

Descomposiciones de Heegaard

Jair Remigio Juárez

1 de mayo de 2003

Prólogo

La Topología de Dimensiones Bajas es una rama de las Matemáticas que actualmente está cautivando a muchos, en particular, me ha cautivado a mí. Esto fue lo que me motivó precisamente a realizar mi tesis en esta dirección y a ponerme en contacto con el Dr. Víctor Núñez, con el cual tuve el gusto de realizar un Verano de Investigación de la Ciencia y posteriormente este trabajo.

El presente trabajo fue realizado en el periodo septiembre 2002-mayo 2003 en las instalaciones del Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) en Guanajuato, Gto. bajo la dirección, como ya dije anteriormente, del Dr. Víctor Núñez, a quien quiero agradecerle por haber aceptado ser mi compañero y amigo en esta aventura por los caminos de la Topología al compartir sus conocimientos conmigo y por lo mucho que he aprendido de él.

Para el desarrollo de este trabajo conté con el apoyo de dos instituciones que merecen mi agradecimiento: El CIMAT, que me dió la oportunidad de realizar mi tesis en sus instalaciones, brindándome así un ambiente apropiado para la elaboración de este trabajo; y la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco (UJAT) que me permitió realizar mis estudios de Licenciatura en sus aulas y puso su personal docente a mi disposición, al cual agradezco también por la formación que me dieron en mi licenciatura; un reconocimiento especial de mi parte al Mat. Alejandro Peregrino Pérez por haber aceptado ser mi asesor interno.

Introducción

A comienzos del siglo XX, el matemático noruego Poul Heegaard demostró que toda 3-variedad M puede expresarse como unión de dos 3-variedades más simples, que tienen por frontera una superficie y que son conocidas como cubos con asas, pegadas por su frontera; a tal descomposición de M se le denomina *una descomposición de Heegaard de M* , cuyo género es el mismo que el de la superficie frontera de los cubos con asas. Una descomposición de Heegaard suele darnos mucha información de la 3-variedad lo cual hace más agradable y conveniente estudiar 3-variedades a partir de sus descomposiciones de Heegaard.

Usualmente una 3-variedad M tiene varias descomposiciones de Heegaard del mismo género que además pueden ser no equivalentes. La finalidad de este trabajo es precisamente ilustrar que ésto no sucede con S^3 y que cualesquiera dos descomposiciones de Heegaard de S^3 de género g son equivalentes, por lo que incluimos aquí dos demostraciones de este hecho; una de éstas se debe al matemático alemán F. Waldhausen y la otra a los matemáticos estadounidenses M. Scharlemann y A. Thompson.

En la década de los 60's, Waldhausen demostró por primera vez que descomposiciones de Heegaard de S^3 del mismo género son equivalentes; su demostración está basada en sistemas de discos meridianos con cierta propiedad que son llamados *buenos sistemas de discos meridianos*; y a los que se les asocian sus correspondientes *sistemas coordinados* (Ver Capítulo 2).

Posteriormente, aparece la demostración de Scharlemann y Thompson; dicha demostración es totalmente diferente a la de Waldhausen porque Scharlemann y Thompson usan la técnica moderna (y novedosa) de gráficas en *thin position* que les permite obtener una demostración sorprendentemente más corta y sencilla (Ver Capítulo 3). Una posible traducción de *thin position* sería *la posición más delgada*, pero preferimos el término inglés que es de uso generalizado entre los especialistas.

Para una mejor ilustración de estas demostraciones, este trabajo ha sido dividido

en tres capítulos. En el Capítulo 1 recordaremos algunos conceptos de Topología que usaremos a lo largo de este trabajo y damos una introducción al estudio de la categoría PL y a la topología de las n -variedades. Estos temas son importantes ya que constituyen los cimientos sobre los cuales se va a desarrollar esta tesis.

El Capítulo 2 está conformado por tres secciones; en la primera iniciamos nuestro estudio acerca de las descomposiciones de Heegaard; la segunda sección está basada en [W] y allí se encuentra la demostración dada por Waldhausen; en la última sección de este capítulo damos algunos ejemplos de descomposiciones de Heegaard, que gracias a las técnicas de Waldhausen podemos concluir que son descomposiciones de Heegaard de S^3 . Estos ejemplos no se encuentran en la literatura del tema.

Por último, en el Capítulo 3 presentamos un enfoque distinto de las descomposiciones de Heegaard al considerar descomposiciones de Heegaard en cubos con compresiones; iniciamos nuestro trabajo con gráficas para establecer métodos para reducir la anchura de una gráfica en S^3 , esto trae como consecuencia la definición de gráfica en *thin position* y el desarrollo de la demostración dada en [ST] sobre las descomposiciones de Heegaard de S^3 . Hubiéramos querido mostrar ejemplos de cómo aplicar la herramienta de *thin position* en una descomposición de Heegaard para decidir si es de S^3 o no, tal como lo hicimos en el capítulo anterior con las técnicas dadas por Waldhausen, pero los únicos ejemplos que tenemos son ejemplos muy complicados e imposibles de manipular y aún seguimos intentando encontrar alguno.

Índice General

Prólogo	3
Introducción	5
1 Preliminares	9
1.1 Repaso de Topología	9
1.2 Categoría PL	13
1.3 Topología de n-variedades	15
1.4 Apéndice de teoremas	20
2 Descomposiciones de Heegaard	21
2.1 Sobre descomposiciones de Heegaard	21
2.2 Descomposiciones de Heegaard de S^3	31
2.3 Ejemplos	40
3 Reducción de gráficas en S^3	61
3.1 Cubos con compresiones y sus espinas	61
3.2 Gráficas formadas por espinas y superficies	64
3.3 Gráficas reducidas en S^3	70
Referencias	83

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo recordaremos algunos conceptos básicos de Topología, estableceremos el ambiente de la categoría PL en la cual trabajaremos a lo largo de esta tesis, definiremos lo que es una n -variedad y desarrollaremos algunos temas de las 2-variedades y 3-variedades.

1.1 Repaso de Topología

Definición 1.1.1 Una **topología** sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X , que satisface las siguientes propiedades:

- (i) $X \in \tau$ y $\emptyset \in \tau$.
- (ii) τ es cerrado bajo intersecciones finitas, es decir, la intersección de un número finito de elementos de τ está en τ .
- (iii) τ es cerrado bajo uniones arbitrarias. La unión de elementos de τ pertenece a τ .

El par (X, τ) es llamado **espacio topológico** y a los elementos de τ se les llama **conjuntos abiertos**. Sea $U \subset X$; U es un conjunto **cerrado** si y sólo si $(X - U) \in \tau$. Si A es un conjunto en X y $x \in X$, decimos que x es un **punto frontera** de A si todo abierto V_x que contiene a x , cumple que $V_x \cap (X - U) \neq \emptyset$ y $V_x \cap A \neq \emptyset$. Al conjunto de puntos frontera de U se le llama **frontera** de U . Si a $A \subset X$ le agregamos todos sus puntos frontera, denotamos al nuevo conjunto como \overline{A} y a tal conjunto le llamamos la **clausura de A** ; \overline{A} es un conjunto cerrado.

Un espacio topológico (X, τ) es:

- (a) **Compacto**, si para toda cubierta abierta $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ (familia de conjuntos abiertos que cumple la condición de que $X \subset \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha$), existe una subcubierta fini-

ta $\{C_{\alpha_i}\}_{i=1,\dots,n}$ (subfamilia de $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de cardinalidad finita), tal que $X \subset \bigcup_{\alpha_i} C_{\alpha_i}$.

(b) **Conexo**, si por ningún motivo es posible obtenerlo de la unión de dos conjuntos abiertos no vacíos que son ajenos; por esta razón se acostumbra decir que un conjunto conexo es de una sola pieza.

(c) **Arco-conexo**, si dados dos puntos x_0 y x_1 en X , existe una función continua, usualmente llamada trayectoria, $\beta : [0, 1] \rightarrow X$, tal que $\beta(0) = x_0$ y $\beta(1) = x_1$. Notemos que si X es arco-conexo, entonces es conexo.

