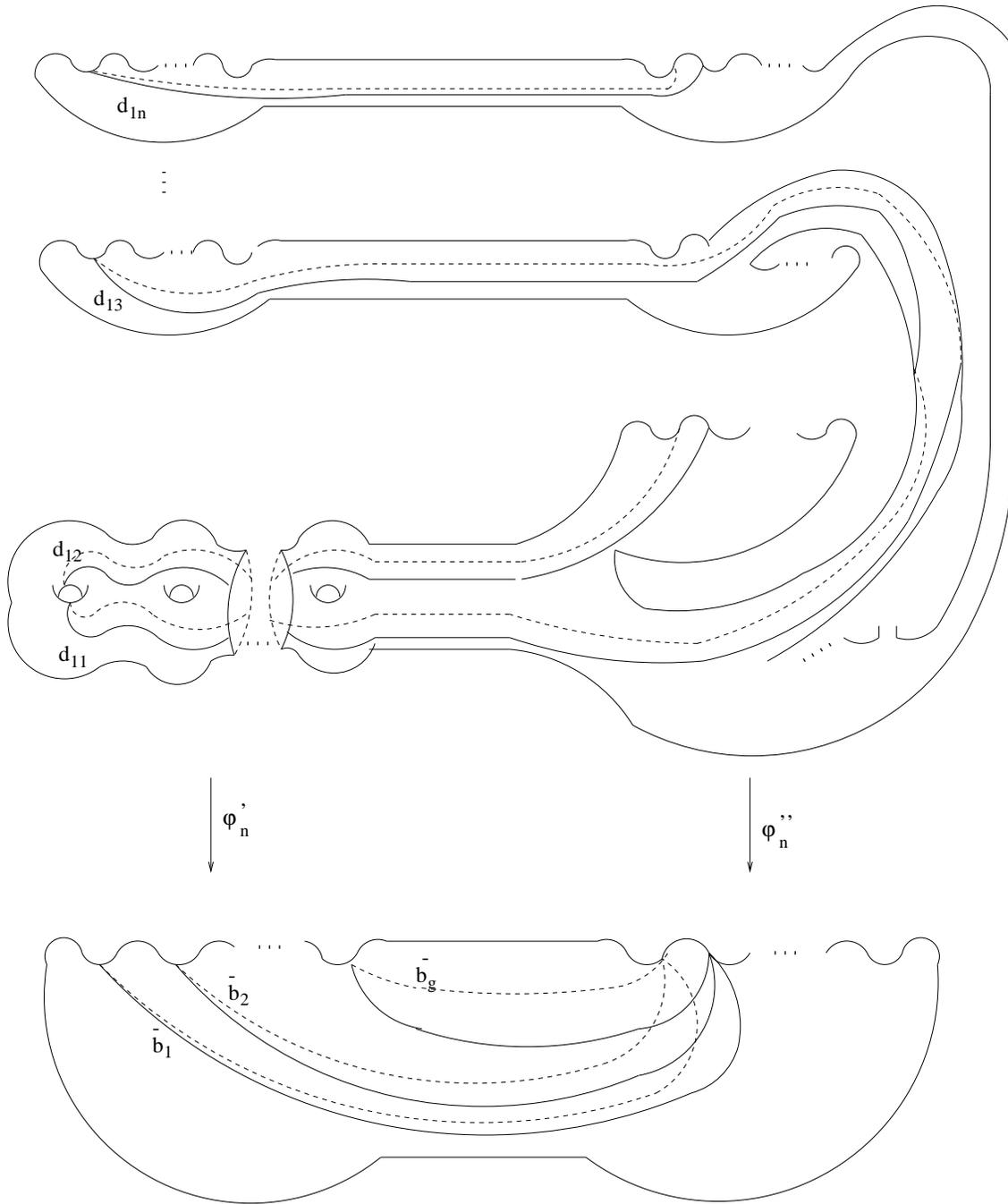


figura A

6.3. REALIZACIÓN DE HOMEOMORFISMOS EN CUBIERTAS SIMPLES RAMIFICADAS

Sea b'_i el lazo formado por $d_{i1} \cup d_{i3}$. Al igual que antes el giro $t(\bar{b}_i)$ en S^2 se levanta a la composición de los giros $t(b'_i)$ y los $t(b_{ij})$ para $j \neq 1, 3$; éstos últimos son isotópicos a la identidad. Así el levantamiento $t(\bar{b}_i)$ es isotópico al giro $t(b'_i)$. Cada b'_i es isotópica a b_i .

Así si f conserva la orientación, el teorema queda demostrado ya que sabemos que f es isotópica a $t_1 \circ t_2 \circ \cdots \circ t_k$, donde t_i son giros en algunas de las curvas $a_1, a_2, \dots, a_g, b_1, b_2, \dots, b_g, c_1, c_2, \dots, c_{g-1}$. Tomamos $h = f$, y por la prueba que hemos realizado \bar{h} es el homeomorfismo que induce h .

Si f no conserva la orientación entonces es isotópica a $r \circ t_1 \circ t_2 \circ \cdots \circ t_k$, donde r es alguna reflexión y t_i son giros. Esta reflexión se puede visualizar como el resultado de reflejar respecto a la curva que es la intersección de la figura A con el plano representado por la hoja de papel. Y procedemos de la misma manera para obtener h y \bar{h} .

□

Lema 6.16. *Sea $\varphi : D^2 \rightarrow D^2$ una cubierta simple ramificada de 3 hojas con conjunto de ramificación $B = \{y_1, y_2\}$ y sea $t(a)$ el giro sobre un arco que conecta a y_1 con y_2 . Entonces $t^3(a)$ se levanta mediante φ a un giro en el arco $\varphi^{-1}(a)$.*

Demostración. Queremos demostrar que

$$\begin{array}{ccc}
 & & D \\
 & \nearrow \varphi & \downarrow \varphi \\
 D & \xrightarrow{\varphi} & D \xrightarrow{t^3(a)} D
 \end{array}$$

conmuta.

Por la Proposición 3.6 es suficiente demostrar que

$$t(a)_{\#}^3 \varphi_{\#}(\pi_1(D \setminus \varphi^{-1}(B))) \subset \varphi_{\#} \pi_1(D \setminus \varphi^{-1}(B))$$

$$\text{Sea } \varphi_{\#} \pi_1(D \setminus \varphi^{-1}(B)) = \langle x_2, x_1^2, x_1 x_2^2 x_1^{-1}, x_1 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} \rangle$$

$$a_0 = x_2 \quad a_1 = x_1^2 \quad a_2 = x_1 x_2^2 x_1^{-1} \quad a_3 = x_1 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1}$$

Veamos el efecto de $t(a)_{\#}$, $t(a)_{\#}^2$ y $t(a)_{\#}^3$ en los generadores de $\varphi_{\#} \pi_1(D \setminus \varphi^{-1}(B))$

$$\begin{aligned}
 t(a)_{\#}(x_1) &= x_2 \\
 t(a)_{\#}(x_2) &= x_2^{-1}x_1^{-1}x_2 \\
 t(a)_{\#}^2(x_1) &= x_2^{-1}x_1^{-1}x_2 \\
 t(a)_{\#}^2(x_2) &= x_2^{-1}x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2 \\
 t(a)_{\#}^3(x_1) &= x_2^{-1}x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2 \\
 t(a)_{\#}^3(x_2) &= x_2^{-1}x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2 \\
 t(a)_{\#}^3(x_1^2) &= x_2^{-1}x_1x_2^2x_1^{-1}x_2 \\
 t(a)_{\#}^3(x_1x_2^2x_1^{-1}) &= x_2^{-1}x_1^2x_2 \\
 t(a)_{\#}^3(x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}) &= x_2^{-1}x_1^2x_2^{-1}x_1^{-2}x_2
 \end{aligned}$$

Así se tiene:

$$\begin{aligned}
 t(a)_{\#}^3(x_2) &= a_0^{-1}a_3a_0 \\
 t(a)_{\#}^3(x_1^2) &= a_0^{-1}a_2^{-1}a_0 \\
 t(a)_{\#}^3(x_1x_2^2x_1^{-1}) &= a_0^{-1}a_1a_0 \\
 t(a)_{\#}^3(x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}) &= a_0^{-1}a_1a_0^{-1}a_1^{-1}a_0
 \end{aligned}$$

Y se tiene lo que deseamos. □

NOTA: En el lema anterior ni $t(a)$ y $t^2(a)$ se levantan.

Teorema 6.17. *Sea $\varphi : M^2 \rightarrow S^2$ una cubierta simple ramificada de al menos tres hojas. Sea $\sigma \in S(B)$, entonces existen homeomorfismos $h : M^2 \rightarrow M^2$ y $\bar{h} : S^2 \rightarrow S^2$ tal que el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
 M^2 & \xrightarrow{h} & M^2 \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 S^2 & \xrightarrow{\bar{h}} & S^2
 \end{array}$$

conmuta. Y h es isotópica a la identidad en M^2 y $\bar{h}|_B = \sigma$.

Demostración. Sea $B_{\varphi} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ y supongamos que el sistema de Hurwitz para φ es

$$(12), (12), \dots, (12), (12), (13), (13), \dots, (1n), (1n)$$

Al realizar σ existen dos casos dependiendo si el sistema de Hurwitz le asigna diferentes o iguales transposiciones a y_i y a y_j . Es suficiente considerar los siguientes dos casos:

6.3. REALIZACIÓN DE HOMEOMORFISMOS EN CUBIERTAS SIMPLES RAMIFICADAS

- 1) $y_i \rightarrow (12)$ $y_j \rightarrow (13)$
- 2) $y_i \rightarrow (12)$ $y_j \rightarrow (12)$.

Si pasa (1), tomemos el arco a que une a y_i con y_j y no toca al resto de B_φ . $\varphi^{-1}(a)$ consiste de $(n - 2)$ arcos de los cuales $(n - 3)$ son homeomorfos a a . Si realizamos el giro $t^3(a)$, por el lema anterior, se levanta a una composición de giros en M^2 que permuta las fibras sobre y_i y y_j , y además es isotópica a la identidad.

Si (2) entonces escogemos un punto auxiliar $y \in B_\varphi$ que corresponda a una permutación (13). Tomemos los arcos a de y_i a y , y b de y_j a y , tales que a y b tienen interiores ajenos. $t^3(a)$ y $t^3(b)$ se levantan a homeomorfismos en M^2 . Entonces el homeomorfismo $t^3(a)t^3(b)t^3(a)$ en S^2 que cambia a y_i y y_j se levanta a una composición de giros en M^2 tal que es isotópica a la identidad. \square

Definición 6.18. *Sea φ una cubierta ramificada, diremos que es no degenerada si y sólo si la representación ρ es suprayectiva.*

Corolario 6.19. *Sean M^3 y N^3 3-variedades conexas sin frontera y sea $\varphi : M^3 \rightarrow N^3$ una cubierta simple ramificada no degenerada de $n \geq 3$ hojas, con $B_\varphi \neq \emptyset$. Entonces existe una cubierta simple ramificada $\psi : M^3 \rightarrow N^3$ de n hojas con B_ψ conexo.*

Demostración. Sea $*$ $\in M^3 \setminus \varphi^{-1}(B_\varphi)$ y tomemos trayectorias (arcos) de $*$ a cada componente del conjunto singular de φ . A la unión de estos arcos los llamamos K . Esta construcción es posible por el siguiente Lema técnico: Si X es el 1-esqueleto de M^3 , $M^3 \setminus X$ es conectable por trayectorias: Sean $y_1, y_2 \in M^3 \setminus X$, sea α trayectoria en M^3 que conecta a y_1 con y_2 . Supongamos $\alpha \cap X \neq \emptyset$, sea $p \in X \cap \alpha$ tomemos una vecindad V de p , $V \cong \mathbb{R}^3$, y por el lema: $\mathbb{R}^3 \cup_{i=1}^n l_i$ es conexo, donde l_i son rectas. Así si a V le quitamos la recta l donde está p , el resultado es conexo, por una pequeña isotopía movemos la recta l de tal manera que ya no toque a X , así obtenemos una trayectoria α' que une a y_1 con y_2 en $M^3 \setminus X$, y por lo tanto $M^3 \setminus X$ es conexo.

Podemos suponer que $\varphi|_K$ es 1-1. Sea $L = \varphi(K)$, sea V una vecindad regular de L y $U = \varphi^{-1}(V)$. Sea U_0 la componente de U que contiene a K .

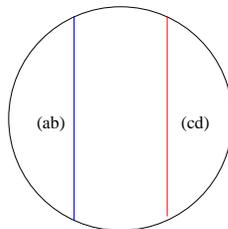
$\varphi|_{U_0} : U_0 \rightarrow V$ es cubierta simple ramificada de $n \geq 3$ hojas. Veamos que $V \cong D^2 \times I$ y $B_\varphi \cap V \cong (B_\varphi \cap D^2) \times I$, de aquí $\varphi^{-1}(\partial V) \cap U_0$ es conexo.

Por una isotopía de ∂U podemos alterar la manera en que U está pegada en $M^3 \setminus \text{int}U$ de tal forma que induzca una permutación en el conjunto de ramificación ∂V , escogida de manera que la cubierta ramificada resultante

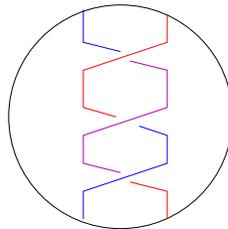
de $M^3 \rightarrow N^3$ tenga conjunto de ramificación conexo.

Explícitamente lo que hacemos es construir un arco c en ∂V que una a las componentes del conjunto de ramificación, sea \bar{c} el arco al que se levanta c , hacemos $t^3(c)$ en ∂V , este giro se levanta a $t(\bar{c})$ y se puede extender a $U(K)$ vecindad de K por el Truco de Alexander (ya que $U(K) \cong B^3$). La nueva variedad que se obtiene es homeomorfa a la anterior por la Proposición 5.7. \square

Un ejemplo que ilustra este corolario es el siguiente. Si B_φ es un enlace, entonces el dibujo.



se puede cambiar por



6.4 Cubiertas ramificadas del toro

Caracterizaremos una clase de funciones del toro que son homotópicas a cubiertas ramificadas.

Para $g \geq 0$ sea T_g la superficie orientable de género g .

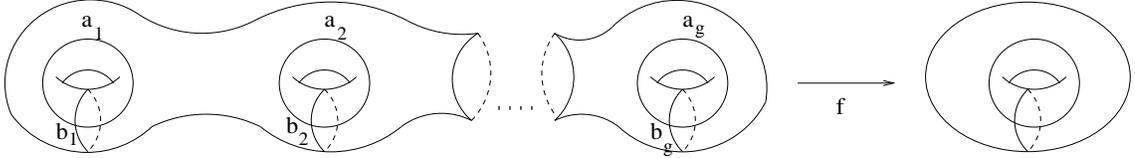
Teorema 6.20. *Sea $f : T_g \rightarrow T_1$ una función de grado $n \geq 2$ tal que*

- 1) $g \geq \max\{3, n\}$ y
- 2) $n > \#\pi_1(T_1)/f_*\pi_1(T_g)$

Entonces f es homotópica a una cubierta ramificada.

6.4. CUBIERTAS RAMIFICADAS DEL TORO

Demostración. La clase de homotopía de cualquier función $T_g \rightarrow T_1$ está determinada por su homomorfismo inducido en homología ya que $T_1 \cong S^1 \times S^1$ tiene grupo fundamental abeliano. Y tal homomorfismo está determinado por su matriz respecto a las bases estándares $a_1, a_2, \dots, a_g, b_1, b_2, \dots, b_g$ para $H_1(T_g)$ y a, b para $H_1(T_1)$



$$\begin{aligned} f_* : H_1(T_g) &\rightarrow H_1(T_1) \\ a_i &\mapsto x_i a + z_i b \quad y \\ b_i &\mapsto y_i a + w_i b. \end{aligned}$$

con $i = 1, 2, \dots, g$. $H_1(T_g) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$ y $H_1(T_1) \simeq \mathbb{Z}$. La matriz asociada a f_* es de $2g$ columnas y 2 renglones.

Observemos que es suficiente probar el teorema cuando f es primitiva. Supongamos que f no es primitiva, entonces es posible factorizar a f como pf' donde $f' : T_g \rightarrow T_1$ es primitiva de grado mayor que 1, y p es un espacio cubriente, para verificar esto ver Proposición 3.8. Así si f no es primitiva entonces $f = pf'$ con f' primitiva y f es homotópica a una cubierta ramificada si y sólo si f' lo es.

Dadas estas observaciones la prueba del teorema se divide en dos partes:

Proposición 6.21. *Existe una cubierta ramificada primitiva $\psi : T_g \rightarrow T_1$ de n hojas y con $g \geq n$.*

Demostración. Sean $\psi_1 : nT_1 \rightarrow T_1$ y $\psi_2 : T_{g-n} \rightarrow T_0$ cubiertas ramificadas de n hojas. nT_1 denota la unión ajena de n copias de T_1 cada una enviada de manera homeomorfa por ψ_1 . ψ_2 se construye con un sistema de Hurwitz específico con una colección de $2g - 2$ puntos de ramificación etiquetados con las siguientes transposiciones:

$$(12), (12), \dots, (12), (12), (13), (13), \dots, (1n), (1n)$$

y encontramos el género del espacio resultante mediante la fórmula Riemann-Hurwitz.

CAPÍTULO 6. CUBIERTAS RAMIFICADAS

Entonces obtenemos ψ mediante la suma conexa fibrada de ψ_1 y ψ_2 a lo largo de una fibra principal. Así ψ tiene las propiedades exigidas. \square

Proposición 6.22. *Si $f : T_g \rightarrow T_1$ es una función primitiva de grado n y $g \geq 3$ entonces existen homeomorfismos $h : T_g \rightarrow T_g$ y $k : T_1 \rightarrow T_1$ tales que kfh tiene la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Primero definimos \sim como la relación de equivalencia sobre las parejas ordenadas de enteros (x, y) generada por $(x, y) \sim' (x, y \pm x)$ y $(x, y) \sim' (x \pm y, y)$, es decir $\bar{x} \sim \bar{y}$ si existe una sucesión en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\bar{x}_0 = \bar{x}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n = \bar{y}$ que cumple:

- i) $\overline{\bar{x}_{i+1}} = \bar{x}_i$ ó
- ii) $\overline{\bar{x}_{i+1}} \sim' \bar{x}_i$ ó
- iii) $\overline{\bar{x}_i} \sim' \bar{x}_{i+1}$

Ahora demostraremos el siguiente:

Lema 6.23. *Cualquier pareja ordenada de enteros es equivalente a $(z, 0)$ donde*

$$z \geq 0 \text{ y } z = \text{máximo común divisor } \{|x|, |y|\}$$

Demostración. Sean $(x, y) \sim (z, w)$, sea $g = \text{mcd}\{x, y\}$

$g|x, g|y$ entonces $g|x \pm y$.

Si $c|x$ y $c|x \pm y$ entonces $c|g$ por lo tanto $g = \text{mcd}\{x, x \pm y\}$

y $c|y$ y $c|x \pm y$ entonces $c|g$ por lo tanto $g = \text{mcd}\{y, x \pm y\}$.

Y por lo tanto si $(x, y) \sim (z, w)$ entonces $\text{mcd}\{|x|, |y|\} = \text{mcd}\{|w|, |z|\}$.

Sea $(x, y) \sim (z, w)$ donde $|w|$ es tan pequeña como sea posible.

Si $w = 0$ y $z \geq 0$ entonces $(x, y) \sim (z, 0)$ y $z = \text{mcd}\{|x|, |y|\}$.

Si $w = 0$ y $z < 0$ entonces $(x, y) \sim (z, 0) \sim (z, -2z) \sim (-z, 0)$.

Supongamos que $w \neq 0$ añadimos múltiplos de $\pm w$ a z , $(x, y) \sim (z, w) \sim (z \pm kw, z)$, pero al reducir z obtenemos que $|z| \leq |w|$, lo cual es una contradicción ya que w era el más pequeño, por lo tanto $w = 0$. \square

Consideremos ahora los siguientes automorfismos de $H_1(T_g)$, $g \geq 3$, en los casos (i), (ii) podemos pensar también en $H_1(T_1)$

- i) $(a_i, b_i) \rightarrow (a_i, b_i \pm a_i)$

6.4. CUBIERTAS RAMIFICADAS DEL TORO

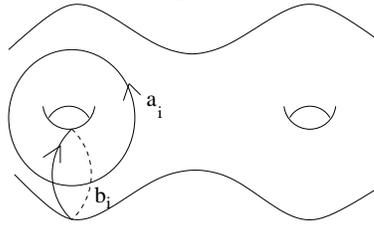
ii) $(a_i, b_i) \rightarrow (a_i \pm b_i, b_i)$

iii) $(a_i, a_j, b_i, b_j) \rightarrow (a_i \pm a_j, a_j, b_i, \mp b_i + b_j)$

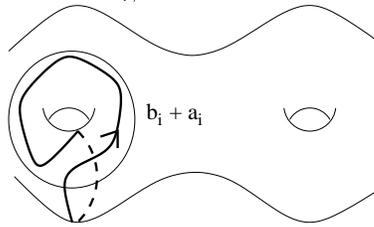
Los generadores que no se especifican son enviados bajo la identidad.

Estos isomorfismos conservan el número de intersección, y son inducidos por homeomorfismos de T_g .

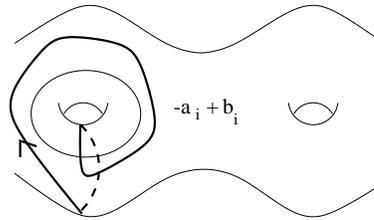
El primero es inducido por un giro en la curva a_i . Supongamos que la orientación de T_g esta dada como en la siguiente figura



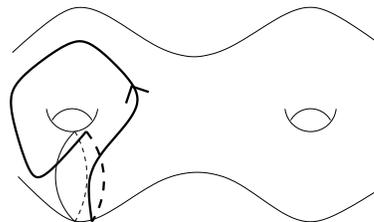
Si el giro se realiza en la curva a_i , se tiene



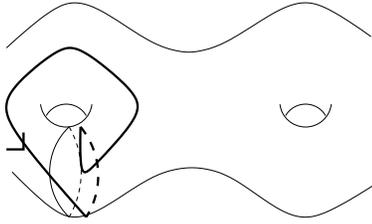
La inversa nos da



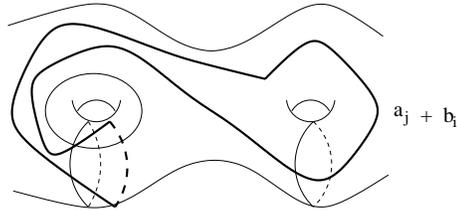
El segundo isomorfismo es inducido por un giro en la curva b_i . Si se realiza en b_i , se obtiene



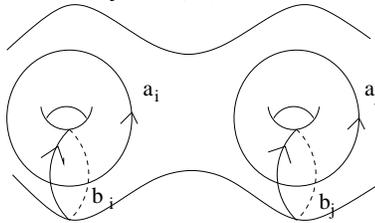
La inversa es



Y el tercer isomorfismo se obtiene por una composición de giros $t(a_j)^{-1}t(b_i)t(c)$ donde $c = a_j - b_i$. En la siguiente figura se ilustra tal curva

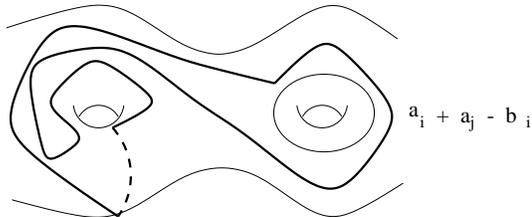


Veamos el efecto de girar en $t(a_j)^{-1}t(b_i)t(c)$ a las siguientes curvas



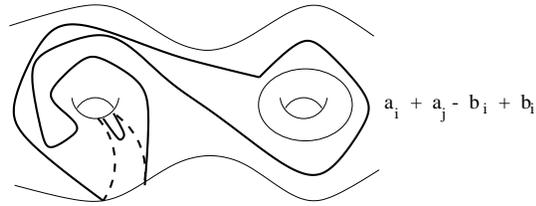
A las curvas a_j y b_i no les pasa nada.

Al girar a a_i en c , obtenemos

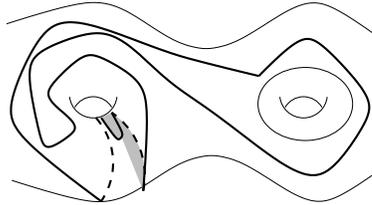


El giro en b_i tiene el efecto

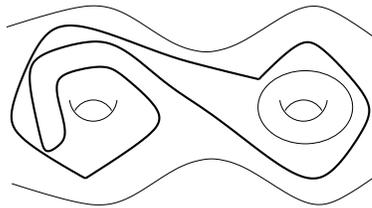
6.4. CUBIERTAS RAMIFICADAS DEL TORO



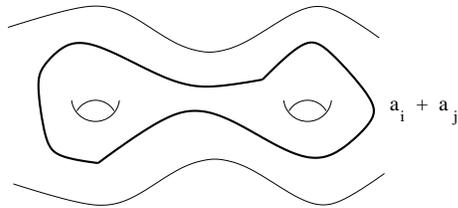
Girar en a_j no tiene ningún efecto. De la figura anterior vemos que es posible deshacernos de parte sombreada



y obtener

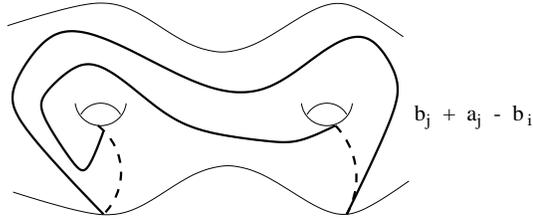


que es igual a

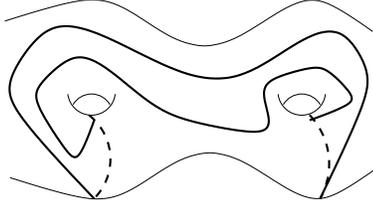


en donde la curva claramente es $a_i + a_j$.

Ahora veamos el efecto del giro $t(a_j)^{-1}t(b_i)t(c)$ sobre la curva b_j . Al girar en c , tenemos



Luego $t(b_i)$ no le hace nada, pero $t^{-1}(a_j)$ sí, de la siguiente forma



La curva resultante es efectivamente $-b_i + b_j$.

Tenemos

$$\begin{aligned} f &: T_g \rightarrow T_1 \\ f_* &: H_1(T_g) \rightarrow H_1(T_1) \\ a_i &\mapsto x_i a + z_i b \\ b_i &\mapsto y_i a + w_i b \\ i &= 1, 2, \dots, g \end{aligned}$$

f_* tiene la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_g & y_1 & y_2 & \dots & y_g \\ z_1 & z_2 & \dots & z_g & w_1 & w_2 & \dots & w_g \end{pmatrix}$$

Se puede probar que $\text{grado}(f) = \sum_i (x_i w_i - z_i y_i) = n$.

Usamos las operaciones (i) y (ii) para alterar f , precomponiéndola con los homeomorfismo adecuados. Al aplicar

$$(a_1, b_1) \rightarrow (a_1, b_1 \pm a_1) = (x_1 a + z_1 b, (y_1 \pm x_1) a + (w_1 \pm z_1) b)$$

obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_g & y_1 \pm x_1 & y_2 & \dots & y_g \\ z_1 & z_2 & \dots & z_g & w_1 \pm z_1 & w_2 & \dots & w_g \end{pmatrix}$$

Y por el lema tenemos que $(x_1, y_1) \sim (\text{mcd}\{x_1, y_1\}, 0)$, tenemos

$$\begin{pmatrix} \text{mcd}\{x_1, y_1\} & x_2 & \dots & x_g & 0 & y_2 & \dots & y_g \\ z_1 & z_2 & \dots & z_g & w_1 \pm z_1 & w_2 & \dots & w_g \end{pmatrix}$$

6.4. CUBIERTAS RAMIFICADAS DEL TORO

Aplicamos esto g veces y obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_g & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_g & w_1 & w_2 & \dots & w_g \end{pmatrix}$$

Usamos la operación (iii)

$$(a_2, a_1, b_2, b_1) \rightarrow (a_2 \pm a_1, a_1, b_2, \mp b_2 + b_1)$$

y se tiene

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \pm x_1 & \dots & x_g & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & z_2 \pm z_1 & \dots & z_g & \mp w_2 + w_1 & w_2 & \dots & w_g \end{pmatrix}$$

Otra vez por el lema $(x_1, x_2) \sim (\text{mcd}\{x_1, x_2\}, 0)$

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & x_g & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_g & w_1 & w_2 & \dots & w_g \end{pmatrix}$$

Otra vez aplicamos (iii) para obtener

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_g & w_1 & w_2 & \dots & w_g \end{pmatrix}$$

Como f_* es sobre $x_1 = \pm 1$ y por $\text{grado}(f) = \sum_i (x_i w_i - z_i g_i) = x_1 w_1 = n$ y por lo tanto $w_1 = n$

La matriz queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_g & n & w_2 & \dots & w_g \end{pmatrix}$$

Usamos (i)

$$(a_2, b_2) \rightarrow (a_2, b_2 \pm a_2)$$

para tener

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_g & n & w_2 \pm z_2 & \dots & w_g \end{pmatrix}$$

pero $(w_2, z_2) \sim (\text{mcd}\{w_2, z_2\}, 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_g & n & 0 & \dots & w_g \end{pmatrix}$$

y volvemos a aplicar (i)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_g & n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Usamos (iii)

$$(a_3, a_2, b_3, b_2) \rightarrow (a_3 \pm a_2, a_2, b_3, \mp b_3 + b_2)$$

y la matriz queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 \pm z_2 & z_4 & \dots & z_g & n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

y por el lema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & z_2 & 0 & z_4 & \dots & z_g & n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

aplicamos en los siguientes hasta obtener

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & z_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Usamos

$$(a_2, b_2) \rightarrow (a_2 \pm b_2, b_2)$$

y así

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & z_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & n & \pm z_2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

si $\pm z_2 = m$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n & m & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

f_* es sobre entonces $f_*(\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma b_2) = b$ para algunas α, β, γ , entonces

$$\begin{aligned} \alpha(a + z_1 b) + \beta n b + \gamma m b &= b & \alpha &= 0 \\ \beta n b + \gamma m b &= b \\ \beta n + \gamma m &= 1 \end{aligned}$$

6.4. CUBIERTAS RAMIFICADAS DEL TORO

es decir $\text{mcd}\{n, m\} = 1$.

Como $g \geq 3$ para T_g podemos usar (iii) β -veces, es decir,

$$(a_1, a_3, b_1, b_3) \rightarrow (a_1 \pm a_3, a_3, b_1, \mp\beta b_1 + b_3)$$

y se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n & m & \beta m & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

hacemos lo mismo pero ahora γ -veces, es decir

$$(a_1, a_3, b_1, b_3) \rightarrow (a_1 \pm a_3, a_3, b_1, \mp\gamma b_1 + b_3)$$

para obtener

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n & m & \gamma n + \beta m & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

ya que $\gamma n + \beta m = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n & m & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

aplicamos

$$(a_3, a_2, b_3, b_2) \rightarrow (a_3 \pm a_2, a_2, b_3, \mp b_3 + b_2)$$

para tener

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n & \mp 1 + m & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

pero $(m, 1) \sim (\text{mcd}\{1, 0\})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Todos estos resultados han sido obtenidos por precomposiciones de f con homeomorfismos de T_g .

Finalmente usamos (i) sobre T_1 , $(a_1, b_1) \rightarrow (a_1 \pm b_1, b_1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 \pm 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

y $(1, z) \sim (\text{mcd}\{z, 1\}, 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

De estas dos proposiciones concluimos que:

Si $f : T_g \rightarrow T_g$ es una función de grado $n \geq 2$ se cumple (1) y (2), entonces existen homeomorfismos $h : T_g \rightarrow T_g$, $k : T_1 \rightarrow T_1$ y una cubierta ramificada primitiva $\psi : T_g \rightarrow T_1$ tales que

$k\psi h$ es cubierta ramificada homotópica a f .