Definición 1.1.2 *Un espacio topológico (X, τ) se dice que es de **Hausdorff** si y sólo si dados $x, y \in X$ existen V_x y V_y vecindades de x y y , respectivamente, tal que $V_x \cap V_y = \emptyset$.*

Definición 1.1.3 *Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) espacios topológicos. Decimos que una función $f : X \rightarrow Y$ es **continua** si y sólo si $\forall U \in \tau_2$ se cumple que $f^{-1}(U) \in \tau_1$.*

Definición 1.1.4 *Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) espacios topológicos. Decimos que X y Y son **homeomorfos** si y sólo si existe una función $f : X \rightarrow Y$ tal que f es continua, biyectiva y f^{-1} es continua.*

A la función f se le llama **homeomorfismo**. El que dos espacios topológicos sean homeomorfos significa que ambos tienen las mismas propiedades, respecto a los conceptos topológicos; por esta razón en Topología se acostumbra decir que los dos espacios son iguales o que son lo mismo.

En un espacio topológico (X, τ) existen formas de inducir una topología sobre otros conjuntos, por ejemplo:

Topología de subespacio. Sea $U \subset X$, podemos dar a U la topología $\tau' = \{A \cap U : A \in \tau\}$.

Topología cociente. Sea Y un conjunto y $f : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva, definimos en Y la topología $\tau'' = \{U \subset Y : f^{-1}(U) \in \tau\}$.

Esta última nos va a ser de gran utilidad si tenemos una relación de equivalencia \sim sobre un espacio topológico X , ya que al considerar el conjunto de clases de equivalencia \underline{X} y la proyección natural $\pi : X \rightarrow \underline{X}$, inducimos una topología sobre \underline{X} que nos hace pegar todos los puntos que están en una misma clase de equivalencia. De esta forma es posible construir espacios topológicos importantes como son, por mencionar algunos, el toro, la botella de Klein y la banda de Moebius. Aunada a la topología cociente tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.1.1 (Propiedad Universal de los Cocientes) Sean X un espacio topológico, \sim una relación de equivalencia en X , $\pi : X \rightarrow \frac{X}{\sim}$ la proyección natural y $f : X \rightarrow Y$ función continua para la cual si $x \sim y$, se tiene que $f(x) = f(y) \forall x, y \in X$; entonces existe una única función continua $\bar{f} : X \rightarrow Y$ tal que $\bar{f} \circ \pi = f$.

Demostración. Definamos

$$\begin{aligned} \bar{f} : \frac{X}{\sim} &\rightarrow Y \\ [x] &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Se demostrará a continuación que \bar{f} cumple con las condiciones exigidas.

i) \bar{f} es función.

Si $[a] = [b]$, tenemos que $\pi(a) = \pi(b)$, entonces $f(a) = f(b)$. Por lo cual $\bar{f}([a]) = f(a) = f(b) = \bar{f}([b])$. Por lo tanto \bar{f} es función.

ii) Es claro que $\bar{f} \circ \pi = f$

iii) \bar{f} es única.

Supongamos que existe g función, tal que $g \circ \pi = f$. Entonces $g([x]) = g(\pi(x)) = f(x) = \bar{f}([x])$. Por lo tanto, \bar{f} es única.

iv) \bar{f} es continua.

Por hipótesis f es continua, pero $f = \bar{f} \circ \pi$, por lo tanto \bar{f} es continua por la definición de la topología de $\frac{X}{\sim}$. \square

Definamos la **n-esfera** como el conjunto $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ y la **n-bola** como $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. A este conjunto también se le conoce como “bola cerrada”. A una 2-bola simplemente le llamaremos **disco**. Notemos que una n -esfera es la frontera de una $(n + 1)$ -bola.

Teorema 1.1.2 (El Truco de Alexander). Si $h : \partial B^n \rightarrow \partial B^n$ es una función continua, existe una función continua $H : B^n \rightarrow B^n$, tal que $H(x) = h(x)$, si $x \in \partial B^n$. Además si h es homeomorfismo, entonces se puede obtener que H también lo sea.

Demostración. Sea

$$H : B^n \rightarrow B^n$$

$$H(x) = \begin{cases} \|x\| h\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Es claro que H es función, H es continua y H coincide con h en la frontera de B^n . Si h es biyectiva, entonces h tiene inversa y podemos definir la inversa de H , de la siguiente manera:

$$H^{-1}(w) = \begin{cases} \|w\| h^{-1}\left(\frac{w}{\|w\|}\right) & \text{si } w \neq 0 \\ 0 & \text{si } w = 0 \end{cases}$$

Usando el hecho de que h^{-1} es continua, H^{-1} es continua. \square

Definición 1.1.5 Sean X, Y espacios topológicos, $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas, entonces f se llama **homotópica** a g si y sólo si existe $H : X \times I \rightarrow Y$ continua tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$. La función H recibe el nombre de **homotopía**.

El que dos funciones sean homotópicas significa que puedo deformar una en la otra por que entre ellas hay sustancia, a saber, $H(X \times I)$; esto lo garantiza la continuidad de H . La definición de homotopía nos permite definir el grupo fundamental de un espacio topológico, que a veces se usa para decidir si dos espacios no son homeomorfos.

Definición 1.1.6 Sea X espacio topológico y $x_0 \in X$. Escribimos $[\alpha] = \{\beta : I \rightarrow X : \beta(0) = \beta(1) = x_0 \text{ y } \beta \text{ es homotópica a } \alpha \text{ con una homotopía que fija los extremos}\}$, donde $\alpha : I \rightarrow X$ es un lazo basado en x_0 . Definimos el **grupo fundamental de X** en el punto base x_0 como el conjunto

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha] : \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}$$

con la operación producto

$$[\alpha] * [\beta] = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Para espacios topológicos arco-conexos no importa el punto base: grupos fundamentales basados en puntos bases distintos son isomorfos.

Todo grupo G admite una presentación de la forma siguiente $G = \langle x_1, \dots, x_n : r_1 = 1, \dots, r_m = 1 \rangle$, donde $\{x_1, \dots, x_n\}$ son los generadores de G y $\{r_1 = 1, \dots, r_m = 1\}$ son relaciones entre los generadores. Las presentaciones de grupos se usarán en este trabajo cada vez que sean necesarias. Más adelante daremos un teorema que nos ayudará a calcular el grupo fundamental de un espacio topológico.

Definición 1.1.7 Sean $f, g : X \rightarrow Y$ homeomorfismos. Una **isotopía** entre f y g es un homeomorfismo $G : X \times I \rightarrow Y \times I$ tal que $G(x, 0) = (f(x), 0)$ y $G(x, 1) = (g(x), 1)$ para todo $x \in X$ y $G(x, t) \in Y \times \{t\}$ para toda " x " y para toda " t ". Si existe una isotopía para f y g decimos que tales funciones son **isotópicas**.

Una isotopía es como un homeomorfismo entre homeomorfismos. Podríamos definir también una isotopía como una homotopía que es homeomorfismo para todo $t \in [0, 1]$. Dos funciones que son isotópicas son también homotópicas.

Teniendo la noción de isotopía podemos enunciar el Truco de Alexander de la siguiente forma:

"Si $h, g : B^n \rightarrow B^n$ son homeomorfismos tales que $h|_{\partial B^n} = g|_{\partial B^n}$, entonces h es isotópica a g ."

1.2 Categoría PL

Supongamos que tenemos algunas piedras en la mano y las lanzamos; lo más fácil y probable es que las piedras queden regadas por todos lados y no sobre una misma recta o una encima de otra. Esto precisamente es lo que motiva la siguiente definición.

Definición 1.2.1 Sea $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^k$ un conjunto de $n + 1$ puntos, tal que $k \geq n + 1$. Se dice que $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ están en **posición general** si y sólo si el conjunto $\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0\}$ es linealmente independiente.

Partiendo de esta definición tan sencilla vamos a hacer un breve recorrido por lo que se conoce como la categoría PL.

Definición 1.2.2 Sean $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^k$ puntos en posición general, entonces $\langle x_0, \dots, x_n \rangle = \{\sum \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0 \text{ \& } \sum \lambda_i = 1\}$ se llama el **n -simplejo** generado por $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^k$. Los puntos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ se llaman los **vértices** del n -simplejo.

Así que un 0-simplejo es un punto, un 1-simplejo es un segmento de recta, un 2-simplejo es un triángulo y un 3-simplejo es un tetraedro. Mejor aún *un n -simplejo es homeomorfo a una n -bola*.

Notemos que en un 1-simplejo tenemos dos puntos en los extremos del segmento de recta, pero en un 2-simplejo aparte de los puntos también hay segmentos de recta y en un 3-simplejo también tenemos triángulos, entonces tenemos como una cadena en la cual los n -simplejos contienen y están formados por m -simplejos (con $n > m$), a los cuales llamaremos caras del n -simplejo. Formalmente esto se escribe así:

Definición 1.2.3 Sea $\sigma = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ un n -simplejo en \mathbb{R}^k , sea $\gamma \subset \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ y $\tau = \langle \gamma \rangle$. Entonces τ se llama **cara** de σ con dimensión $\#\gamma - 1$ y esto lo denotamos como $\tau \prec \sigma$.

Los n -simplejos nos sirven para construir otros cuerpos geométricos más sofisticados como el que se describe a continuación.

Definición 1.2.4 Sea K un conjunto de simplejos en \mathbb{R}^m , entonces K se llama un **complejo simplicial**, cuya dimensión es la máxima de los simplejos de K si y sólo si cumple lo siguiente:

- i) Si $\sigma \in K$ y $\tau \prec \sigma$, entonces $\tau \in K$.
- ii) Si $\sigma, \tau \in K$, entonces $\sigma \cap \tau \prec \sigma$ y $\sigma \cap \tau \prec \tau$.
- iii) $\forall \sigma \in K$ existe un $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto, tal que $\sigma \subset U$ y U interseca sólo a un número finito de elementos de K .

Esta definición nos dice que todas las caras de los simplejos en K también están en K , además los simplejos se encuentran de una manera bonita en K ya que sólo se intersecan en caras y, por último, la tercera propiedad indica que K no tiene algo parecido a un punto de acumulación. Un complejo simplicial es un conjunto, pero ese conjunto nos ayuda a definir el siguiente concepto, del cual se puede pensar que es la forma física del conjunto K .

Definición 1.2.5 Sean K un complejo simplicial y σ un simplejo de K , definimos el **poliedro** de K , como $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$.

Para estas alturas ya se habrá notado que todo lo que hasta aquí se ha estudiado involucra segmentos de recta y pedazos de planos, la cual es la razón de llamar a esta categoría PL (piecewise linear o lineal a pedazos).

Definición 1.2.6 Sea K un complejo de dimensión n . Sea $r \leq n$. Definimos el **r -esqueleto**, denotado por K^r , como:

$$K^r = \{\sigma \in K : \dim(\sigma) \leq r\}$$

Como en toda parte de las matemáticas aquí tampoco pueden faltar las funciones; así que definiremos un tipo de funciones especiales llamadas funciones PL.

Definición 1.2.7 Sea $f : \langle x_0, \dots, x_n \rangle \rightarrow \langle y_0, \dots, y_m \rangle$ definida por $\sum \lambda_i x_i \mapsto \sum \lambda_i f(x_i)$, entonces f se llama una **función lineal** si y sólo si $f(x_i) \in \{y_0, \dots, y_m\} \forall i$.

Las funciones lineales lo que hacen entre otras cosas es que mandan vértices en vértices; tomando esto en cuenta es de notarse que las funciones que a continuación definimos no solo mandan vértices en vértices, sino que también mandan simplejos en simplejos, lo cual las hace convenientes.

Definición 1.2.8 Sean K y L complejos simpliciales y $f : |K| \rightarrow |L|$ continua. Entonces f se llama **simplicial** si y sólo si $\forall \sigma \in K$ se tiene que $f|\sigma$ es lineal.

Definición 1.2.9 Sean K y L complejos simpliciales. Llamamos a L una **subdivisión** de K si y sólo si $|L| = |K|$ y $\forall \sigma \in L$ existe $\tau \in K$ tal que $\sigma \subset \tau$.

A continuación se presenta la definición de función PL.

Definición 1.2.10 Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ continua, diremos que f es una **función PL** si y sólo si existe una subdivisión L' de L y una subdivisión K' de K , tal que $f : K' \rightarrow L'$ es simplicial.

La composición de funciones PL también es PL. Con la noción de lo que es una función PL, entenderemos por un homeomorfismo PL un homeomorfismo como lo conocemos, sólo que ahora es una función PL, con inversa PL.

1.3 Topología de n-variedades

Definición 1.3.1 Sea M espacio topológico Hausdorff. M es **n-variedad** si cada punto de M tiene una vecindad homeomorfa a \mathbb{R}^n o a $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n\}$.

Si hay puntos de M que no tienen vecindades homeomorfas a \mathbb{R}^n , decimos que M es una n -variedad con frontera y a dichos puntos se les conoce como **puntos frontera**. El conjunto formado por ellos es la **frontera** de la n -variedad M , la cual denotamos por ∂M y el **interior** de la n -variedad M es el complemento de la frontera en M y es denotado por $\overset{\circ}{M}$. Si $\partial M = \emptyset$ y M es compacto decimos que M es una n -variedad **cerrada**.

Notemos que no es lo mismo hablar de un conjunto cerrado como estamos acostumbrados, que hablar de una n -variedad cerrada, por ejemplo, una 3-bola es un conjunto cerrado en \mathbb{R}^3 , pero como 3-variedad no es cerrada. Por lo cual hay que tener cuidado para no caer en confusiones.

De ahora en adelante todo nuestro trabajo, aunque ya no lo especifiquemos, se va a desarrollar en el ambiente de la categoría PL.

Definición 1.3.2 Sea M una n -variedad. Decimos que M es triangulable si y sólo si existe K un complejo simplicial y un homeomorfismo $\phi : |K| \rightarrow M$.

Se sabe que las 1-variedades, las 2-variedades y las 3-variedades son triangulables.

Definición 1.3.3 Una n -variedad triangulable es **orientable** si y sólo si cada simplejo de K tiene una orientación y en las caras en donde se intersecan los n -simplejos la orientación inducida es opuesta.

Definición 1.3.4 Sea X una n -variedad triangulable, $U \subset X$ una n -subvariedad compacta y $Y \subset X$ subcomplejo finito, diremos que U es una **vecindad regular** de Y si:

- i) Y está contenida en el interior de U .
- ii) Y es retracto fuerte por deformación de U , o bien, U se colapsa a Y .

Decir que U se colapsa a Y significa que puedo ir borrando en un cierto orden los simplejos de U hasta llegar a algo homeomorfo a Y . Como ejemplo, una vecindad regular de S^2 en \mathbb{R}^3 es mostrada en la *Figura 1.1*.

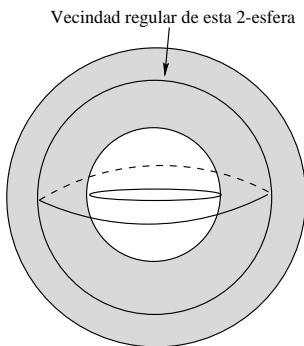


Figura 1.1. Vecindad regular de S^2 .

Las variedades que serán de importancia para nosotros son las 2-variedades (también llamadas superficies) y las 3-variedades, por lo cual vamos a estudiar algunos tópicos relacionados con ellas. Iniciamos con las 2-variedades y después daremos algunas nociones de las 3-variedades que serán complementadas en los capítulos siguientes.

Si tenemos dos superficies en una 3-variedad y se intersecan, lo más usual es que deseemos que la intersección sea lo más sencilla posible; cuando tal intersección sencilla se logra, decimos que las superficies están en posición general y que su intersección es una **intersección transversal**.