□

□

Las cubiertas ramificadas $T_g \rightarrow T_1$ que hemos construido tienen la propiedad de que cualquier curva simple cerrada en T_1 es isotópica a una curva en el complemento del conjunto de ramificación cuya imagen inversa es conexa. Para demostrar esto, primero damos la siguiente:

Definición 6.24. Una cubierta ramificada $\varphi : M^2 \rightarrow N^2$ es local si M^2 es conexa y φ es la suma conexa fibrada de una cubierta no ramificada $\varphi_0 : M_0^2 \rightarrow N^2$ y una cubierta ramificada $\varphi_1 : M_1^2 \rightarrow S^2$ donde M_1^2 es conexa. φ es semilocal si φ es la suma conexa fibrada a lo largo de una fibra principal de una cubierta ramificada $\varphi_0 : M_0^2 \rightarrow N^2$ y una cubierta ramificada $\varphi_1 : M_1^2 \rightarrow S^2$ con M_1^2 conexa.

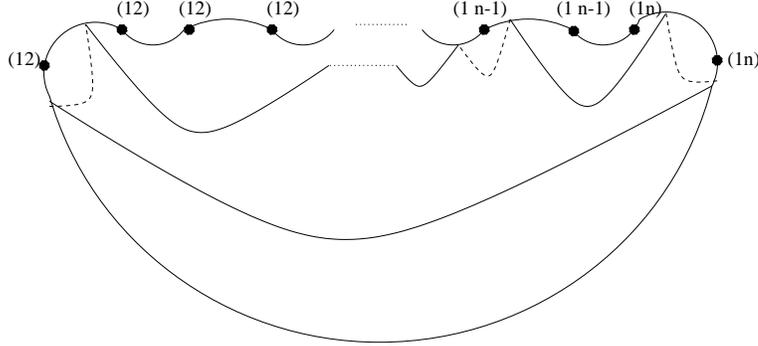
Teorema 6.25. Sea $\varphi : M^2 \rightarrow N^2$ una cubierta ramificada simple semilocal. Entonces cualquier curva simple cerrada en N^2 es isotópica a una curva c tal que c no toca al conjunto de ramificación y $\varphi^{-1}(c)$ es conexo.

Demostración. Supongamos $N^2 = S^2$. Sea $c \subset S^2 \setminus B_\varphi$ una curva que cumpla que $\varphi^{-1}(c)$ es conexo, para que esto ocurra es necesario y suficiente que bajo la representación $\rho_\varphi : \pi_1(S^2 \setminus B_\varphi) \rightarrow S_n$, $\rho_\varphi[c]$ sea un ciclo de longitud n , por ejemplo $(1, 2, \dots, n)$. Como φ es simple, el sistema de Hurwitz normalizado es el siguiente:

$$(12), (12), \dots, (12), (12), (13), (13), \dots, (1n), (1n)$$

6.5. EXTENSIÓN DE CUBIERTAS RAMIFICADAS

En S^2 todas las curvas simples cerradas son isotópicas. La curva c que conviene escoger es aquella que rodee a los puntos $(12), (13), (14), \dots, (1n)$.



Así c cumple que $\varphi^{-1}(c)$ es conexo.

Consideremos el caso general, $\varphi : M^2 \rightarrow N^2$ donde $\varphi = \varphi_0 \#_f \varphi_1$ es semilocal, $\varphi_0 : M_0^2 \rightarrow N^2$, $\varphi_1 : M_1^2 \rightarrow S^2$, M_1^2 conexo. Sea $c \subset N^2$ curva simple cerrada. Podemos hacer a c isotópica a una curva $c_0 \# c_1$ con $c_0 \subset N^2$ y $c_1 \subset S^2$. Como en el caso anterior vemos que c_1 representa una clase apropiada en S_n , de manera que c representa un n -ciclo y $\varphi^{-1}(c)$ es conexo. \square

6.5 Extensión de cubiertas ramificadas

Definición 6.26. *Un cobordismo entre A y B variedades sin frontera es una variedad compacta M tal que $\partial M = A \sqcup B$*

Observaciones:

1. $\dim A = \dim B = n$
2. $\dim M = n + 1$
3. Cobordismo es una relación de equivalencia, es decir si definimos $A \sim B$ cuando y sólo cuando existe un cobordismo entre A y B , entonces \sim es una relación de equivalencia en la clase de todas las variedades.

Lema 6.27. *Sean M^m y N^m m -variedades conexas, cerradas, orientables, y sea W^{m+1} un cobordismo orientable obtenido de $M^m \times I$ al añadirle una 1-asa $B^1 \times D^m$ a lo largo de $M^m \times \{1\}$. Entonces cualquier cubierta ramificada*

CAPÍTULO 6. CUBIERTAS RAMIFICADAS

$\varphi : M^m \times \{0\} \rightarrow N^m \times \{0\}$ se extiende a una cubierta ramificada
 $\theta : W^{m+1} \rightarrow N^m \times I$ que resulta ser simple si φ lo es.

Demostración. $\varphi : M^m \rightarrow N^m$ la extendemos a $\psi : M^m \times I \rightarrow N^m \times I$ definida por $\psi(x, t) = (\varphi(x), t)$; ψ es abierta, continua, finita a uno, por lo tanto, es cubierta ramificada.

Observemos que: $B_\psi = B_\varphi \times I$ y $S_\psi = S_\varphi \times I$ donde B y S denotan los conjuntos de ramificación y singular, respectivamente. Sea $x \notin B_\varphi \times I$, por demostrar existe V_x vecindad de x tal que para cada componente U de $\psi^{-1}(V_x)$, $\psi|_U$ es homeomorfismo local. $x = (z, t)$ con $z \notin B_\varphi$, existe $V_z \cong D^m$ vecindad de z tal que para cada componente W de $\varphi^{-1}(V_z)$, $\varphi|_W$ es homeomorfismo local, así definimos $V_x = V_z \times I \cong D^{m+1}$
 Continuando con la demostración definamos

$$f : D^2 \rightarrow D^2 \\ z \mapsto z^2$$

cubierta ramificada de dos hojas. Y definimos también

$$\psi_1 := f \times id : D^2 \times D^{m-1} \rightarrow D^2 \times D^{m-1} \\ (x, z) \mapsto (f(x), z)$$

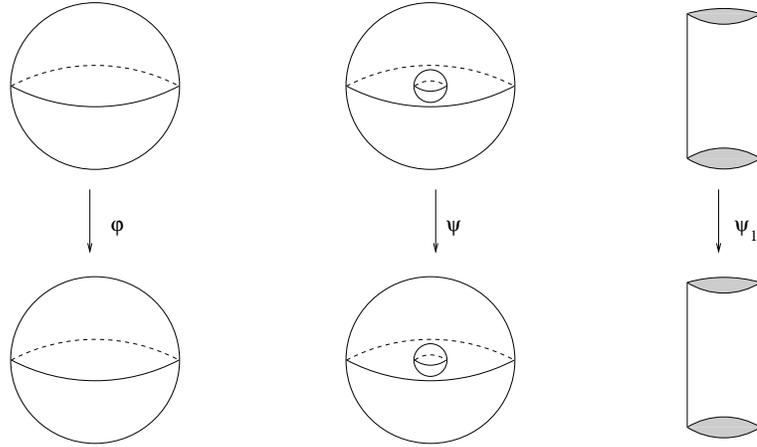
cubierta ramificada de $D^{m+1} \rightarrow D^{m+1}$ de grado 2.

Sea $\psi_2 : (n-1)D^{m+1} \rightarrow D^{m+1}$ cubierta ramificada de grado n , obtenida de ψ_1 y al enviar de manera homeomorfa a $(n-2)D^{m+1}$. Entonces existe una cubierta ramificada

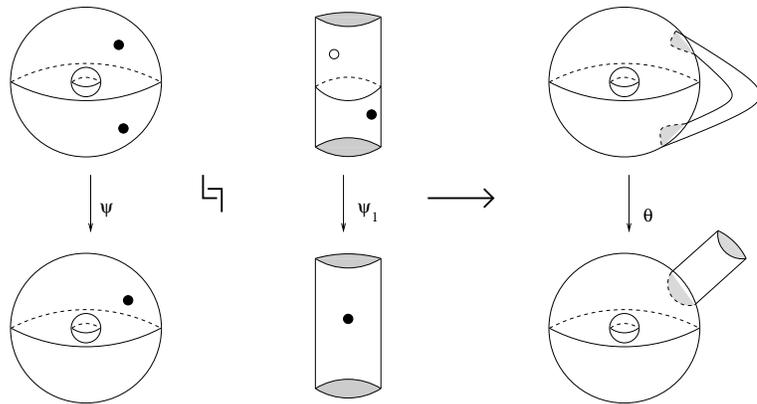
$$\theta := \psi \natural \psi_2 : M^m \times I \natural (n-1)D^{m+1} \rightarrow N^m \times I \natural D^{m+1}$$

\natural es la suma conexa fibrada en las fronteras de ψ y ψ_2 a lo largo de fibras principales. Para ilustrar esta operación tomemos $M^m = N^m = S^2$ y $n = 2$

6.5. EXTENSIÓN DE CUBIERTAS RAMIFICADAS



Al efectuar la operación \natural obtenemos



Y además

$$\begin{aligned}
 M^m \times I \natural(n-1)D^{m+1} &\cong W^{m+1} \\
 N^m \times I \natural D^{m+1} &\cong N^m \times I \text{ y} \\
 \theta|_{M^m \times \{0\}} &= \varphi.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 6.28. Sea W^3 un cobordismo orientable entre dos 2-variedades conexas M_0^2 y M_1^2 , sean $\varphi_i : M_i \rightarrow S^2 \times \{i\}$, $i = 0, 1$, cubiertas ramificadas

CAPÍTULO 6. CUBIERTAS RAMIFICADAS

de grado $n \geq 3$. Entonces existe una cubierta ramificada $\theta : W^3 \rightarrow S^2 \times I$ que extiende a φ_0 y φ_1 y que es simple si φ_0 y φ_1 lo son.

Demostración. Tenemos las cubiertas

$$\begin{aligned}\varphi_0 : M_0^2 &\rightarrow S^2 \times \{0\} \\ \varphi_1 : M_1^2 &\rightarrow S^2 \times \{1\}\end{aligned}$$

Descomponemos $W^3 = V_0^3 \cup (U^2 \times I) \cup V_1^3$, donde $V_0^3 = M_0^2 \cup (1 - \text{asas})$ y $V_1^3 = M_1^2 \cup (1 - \text{asas})$.

Tomamos $M_0^2 \times I$ en W^3 , triangulamos W^3 y tomamos un vecindad V del 1-esqueleto y esto es V_0^3 , el complemento es V_1^3 . V_0^3 y V_1^3 tienen el mismo género g . El complemento de V_0^3 y V_1^3 es $U^2 \times I$, donde U^2 es una 2-variedad de género g , por el lema anterior φ_0 y φ_1 se extienden a cubiertas ramificadas

$$\begin{aligned}\theta_0 : V_0^3 &\rightarrow S^2 \times I \\ \theta_1 : V_1^3 &\rightarrow S^2 \times I\end{aligned}$$

y también existe $\psi : U^2 \times I \rightarrow S^2 \times I$.

Vamos a definir una cubierta ramificada de

$$V_0^3 \cup_f (U^2 \times I) \rightarrow (S^2 \times I) \cup (S^2 \times I)$$

donde $f : \partial V_0^3 \rightarrow \partial(U^2 \times I)$ es homeomorfismo.

Sabemos que existen $h : V_0^3 \rightarrow U^2 \times I$ y $\bar{h} : S^2 \times I \rightarrow S^2 \times I$ homeomorfismos tales que

$$\begin{array}{ccc} V_0^3 & \xrightarrow{h} & U^2 \times I \\ \theta_0 \downarrow & & \downarrow \psi \\ S^2 \times I & \xrightarrow{\bar{h}} & S^2 \times I \end{array}$$

conmuta, es decir $\psi h = \bar{h} \theta_0$ y h es isotópica a f .

Con esto definimos

$$\begin{array}{ccc} V_0^3 \sqcup (U^2 \times I) & \xrightarrow{\theta_0 \sqcup \psi} & (S^2 \times I) \sqcup (S^2 \times I) \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ V_0^3 \cup_h (U^2 \times I) & \xrightarrow{\exists g} & (S^2 \times I) \cup_{\bar{h}} (S^2 \times I) \end{array}$$

y tenemos que demostrar que existe tal g . Es decir, por la Propiedad Universal del Cociente, hay que demostrar que si $\pi_1(x) = \pi_1(y)$ entonces

6.6. CUBIERTAS RAMIFICADAS DE VARIEDADES ORIENTABLES

$$\pi_2(\theta_0 \sqcup \psi(x)) = \pi_2(\theta_0 \sqcup \psi(y)).$$

$\pi_1(x) = \pi_1(y)$ si y sólo si $x = y$ o $h(x) = y$. Si $x = y$ es inmediata la demostración. Supongamos $h(x) = y$ esto implica que $x \in V_0^3$ y $y \in U^2 \times I$. Por demostrar que $\pi_2(\theta_0 \sqcup \psi(x)) = \pi_2(\theta_0 \sqcup \psi(y))$, es decir $\pi_2\theta_0(x) = \pi_2\psi(y)$ lo que significa que hay que probar que $\bar{h}\theta_0(x) = \psi(y)$.

Pero $\bar{h}\theta_0(x) = \psi h(x) = \psi(y)$.

Ahora definimos una cubierta de

$$(V_0^3 \cup_h (U^2 \times I)) \cup_f V_1^3 \rightarrow ((S^2 \times I) \cup_{\bar{h}} (S^2 \times I)) \cup (S^2 \times I).$$

Procedemos de la manera anterior... y listo!!! □

6.6 Cubiertas ramificadas de variedades orientables

Teorema 6.29 (Teorema de Montesinos y Hilden). *Sea M^3 una 3-variedad cerrada y orientable, y sea $n \geq 3$ un entero. Entonces existe una cubierta ramificada simple $\varphi : M^3 \rightarrow S^3$ de grado n tal que $B_\varphi \subset S^3$ es un enlace n -coloreado.*

Demostración. Sean $M^3 = V_1 \cup_h V_2$, $S^3 = B_1 \cup_{\bar{h}} B_2$, donde B_i es una 3-bola y V_i es un cubo con asas para $i = 1, 2$.

Sea $B \subset \text{int}V_1$, B 3-bola. Sea $W_1 = V_1 \setminus \text{int}B$; W_1 es cobordismo entre S^2 y ∂V_1 . Entonces existe $\theta_1 : W_1 \rightarrow S^2 \times I$ cubierta ramificada simple de n -hojas. Tomemos $\varphi_1 : B \rightarrow B$ cubierta ramificada simple de n -hojas, observemos que $\theta_1|_{S^2}$ y $\varphi_1|_{\partial B}$ son equivalentes, es decir existen homeomorfismos f y \bar{f} tales que

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{f} & \partial B \\ \theta_1|_{S^2} \downarrow & & \downarrow \varphi_1|_{\partial B} \\ S^2 & \xrightarrow{\bar{f}} & \partial B \end{array}$$

conmuta.

Tomemos los cocientes

$$W \sqcup B/x \sim f(x) \quad \text{y} \quad (S^2 \times I) \sqcup B/x \sim \bar{f}(x)$$

Por la Propiedad Universal del Cociente tenemos que en el siguiente cuadro existe $\bar{\theta}_1$

$$\begin{array}{ccc} W \sqcup B & \xrightarrow{\theta_1 \sqcup \varphi_1} & (S^2 \times I) \sqcup B \\ \downarrow & & \downarrow \\ W \cup_f B & \xrightarrow{\exists \bar{\theta}_1} & (S^2 \times I) \cup_{\bar{f}} B \end{array}$$

que resulta se cubierta ramificada de n hojas.

Con un razonamiento similar al anterior obtenemos la cubierta $\bar{\theta}_2 : V_2 \rightarrow B_2$. Así que tenemos dos cubiertas ramificadas $\bar{\theta}_1 : V_1 \rightarrow B_1$, $\bar{\theta}_2 : V_2 \rightarrow B_2$ y un homeomorfismo $h : \partial V_1 \rightarrow \partial V_2$. Por el Teorema 6.14 existen homeomorfismos $g : \partial V_1 \rightarrow \partial V_2$ y $\bar{g} : \partial B_1 \rightarrow \partial B_2$ tales que $\bar{\theta}_2 g = \bar{g} \bar{\theta}_1$ y g es isotópica a h . Tomemos los cocientes

$$V_1 \sqcup V_2 / x \sim g(x) \quad \text{y} \quad B_1 \sqcup B_2 / x \sim \bar{g}(x)$$

Por la Propiedad Universal del Cociente, en el siguiente cuadrado existe φ

$$\begin{array}{ccc} V_1 \sqcup V_2 & \xrightarrow{\bar{\theta}_1 \sqcup \bar{\theta}_2} & B_1 \sqcup B_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_1 \cup_g V_2 & \xrightarrow{\exists \varphi} & B_1 \cup_{\bar{g}} B_2 \end{array}$$

φ es la cubierta ramificada simple de $M^3 \rightarrow S^3$ de n -hojas que estamos buscando.

La cubierta ramificada simple de n hojas $\varphi : M^3 \rightarrow S^3$ está determinada por una representación $\rho : \pi_1(S^3 \setminus B_\varphi) \rightarrow S_n$, donde S_n es el grupo simétrico en n símbolos y B_φ es un enlace L . Los meridianos de L son mandados a transposiciones bajo ρ , ya que φ es simple. Esta representación la ilustraremos escribiendo una permutación (ab) cerca del puente del dibujo de L , llamaremos a (ab) el color del correspondiente meridiano y llamaremos a L un enlace coloreado. \square

OBSERVACIÓN: En cada cruce de L los meridianos satisfacen una relación del tipo $z x z^{-1} = y$ en el grupo $\pi_1(S^3 \setminus L)$. Como ρ es homomorfismo debe mandar a x , y y z ya sea en la misma transposición o a tres transposiciones distintas.

6.6. CUBIERTAS RAMIFICADAS DE VARIEDADES ORIENTABLES

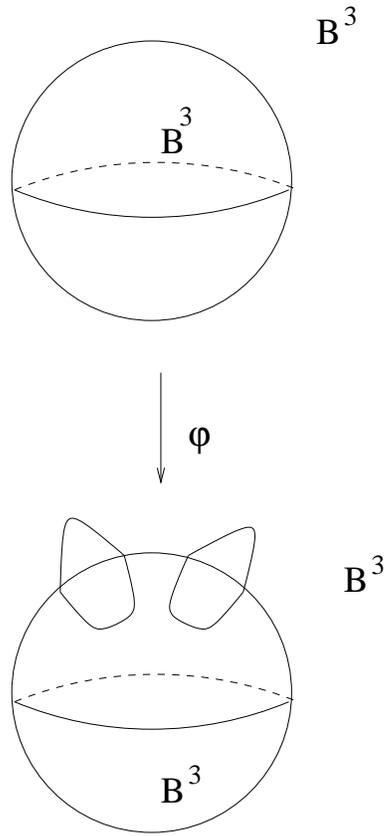
Capítulo 7

Enlaces tricoloreados

Dada M una 3-variedad conexa, cerrada, orientable y $M = X_1 \cup_g X_2$ una descomposición de Heegaard es posible construir una cubierta ramificada simple de tres hojas ψ sobre la 3-esfera S^3 . Esto quiere decir que podemos encontrar un enlace de ramificación $L \subset S^3$.

A partir de $\varphi : S^3 \rightarrow S^3$ cubierta simple ramificada de tres hojas se construye $\psi : M \rightarrow S^3$. Esto se hace como sigue: Sea $M = X_1 \cup_g X_2$ una 3-variedad, donde X_1 y X_2 son cubos con n asas y $g : \partial X_1 \rightarrow \partial X_2$ homeomorfismo de pegado.

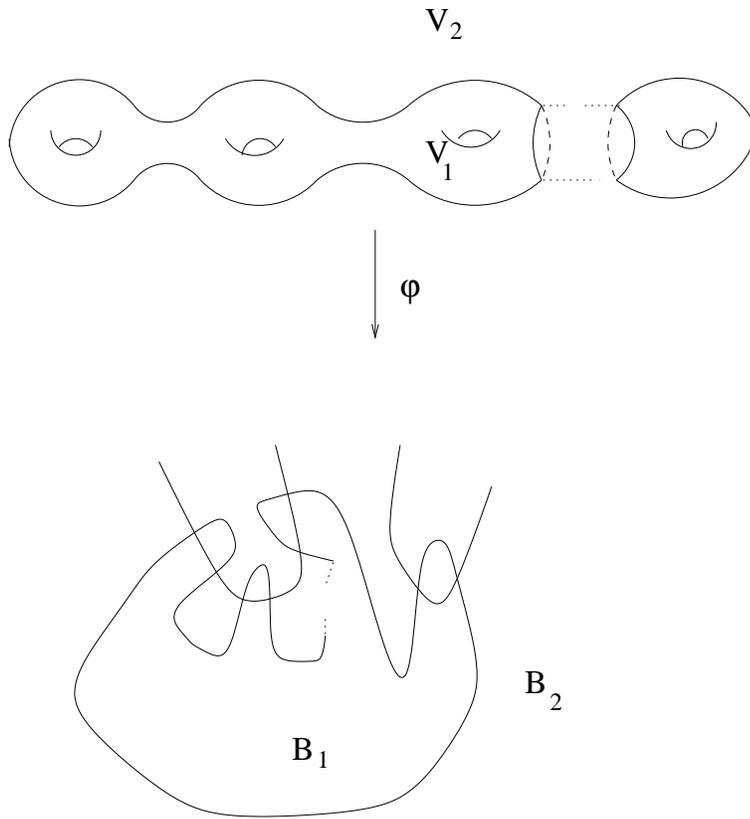
Sea $\varphi : S^3 \rightarrow S^3$ cubierta ramificada simple de 3 hojas



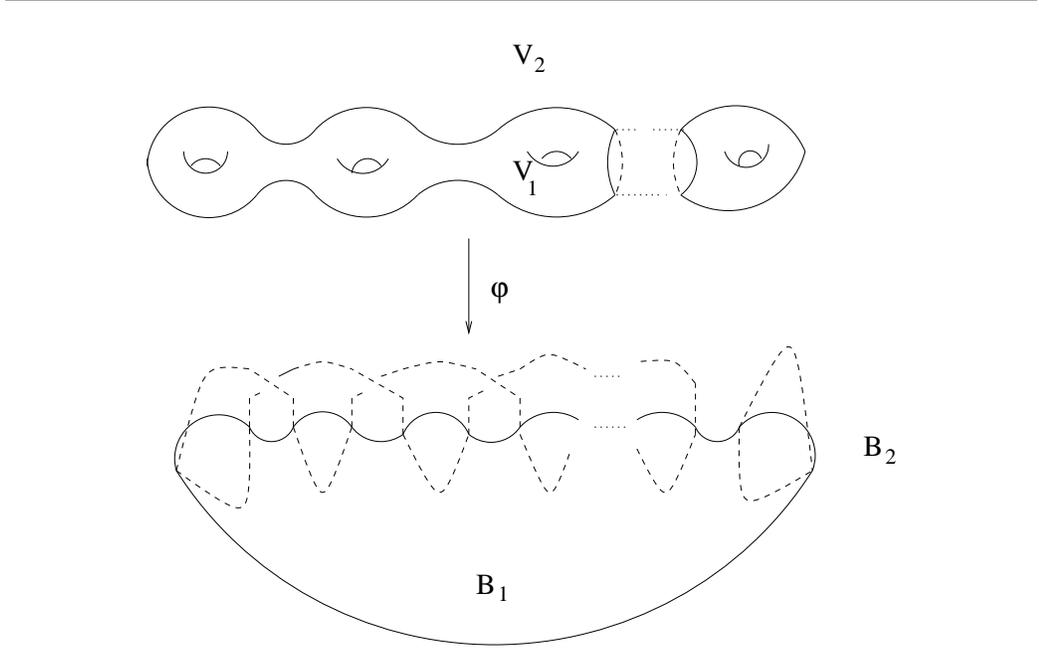
Tomemos una descomposición de S^3

$$\begin{array}{c}
 S^3 = V_1 \cup_{\tau} V_2 \\
 \downarrow \\
 S^3 = B_1 \cup_{\bar{\tau}} B_2
 \end{array}$$

Tal que $\varphi^{-1}(B_i) = V_i$ donde V_i son cubos con n -asas. $\tau : \partial V_1 \rightarrow \partial V_2$ homeomorfismo. Esto se ilustra a continuación



Al “enderezar” a B_1 se tiene el siguiente dibujo



Existen también

$$\begin{aligned} \beta_1 &: X_1 \rightarrow V_1 \\ \beta_2 &: X_2 \rightarrow V_2 \end{aligned}$$

homeomorfismos.
Definamos

$$\psi := \tau^{-1}(\beta_2 | \partial X_2) g(\beta_1^{-1} | \partial V_1) : \partial V_1 \rightarrow \partial V_2$$

Sea $\widetilde{M} = V_1 \cup_{\tau\psi} V_2$ 3-variedad. Queremos verificar que M es homeomorfa a \widetilde{M} .

Tenemos el siguiente cuadrado

$$\begin{array}{ccc} X_1 \sqcup X_2 & \xrightarrow{\beta_1 \sqcup \beta_2} & V_1 \sqcup V_2 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ X_1 \cup_g X_2 & \xrightarrow{f} & V_1 \cup_{\tau\psi} V_2 \end{array}$$

Y lo que queremos demostrar es que existe f homeomorfismo, es decir, que si $p_1(x) = p_1(y)$ entonces $p_2(\beta_1 \sqcup \beta_2)(x) = p_2(\beta_1 \sqcup \beta_2)(y)$.

Supongamos $p_1(x) = p_1(y)$ si y sólo si $x = y$ o $g(x) = y$. Supongamos que $g(x) = y$, es decir, $x \in \partial X_1$. Por demostrar $p_2\beta_1(x) = p_2\beta_2(y)$, por demostrar $\tau\psi\beta_1(x) = \beta_2(y)$.

Veamos

$$\tau\psi\beta_1(x) = \tau\tau^{-1}(\beta_2|\delta X_2)g(\beta_1^{-1}|\delta V_1)\beta_1(x) = \beta_2g(x) = \beta_2(y)$$

LISTO!!!!

Nótese que la manera en que B_1 está pegada a B_2 es inmaterial, es decir, los homeomorfismos τ y $\bar{\tau}$ se borran según la demostración anterior.

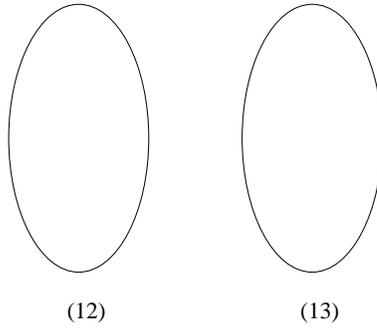
La receta para la construcción de la cubierta ramificada es la siguiente:

1. Sea $M = X_1 \cup_g X_2$ una 3-variedad con su descomposición de Heegaard. Es decir, tenemos un dibujo de M con $\{c_i\}_{i=1}^n$ curvas ajenas, cerradas, simples en ∂X_2 .
 Encontrar homeomorfismo h tal que $\{c_i\} \mapsto \{m_i\}$, donde $\{m_i\}_{i=1}^n$ son meridianos en ∂X_1 . $h := t(\sigma_1)t(\sigma_2)\dots t(\sigma_l)$, donde $t(\sigma_i)$ son giros en ciertas curvas.
2. $h^{-1} : \partial X_1 \rightarrow \partial X_2$ tal que $m_i \mapsto c_i$.
3. Como $S^3 = B_1 \cup B_2$, con B_i una 3-bola, tal que $\varphi^{-1}(B_i) = X_i$, con $i = 1, 2$. Encontrar en B_1 arcos $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l$ que se levantan a las curvas $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l$, respectivamente.
4. Realizar los giros correspondientes en los arcos δ_i para obtener el enlace de ramificación.

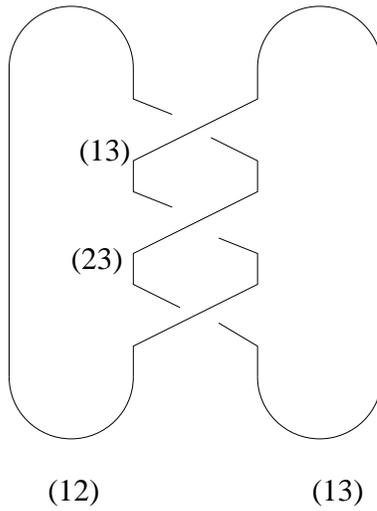
7.1 3-variedades con género de Heegaard cero

Sea una tres variedad cuyo género de Heegaard sea igual a cero, esto es, si $M = X_1 \cup_g X_2$ entonces $X_i \cong 3$ -bola para $i = 1, 2$. Como ya demostramos en el capítulo de 3-variedades y descomposiciones de Heegaard, $M^3 \cong S^3$. Así el enlace de ramificación es:

7.2. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD UNO



Y si usamos el Corolario 6.19, tenemos que el nudo



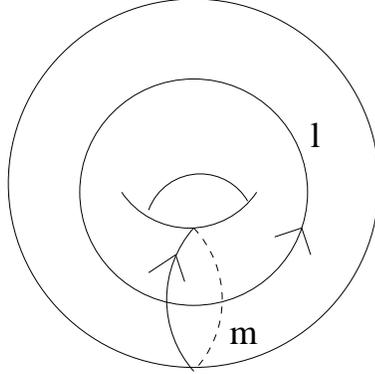
también representa a S^3 .

7.2 3-variedades con género de Heegaard uno

Un caso especial y bonito es cuando el género de Heegaard de M es 1. Sea $M = X_1 \cup_g X_2$ 3-variedad tal que $h(M) = 1$. X_i es un cubo con una 1-asa, es decir, un toro sólido.

$$\begin{aligned} g : \partial X_1 &\rightarrow \partial X_2 \\ \tilde{m} &\mapsto \alpha\tilde{m} + \beta\tilde{l} \\ \tilde{l} &\mapsto r\tilde{m} + p\tilde{l} \end{aligned}$$

con $\alpha, \beta, r, p \in \mathbb{Z}$ y α, β primos relativos. Y las curvas \tilde{m} y \tilde{l} son las siguientes



Además g tiene asociada la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & r \\ \beta & p \end{pmatrix}$$

Sabemos que g es isotópica a una composición de giros en las curvas \tilde{m} y \tilde{l} . Denotemos por

$$\begin{aligned} t(\tilde{m}) : \partial X_1 &\rightarrow \partial X_2 \\ \tilde{m} &\mapsto \tilde{m} \\ \tilde{l} &\mapsto -\tilde{m} + \tilde{l} \\ t(\tilde{l}) : \partial X_1 &\rightarrow \partial X_2 \\ \tilde{m} &\mapsto \tilde{m} + \tilde{l} \\ \tilde{l} &\mapsto \tilde{l} \end{aligned}$$

los giros en \tilde{m} y \tilde{l} respectivamente. La matriz asociada a $t(\tilde{m})$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y la asociada a $t(\tilde{l})$ es

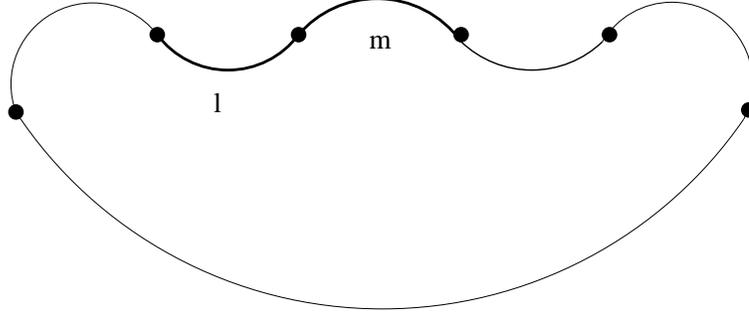
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7.2. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD UNO

Denotemos por

$$\begin{aligned} t(m) &: \partial B^3 \rightarrow \partial B^3 \\ t(l) &: \partial B^3 \rightarrow \partial B^3 \end{aligned}$$

los giros en los arcos m y l en S^2 que se levantan a \tilde{m} y \tilde{l} respectivamente.



Tomemos la fracción continua

$$\frac{\alpha}{\beta} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

donde $a_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 1, 2, \dots, k$. Esta expresión se obtiene mediante el algoritmo de Euclides para la división (ver [10]). Si k es par definimos

$$\tilde{f}(\alpha, \beta) : \partial X_1 \rightarrow \partial X_2$$

como

$$\tilde{f}(\alpha, \beta) := t^{-a_1}(\tilde{m})t^{a_2}(\tilde{l}) \dots t^{-a_{k-1}}(\tilde{m})t^{a_k}(\tilde{l})$$

Y $\tilde{f}(\alpha, \beta)$ determina una 3-variedad $\tilde{M} = V_1 \cup_{\tilde{f}(\alpha, \beta)} V_2$ que es homeomorfa a la 3-variedad $M = X_1 \cup_g X_2$, ya que $\tilde{f}(\alpha, \beta)$ tiene asociado el siguiente producto de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_2 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{k-2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{k-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_k & 1 \end{pmatrix}$$

Al calcularlo obtenemos una matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \end{pmatrix}$$

Si k es impar definimos a $\tilde{f}(\alpha, \beta)$ como

$$\tilde{f}(\alpha, \beta) := r_* t(\tilde{m}) t(\tilde{l}) t(\tilde{m}) t^{a_1}(\tilde{l}) t^{-a_2}(\tilde{m}) \dots t^{-a_{k-1}}(\tilde{m}) t^{a_k}(\tilde{l})$$

donde r_* es una reflexión, cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y al calcular el producto $r_* t(\tilde{m}) t(\tilde{l}) t(\tilde{m})$ se obtiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Así $\tilde{f}(\alpha, \beta)$ tiene el siguiente producto asociado

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_2 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{k-2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{k-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_k & 1 \end{pmatrix}$$

De igual manera que el caso anterior, al calcular este producto se obtiene una matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \end{pmatrix}$$

y por lo tanto para cualquiera de los dos casos tenemos que

$$M = V_1 \cup_{\tilde{f}(\alpha, \beta)} V_2 \cong X_1 \cup_g x_2.$$

Si k es par definimos $f(\alpha, \beta)$ como

$$f(\alpha, \beta) = t^{-a_1}(m) t^{a_2}(l) \dots t^{-a_{k-1}}(m) t^{a_k}(l) : \partial B^3 \rightarrow \partial B^3$$

7.2. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD UNO

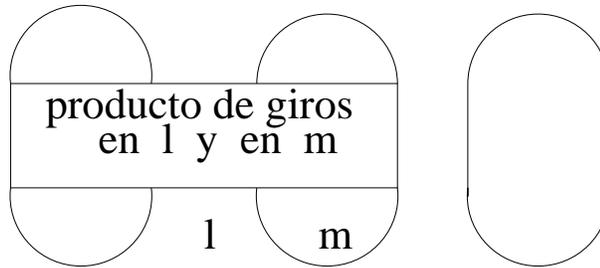
Esta composición se levanta a $\tilde{f}(\alpha, \beta)$ si k es par.
 Y si k es impar

$$f(\alpha, \beta) = r_* t(m) t(l) t(m) t^{a_1}(l) t^{-a_2}(m) \dots t^{-a_{k-1}}(m) t^{a_k}(l) : \partial B^3 \rightarrow \partial B^3$$

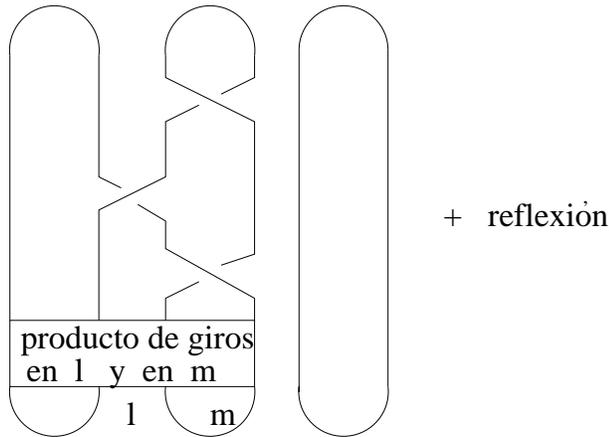
esta se levanta a $\tilde{f}(\alpha, \beta)$.

En cualquiera de los casos, al realizar $f(\alpha, \beta)$ obtenemos el enlace de ramificación en S^3 .

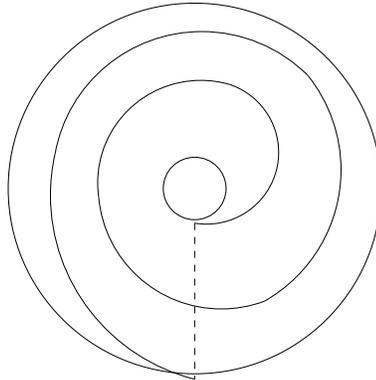
Si k es par el enlace es:



Si k es impar el enlace es:



Ejemplo 1:
Sea



cuya matriz asociada al homeomorfismo de pegado g es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

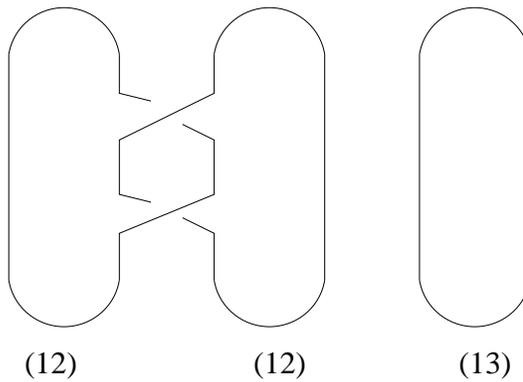
La fracción continua de $\frac{1}{2}$ es

$$\frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2}$$

Así obtenemos:

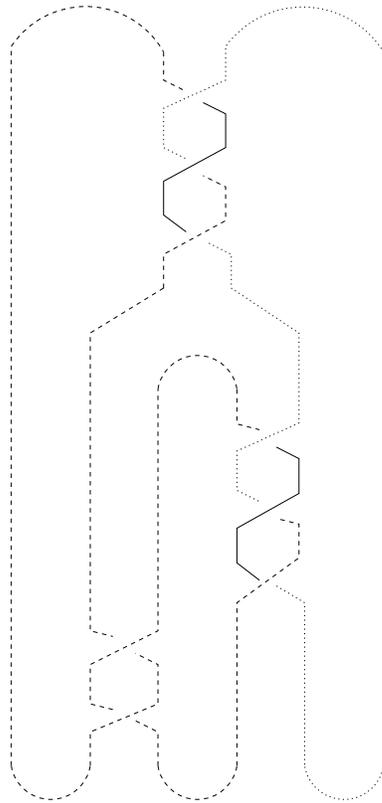
$$f(1, 2) = t^0(m)t^2(l)$$

Y el enlace de ramificación es



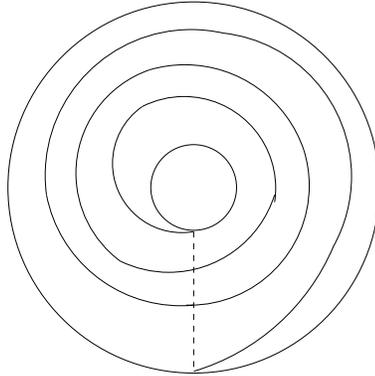
7.2. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD UNO

si usamos el Corolario 6.19, obtenemos el nudo tricoloreado



representa la misma variedad.

Ejemplo 2:
Sea



cuya matriz asociada al homeomorfismo de pegado g es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

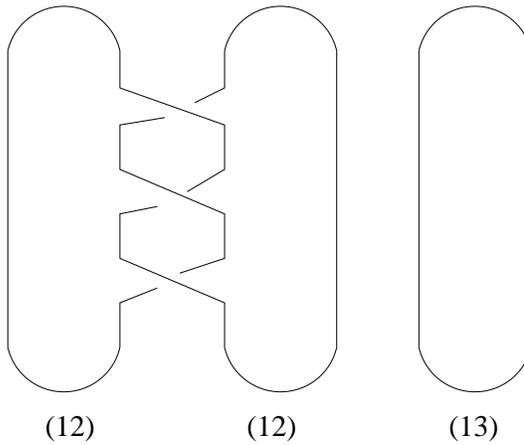
La fracción continua de $\frac{1}{-3}$ es

$$\frac{1}{-3} = 0 + \frac{1}{-3}$$

Así obtenemos:

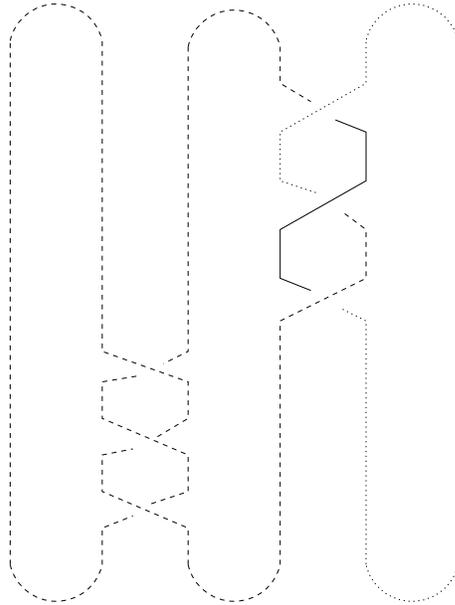
$$f(1, -3) = t^0(m)t^{-3}(l)$$

Y el enlace de ramificación es



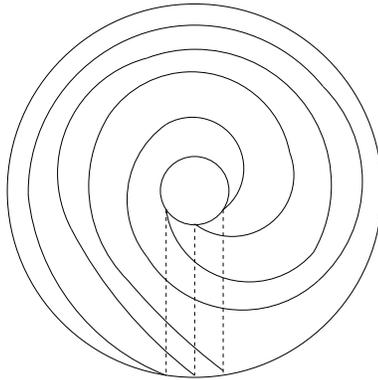
7.2. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD UNO

si usamos el Corolario 6.19, obtenemos el siguiente nudo que representa la misma variedad



Ejemplo 3:

Sea



cuya matriz asociada al homeomorfismo de pegado g es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

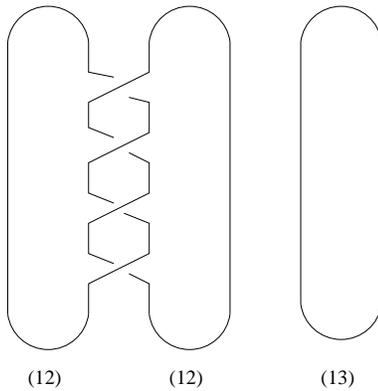
La fracción continua de $\frac{3}{4}$ es

$$\frac{3}{4} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$$

Así obtenemos:

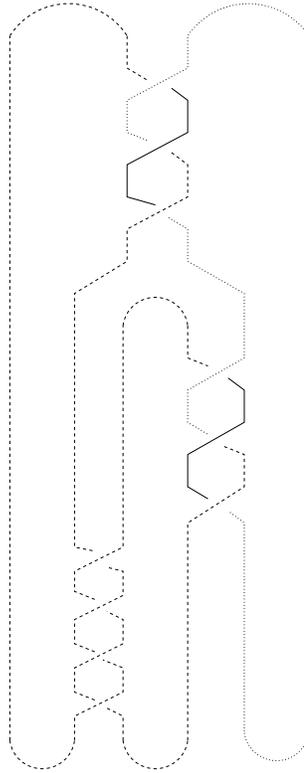
$$f(3, 4) = r_* t(l) t(m) t(l) t^0(l) t^{-1}(m) t^3(l)$$

Y el enlace de ramificación es



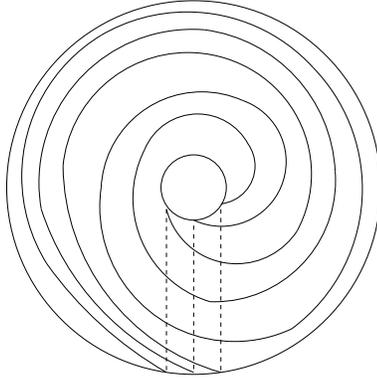
7.2. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD UNO

si usamos el Corolario 6.19, obtenemos el nudo



que representa la misma variedad.

Ejemplo 4:
Sea



cuya matriz asociada al homeomorfismo de pegado g es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

La fracción continua de $\frac{3}{5}$ es

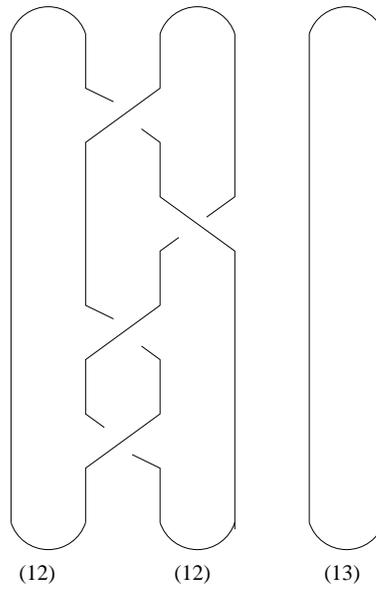
$$\frac{3}{5} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

Así obtenemos:

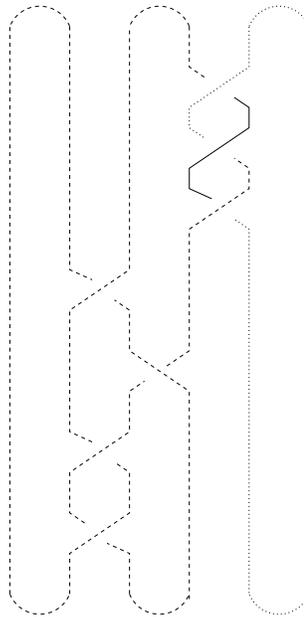
$$f(3, 5) = t^0(m)t(l)t^{-1}(m)t^2(l)$$

Y el enlace de ramificación es

7.2. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD UNO

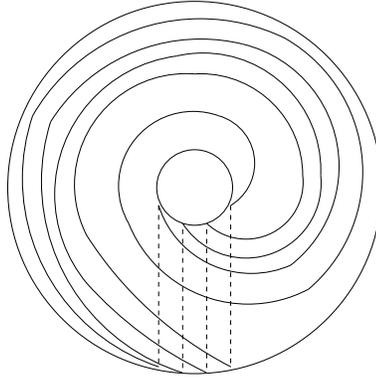


al aplicar el Corolario 6.19 tenemos el siguiente nudo



que representa a la misma variedad.

Ejemplo 5:
Sea



cuya matriz asociada al homeomorfismo de pegado g es:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

La fracción continua de $\frac{4}{5}$ es

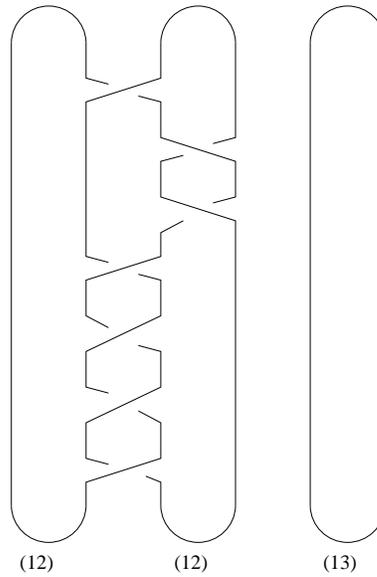
$$\frac{4}{5} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}$$

Así obtenemos:

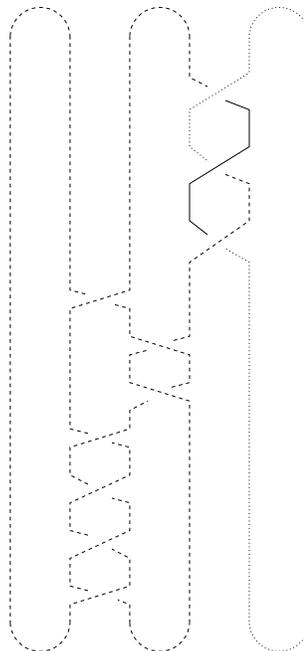
$$f(4, 5) = r_* t(l) t(m) t(l) t^0(l) t(m) t^4(l)$$

Y el enlace de ramificación es

7.2. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD UNO



si usamos el Corolario 6.19 obtenemos



que representa a la misma variedad.

7.3 3-variedades con género de Heegaard dos

Las descomposiciones de Heegaard de esta sección y la siguiente fueron tomadas de [7].

A continuación realizaremos el enlace de ramificación en S^3 para ciertas 3-variedades de género de Heegaard igual a dos, es decir, $M = V_1 \cup_h V_2$ donde $gen(\partial V_1) = 2$, por lo tanto $\partial V_1 = \text{toro de género dos}$.

Recordemos que para construir una cubierta simple ramificada de tres hojas ψ de una 3-variedad $M = V_1 \cup_h V_2$ en S^3 partimos de la cubierta simple ramificada de 3 hojas $\varphi : S^3 \rightarrow S^3$. Tomamos $S^3 = B_1 \cup_f B_2$ donde B_i sean tales que $\varphi^{-1}(B_i) = V_i$ para $i = 1, 2$. De esta manera tenemos el siguiente dibujo

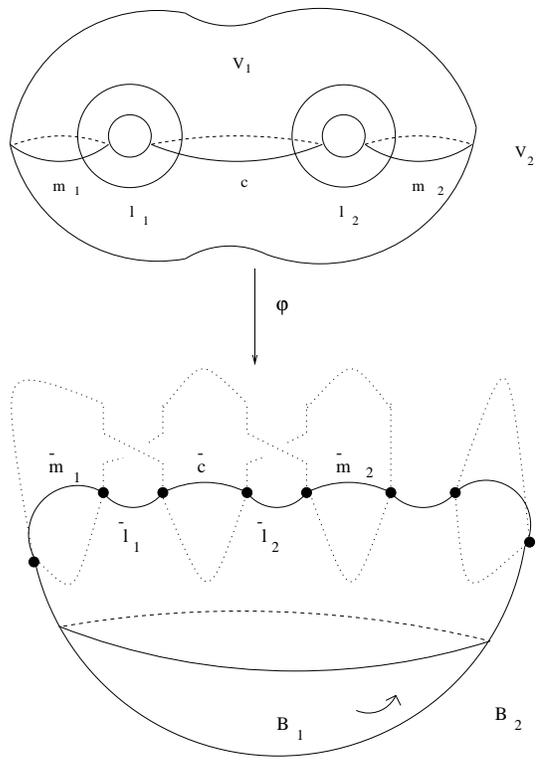


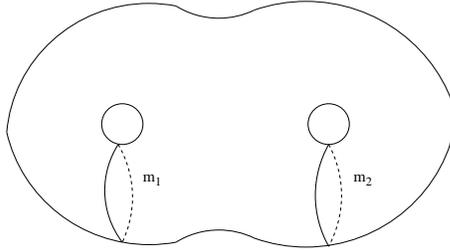
figura B

donde los arcos \bar{m}_i, \bar{c} y \bar{l}_i para $i = 1, 2$ se levantan a las curvas m_i, c y

7.3. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD DOS

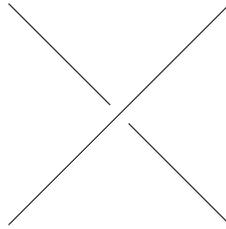
l_i , respectivamente.

Primero presentaremos la descomposición de Heegaard para la 3-variedad $M = V_1 \cup_h V_2$, es decir un dibujo de ∂V_2 con dos curvas simples cerradas μ_1 y μ_2 . En segundo lugar el homeomorfismo $h : \partial V_1 \rightarrow \partial V_2$ que envía a los meridianos $\{m_1, m_2\}$ en las curvas $\{\mu_1, \mu_2\}$. Los meridianos de los que hablamos son:

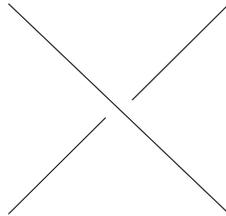


Recordemos que h será una composición de giros en ciertas curvas, así que en caso de ser necesario especificaremos quién es el arco que se levanta a tal curva, el giro en una curva σ se denotará por $\hat{\sigma}$. Un giro positivo en S^2 es girar en sentido opuesto a las manecillas del reloj.

Un giro positivo en S^2 al extenderlo a la bola B_1 se ve como



y un giro negativo se ve como



Un giro positivo en ∂V_i es un giro de Lickorish.

CAPÍTULO 7. ENLACES TRICOLOREADOS

Por último dibujaremos el enlace de ramificación, y su dibujo tricoloreado, donde las transposiciones estarán representadas por los siguientes tipo de líneas



(12)



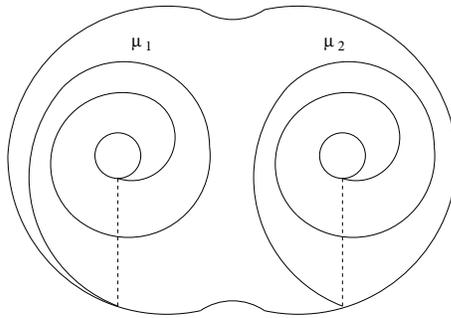
(13)



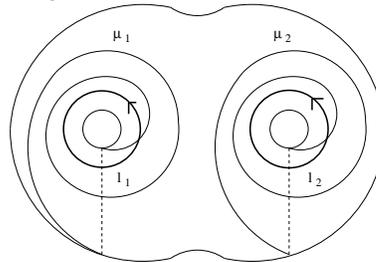
(23)

7.3. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD DOS

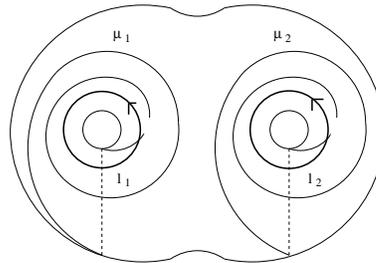
Ejemplo 2,1



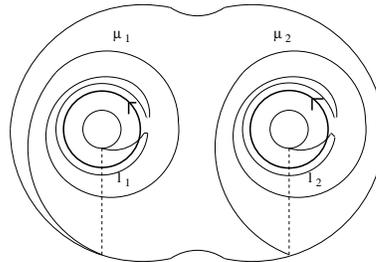
Tomemos las longitudes l_1 y l_2



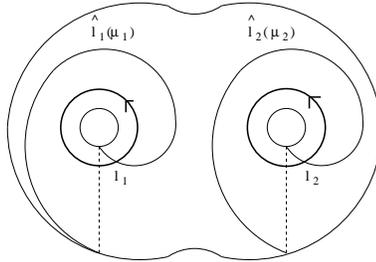
efectuaremos los giros de Lickorish en estas curvas



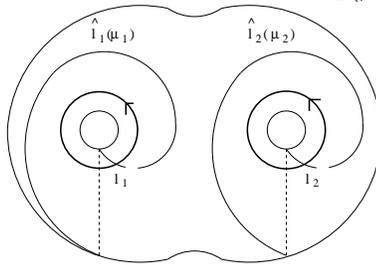
giramos en sentido positivo



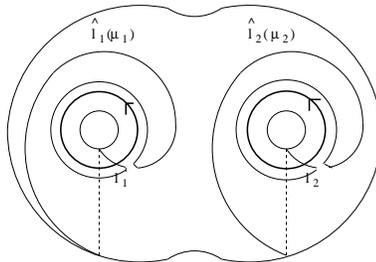
y obtenemos



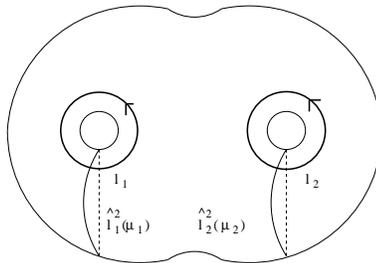
Efectuamos los giros de Lickorish en las curvas $\hat{l}_1(\mu_1)$ y $\hat{l}_2(\mu_2)$



giramos en sentido positivo



y obtenemos



7.3. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD DOS

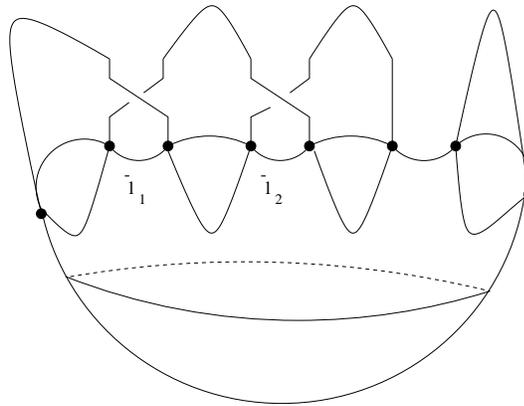
Observemos que

$$\begin{aligned}\widehat{l}_1^2 \widehat{l}_2^2 (\mu_2) &= \widehat{l}_1^2 (m_2) = m_2 \\ \widehat{l}_1^2 \widehat{l}_2^2 (\mu_1) &= \widehat{l}_1^2 (m_1) = m_1\end{aligned}$$

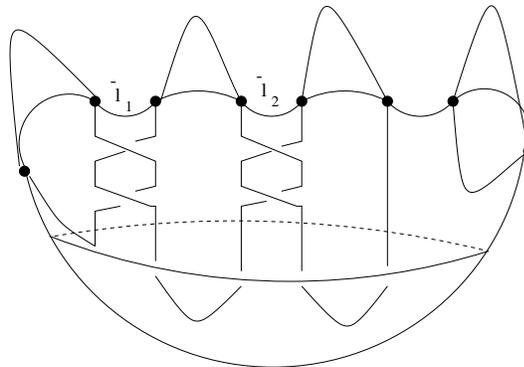
Entonces el siguiente homeomorfismo

$$\begin{aligned}h &:= \widehat{l}_2^{-2} \widehat{l}_1^{-2} \\ m_1 &\mapsto \mu_1 \\ m_2 &\mapsto \mu_2\end{aligned}$$

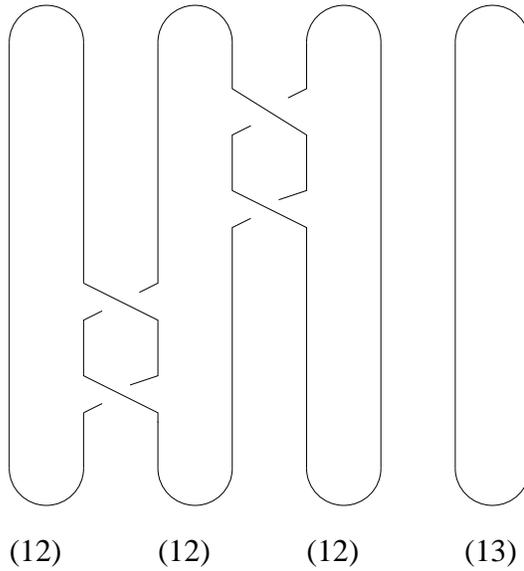
es el que nos interesa, pues envía a los meridianos a los curvas μ_1 y μ_2 . Como \bar{l}_1 y \bar{l}_2 se levantan a l_1 y l_2 , respectivamente, entonces los giros en \bar{l}_1 y \bar{l}_2 se levantan a giros en l_1 y l_2 .



Si efectuamos tales giros en S^3 obtenemos el enlace de ramificación:

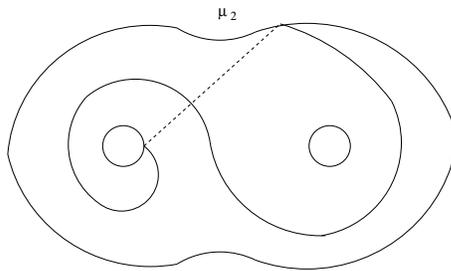
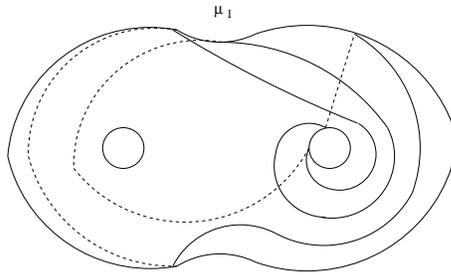


Por simplicidad dibujaremos

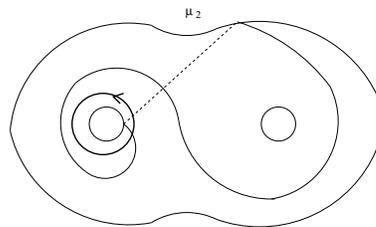


7.3. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD DOS

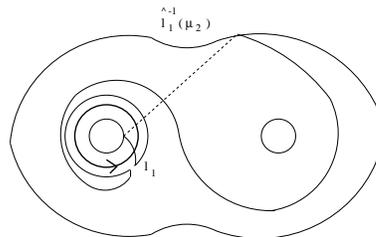
Ejemplo 2,2



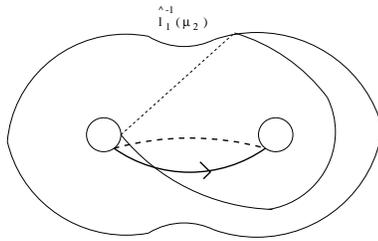
Sea la curva l_1



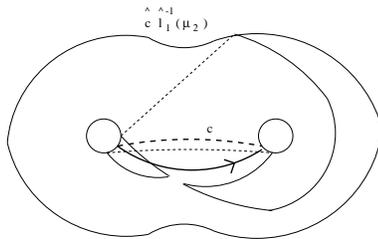
efectuamos el giro \hat{l}_1^{-1}



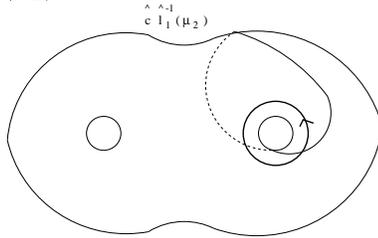
para obtener la curva $\hat{l}_1^{-1}(\mu_2)$ y tomenos la curva c



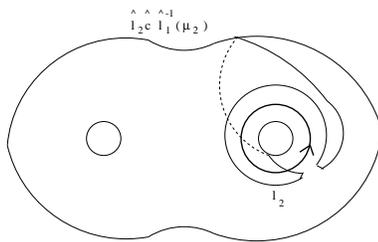
giramos en c



y se tiene la curva $\widehat{c}l_1^{-1}(\mu_2)$, ahora consideremos a l_2

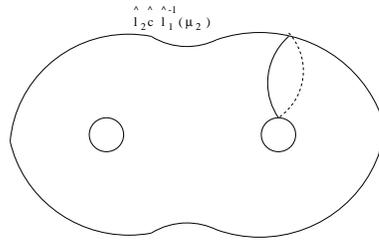


al girar en l_2

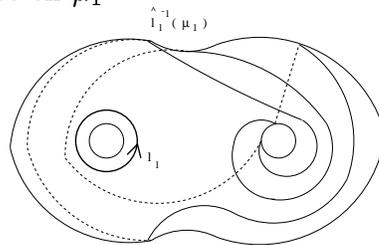


y así tenemos

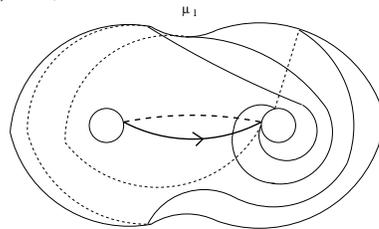
7.3. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD DOS



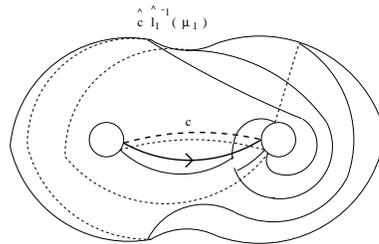
Hasta aquí tenemos que el homeomorfismo $\widehat{l}_2 \widehat{c} l_1^{-1}$ envía a μ_2 a m_2 . Veamos que efecto tiene éste en μ_1



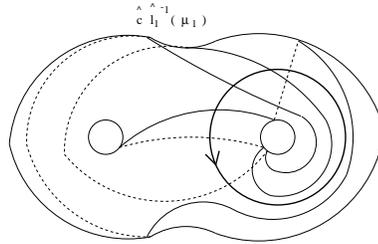
observemos que $\widehat{l}_1^{-1}(\mu_1) = \mu_1$. Tomemos la curva c



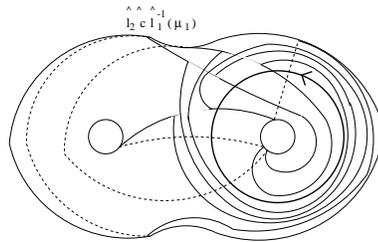
el efecto de \widehat{c} en μ_1 es



Obtenemos la curva $\widehat{c} l_1^{-1}(\mu_1)$ y consideremos el giro en l_2



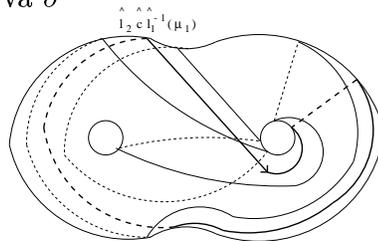
El giro en l_2 es



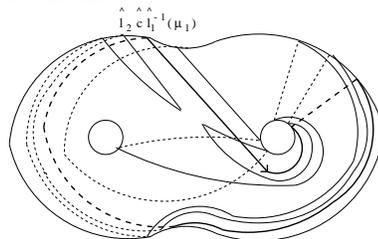
para tener la curva $\hat{l}_2 \hat{c} \hat{l}_1^{-1}(\mu_1)$.