Definición 1.3.5 Sean S y F dos 2-variedades en una 3-variedad M . Diremos que S y F están en **posición general** si su intersección consiste de una colección finita de curvas simples cerradas $\{\sigma_j\}$, $j = 1 \dots, n$ y una colección finita de arcos $\{\alpha_j\}$, $j = n + 1, \dots, m$, tales que para cada $p \in \sigma_j$, $j = 1 \dots, n$ y para cada $p \in \alpha_j$, $j = n + 1, \dots, m$, existe una vecindad $V_p \subset M$ y un homeomorfismo $h_p : V_p \rightarrow B$, donde B es una bola en \mathbb{R}^3 con centro en el origen, tal que para $j = 1 \dots, m$ se cumple que:

1. $h_p(p) = 0$.
2. $h_p(V_p \cap S) = XY \cap B_p$ donde XY es el plano XY de \mathbb{R}^3 .
3. $h_p(V_p \cap F) = XZ \cap B_p$ donde XZ es el plano XZ de \mathbb{R}^3 .

En pocas palabras lo que esta definición dice es que las 2-variedades se intersecan en arcos y curvas cerradas, pero los puntos de esos arcos y curvas cerradas no son vértices de las respectivas triangulaciones de las 2-variedades. De tales curvas cerradas existen algunas que no contienen a otras, estas bordean discos a los cuales llamamos **discos innermost**. Poner una 1-variedad y una 2-variedad en posición general significa lo mismo, sólo que en este caso en la intersección sólo existirán puntos.

En el capítulo siguiente vamos a trabajar con curvas sobre superficies, por lo cual, incluimos la definición y el teorema siguiente, aunque no van a ser usados en esta tesis, para irnos familiarizando con este tema.

Definición 1.3.6 Sea M una 2-variedad orientable, sea c una curva poligonal simple cerrada en M . Definimos un **c -homeomorfismo** como sigue: tomamos una vecindad regular de c , la cual es un cilindro; cortamos a M a lo largo de c , giramos uno de los extremos del cilindro un ángulo de 2π y lo volvemos a pegar.

Este homeomorfismo deja fija a M excepto una vecindad de c . Si p_1 y p_2 son curvas en M diremos que $p_1 \sim_c p_2$ si existe una sucesión de c -homeomorfismos h_1, \dots, h_m y un homeomorfismo $n : M \rightarrow M$ isotópico a la identidad, tales que $nh_1 \dots h_m p_1 = p_2$. Esto significa que puedo llevar la curva p_1 hasta la curva p_2 usando sólo c -homeomorfismos.

Teorema 1.3.1 Si p_1 y p_2 son curvas poligonales cerradas, simples en M tales que p_1 y p_2 se intersecan en exactamente un punto, entonces $p_1 \sim_c p_2$.

Demostración. Sea h_1 un c -homeomorfismo, donde $c = p_2$. Si p_1 y p_2 se intersecan en el punto p , $h_1 p_1$ es una copia de p_1 que se rompe en p , con una copia de c insertada en donde cortamos (Ver Fig. 1.2).

Ahora tomemos c_2 una curva simple cerrada en una vecindad de p_1 (Ver Fig. 1.3).

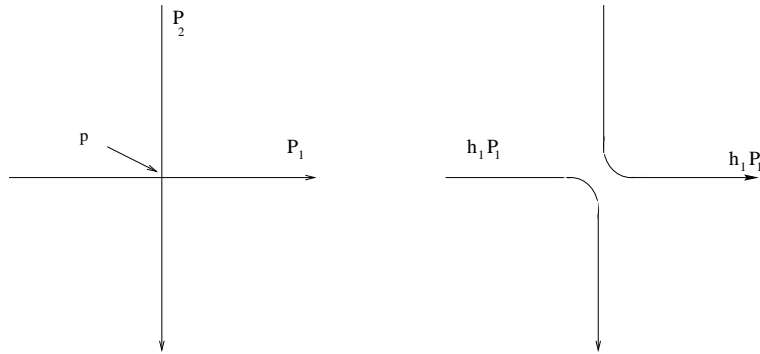


Figura 1.2. $h_1 p_1$ como copia de p_1 .

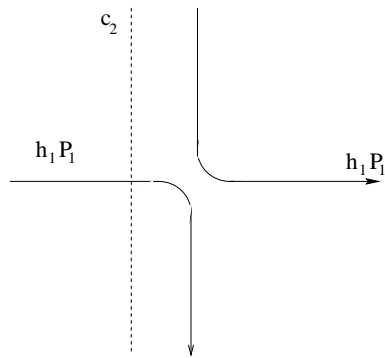


Figura 1.3. La curva c_2 .

Si h_2 es un c -homeomorfismo con $c = c_2$, entonces $h_2 h_1 p_1$ se ve como en la Figura 1.4.

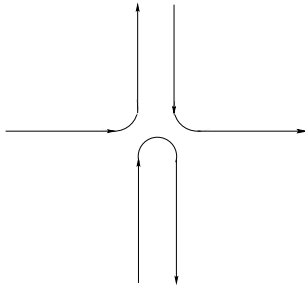


Figura 1.4. $h_2 h_1 p_1$.

Existe una isotopía de M que manda $h_2 h_1 p_1$ a p_2 . Por tanto $p_1 \sim_c p_2$. \square

Si tengo una 3-variedad M , puedo obtener una 3-variedad distinta M' al pegarle a M objetos llamados n -asas ($n = 1, 2, 3$), tales n -asas son 3-bolas que se pegan a M por dos discos en ∂M si $n = 1$; por un anillo en ∂M si $n = 2$ y en una 2-esfera en ∂M si $n = 3$.

Para ver como funciona una 1-asa y una 2-asa, consideremos un toro sólido y peguémosle una 1-asa; lo que obtenemos es una 3-variedad distinta al toro sólido y tal 3-variedad se llama un cubo con asas de género 2 (Ver Fig. 1.5a). Si al toro sólido le pegamos una 2-asa, a través de un anillo en el hueco del toro, obtenemos una 3-bola (Ver Fig. 1.5b).

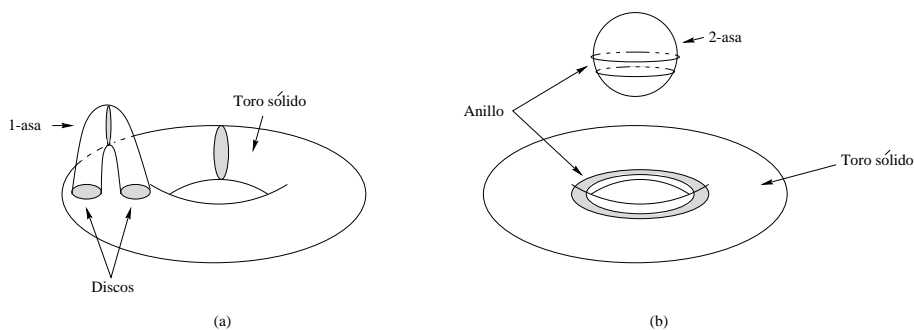


Figura 1.5. 1-asa y 2-asa.

Para ver los efectos de una 3-asa, consideremos una vecindad regular de S^2 en \mathbb{R}^3 ; en medio claramente queda una 2-esfera, así que en esa 2-esfera pegamos la 3-bola, lo que obtenemos finalmente es una 3-bola (Ver Fig. 1.6). Prácticamente, lo que le hacemos a la 3-variedad es tapar las 2-esferas que tiene en la frontera con 3-bolas.