De aquí en adelante seguiremos componiendo con giros en curvas, estos tendrán la característica de que no afectarán a m_2 , pues comenzamos con un sistema de meridianos.

Consideremos la curva σ

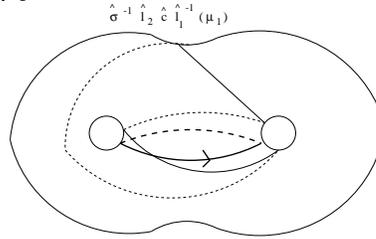


al efectuar el giro $\hat{\sigma}^{-1}$ obtenemos

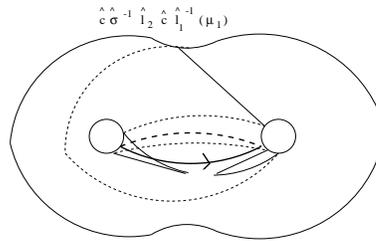


7.3. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD DOS

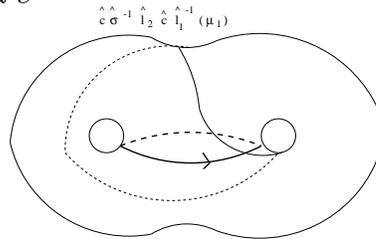
Ahora tomenos la curva c



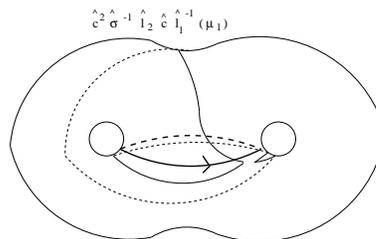
el giro en tal curva es



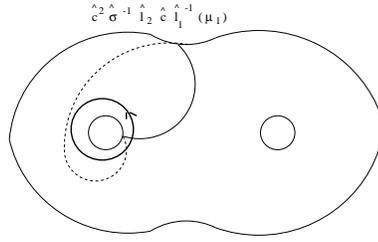
Tomemos nuevamente a c



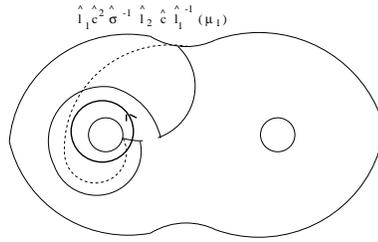
giramos



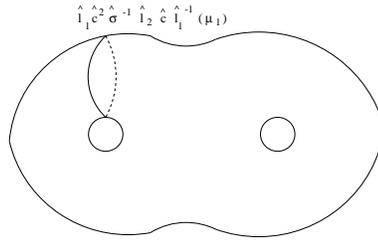
Así obtenemos $\hat{c}^2 \hat{\sigma}^{-1} \hat{l}_2 \hat{c} \hat{l}_1^{-1} (\mu_1)$.



El giro en l_1 es



y obtenemos



De esta manera hemos obtenido un homeomorfismo

$$\hat{l}_1 \hat{c}^2 \hat{\sigma}^{-1} \hat{l}_2 \hat{c} \hat{l}_1^{-1}$$

tal que envía a μ_1 a m_1 y a μ_2 a m_2 . Al tomar el inverso de este homeomorfismo obtenemos

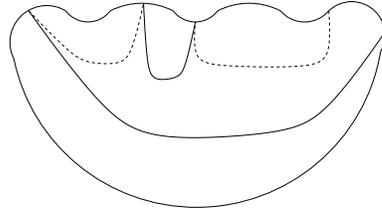
$$h := \hat{l}_1 \hat{c}^{-1} \hat{l}_2^{-1} \hat{\sigma} \hat{c}^{-2} \hat{l}_1^{-1}$$

$$m_1 \mapsto \mu_1$$

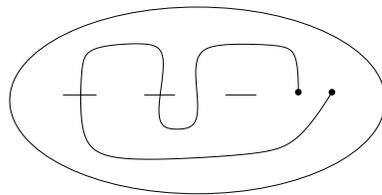
$$m_2 \mapsto \mu_2$$

Ya sabemos quiénes son los arcos en S^3 que se levantan a l_1 , l_2 , c , y el arco en S^3 que se levanta a σ es

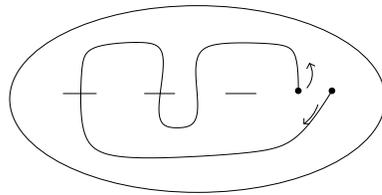
7.3. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD DOS



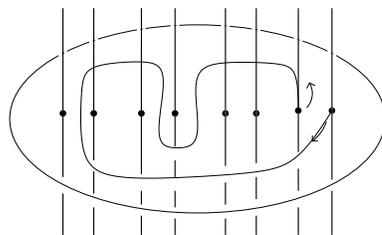
Si vemos esta figura desde arriba lo que vemos es



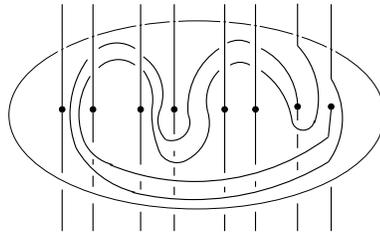
El giro positivo en este arco esta indicado por las flechas



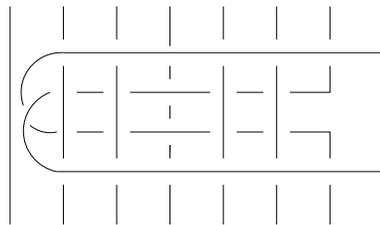
Si hacemos memoria y vemos la figura B, tenemos el siguiente dibujo



Así el efecto de girar en el arco que se levanta a σ es el siguiente

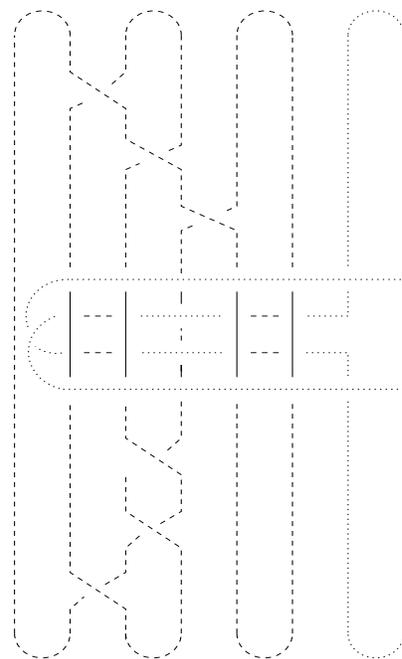
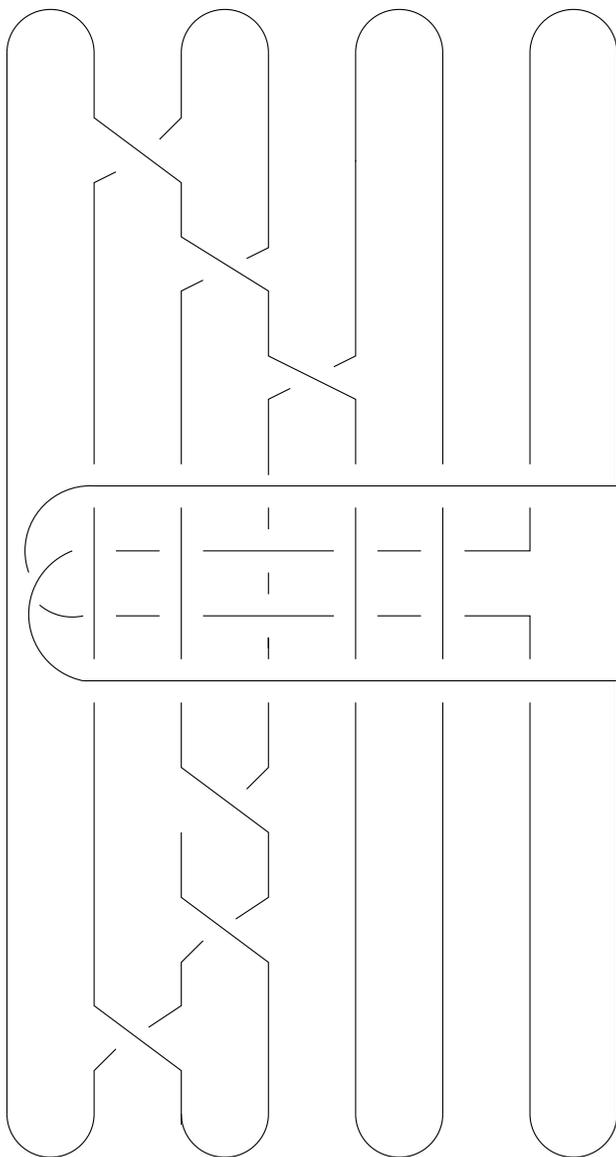


Si jalamos los arcos y acomodamos, la extensión del giro a la 3-bola se ve como

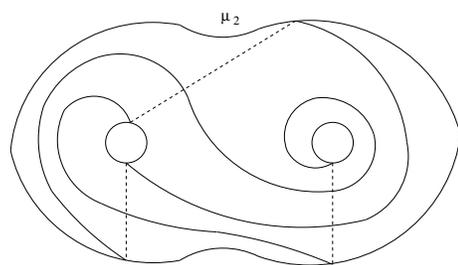
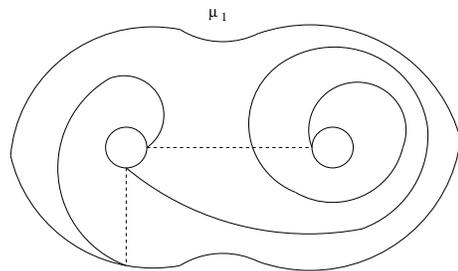


Al efectuar todos los giros en los arcos, obtenemos el siguiente enlace de ramificación.

7.3. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD DOS



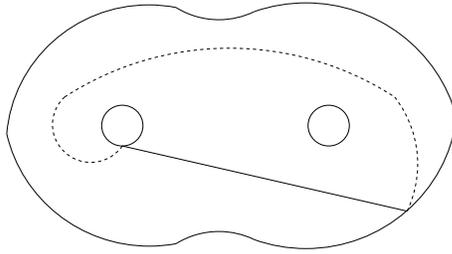
Ejemplo 2,3



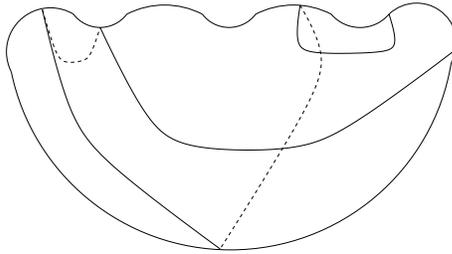
$$h := \widehat{m}_1^{-1} \widehat{l}_2 \widehat{m}_1 \widehat{m}_2^{-1} \widehat{\sigma}^{-1} \widehat{m}_2 \widehat{m}_1^{-1} \widehat{m}_2^{-2} \widehat{l}_2$$

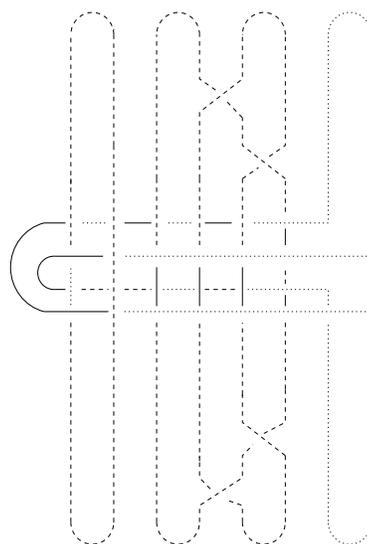
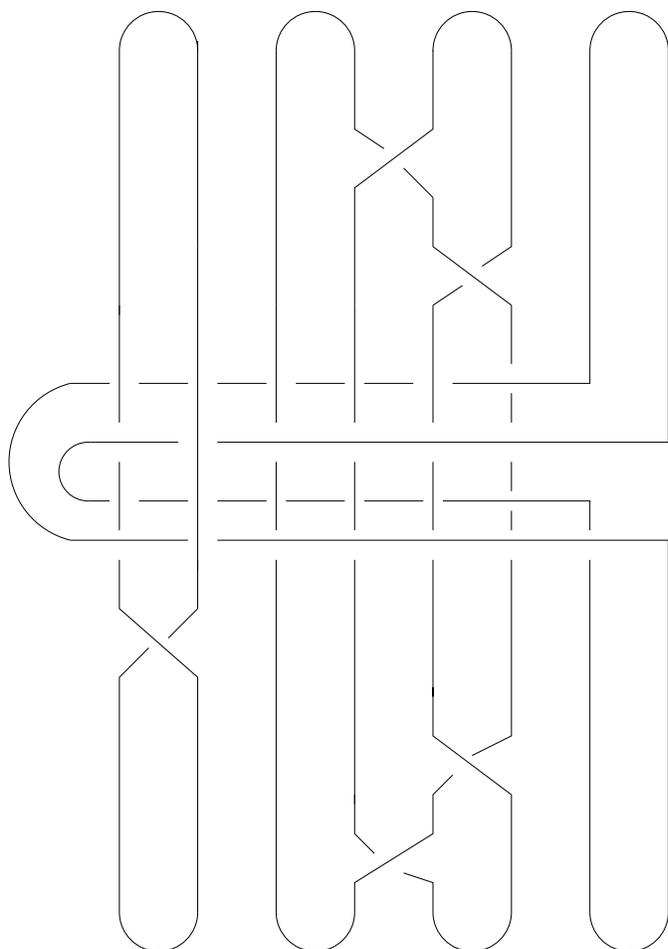
7.3. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD DOS

donde σ es



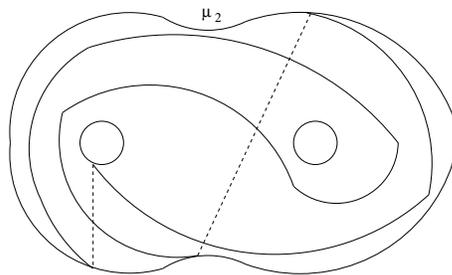
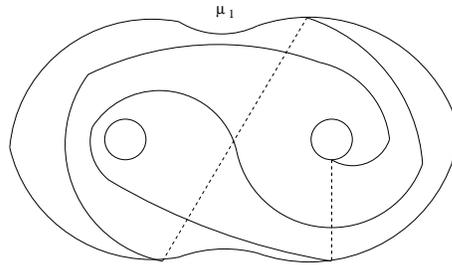
y el arco que se levanta a σ es





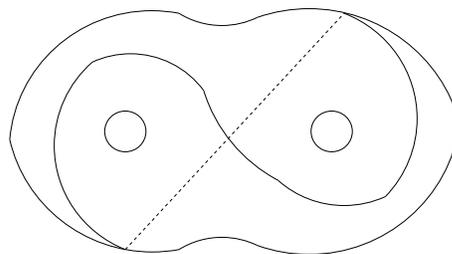
7.3. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD DOS

Ejemplo 2,4

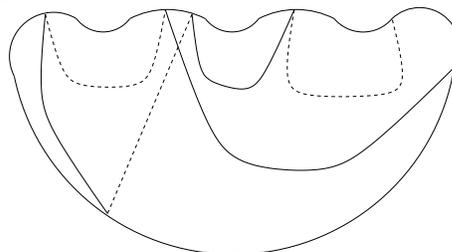


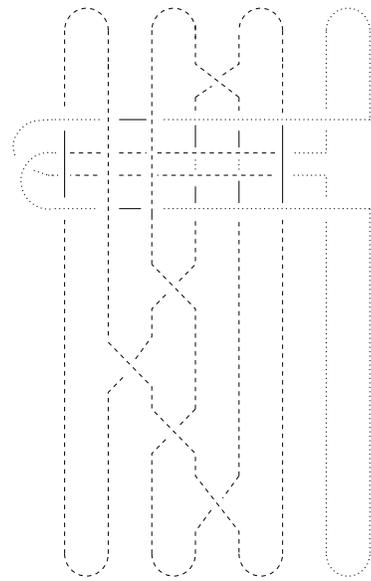
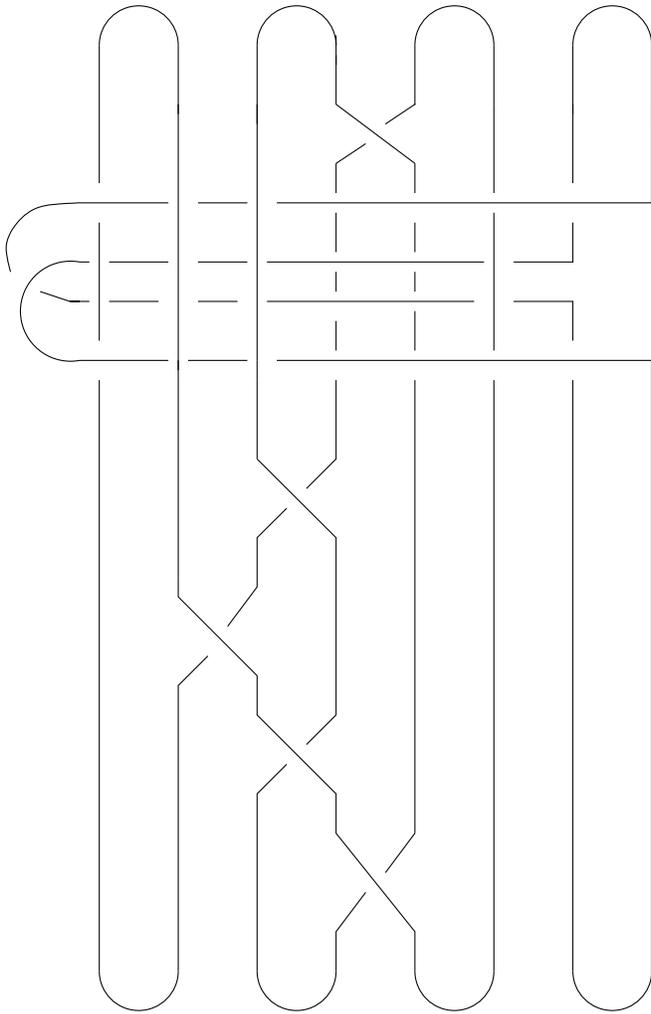
$$h := \hat{l}_2^{-1} \hat{\sigma} \hat{c}^{-1} \hat{l}_1^{-1} \hat{c}^{-1} \hat{l}_2^{-1}$$

σ es



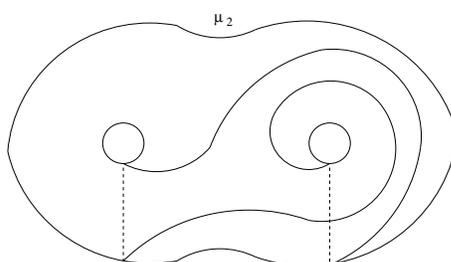
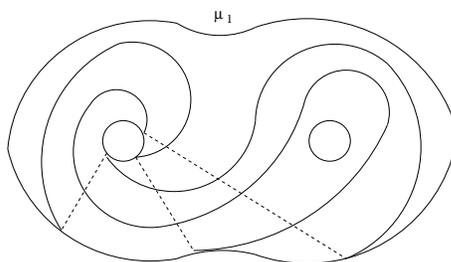
y el arco que se levanta a σ es





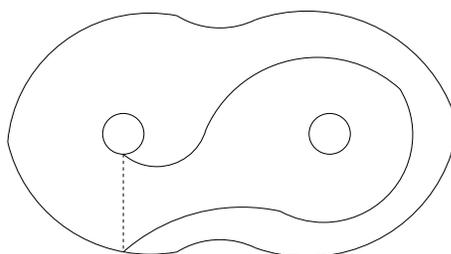
7.3. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD DOS

Ejemplo 2,5

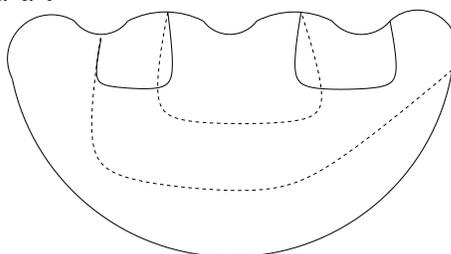


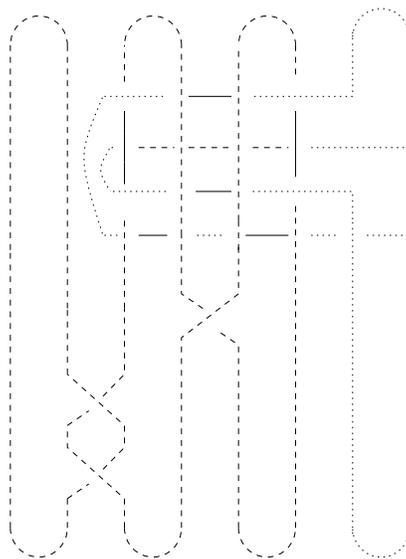
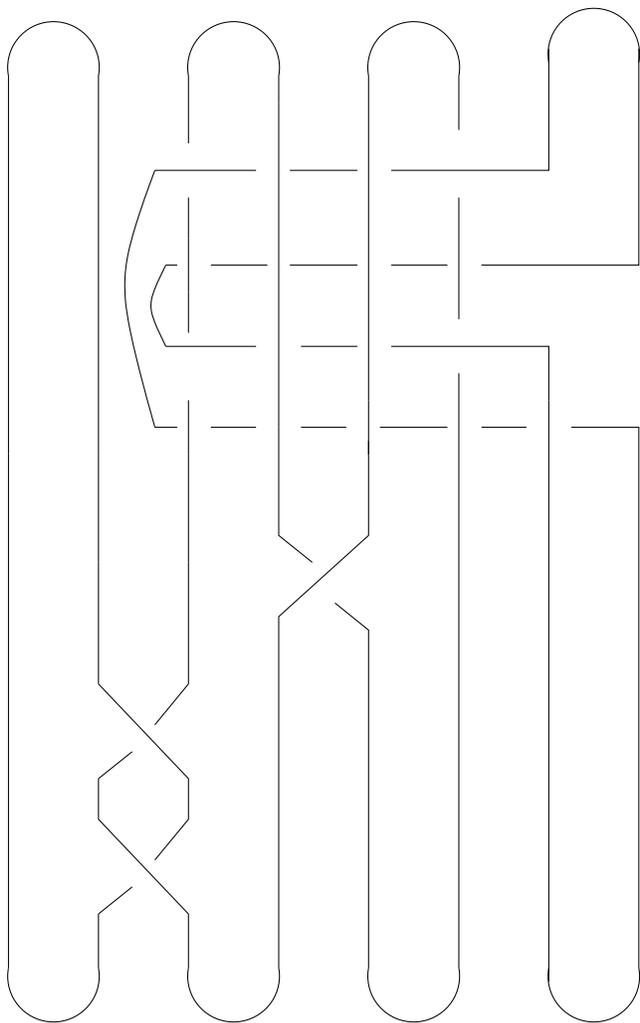
$$h := \hat{\sigma} \hat{l}_2 \hat{l}_1^{-2}$$

σ es



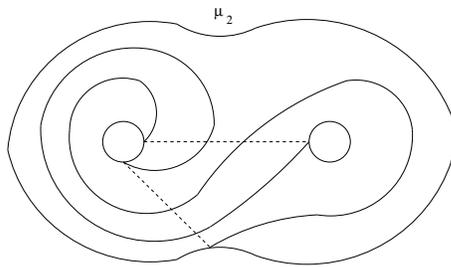
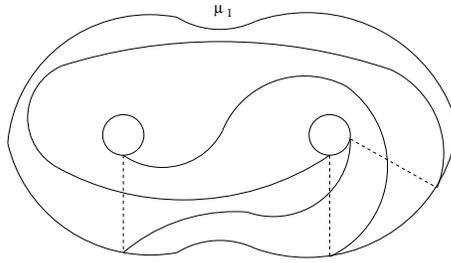
el arco que se levanta a σ





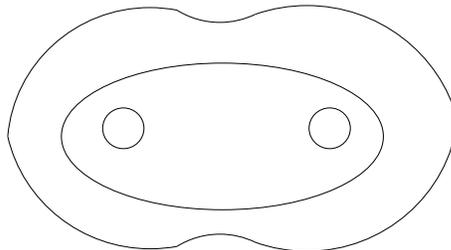
7.3. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD DOS

Ejemplo 2,6

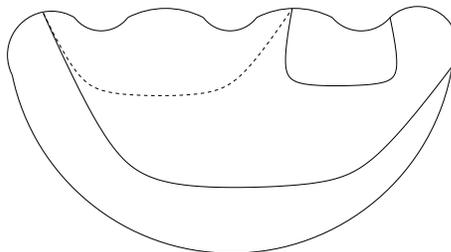


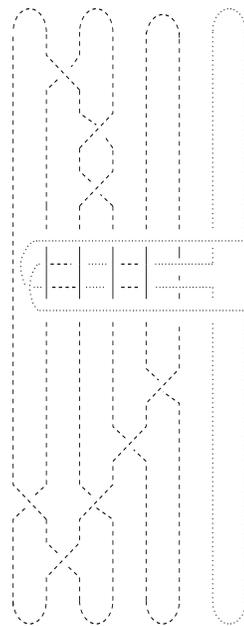
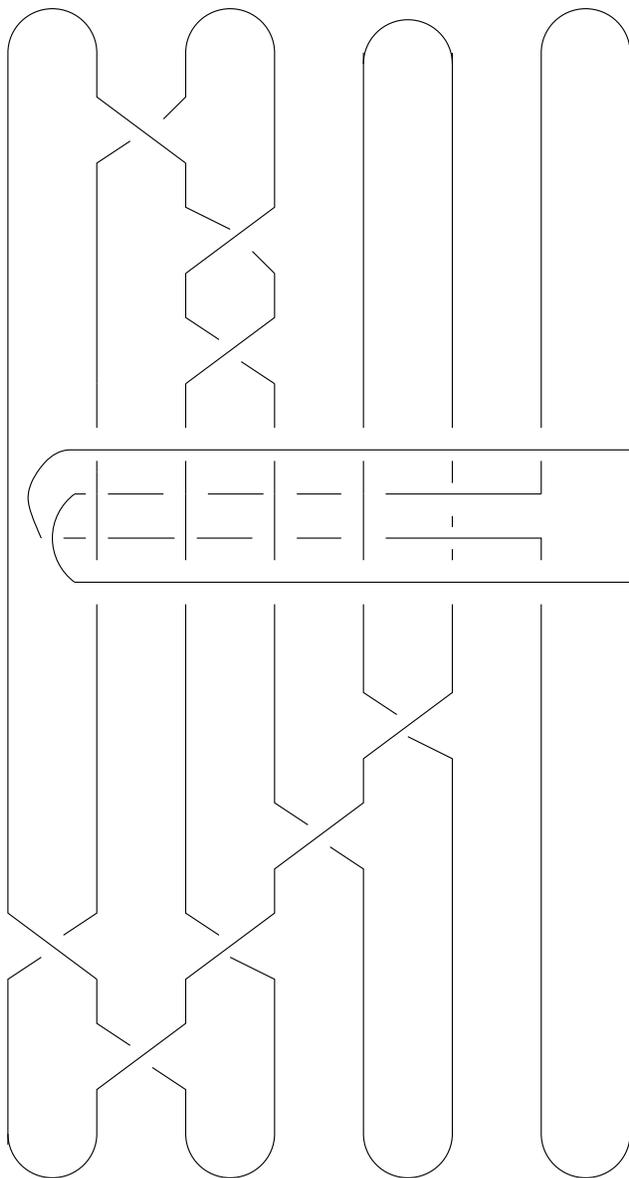
$$h := \widehat{l}_1^{-1} \widehat{c}^2 \widehat{m}_2^{-1} \widehat{\sigma} \widehat{m}_2 \widehat{l}_2 \widehat{c} \widehat{m}_1^{-1} \widehat{l}_1$$

σ es



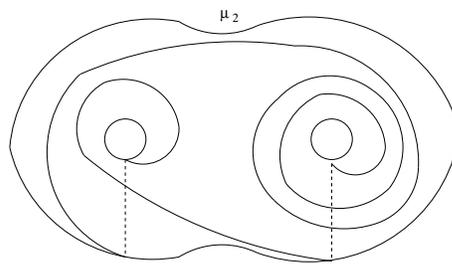
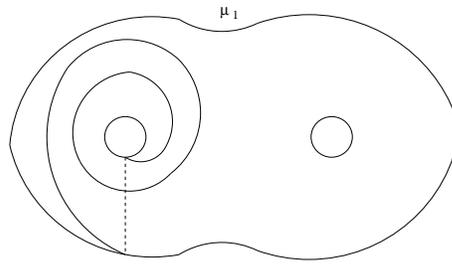
y el arco correspondiente es