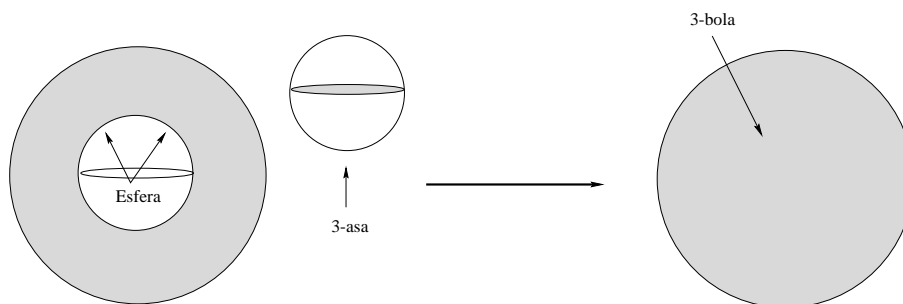


Figura 1.6. 3-asa.

Definición 1.3.7 Sea M una 3-variedad. M se llama **irreducible** si y sólo si toda 2-esfera en M es frontera de una 3-bola.

Definición 1.3.8 Sea M una 3-variedad con frontera y F una k -variedad ($k = 1, 2$) con frontera. Decimos que F está **propriadamente encajada** en M si y sólo si $F \cap \partial M = \partial F$.

Una superficie F en una 3-variedad M es **esencial** si $\pi_1(F_i) \rightarrow \pi_1(M)$ es inyectiva para cada componente F_i de F .

Definición 1.3.9 Sea M una 3-variedad y sean $G, F \subset M$ superficies tales que $G \cap F = \partial G \cap F = \partial G$, entonces $F' = (F - U(G)) \cup (\partial U(G) - F \cap U(G))$ (donde $U(G)$ es una vecindad regular de G en M) se llama **la superficie obtenida de F al hacer cirugía a lo largo de G** .

1.4 Apéndice de teoremas

La demostración de los siguientes teoremas rebasa los propósitos de esta tesis, por lo cual sólo se enunciarán. El lector que esté interesado en estudiar las demostraciones, las puede consultar en [M].

Teorema 1.4.1 (De Alexander) Sea S una 2-esfera PL encajada en S^3 ; entonces S es frontera de dos 3-bolas.

Teorema 1.4.2 Sean X n -variedad compacta, $Y \subset X$ subcomplejo y U, V vecindades regulares de Y , entonces existe una isotopía de X en X que manda a U sobre V y deja fijo a Y .

Teorema 1.4.3 (De Van Kampen) Sea X espacio topológico conectable por trayectorias tal que $X = A \cup B$, A y B son abiertos y $A \cap B$ es conectable por trayectorias. Supongamos que

$$\begin{aligned}\pi_1(A) &= \langle x_1, \dots, x_n : r_1 = 1, \dots, r_u = 1 \rangle \\ \pi_1(B) &= \langle y_1, \dots, y_m : s_1 = 1, \dots, s_v = 1 \rangle \\ \pi_1(A \cap B) &= \langle z_1, \dots, z_k : t_1 = 1, \dots, t_p = 1 \rangle\end{aligned}$$

Entonces

$$\pi_1(X) = \langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m : r_1 = 1, \dots, r_u = 1, s_1 = 1, \dots, s_v = 1, i_{\#}(z_i) = j_{\#}(z_i) \rangle$$

donde $i : A \cap B \hookrightarrow A$ y $j : A \cap B \hookrightarrow B$ son las inclusiones.

Capítulo 2

Descomposiciones de Heegaard

Al atacar un problema es conveniente fraccionarlo en casos o problemas que son menos complejos de estudiar y que, tal vez, nos ofrecen un panorama más general acerca del problema. Precisamente esto es lo que haremos con las 3-variedades: las vamos a descomponer en objetos más simples llamados cubos con asas que nos dan información acerca de la 3-variedad que estamos estudiando.

2.1 Sobre descomposiciones de Heegaard

Iniciamos definiendo lo que es un cubo con asas. Reservaremos el término “superficie” para una 2-variedad conexa.

Definición 2.1.1 *Sea V una 3-variedad conexa que tiene por frontera una superficie; si en V existen k discos ajenos propiamente encajados cuyo complemento es una 3-bola, diremos que V es un **cubo con k -asas** de género igual al de la superficie que es su frontera.*

A los discos propiamente encajados en V se les llama **un sistema de discos meridianos** para V y a las fronteras de los discos simplemente les llamamos **meridianos**.

Definición 2.1.2 *La **frontera de un 1-complejo** Q es el conjunto de vértices que están en exactamente una arista y es denotada por ∂Q . Si M es una 3-variedad y $Q \subset M$ decimos que Q está **propiamente encajado en** M si $Q \cap \partial M = \partial Q$.*

Definición 2.1.3 *Una **espina** para un cubo con asas V es un 1-complejo Q propiamente encajado en V , tal que V se colapsa a Q , es decir, tal que V es una vecindad regular de Q en V .*

Teorema 2.1.1 *Un cubo con asas V es una 3-variedad irreducible.*

Demostración. Debemos demostrar que toda 2-esfera es frontera de una 3-bola en el cubo con asas V , así que tomemos una 2-esfera S^2 . Si S^2 no interseca ningún disco meridiano, S^2 está contenida en una 3-bola, a saber, el complemento de los discos meridianos de V y por tanto S^2 es frontera de una 3-bola por el Teorema de Alexander. Si S^2 interseca a un disco meridiano D , intersecamos transversalmente a S^2 y D ; mediante una isotopía le hacemos un chipote a D en un disco innermost para borrar las curvas de intersección con S^2 , hacemos esto cuantas veces sea necesario y de esta forma este caso se reduce al anterior. \square

El que la frontera de los cubos con asas sea una superficie es una ventaja porque nos ayuda a saber cuándo dos cubos con asas son homeomorfos; así lo muestra el teorema siguiente:

Teorema 2.1.2 *Sean V cubo con k -asas y $h : \partial V \rightarrow \partial V$ homeomorfismo. Entonces h se extiende a un homeomorfismo $H : V \rightarrow V$ si y sólo si h manda la frontera de un sistema de discos meridianos de V , en la frontera de otro sistema de discos meridianos de V .*

Demostración.

\Rightarrow) Obvio.

\Leftarrow) Por demostrar que existe $H : V \rightarrow V$ tal que $H|_{\partial V} = h$. Tenemos que $h_i = h|_{m_i} : m_i \rightarrow m_j$, donde m_i y m_j son meridianos de V . Por el Truco de Alexander, cada h_i se puede extender a $H_i : k_i \rightarrow k_j$, donde k_i y k_j son los discos meridianos tales que $\partial k_i = m_i$. Por otro lado sabemos que al cortar a V por los k discos meridianos obtenemos una 3-bola B^3 para la que tenemos una función $h' : S^2 \rightarrow S^2$ definida por h . h' se extiende a $H' : B^3 \rightarrow B^3$ por el truco de Alexander. Con todo esto definimos:

$$H : V \rightarrow V$$

$$H(x) = \begin{cases} H_i(x) & \text{si } x \in k_i \\ H'(x) & \text{si } x \in V \setminus k_i \end{cases}$$

\square

Definición 2.1.4 *Sea M una 3-variedad cerrada y conexa. Sea F una superficie orientada cerrada y conexa en M . Si la cerradura de cada componente de $M - F$ es un cubo con asas, entonces llamamos a la pareja (M, F) una **descomposición de Heegaard** de M . El **género** de la descomposición de Heegaard es igual al género de F .*

Nota: En algunas ocasiones la descomposición de Heegaard de una 3-variedad M se denotará: $M = V \cup_f W$ donde V y W son cubos con asas y $f : \partial V \rightarrow \partial W$ es un homeomorfismo de “pegado”.

A dos discos meridianos m y m' en la descomposición de Heegaard (M, F) que se intersecan (transversalmente) en exactamente un punto les llamaremos **pareja meridional**; m y m' necesariamente están en lados opuestos de la superficie F .

Teorema 2.1.3 *Sea M una 3- variedad cerrada y conexa. Entonces M tiene una descomposición de Heegaard.*

Demostración. Sea K una triangulación de M . Definamos
 $V_1 :=$ vecindad regular del 1-esqueleto de K
 $V_2 := \overline{M - V_1}$

Efectivamente, tanto V_1 como V_2 son 3 variedades conexas con frontera una superficie. Verificaremos que cada una tiene discos propiamente encajados cuyo complemento es una 3-bola.