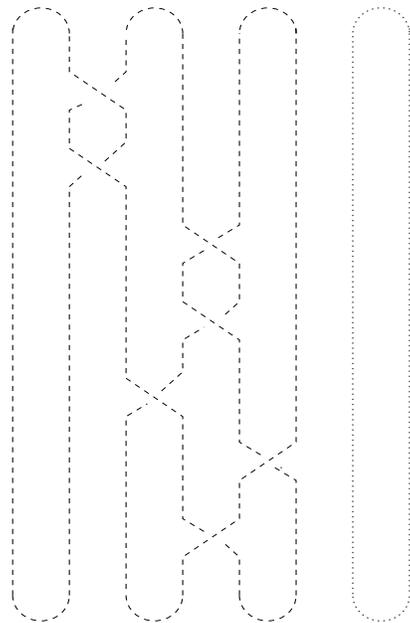
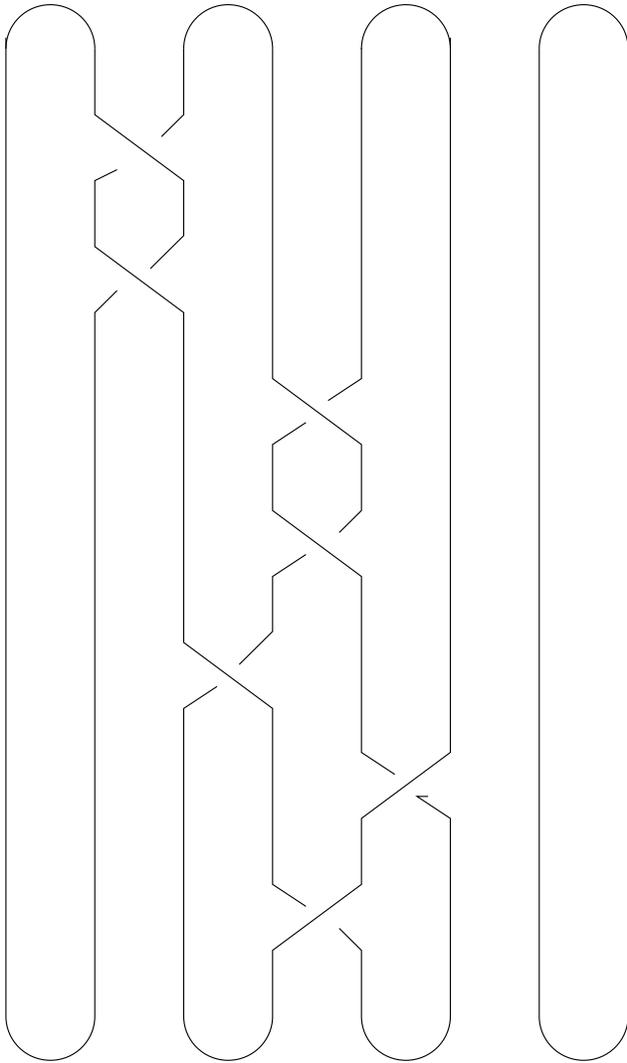


7.3. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD DOS

Ejemplo 2,7

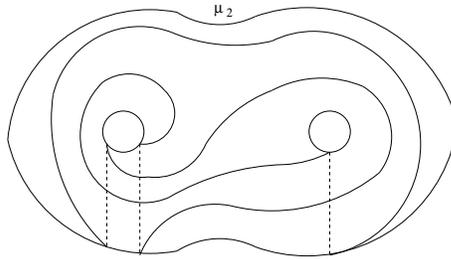
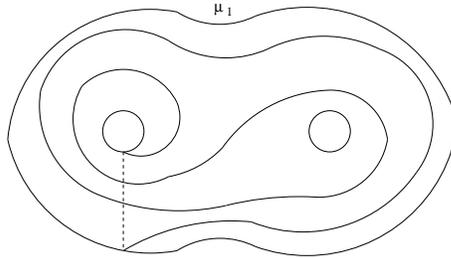


$$h := \hat{l}_1^{-2} \hat{l}_2^{-2} \hat{c}^{-1} \hat{m}_2 \hat{l}_2$$



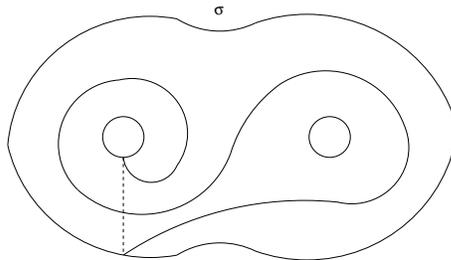
7.3. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD DOS

Ejemplo 2,8

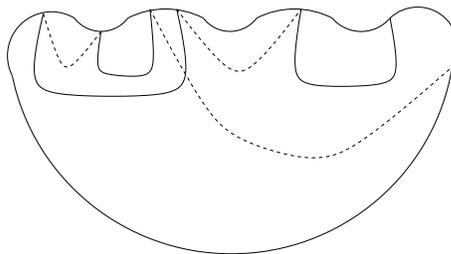


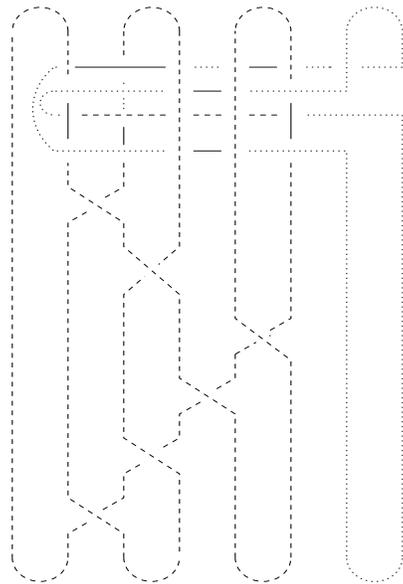
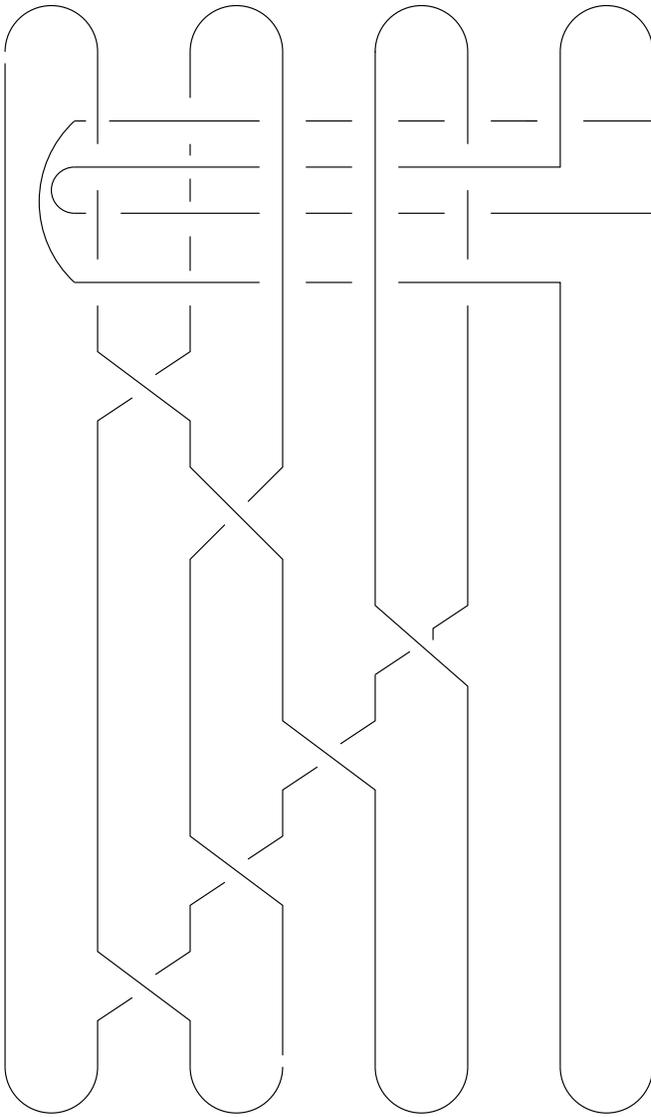
$$h := \hat{\sigma}^{-1} \hat{l}_1^{-1} \hat{c}^{-1} \hat{m}_2^{-1} \hat{l}_2^{-1} \hat{c}^{-1} \hat{l}_1^{-1}$$

la curva σ es



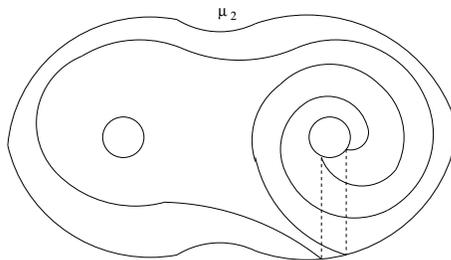
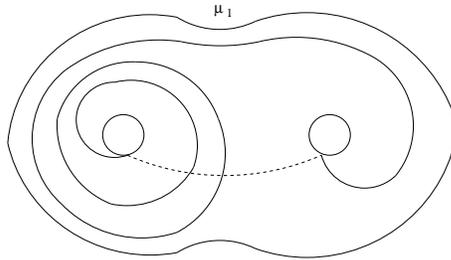
el arco que se levanta a σ es





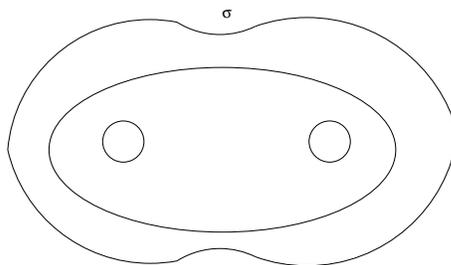
7.3. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD DOS

Ejemplo 2,9

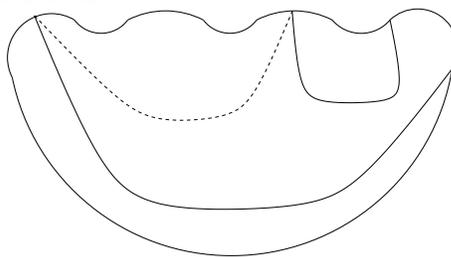


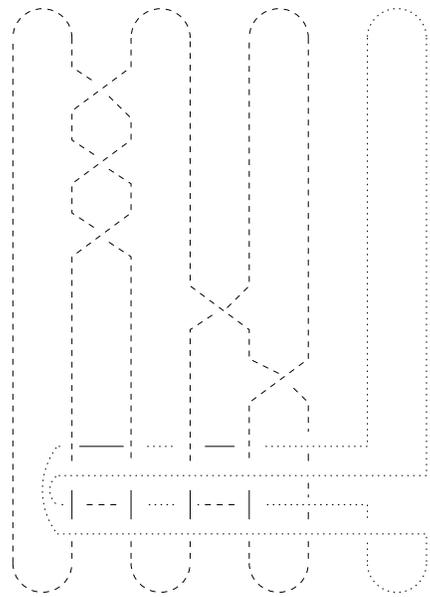
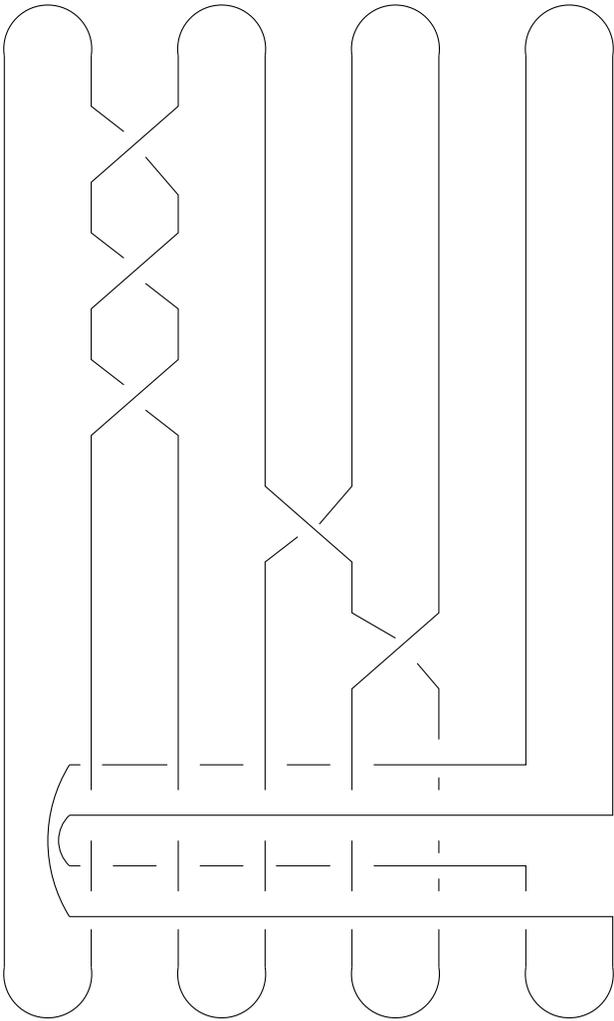
$$h := \hat{l}_1^2 \hat{l}_2^{-1} \hat{l}_1 \hat{m}_2 \hat{\sigma}^{-1}$$

la curva σ es



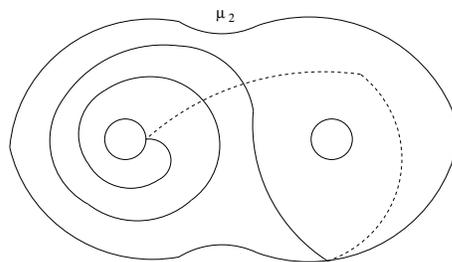
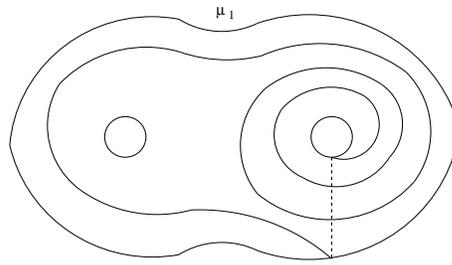
el arco que se levanta a σ es



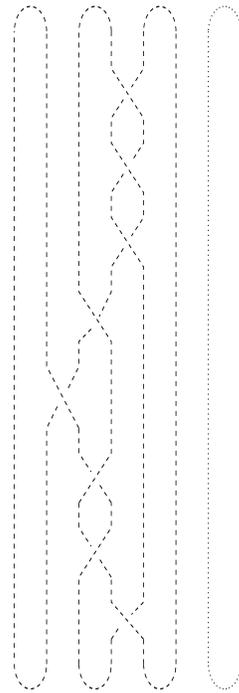
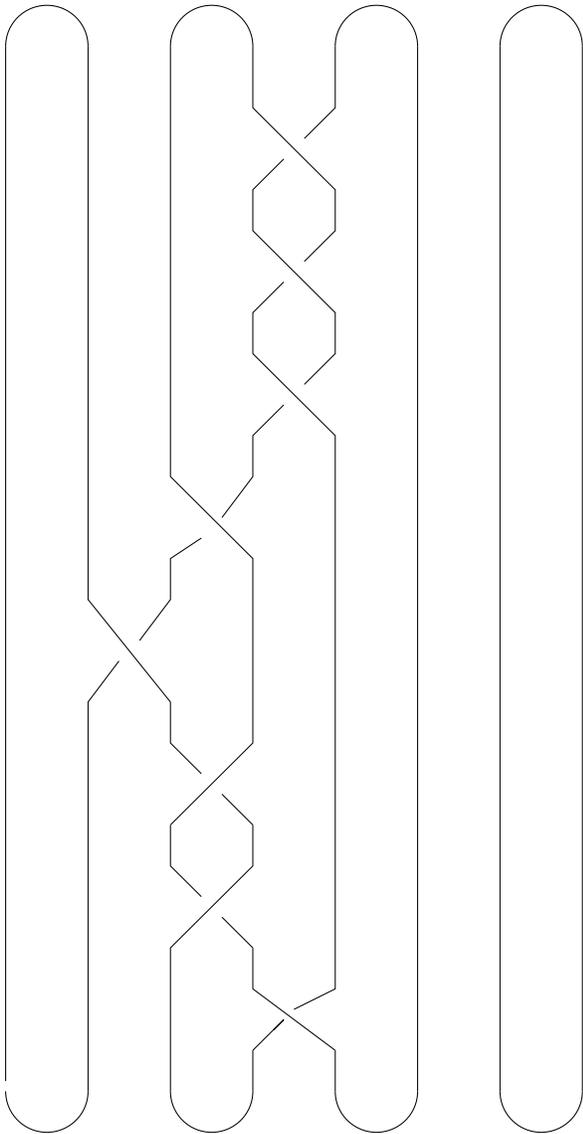


7.3. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD DOS

Ejemplo 2,10

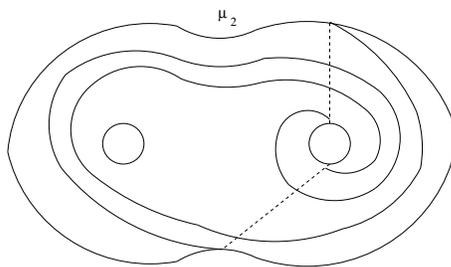
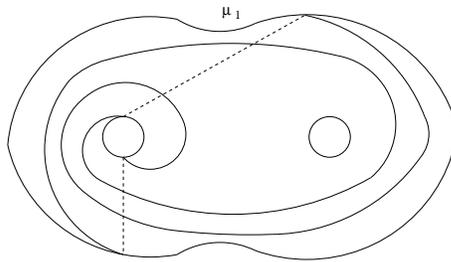


$$h := \hat{l}_2^{-3} \hat{c}^{-1} \hat{l}_1^{-1} \hat{c}^2 \hat{l}_2^{-1}$$



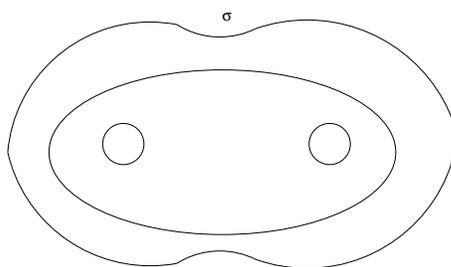
7.3. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD DOS

Ejemplo 2,11

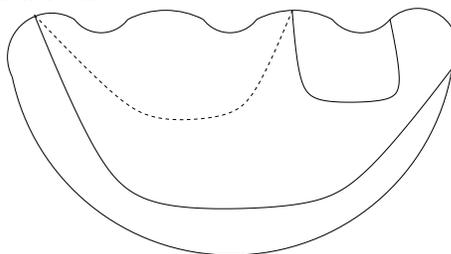


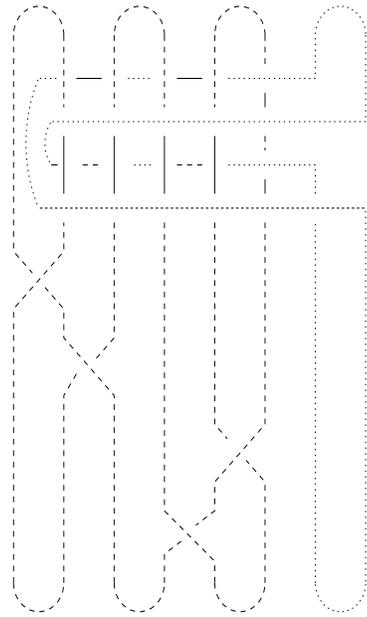
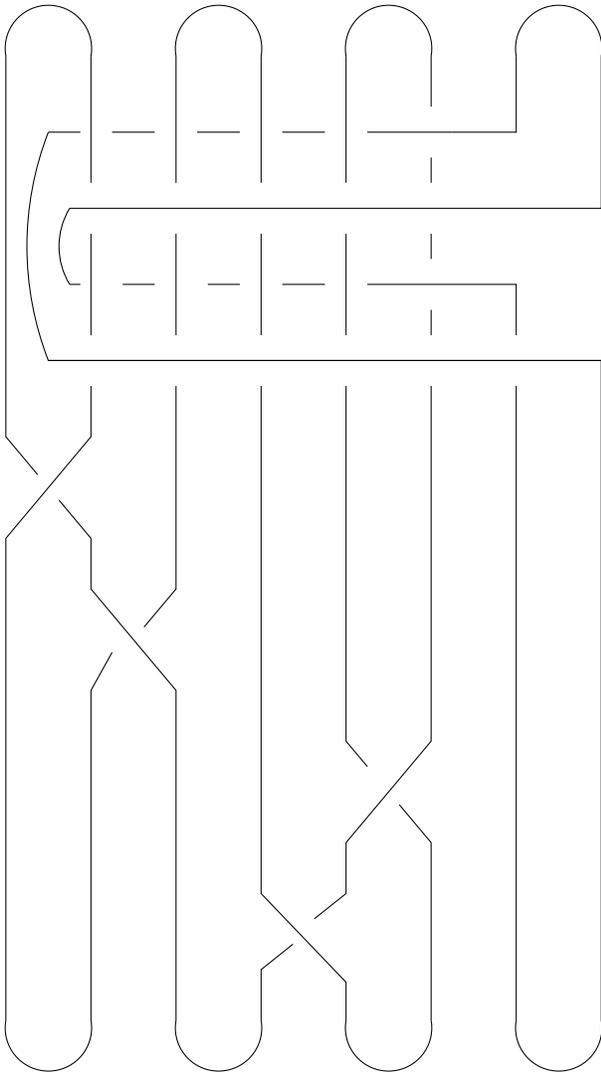
$$h := \hat{\sigma}^{-1} \hat{m}_1 \hat{l}_1^{-1} \hat{m}_2 \hat{l}_2^{-1}$$

la curva σ es



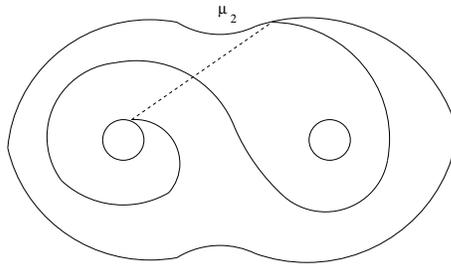
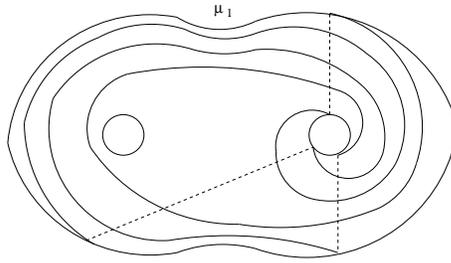
el arco que se levanta a σ es





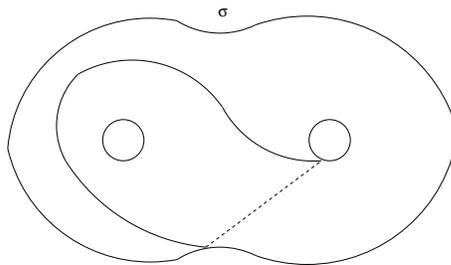
7.3. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD DOS

Ejemplo 2,12

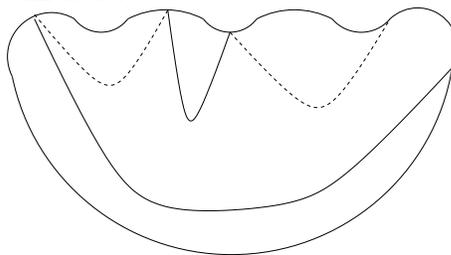


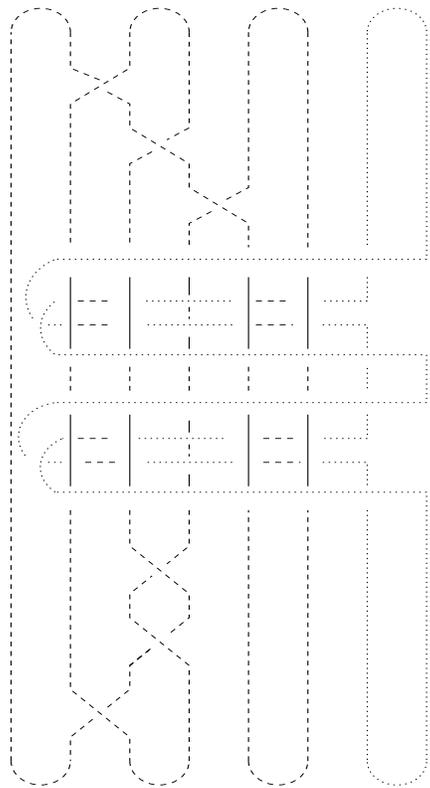
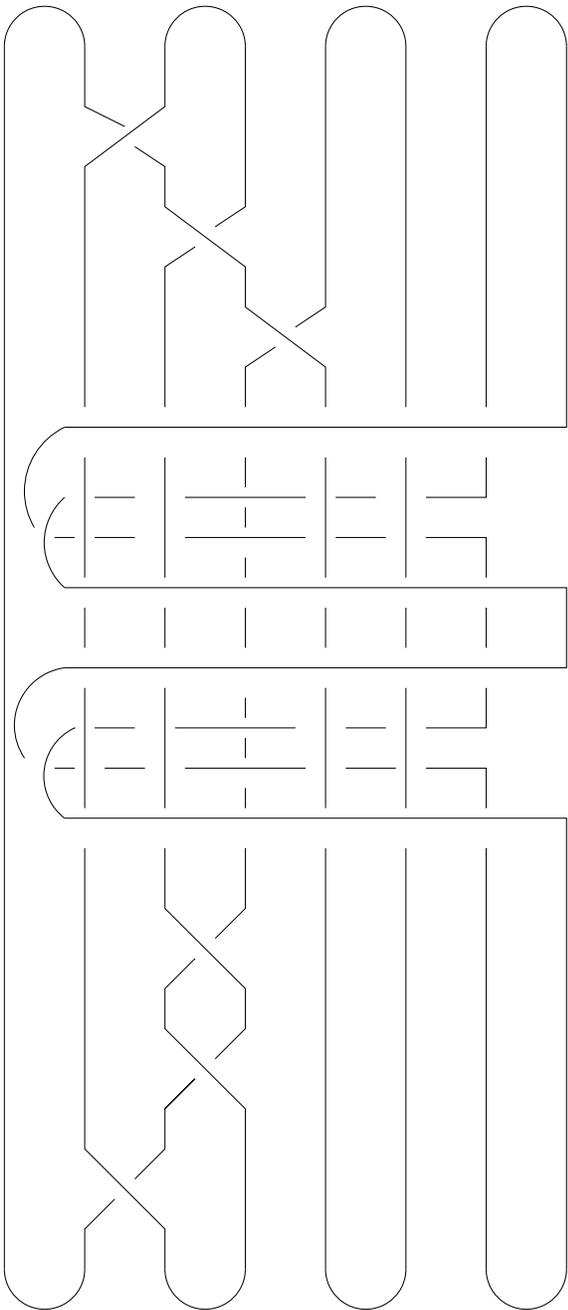
$$h := \hat{l}_1 \hat{c}^{-1} \hat{l}_2^{-1} \hat{\sigma}^2 \hat{c}^{-2} \hat{l}_1^{-1}$$

σ es



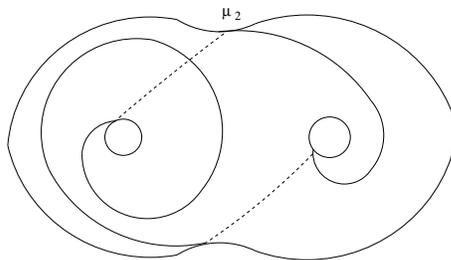
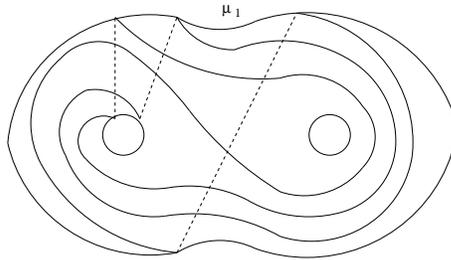
el siguiente arco se levanta a σ





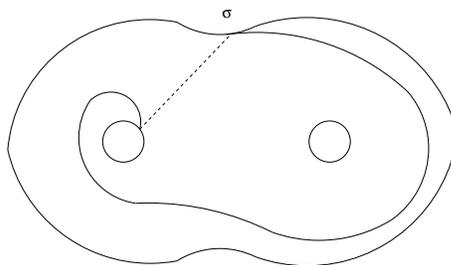
7.3. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD DOS

Ejemplo 2,13

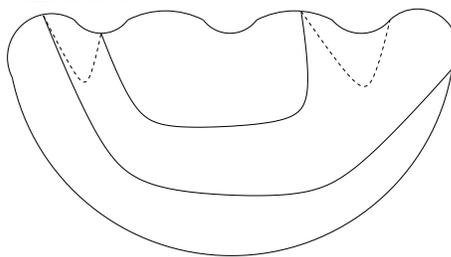


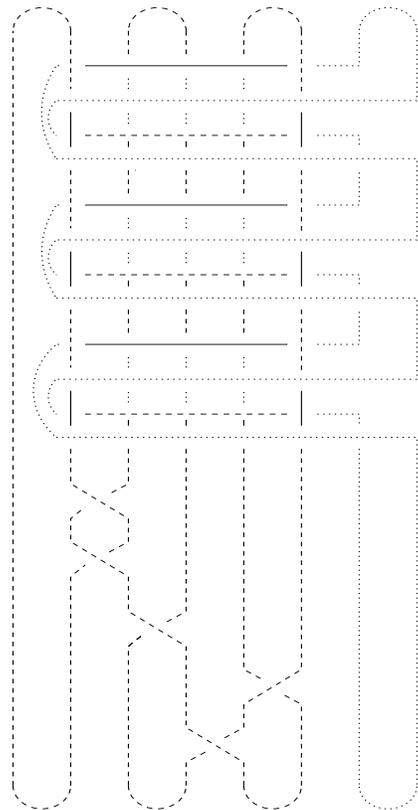
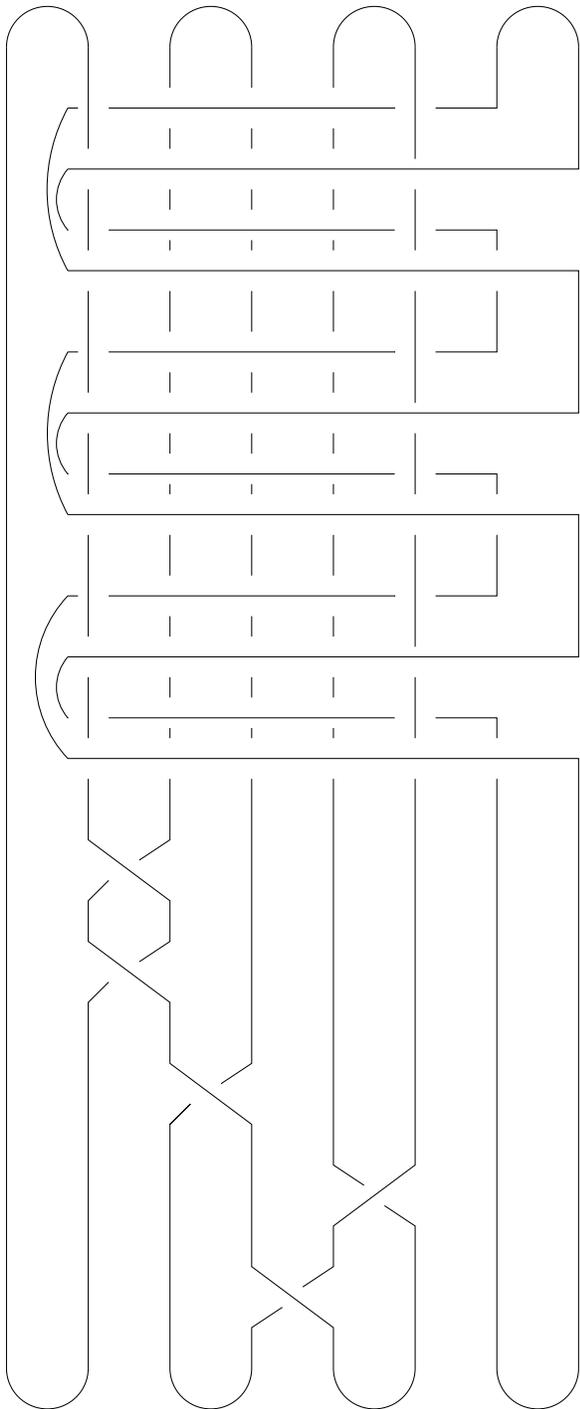
$$h := \hat{\sigma}^{-3} \hat{l}_1^{-2} \hat{c}^{-1} \hat{m}_2 \hat{l}_2^{-1}$$

la curva σ es



el siguiente arco se levanta a σ

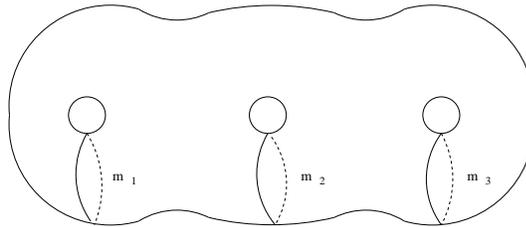




7.4 3-variedades con género de Heegaard tres

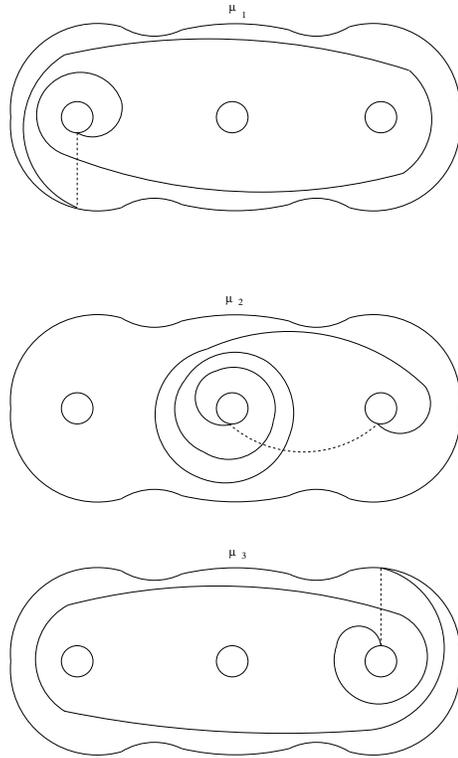
En este caso tenemos una 3-variedad $M = V_1 \cup_h V_2$, donde $gen(\partial V_1) = 3$, es decir $\partial V_1 = \text{toro de género 3}$.