Para V_1 tomemos discos propiamente encajados, uno por cada arista de K que sea perpendicular a la arista. Supongamos que tenemos r discos d_1, d_2, \dots, d_r ; cortamos por cada uno de esos discos y obtenemos una colección de 3-bolas, pegamos componentes exactamente a lo largo de un disco de los que compartían; al finalizar obtenemos una 3-bola.

Para V_2 , fijémonos en los tetraedros dados por la triangulación de M . La cerradura de un tetraedro menos una vecindad regular del 1-esqueleto, se ve como en la *Figura 2.1*.

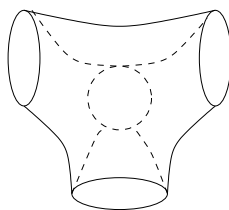


Figura 2.1. Una parte de V_2 .

Nótese que esto es una 3-bola. Como en general V_2 será unión de cosas como las mostradas en la figura anterior pegadas a lo largo de discos, le hacemos lo mismo que a V_1 y vemos que obtenemos una 3-bola al cortar a V_2 a lo largo de algunos de estos discos. Es fácil ver, de la figura, dónde están los k discos. Por lo tanto V_1 y V_2 son los cubos con asas que buscamos; además tienen el mismo género ya que comparten la frontera. \square

Teorema 2.1.4 Sean $M = V \cup_h W$ y $N = V \cup_g W$ 3-variedades, donde V y W son cubos con asas y $h, g : \partial V \rightarrow \partial W$ son homeomorfismos. Si $g \circ h^{-1}$ se extiende a $F : W \rightarrow W$, se tiene que $M \cong N$.

Demostración. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V \sqcup W & \xrightarrow{id \sqcup F} & V \sqcup W \\ \downarrow P_1 & & \downarrow P_2 \\ V_1 \cup_h W & & V_1 \cup_g W \end{array}$$

en el cual queremos que $x \sim y \Rightarrow (P_2 \circ id \sqcup F)(x) = (P_2 \circ id \sqcup F)(y)$
 $\forall x \in V, y \in W$, esto para poder aplicar la Propiedad Universal de los Cocientes; veamos que efectivamente esto es lo que pasa.

Sea $x \in \partial V$ y $y \in \partial W$ tal que $x \sim y$, es decir, $h(x) = y$. Entonces $(P_2 \circ id \sqcup F)(y) = P_2((id \sqcup F)(y)) = g(h^{-1}(y)) = g(x) = g(id(x)) = g((id \sqcup F)(x)) = P_2((id \sqcup F)(x)) = (P_2 \circ id \sqcup F)(x)$.

Luego por la propiedad universal de los cocientes existe φ continua, tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} V \sqcup W & \xrightarrow{id \sqcup F} & V \sqcup W \\ \downarrow P_1 & & \downarrow P_2 \\ V_1 \cup_h W & \xrightarrow{\varphi} & V_1 \cup_g W \end{array}$$

Como F es homeomorfismo existe F^{-1} , entonces podemos encontrar φ^{-1} continua, pues la Propiedad Universal de los Cocientes garantiza la unicidad, si consideramos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V \sqcup W & \xleftarrow{id \sqcup F^{-1}} & V \sqcup W \\ \downarrow P_1 & & \downarrow P_2 \\ V_1 \cup_h W & \xleftarrow{\varphi^{-1}} & V_1 \cup_g W \end{array}$$

Por lo tanto φ es homeomorfismo y $M \cong N$ □

Corolario 2.1.1 En la situación del teorema anterior, si $g \circ h^{-1}$ manda la frontera de un sistema de discos meridianos de W en la frontera de otro sistema de discos meridianos de W , $M \cong N$.

Definición 2.1.5 Sean M una 3-variedad cerrada y conexa y (M, F) y (M, F') descomposiciones de Heegaard de M . Diremos que (M, F') es **equivalente** a (M, F) , denotado por $(M, F) \approx (M, F')$, si existe un homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ isotópico a la identidad que induce un homeomorfismo de F en F' que conserva la orientación.

A continuación calculamos el grupo fundamental de algunos espacios topológicos ayudándonos con el Teorema de Van Kampen, que usaremos para demostrar que el toro estándar T induce una descomposición de Heegaard en S^3 .

Lema 2.1.1 $\pi_1(S^3) = \langle - : - \rangle$, es decir, el grupo fundamental de S^3 es el trivial.

Demostración. Del Teorema de Alexander sabemos que una esfera S^2 encajada en S^3 es frontera de dos bolas, llamemos a una de estas 3-bolas A y a la otra B , obviamente $A \cap B = S^2$. Por otro lado, $\pi_1(A) = \pi_1(B) = \langle - : - \rangle$ y $\pi_1(A \cap B) = \pi_1(S^2) = \langle - : - \rangle$; aplicamos ahora el Teorema de Van Kampen con todos los datos anteriores y obtenemos que $\pi_1(S^3) = \langle - : - \rangle$. \square

Lema 2.1.2 $\pi_1(T) = \langle a, b : ab = ba \rangle$ donde T es el toro estándar.

Demostración. Para poder aplicar el Teorema de Van Kampen vamos a expresar al toro T como $T = T' \cup D$, donde D es un disco y $T' = \overline{T - D}$ (Ver Fig. 2.2).

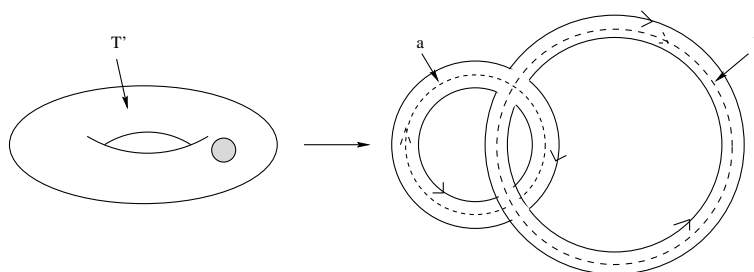


Figura 2.2. T'

Al calcular los grupos fundamentales de T' y D obtenemos lo siguiente: $\pi_1(T') = \langle a, b : - \rangle$ y $\pi_1(D) = \langle - : - \rangle$, además $T' \cap D = S^1$ por lo cual $\pi_1(T' \cap D) = \pi_1(S^1) = \langle c : - \rangle$, entonces $\pi_1(T)$ va a tener dos generadores que son a y b , y como las relaciones en los grupos fundamentales de T' y D son triviales, sólo falta ver que pasa en la intersección con la relación dada por las funciones inclusión; de la Figura 2.2 vemos que una curva trivial en D toma la forma $aba^{-1}b^{-1} = 1$ lo cual implica que $ab = ba$ y finalmente que $\pi_1(T) = \langle a, b : ab = ba \rangle$ \square

Este lema que demostramos nos dice que cualquier curva cerrada $\gamma \subset T$, la podemos ver como $\gamma = a^p b^q$ pues $\pi_1(T)$ (que es isomorfo a \mathbb{Z}^2) es abeliano. Las curvas a y b se ven en el toro como en la Figura 2.3.

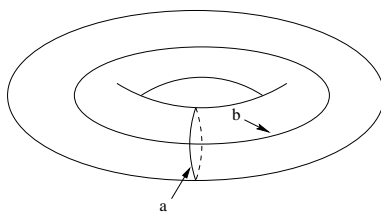


Figura 2.3. Curvas en T .

Sea T un toro estándar en S^3 ; tenemos dos discos en S^3 cuyas fronteras son esenciales en T ; uno cuya frontera es la curva a y el otro tiene por frontera a la curva b . Nótese que estos discos forman una pareja meridional. Elegimos este último, que llamaremos D . T es frontera de un cubo con asas V que tiene género 1. Si a V le pegamos una vecindad regular de D , $\eta(D)$; se convierte en una 3-bola $B_1 = V \cup \eta(D)$ y a $\overline{S^3 - V}$ le quitamos una 1-asa (Ver Fig. 2.4).