Seguiremos el orden que en caso anterior, sólo que ahora los meridianos a los que son enviados las curvas μ_1, μ_2, μ_3 por conveniencia no siempre serán



Cuando esto suceda especificaremos quiénes son tales meridianos. Seguiremos las mismas convenciones que en la sección anterior para la presentación de los dibujos.

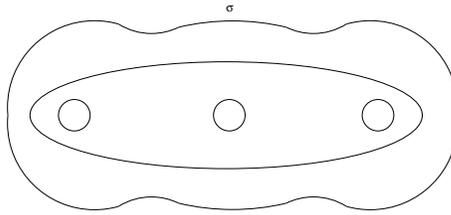
Ejemplo 3,1



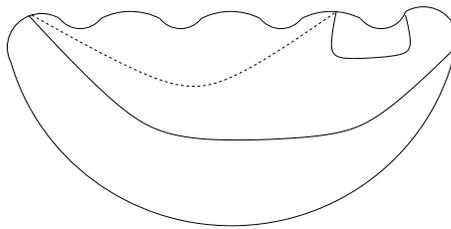
$$h := \hat{c}_1 \hat{\sigma}^{-1} \hat{c}_1^{-1} \hat{l}_1^{-1} \hat{l}_3^{-1} \hat{l}_2^2 \hat{m}_2 \hat{c}_2^{-1} \hat{l}_2^{-1}$$

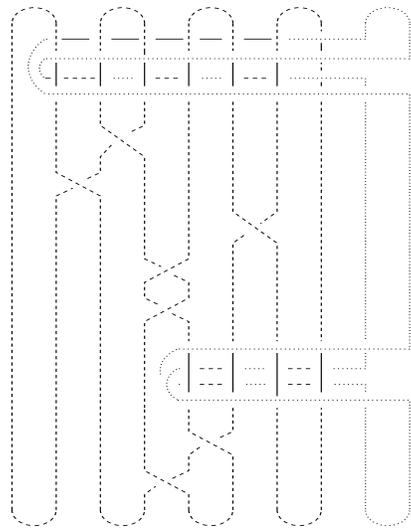
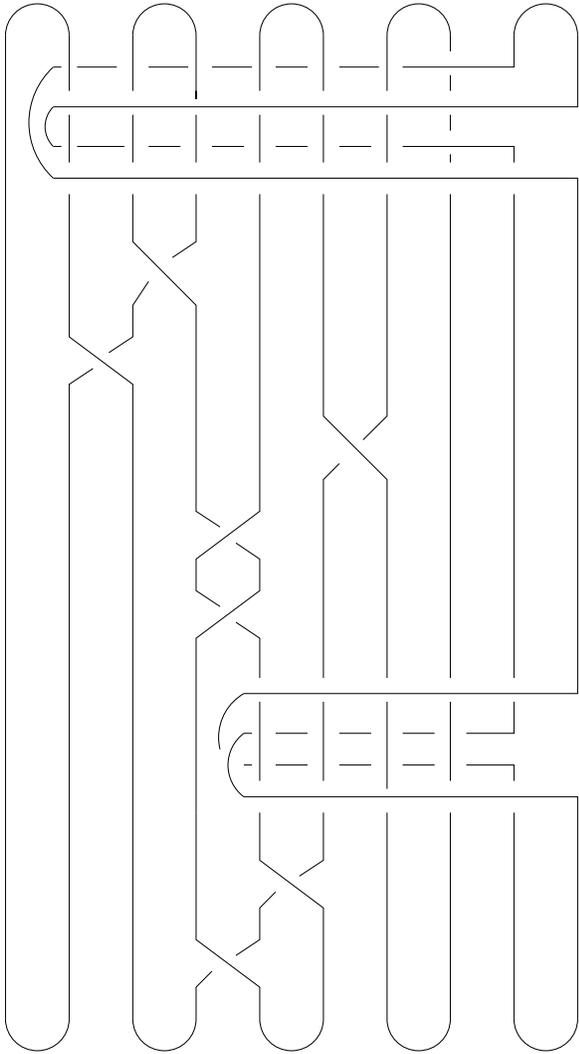
7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES

donde σ es



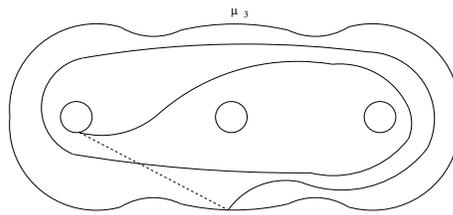
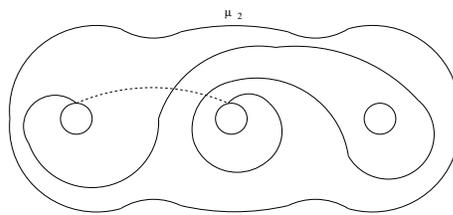
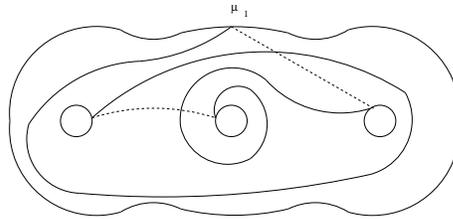
y el arco que se levanta a σ es





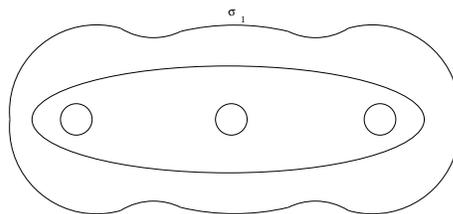
7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES

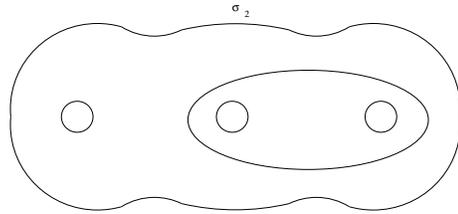
Ejemplo 3,2



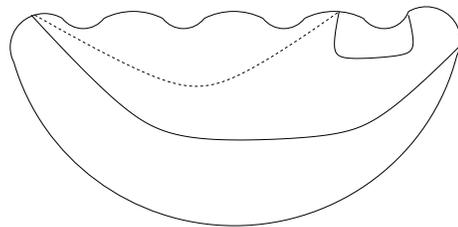
$$h := \hat{\sigma}_1 \hat{l}_2 \hat{l}_1^{-1} \hat{c}_1^{-1} \hat{\sigma}_2^{-1} \hat{l}_3 \hat{c}_2 \hat{l}_2 \hat{c}_1 \hat{l}_1 \hat{c}_1 \hat{l}_2 \hat{c}_2 \hat{l}_3 \hat{m}_2^{-1} \hat{c}_1^{-1} \hat{l}_2^{-1}$$

Las curvas σ_1 y σ_2 son

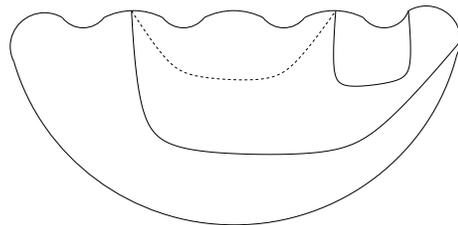




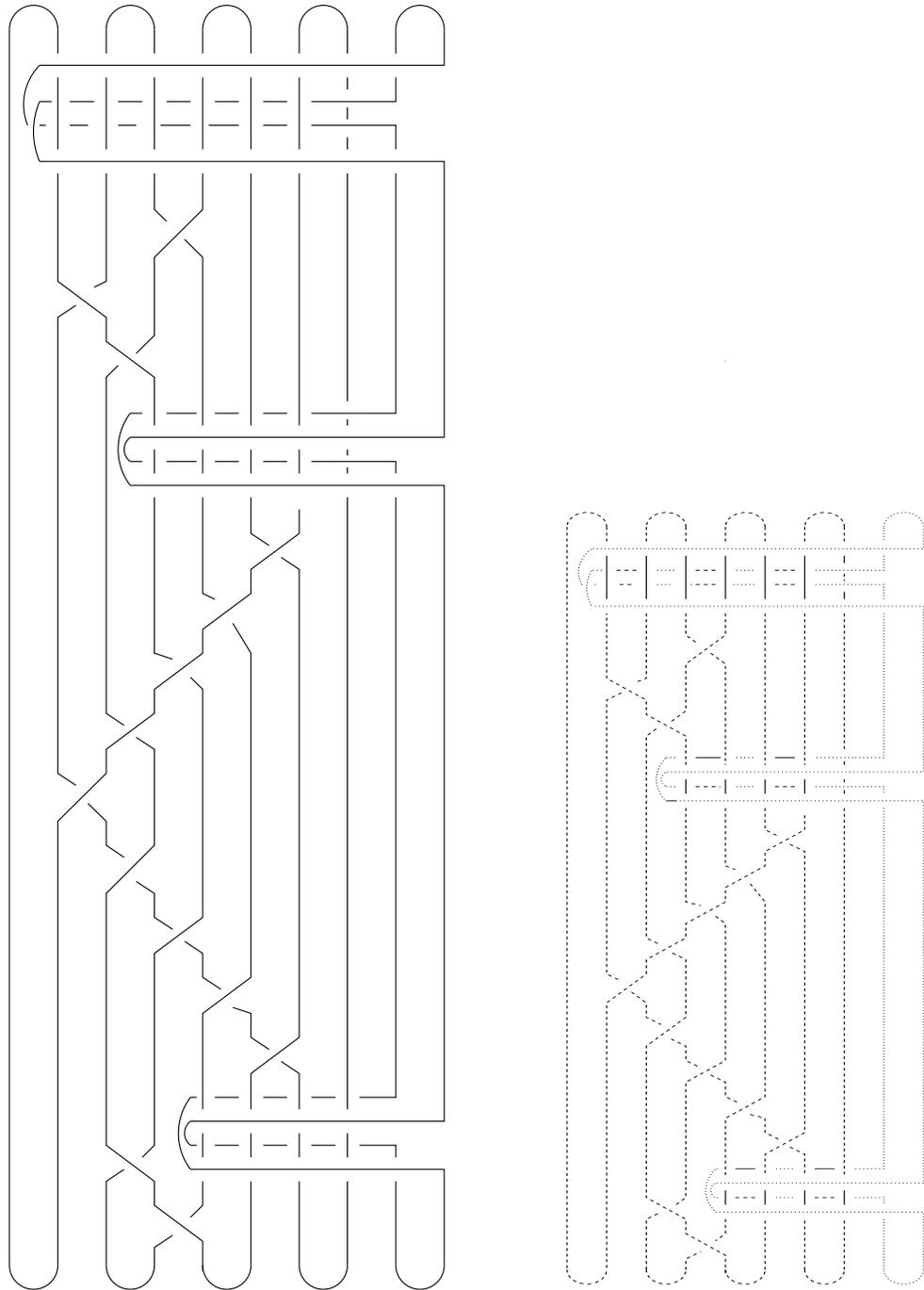
el arco que se levanta a σ_1 es



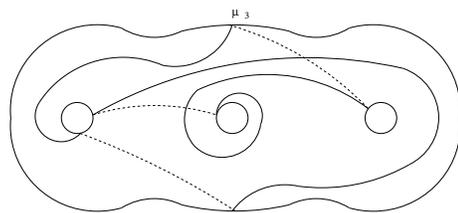
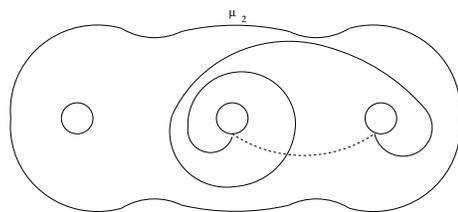
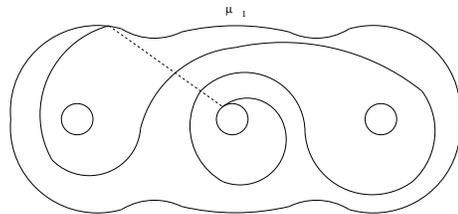
y el correspondiente a σ_2



7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES



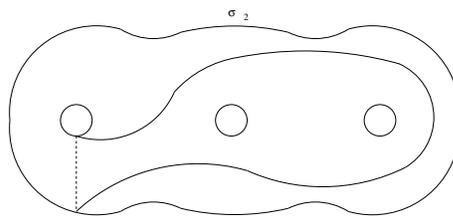
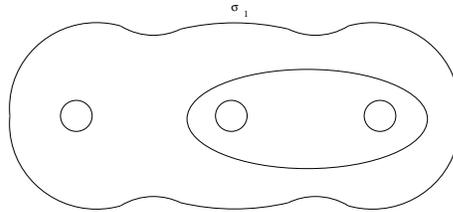
Ejemplo 3,3



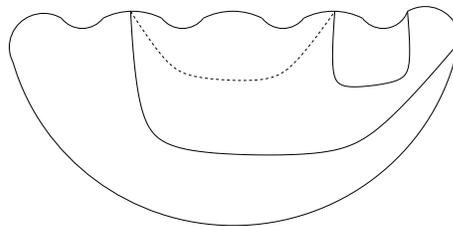
$$h := \hat{l}_2^2 \hat{l}_3^{-1} \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{c}_1 \hat{l}_1 \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_1$$

7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES

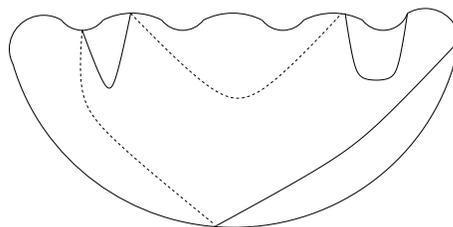
las curvas σ_i son

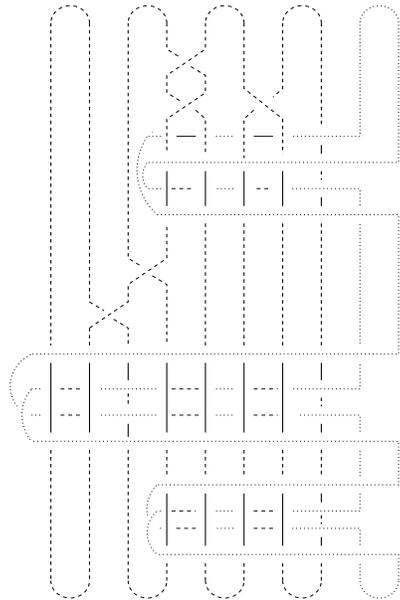
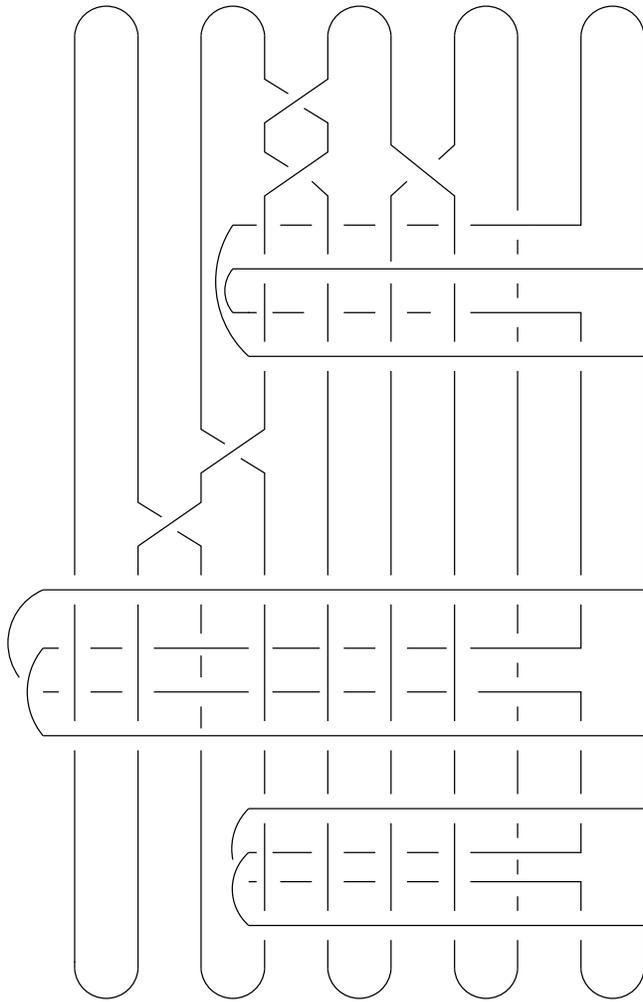


el arco que se levanta a σ_1 es



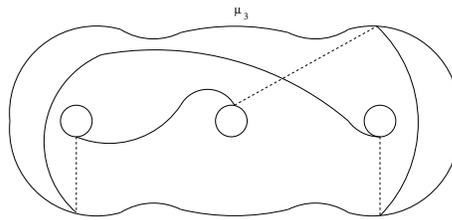
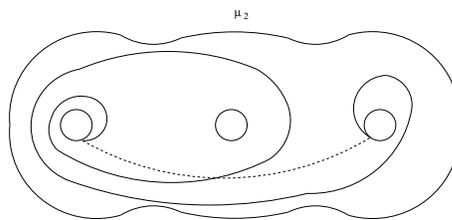
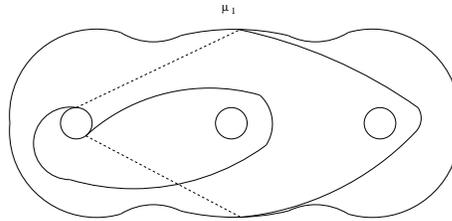
y el que se levanta a σ_2 es





7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES

Ejemplo 3,4



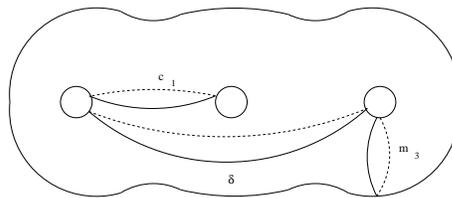
$$h := \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}_2 \hat{l}_3 \hat{l}_1^{-1} \hat{l}_2 \hat{\sigma}_3^{-1}$$

$$c_1 \mapsto \mu_1$$

$$\delta \mapsto \mu_2$$

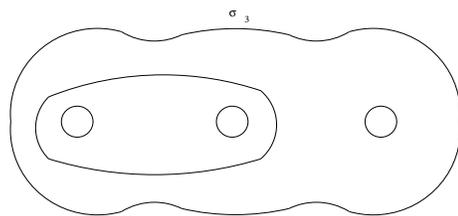
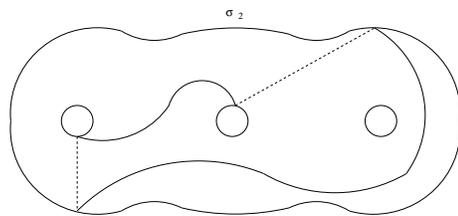
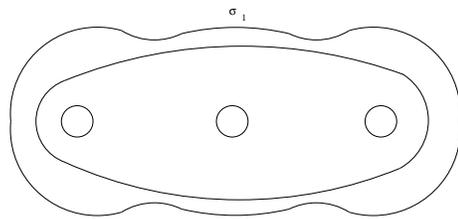
$$m_3 \mapsto \mu_3$$

los meridianos m_3, δ y c_1 son



CAPÍTULO 7. ENLACES TRICOLOREADOS

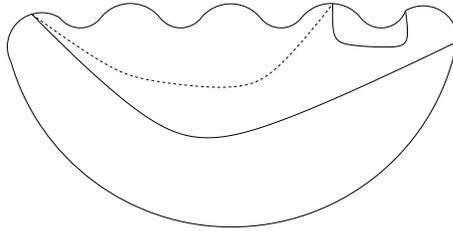
Las curvas σ_i son



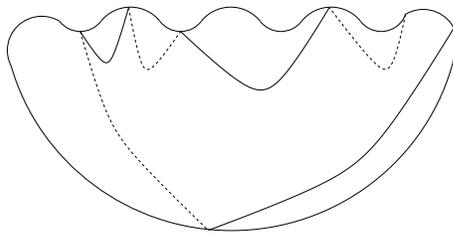
7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES

los arcos que se levantan a

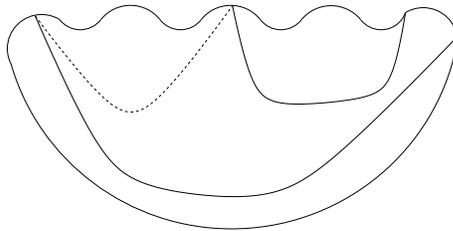
σ_1

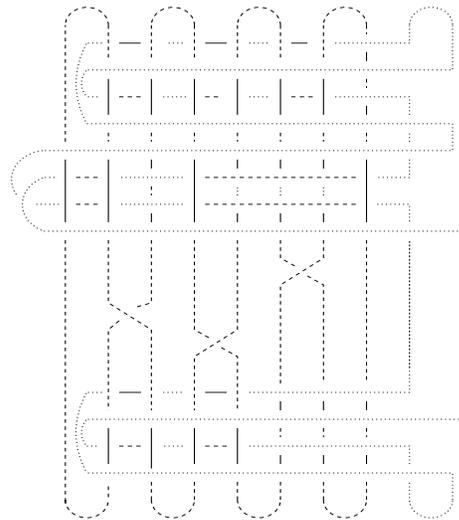
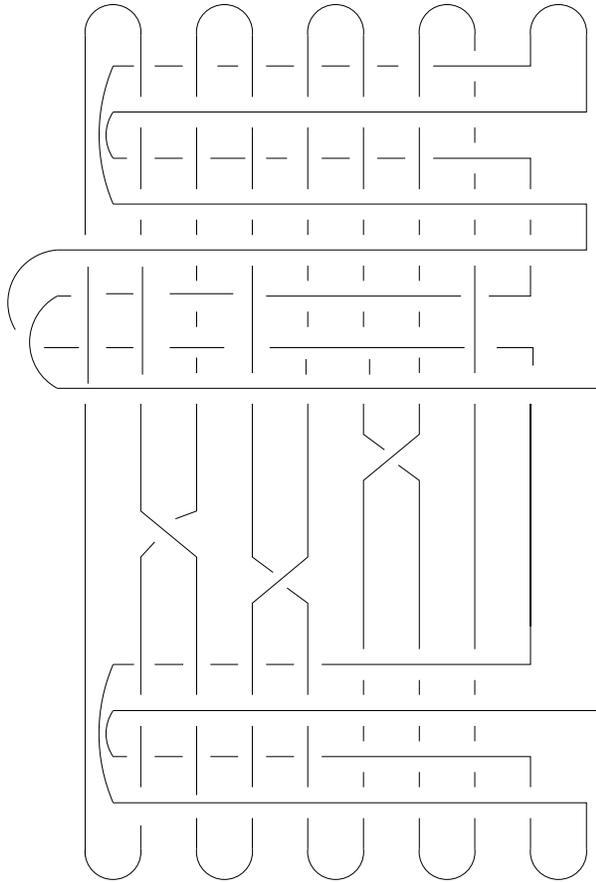


a σ_2



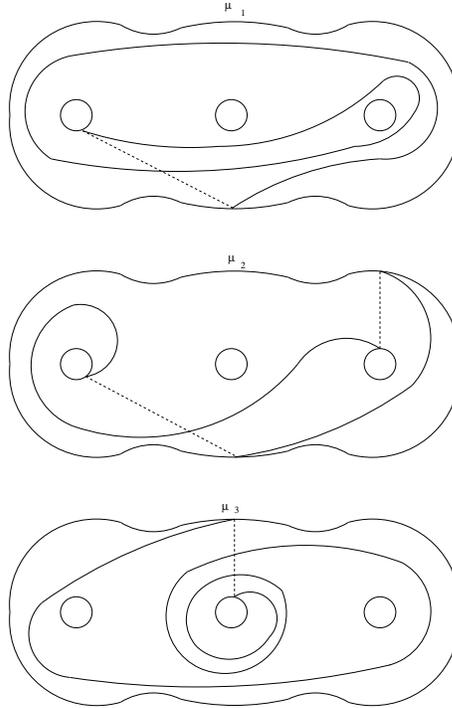
a σ_3





7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES

Ejemplo 3,5



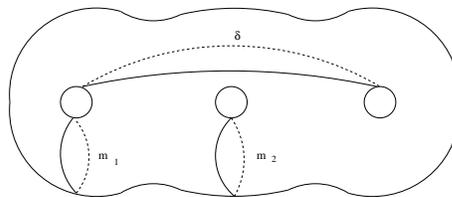
$$h := \hat{\sigma}_1 \hat{c}_2 \hat{l}_3 \hat{l}_2 \hat{c}_2 \hat{l}_1^{-1} \hat{\sigma}_2 \hat{m}_3 \hat{c}_1 \hat{l}_3 \hat{c}_2 \hat{l}_2 \hat{c}_2 \hat{m}_3^3 \hat{l}_3$$

$$m_1 \mapsto \mu_1$$

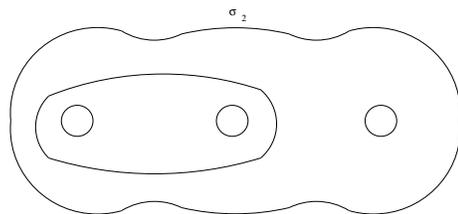
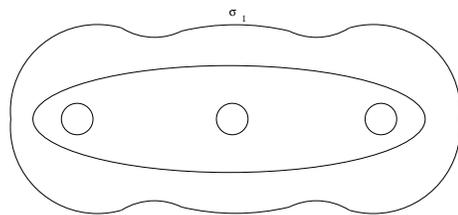
$$m_2 \mapsto \mu_2$$

$$\delta \mapsto \mu_3$$

Los meridianos m_1 , m_2 y δ son

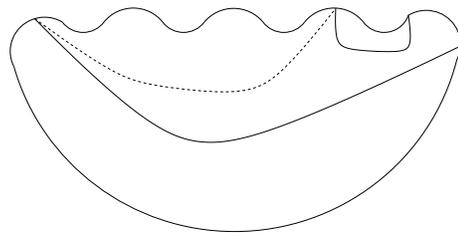


Las curvas σ_i son

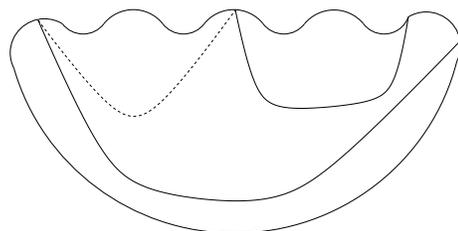


Los arcos que se levantan a

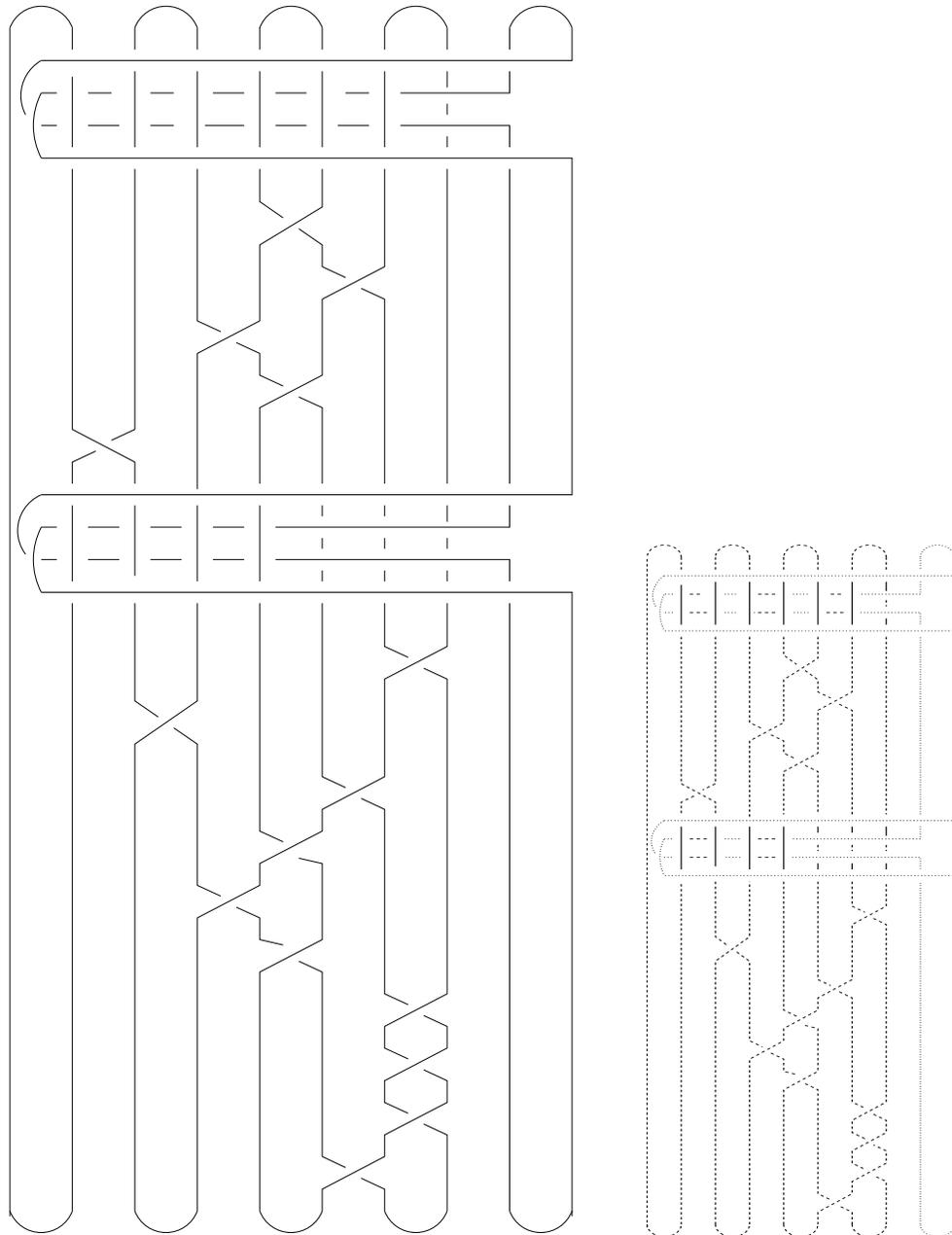
σ_1



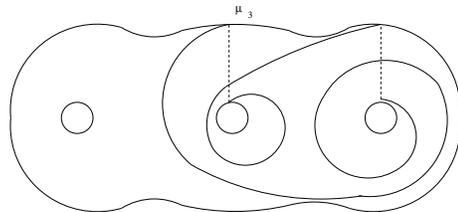
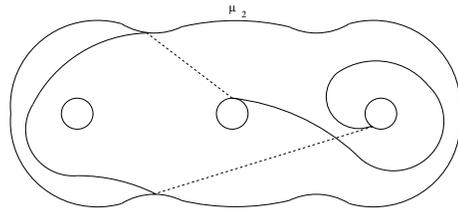
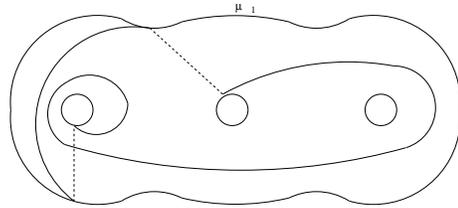
σ_2