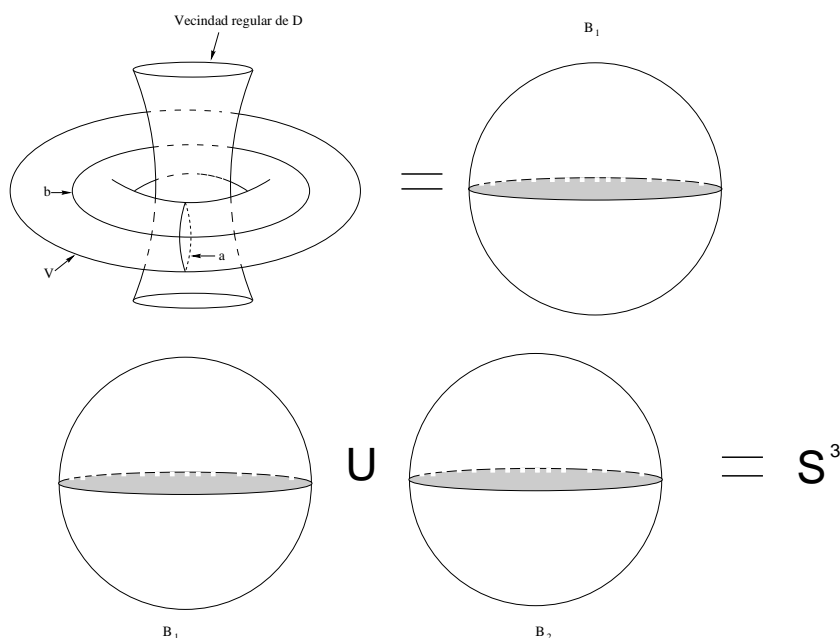


Figura 2.4. Construyendo S^3 a partir de toros.

Usando el Teorema de Alexander, el complemento de B_1 en S^3 debe ser otra 3-bola B_2 , que al unirla por su frontera con B_1 nos da S^3 . Vemos también que $\overline{S^3 - V}$ menos una 1-asa es una 3-bola, por tanto, $\overline{S^3 - V}$ debe ser un cubo con asas de género 1 y además tiene por frontera al toro T . De esta forma obtenemos una descomposición de Heegaard de género 1 inducida por el toro T , a dicha descomposición la

vamos a denotar por (S^3, T) . Ahora demostraremos que cualquier otra descomposición de Heegaard de S^3 cuyo género sea 1 es equivalente a (S^3, T) auxiliándonos de los siguientes lemas.

Lema 2.1.3 *Sea V un toro sólido, entonces $\pi_1(V) = \langle x : - \rangle$, esta curva x es una curva paralela a la curva b sobre T .*

Demostración. Como V es del mismo tipo de homotopía que S^1 (V se colapsa en su centro c que es homeomorfo a S^1) y $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, el resultado es claro (Ver Fig. 2.5). \square

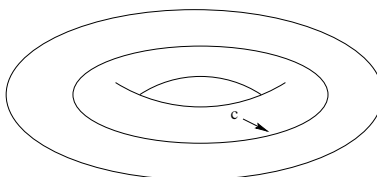


Figura 2.5. c en V .

Lema 2.1.4 *Sea (S^3, F) una descomposición de Heegaard de género 1 y sean V, W los toros sólidos correspondientes. Si m es un meridiano de V y n un meridiano de W , entonces m (o n) es isotópico a una curva que interseca a n (o a m) en exactamente un punto.*

Demostración. Consideremos (S^3, F) y paso por paso calculemos el grupo fundamental de esta descomposición. Primero a V le pegamos una 2-asa que se obtiene de una vecindad regular de un disco meridiano de W , llamemos a esto M' ; aplicamos el Teorema de Van Kampen a M' con los siguientes datos $A = V$ y $B = 2$ -asa, es claro que $A \cap B$ es homeomorfo a S^1 ; sabemos que $\pi_1(A) = \langle x : - \rangle$, $\pi_1(B) = \langle - : - \rangle$ y $\pi_1(A \cap B) = \langle y : - \rangle$; por lo cual, obtenemos que $\pi_1(M') = \{x : x^q = 1\}$, donde x es el generador de V . Después pegamos a M' la 3-bola que quedo de W para obtener S^3 ; si calculamos $\pi_1(S^3)$ considerando que una de las dos bolas es M' y a la otra bola le llamamos C ; por el Teorema de Van Kampen $\pi_1(S^3) = \{x : x^q = 1\}$, pero por el Lema 2.1.1 sabemos que $\pi_1(S^3) = \langle -, - \rangle$, entonces q debe ser igual a 1. Por ser la curva x de V paralela a la curva n de F y por el Lema 2.1.2 se sigue que $n = x = a^p b^1$; esto implica que m sólo interseca a n en exactamente un punto salvo isotopías. \square

Lema 2.1.5 *Sea $f : S^n \rightarrow S^n$ un homeomorfismo. Entonces f es isotópica a un homeomorfismo que deja fijo un punto.*

Demostración. Sea $x_1 \in S^n$ y sea $x_2 = f(x_1)$. Sea $l \subset S^n$ el segmento de recta que une a x_1 con x_2 y sea B una vecindad pequeña de l en S^n . Entonces B es una n -bola. Para $t \in [0, 1]$ tomamos $h_t : B^\circ \rightarrow B^\circ$ el homeomorfismo dado por la composición $h_t = g^{-1} \circ T_t \circ g$ donde $g(x) = \frac{x}{1-|x|}$ y $T_t(u) = u - t(g(x_2) - g(x_1))$; nótese que $T_0(g(x_2)) = g(x_2)$ y que $T_1(g(x_2)) = g(x_1)$. Ahora bien, $\lim_{|x| \rightarrow 1} h_t(x) = x$, así que h_t se puede extender a $h'_t : B \rightarrow B$ homeomorfismo, tal que $h'_t(u) = u$ para toda $u \in \partial B$ y $h'_t(u) = h_t(u)$ si $u \in B^\circ$. Definimos ahora $\varphi_t : S^n \rightarrow S^n$ como $\varphi_t(u) = h'_t(u)$ si $u \in B$ y $\varphi_t(u) = u$ si $u \in \overline{S^n - B}$. Definimos ahora $H : S^n \times I \rightarrow S^n \times I$ como $H(u, t) = (\varphi_t(f(u)), t)$. Claramente H es homeomorfismo y $H(u, 0) = (\varphi_0(f(u)), 0) = (f(u), 0)$ y $H(u, 1) = (\varphi_1(f(u)), 1)$. Además $(\varphi_1(f(x_1)), 1) = (\varphi_1(x_2), 1) = (x_1, 1)$. \square

Ahora sí estamos en condiciones de atacar el siguiente teorema.

Teorema 2.1.5 *Sea (S^3, T) la descomposición de Heegaard género 1 de S^3 inducida por el toro estándar y sea (S^3, K) otra descomposición de Heegaard de género 1. Entonces $(S^3, T) \approx (S^3, K)$.*

Demostración. Sean V_1 y V_2 los cubos con asas género 1 dados por (S^3, T) , es decir, $S^3 = V_1 \cup_f V_2$ donde $f : T \rightarrow T$; análogamente $S^3 = W_1 \cup_g W_2$ y aquí $g : K \rightarrow K$. Como T y K son superficies de género 1, entonces existe un homeomorfismo $\theta : T \rightarrow K$, por lo que K también es un toro; más todavía, este homeomorfismo θ tiene la virtud de que manda la frontera de discos meridianos de (S^3, T) en la frontera de los discos meridianos de (S^3, K) ; a continuación se explica esto. Sean V' y W' los cubos con asas de género 1 de la descomposición de Heegaard (S^3, K) y sean x y y las fronteras de los discos meridianos de V' y W' ; es claro que x y y están sobre K y por el Lema 2.1.4 ambas curvas se tocan entre ellas sólo en un punto (esto significa que las curvas x y y sobre K son “parecidas” a las curvas a y b sobre T), por lo cual, si cortamos a K a lo largo de x y y , obtenemos un cuadrado, lo mismo que si cortamos a T a lo largo de a y b ; entonces podemos encontrar un homeomorfismo entre los lados del cuadrado, que no es otra cosa que un homeomorfismo entre la frontera de los meridianos, por lo cual podemos construir fácilmente el homeomorfismo θ .