7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES

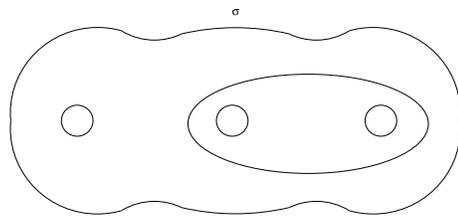


Ejemplo 3,6

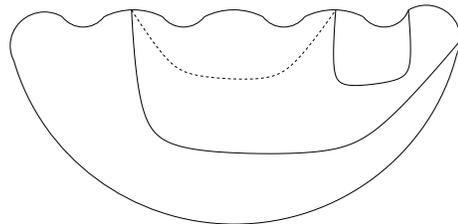


$$h := \hat{\sigma} \hat{l}_1^{-1} \hat{c}_1 \hat{m}_1^{-1} \hat{l}_1^{-1} \hat{c}_1^{-1} \hat{l}_3 \hat{c}_2^{-1} \hat{l}_2^{-1} \hat{m}_3 \hat{l}_3^{-1}$$

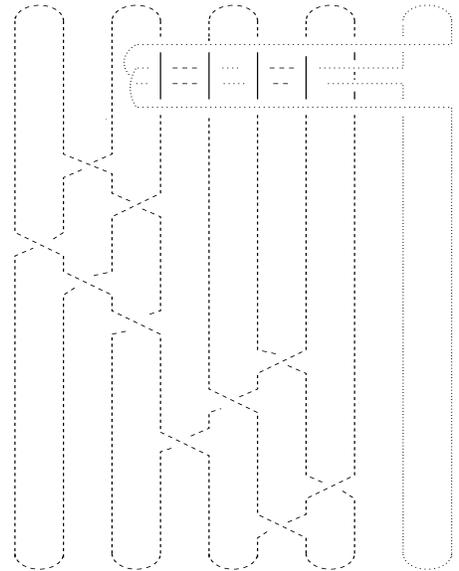
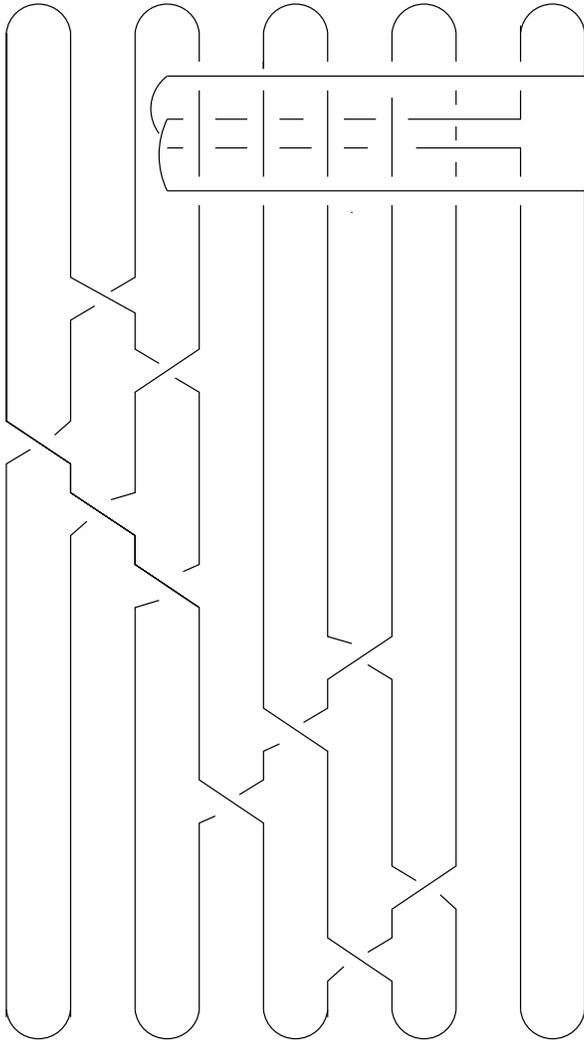
la curva σ es



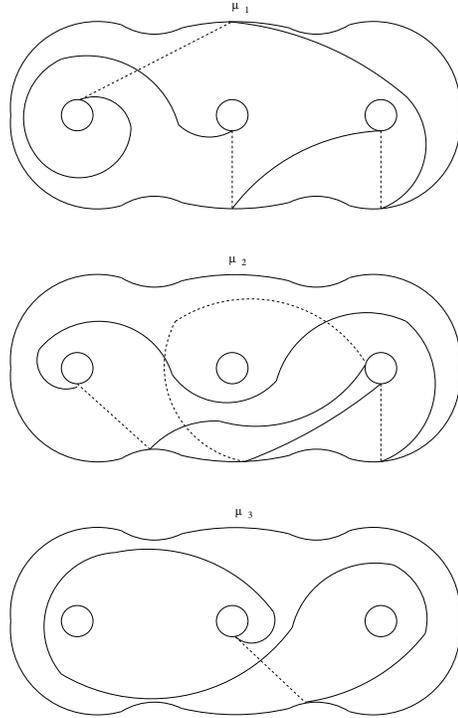
el arco que se levanta a σ es



7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES



Ejemplo 3,7



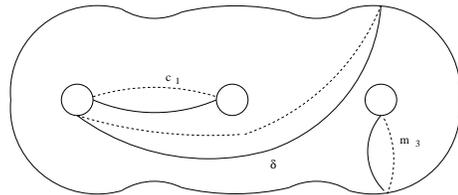
$$h := \hat{\sigma}^{-1} \hat{c}_2 \hat{l}_3 \hat{c}_2 \hat{m}_2^{-1} \hat{l}_2 \hat{l}_1 \hat{c}_2^{-1} \hat{\sigma}$$

$$c_1 \mapsto \mu_1$$

$$\delta \mapsto \mu_2$$

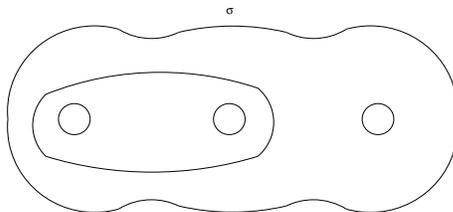
$$m_3 \mapsto \mu_3$$

Los meridianos c_1 , δ y m_3 son

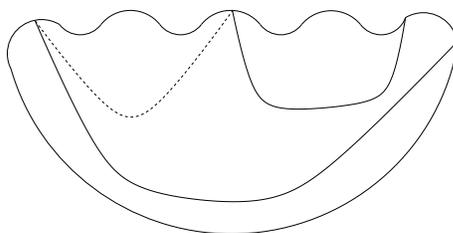


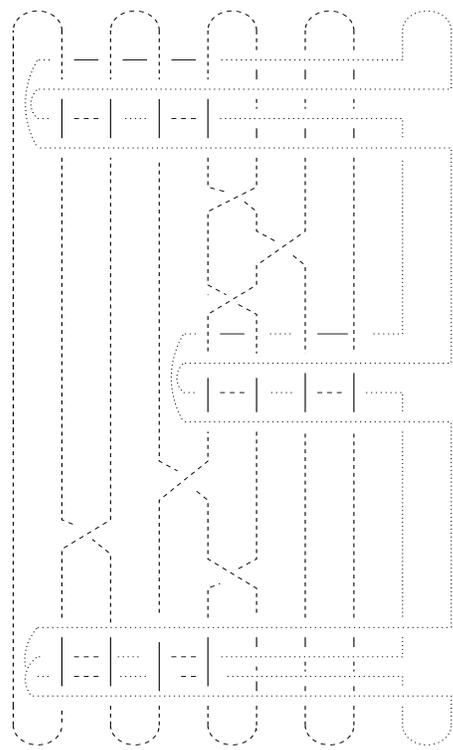
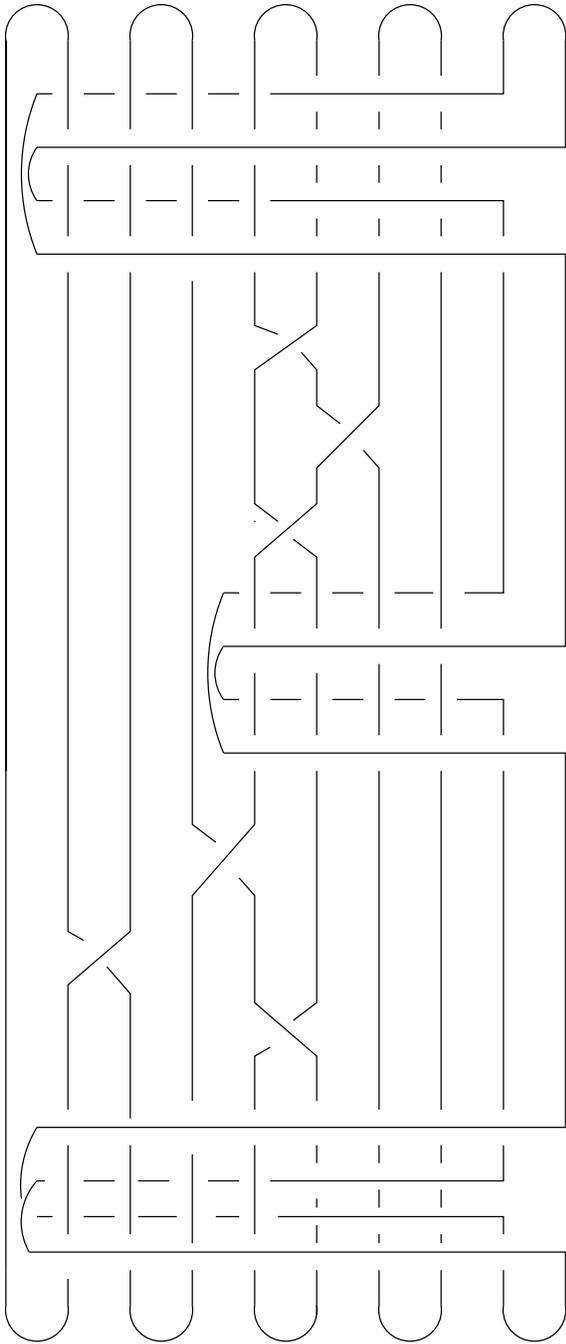
7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES

La curva σ es



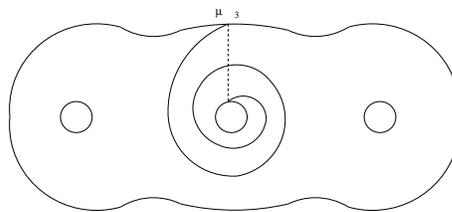
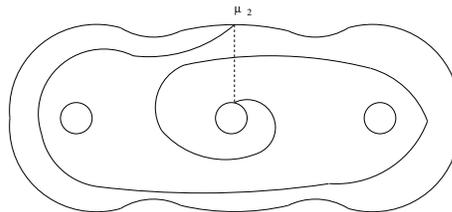
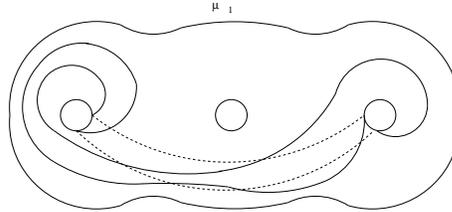
y el arco que se levanta a ella es





7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES

Ejemplo 3,8



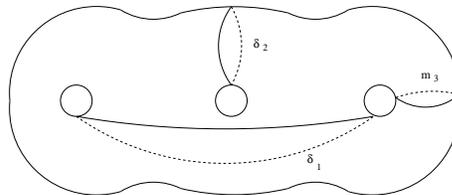
$$h := \hat{\sigma}_1 \hat{l}_3^{-1} \hat{l}_1^{-1} \hat{\sigma}_2 \hat{l}_2 \hat{c}_2^{-1} \hat{\sigma}_3^{-1}$$

$$\delta_1 \mapsto \mu_1$$

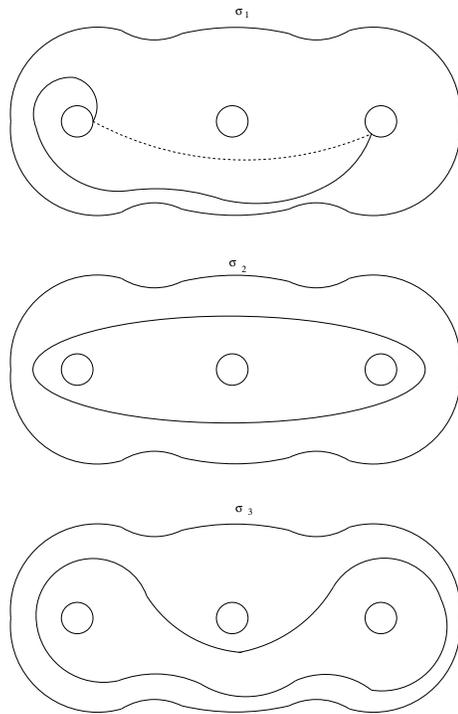
$$\delta_2 \mapsto \mu_2$$

$$m_3 \mapsto \mu_3$$

Los meridianos δ_1 , δ_2 y m_3 son



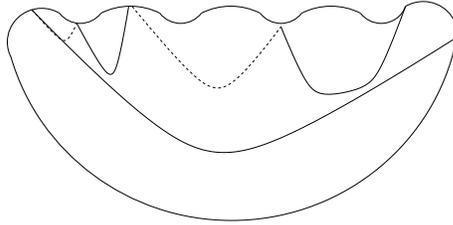
las curvas σ_i son



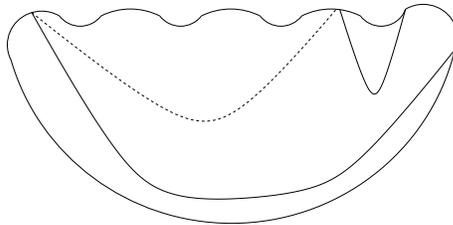
7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES

los arcos que se levantan a

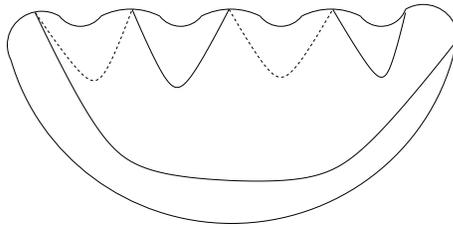
σ_1

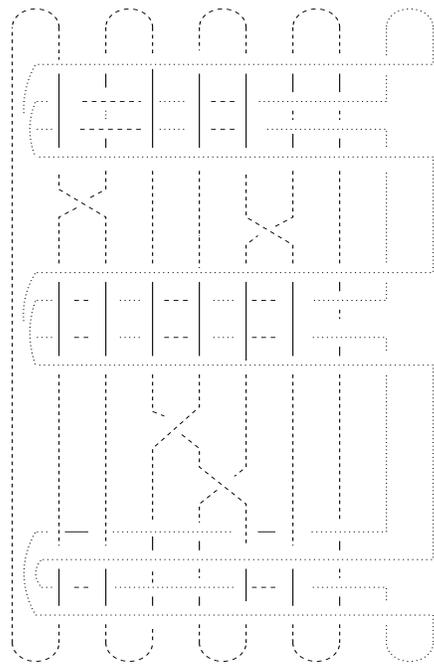
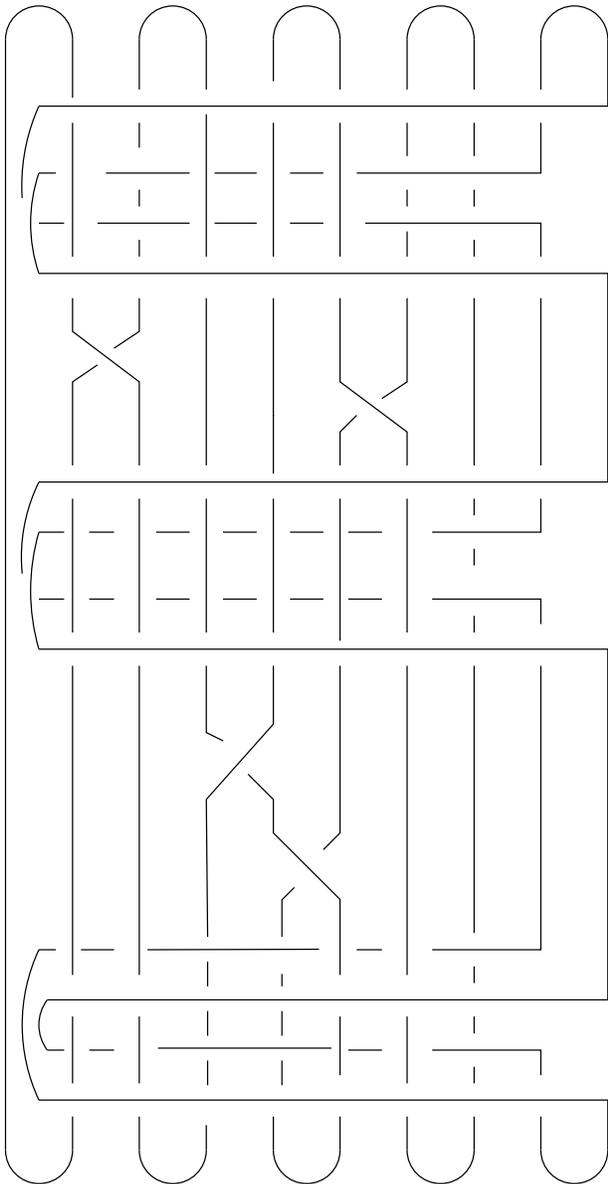


σ_2



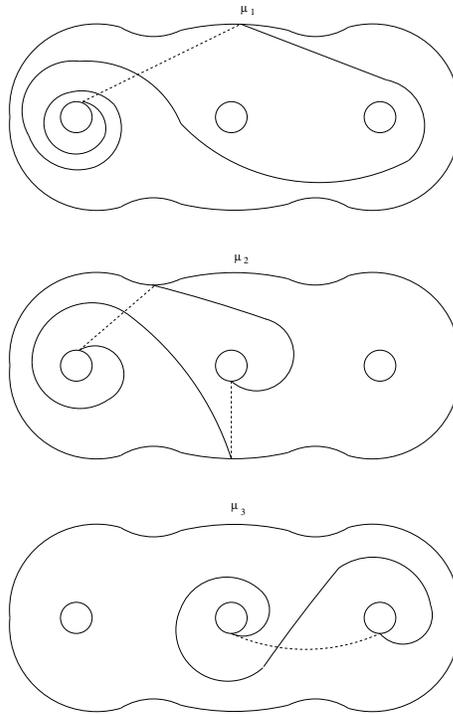
σ_3





7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES

Ejemplo 3,9



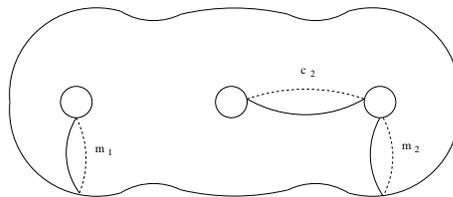
$$h := \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{l}_1^3 \hat{\sigma}_2 \hat{m}_3^{-1} \hat{l}_3^{-1} \hat{\sigma}_3$$

$$m_1 \mapsto \mu_1$$

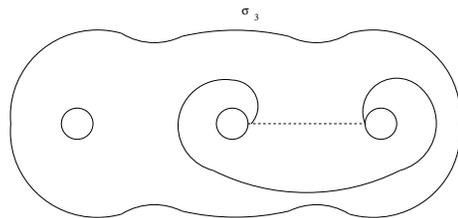
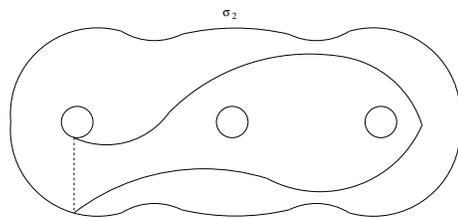
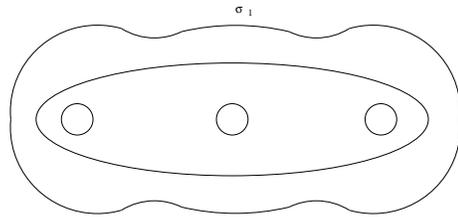
$$c_2 \mapsto \mu_2$$

$$m_3 \mapsto \mu_3$$

Los meridianos m_1 , c_2 y m_3 son



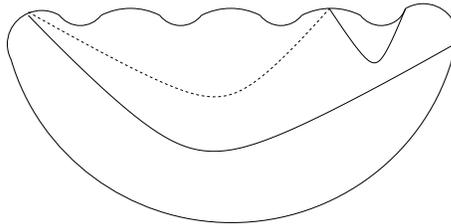
las curvas σ_i son



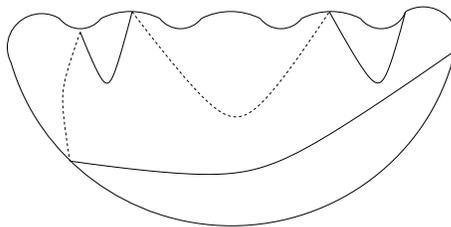
7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES

los arcos que se levantan a:

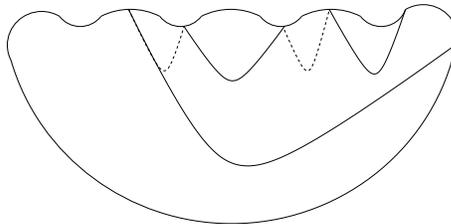
σ_1

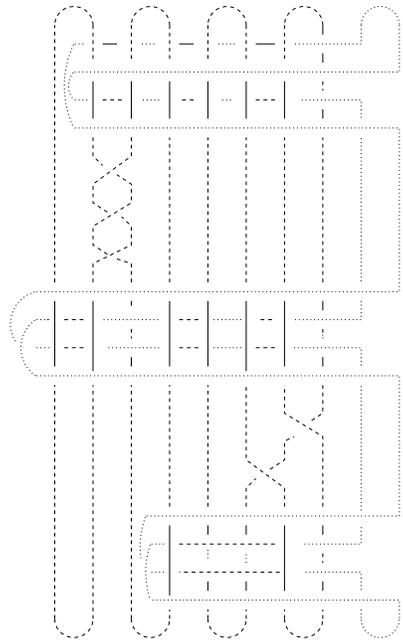
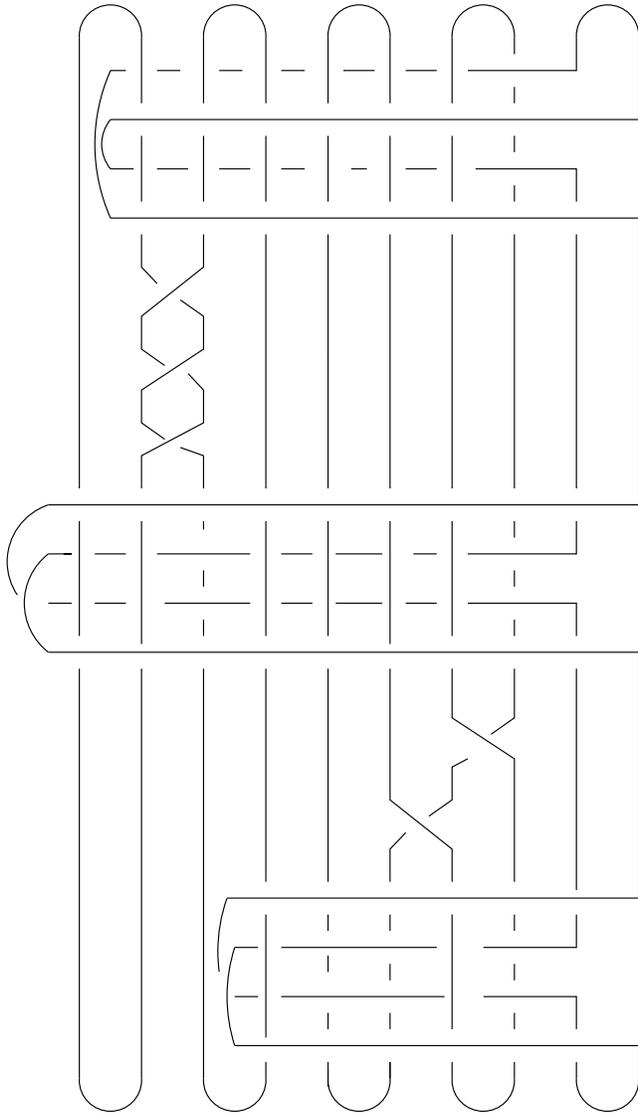


σ_2



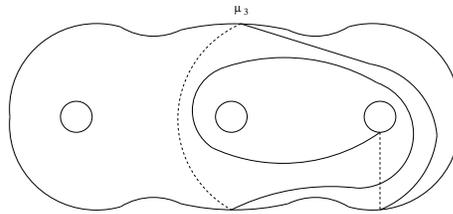
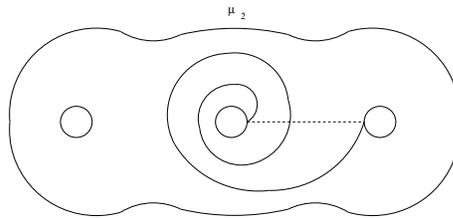
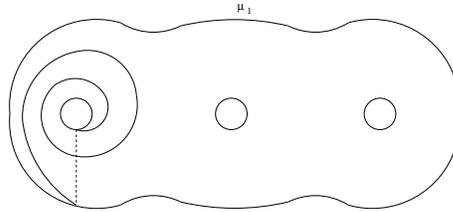
σ_3





7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES

Ejemplo 3,10



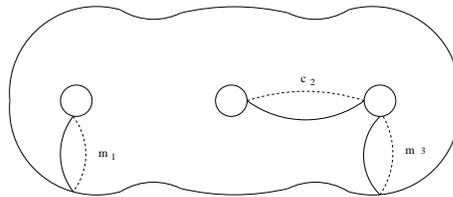
$$h := \widehat{l}_1^{-2} \widehat{l}_2^{-2} \widehat{\sigma}_1 \widehat{m}_2^{-1} \widehat{\sigma}_2 \widehat{\sigma}_1$$

$$m_1 \mapsto \mu_1$$

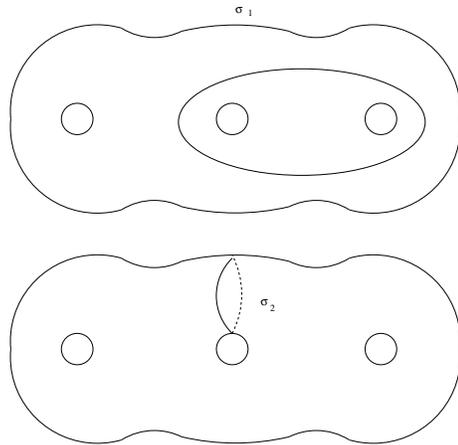
$$c_2 \mapsto \mu_2$$

$$m_3 \mapsto \mu_3$$

Los meridianos m_1 , c_2 y m_3 son

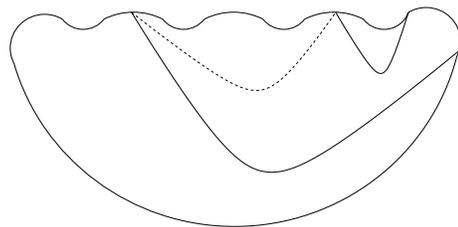


las curvas σ_i son

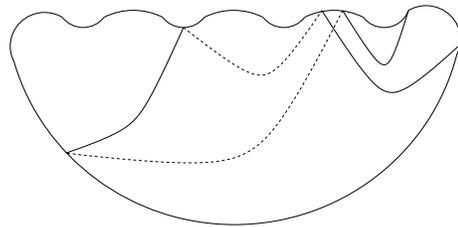


los arcos que se levantan a:

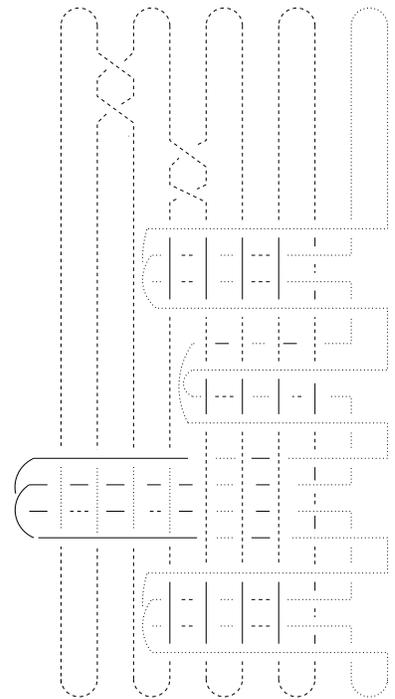
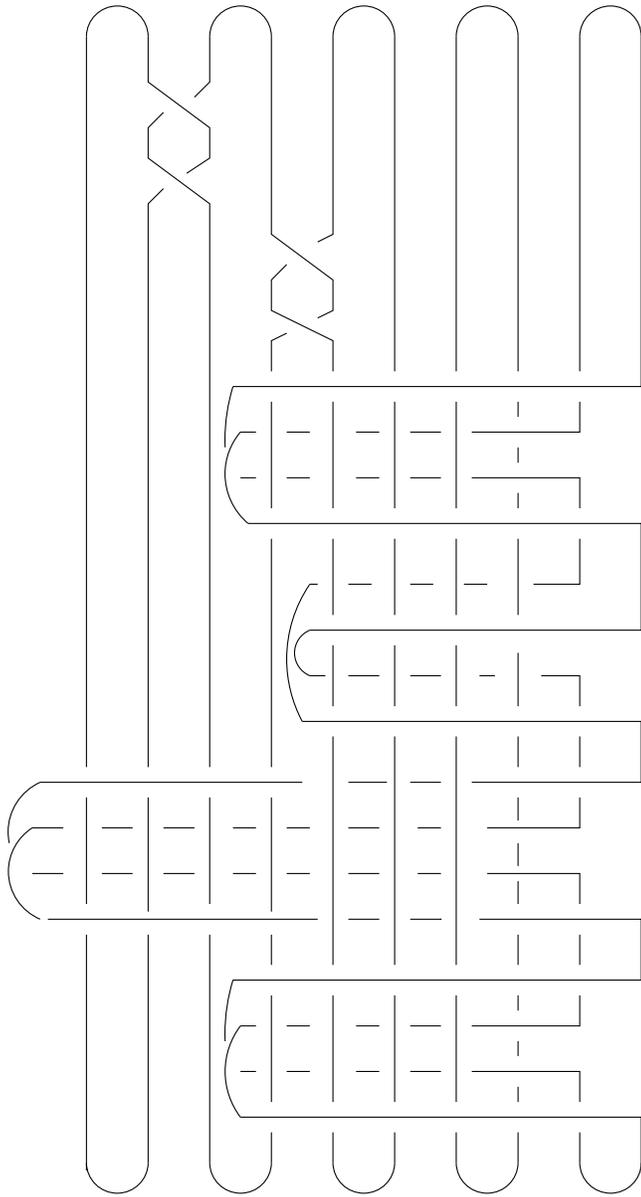
σ_1



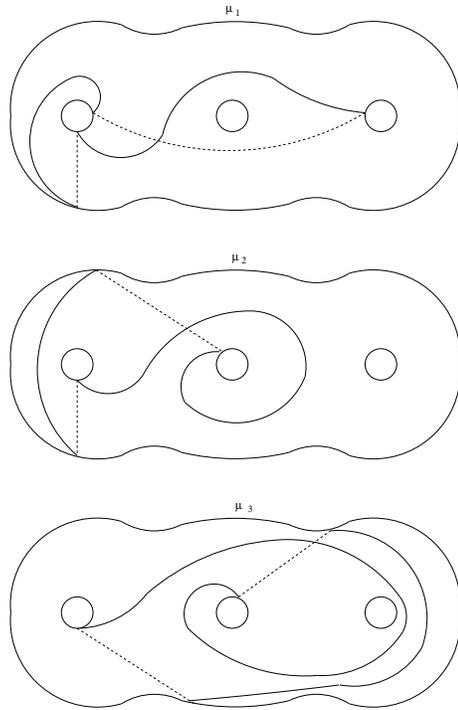
σ_2



7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES



Ejemplo 3,11



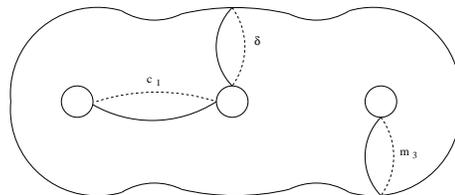
$$h := \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{c}_2^{-1} \hat{l}_2^{-1} \hat{\sigma}_2^{-1} \hat{c}_2^{-1} \hat{l}_3^{-1} \hat{m}_1 \hat{\sigma}_3$$

$$c_1 \mapsto \mu_1$$

$$\delta \mapsto \mu_2$$

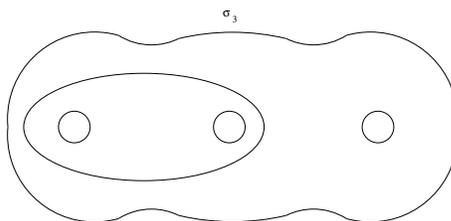
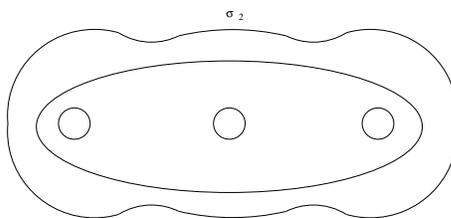
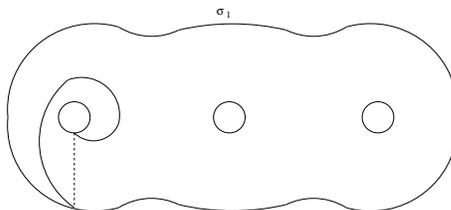
$$m_3 \mapsto \mu_3$$

Los meridianos c_1 , δ y m_3 son



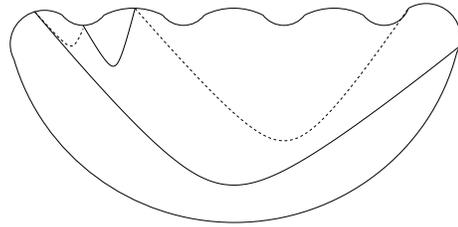
7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES

las curvas σ_i son

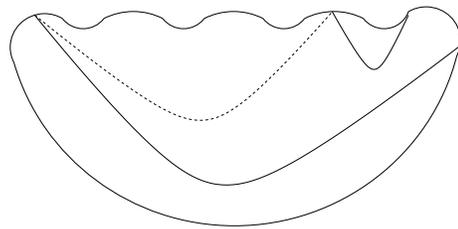


los arcos que se levantan a:

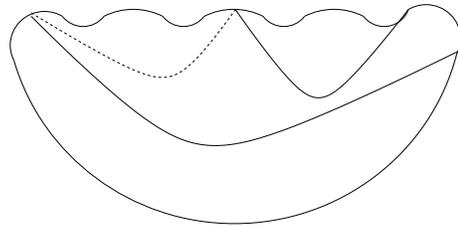
σ_1



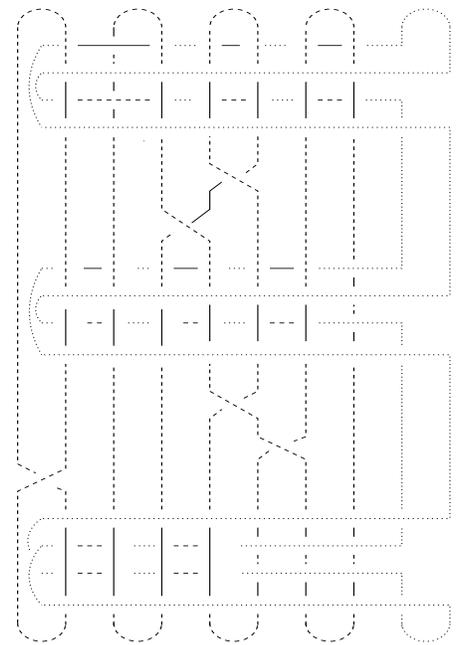
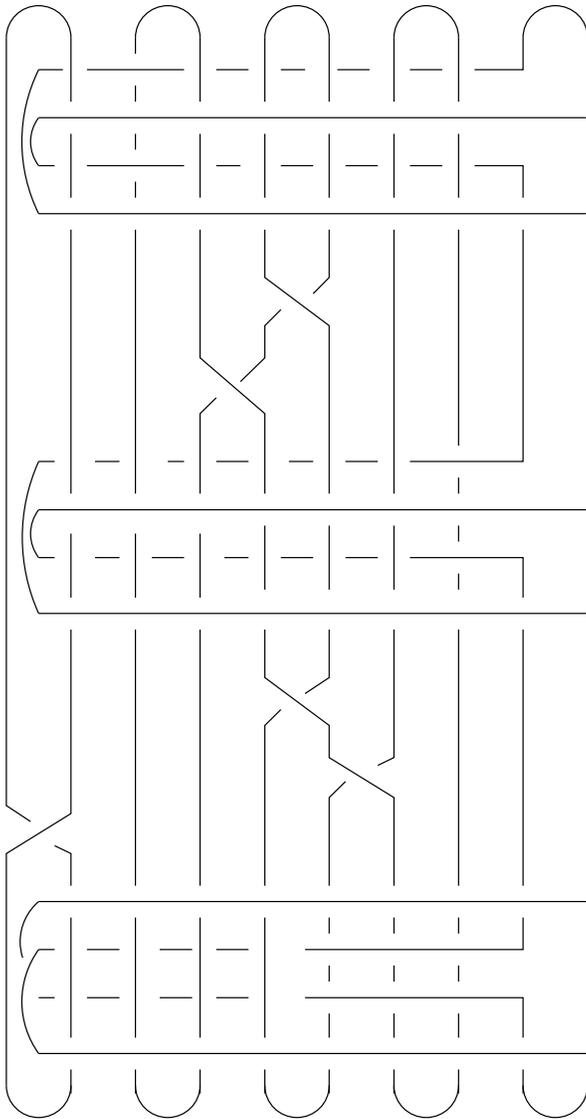
σ_2



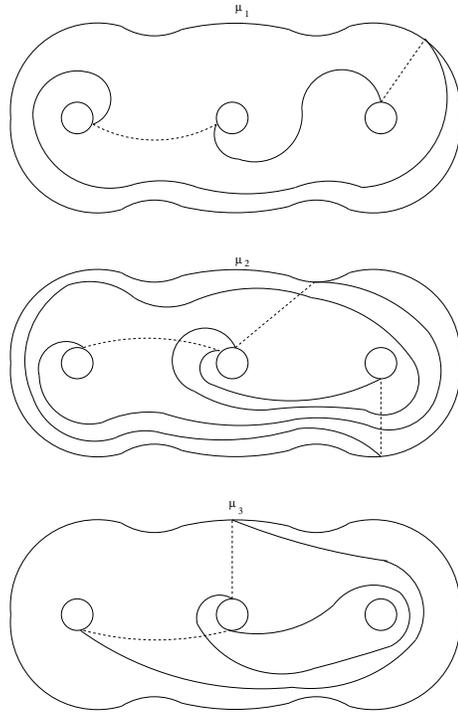
σ_3



7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES



Ejemplo 3,12



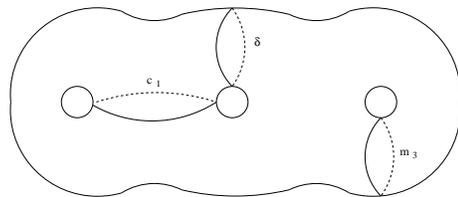
$$h := \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{\sigma}_2^{-1} \hat{m}_3^{-1} \hat{c}_1 \hat{\sigma}_2 \hat{l}_3^{-1} \hat{\sigma}_3^{-1} \hat{l}_1$$

$$m_1 \mapsto \mu_1$$

$$\delta \mapsto \mu_2$$

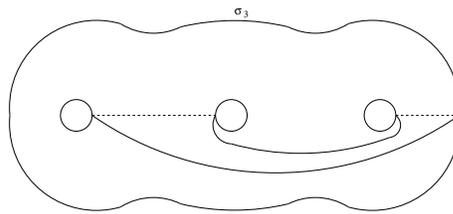
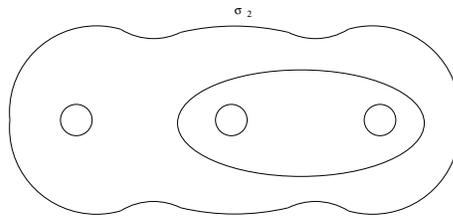
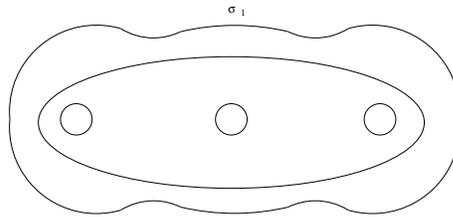
$$m_3 \mapsto \mu_3$$

Los meridianos m_1, δ, m_3 son



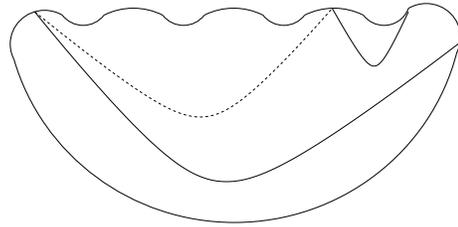
7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES

las curvas σ_i son

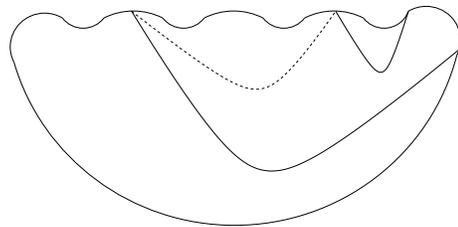


los arcos que se levantan a:

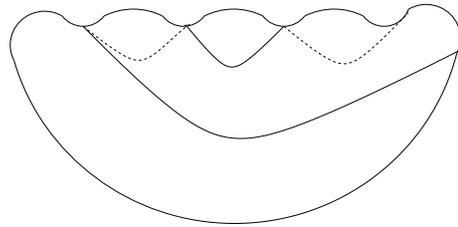
σ_1



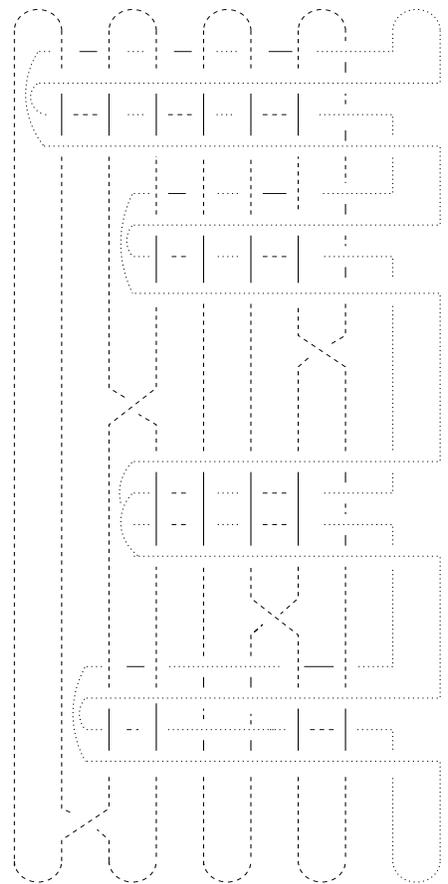
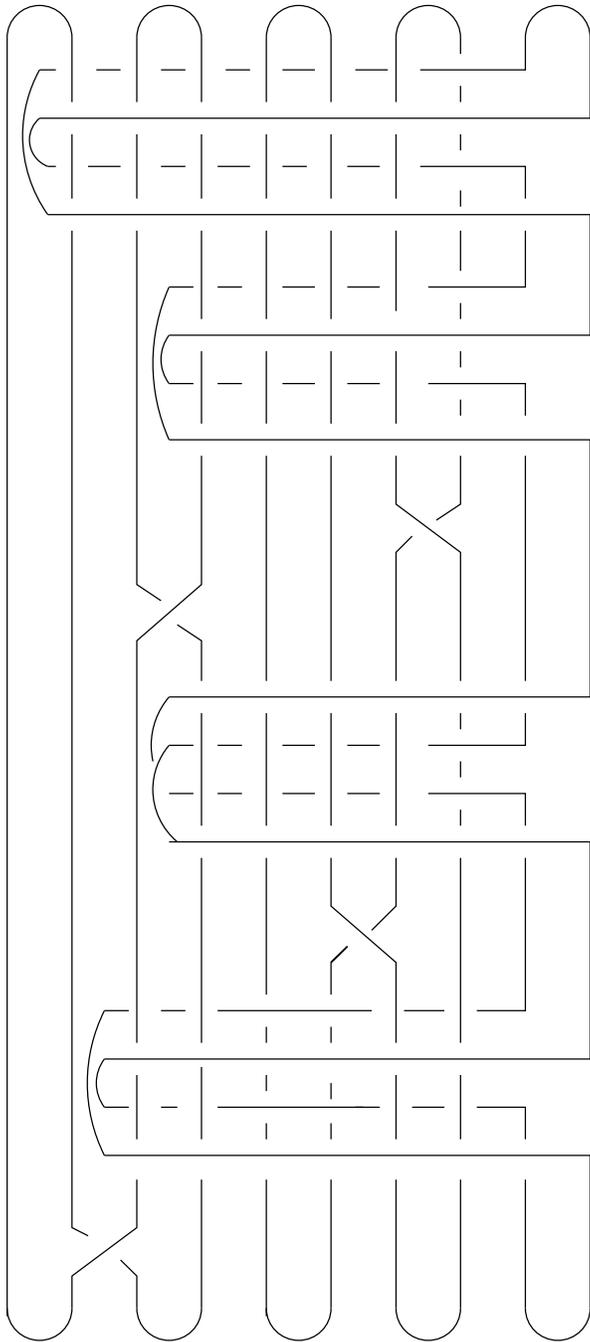
σ_2



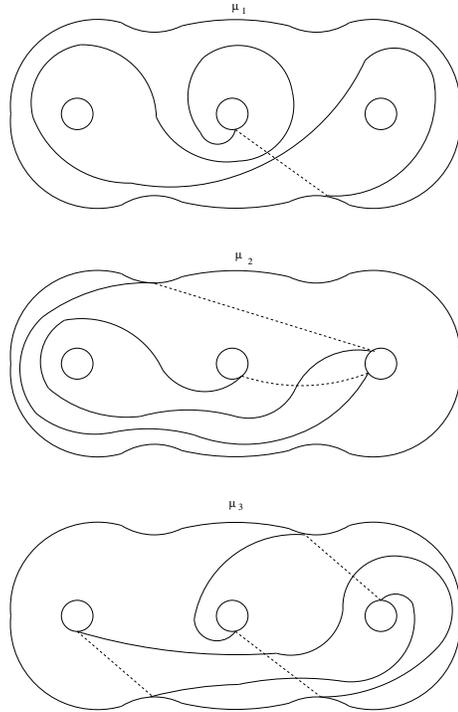
σ_3



7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES



Ejemplo 3,13



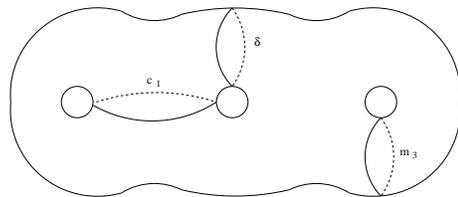
$$h := \hat{\sigma}_1 \hat{l}_2 \hat{c}_2 \hat{m}_3^{-1} \hat{l}_3 \hat{l}_1 \hat{\sigma}_2^2$$

$$c_1 \mapsto \mu_1$$

$$\delta \mapsto \mu_2$$

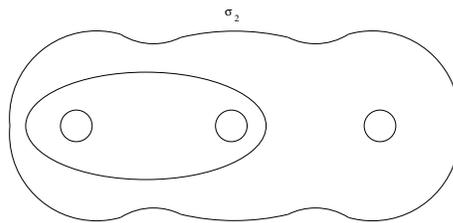
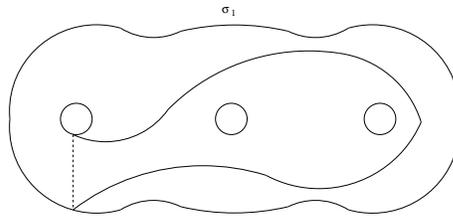
$$m_3 \mapsto \mu_3$$

Los meridianos c_1 , δ y m_3 son



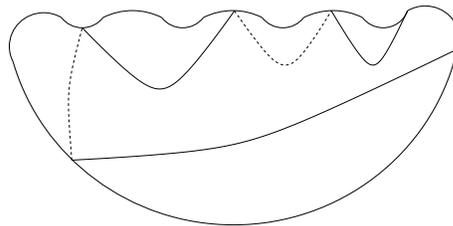
7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES

las curvas σ_i son

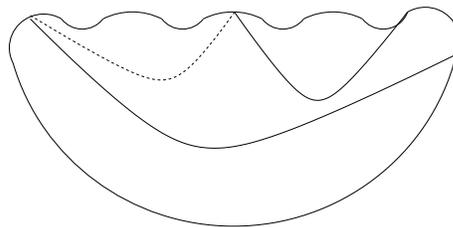


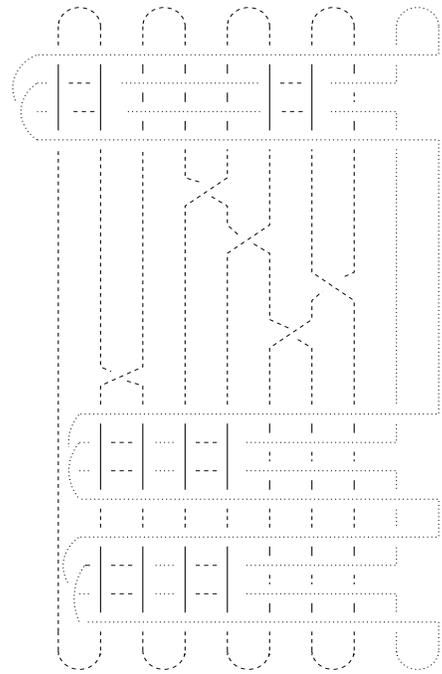
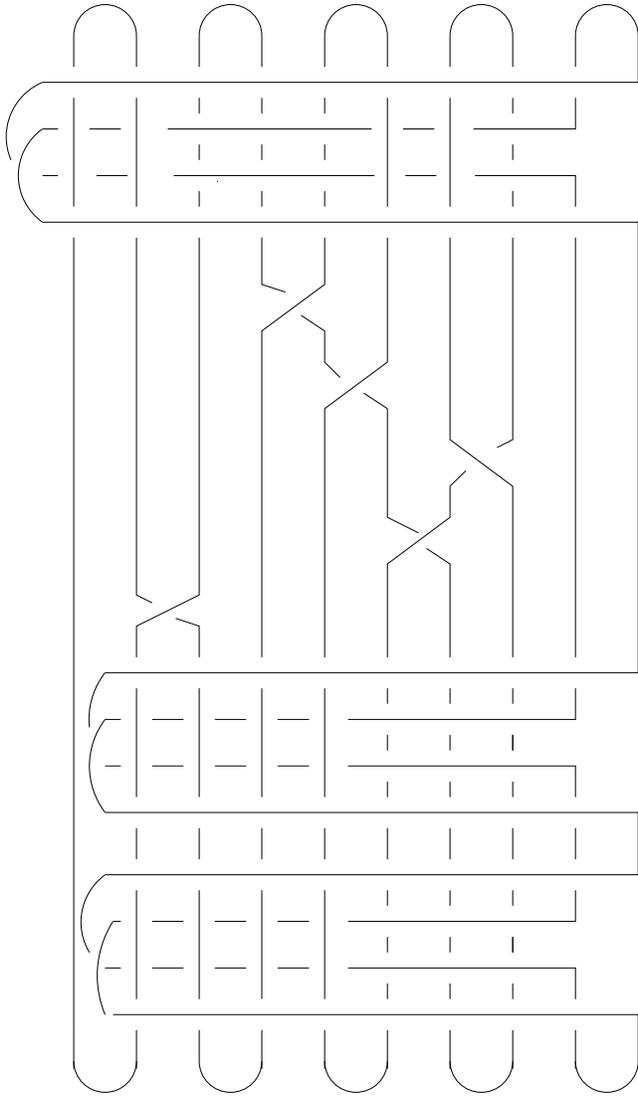
los arcos que se levantan a:

σ_1



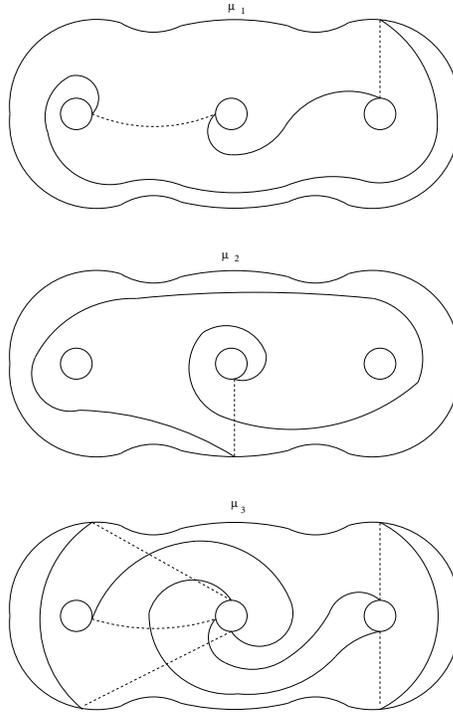
σ_2





7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES

Ejemplo 3,14



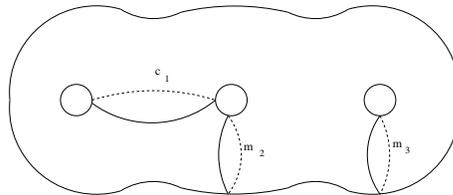
$$h := \hat{\sigma}_1^{-1} \hat{l}_2^{-1} \hat{\sigma}_2 \hat{c}_1 \hat{\sigma}_2^{-1} \hat{c}_1^{-1} \hat{l}_1^{-1} \hat{\sigma}_4^{-1} \hat{\sigma}_3 \hat{m}_2 \hat{\sigma}_3^{-1} \hat{\sigma}_4 \hat{m}_3^{-1} \hat{c}_2^{-1} \hat{m}_3 \hat{l}_3^{-1}$$

$$c_1 \mapsto \mu_1$$

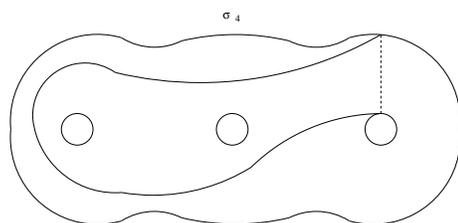
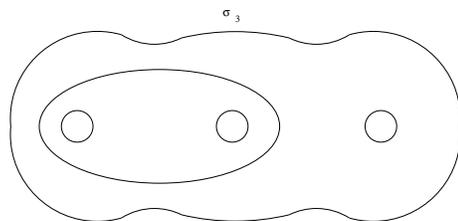
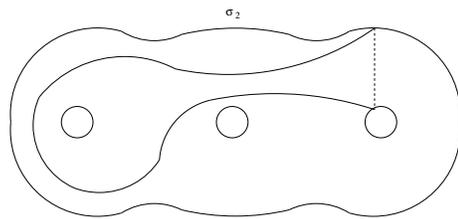
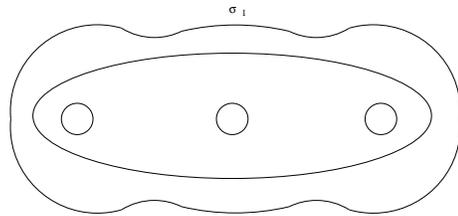
$$m_2 \mapsto \mu_2$$

$$m_3 \mapsto \mu_3$$

Los meridianos c_1 , m_2 y m_3 son



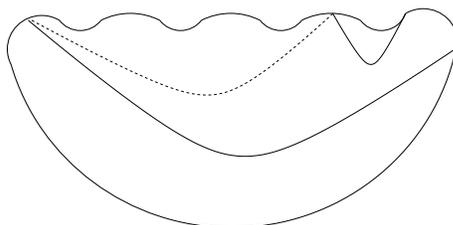
las curva σ_i son



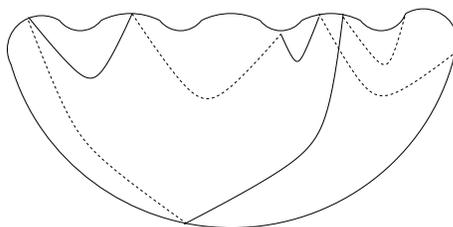
7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES

los arcos que se levantan a:

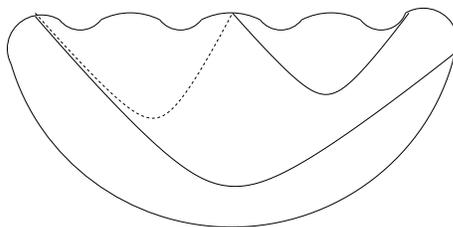
σ_1



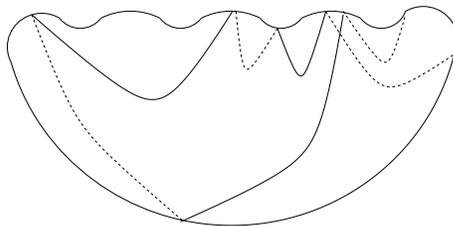
σ_2

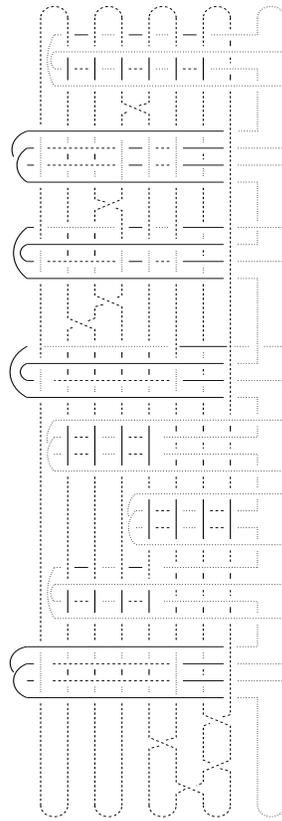
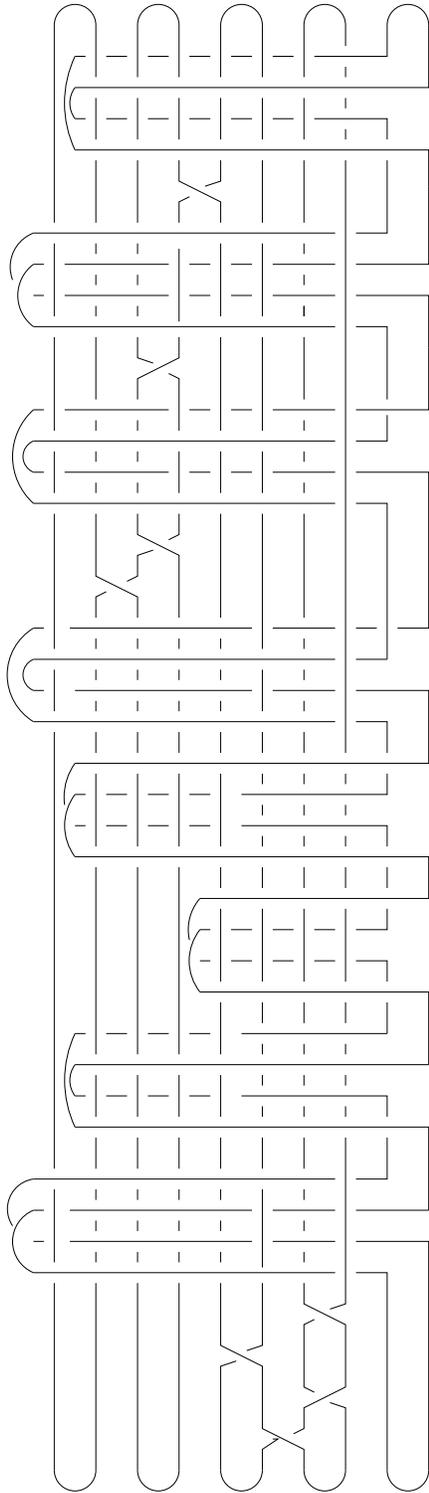


σ_3



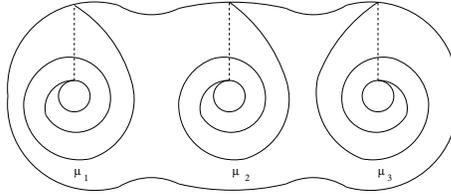
σ_4





7.4. 3-VARIEDADES CON GÉNERO DE HEEGAARD TRES

Ejemplo 3,15



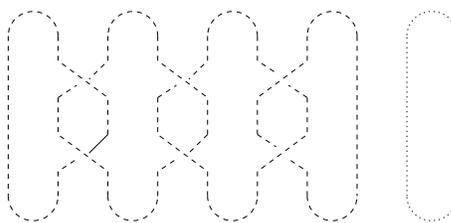
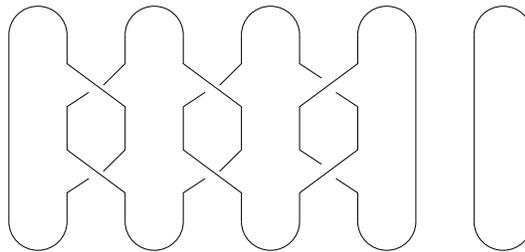
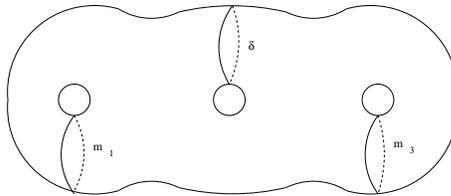
$$h := \hat{l}_1^{-2} \hat{l}_2^{-2} \hat{l}_3^2$$

$$m_1 \mapsto \mu_1$$

$$\delta \mapsto \mu_2$$

$$m_3 \mapsto \mu_3$$

Los meridianos m_1 , δ y m_3 son



Bibliografía

- [1] J.W. Alexander. Note on Riemann spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 26 (1920), 370-372.
- [2] I. Bernstein y A. Edmonds. On the construction of branched coverings of low dimensional manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 247 (1972), 87-124.
- [3] H.M. Hilden. Three-fold branched coverings of S^3 . Amer. J. Math. 98 (1976), 989-997.
- [4] W. B. R. Lickorish. A representation of orientable combinatorial 3-manifolds. Ann. Math. 76 (1962), 531-540.
- [5] W. B. R. Lickorish. A finite set of generators for the homeotopy group of 2-manifolds. Proc. Cambridge Philos. Soc. 60 (1964), 769-778.
- [6] W. Massey. A basic course in algebraic topology. Springer-Verlag. New York (1991).
- [7] R. A. Mendoza Torres. Tesis de licenciatura: Triangulaciones coloreadas de variedades. Universidad Autónoma de San Luis Potosí. 2000
- [8] E. Moise. Geometric topology in dimension 2 and 3. Springer-Verlag. New York (1977).
- [9] J.M. Montesinos. Three-manifolds as 3-fold branched covers of S^3 . Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 27 (1976), 85-94.
- [10] C. D. Olds. Continued fractions. Mathematical Association of America. 1963.