Por lo anterior θ se puede extender a homeomorfismos $\theta_i : V_i \rightarrow W_i$, $i = 1, 2$ tal que $\theta_i|_{\partial V_i} = \theta$. Ahora vamos a aplicar la propiedad universal de los cocientes al siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
V_1 \sqcup V_2 & \xrightarrow{\theta_1 \sqcup \theta_2} & W_1 \sqcup W_2 \\
\downarrow P_1 & & \downarrow P_2 \\
V_1 \cup_f V_2 & & W_1 \cup_g W_2
\end{array}$$

Para esto basta probar que $P_1(x) = P_1(y) \Rightarrow (P_2 \circ (\theta_1 \sqcup \theta_2))(x) = (P_2 \circ (\theta_1 \sqcup \theta_2))(y)$, donde $x \in \partial V_1, y \in \partial V_2$. Supongamos que $f(x) = y$.

Tenemos que $(P_2 \circ (\theta_1 \sqcup \theta_2))(x) = (P_2 \circ \theta_1)(x) = g(\theta_1(x))$. Y por otra parte $(P_2 \circ (\theta_1 \sqcup \theta_2))(y) = (P_2 \circ \theta_2)(y) = g(\theta_2(y)) = \theta_2(f(x))$; pero por construcción $g(\theta_1(x)) = \theta_2(f(x))$. Así que existe $\phi : V_1 \cup_f V_2 \rightarrow W_1 \cup_g W_2$ continua; análogamente se demuestra que existe ϕ^{-1} y, por lo tanto, $V_1 \cup_f V_2$ es homeomorfa a $W_1 \cup_g W_2$.

Veamos ahora que efectivamente φ es isotópico a la identidad, por el Lema 2.1.5 podemos suponer que $\varphi(x_0) = x_0$, para algún $x_0 \in S^3$ y escogemos $U \subset S^3$ una vecindad pequeña de x_0 tal que $\varphi(u) = u$ si $x \in \partial U$, es decir $\varphi|_{\partial U} = id$; por el truco de Alexander φ es isotópica a la identidad.

Falta ver que φ conserva la orientación, pero eso no es problema porque si $\varphi(T) = K$ tiene orientación contraria a T , tomamos un fragmento de K y lo estiramos hasta el punto al infinito; al hacer pasar el fragmento de K por el punto al infinito y regresarlo a su lugar, le estamos cambiando la orientación a K y obtenemos la orientación de T ; este movimiento que hicimos claramente es una isotopía. \square

Sea B_1 una 3-bola en S^3 tal que $B_1 \cap T$ es un disco y tal que $\partial B_1 \cap T = \partial(B_1 \cap T)$. Sea (M, F) una descomposición de Heegaard de la 3-variedad M y sea B_2 una 3-bola en M escogida de la misma manera que B_1 en S^3 . Construimos la suma conexa de (M, F) con (S^3, T) identificando las fronteras de $M - \overset{\circ}{B}_2$ y $S^3 - \overset{\circ}{B}_1$ mediante un homeomorfismo que invierte la orientación, tal que también $\partial B_2 \cap F$ y $\partial B_1 \cap T$ se identifiquen con un homeomorfismo que invierte la orientación (Ver Fig. 2.6).

La pareja de espacios obtenida es de nuevo una descomposición de Heegaard de M y la denotamos mediante $(M, F) \# (S^3, T)$. El género de esta nueva descomposición es $gen(F) + 1$. A esta operación que acabamos de explicar se le llama una **estabilización** de (M, F) .

Si tengo una descomposición de Heegaard (M, F') que es equivalente a (M, F) tengo también una isotopía de (M, F) en (M, F') , entonces al estabilizar a (M, F) existe una 3-bola en todos los niveles de la isotopía que tiene las mismas propiedades

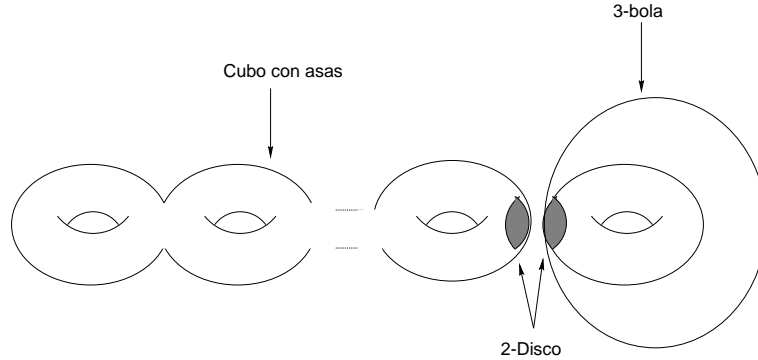


Figura 2.6. Estabilización.

que la 3-bola con la que estabilizamos; de forma análoga si empiezo con una descomposición de Heegaard (M, F') equivalente a $(M, F)\#(S^3, T)$ la isotopía entre ellas nos permite concluir que al desestabilizar (M, F') lo que obtenemos es equivalente a (M, F) . Así, la clase de equivalencia de descomposiciones de Heegaard equivalentes a $(M, F)\#(S^3, T)$ se determina a partir de la clase de equivalencia de (M, F) . Esto significa que la operación de estabilización está bien definida y no depende de por dónde peguemos la 3-bola.

Definición 2.1.6 Una descomposición de Heegaard (M, F) se llama **reducible** si existe una descomposición de Heegaard (M, F') tal que:

$$(M, F) \approx (M, F')\#(S^3, T).$$

En caso contrario llamamos a (M, F) **irreducible**.

Para abreviar definimos recursivamente

$$(M, F)\#n(S^3, T) \approx ((M, F)\#(n-1)(S^3, T))\#(S^3, T)$$

Definición 2.1.7 Sea M una 3-variedad y (M, F) y (M, F') dos descomposiciones de Heegaard de M , entonces decimos que (M, F) y (M, F') son **establemente equivalentes** cuando existen números m y n tales que

$$(M, F)\#m(S^3, T) \approx (M, F')\#n(S^3, T)$$

El siguiente teorema sólo será enunciado y echaremos mano de él más adelante. Una demostración de este teorema puede ser encontrada en [FM].

Teorema 2.1.6 (Reidemeister y Singer) Sea M una 3-variedad, (M, F) y (M, F') descomposiciones de Heegaard de M . Entonces (M, F) y (M, F') son **establemente equivalentes**.

Ya hemos visto anteriormente que en (S^3, T) existe una pareja de discos meridionales; la 3-bola B_1 de la definición de estabilización se puede escoger ajena a esta pareja meridional, por lo cual siempre vamos a poder encontrar una pareja meridional en $(M, F) \# (S^3, T)$.

Si x, y es una pareja meridional en (M, F'') y si $U = U(x \cup y)$ es una vecindad regular de $x \cup y$ en M , entonces la pareja $(U, U \cap F'')$ es homeomorfa a la pareja $(S^3 - \overset{\circ}{B}_1, (S^3 - \overset{\circ}{B}_1) \cap T)$; también $(M, F'') \approx (M, F') \# (S^3, T)$ para alguna descomposición de Heegaard (M, F') cuya unicidad no se afirma, es decir, es posible tener $(M, F'') \approx (M, F') \# (S^3, T) \approx (M, F) \# (S^3, T)$ y que (M, F') no sea equivalente a (M, F) .

Notemos que la afirmación $(M, F'') \approx (M, F') \# n(S^3, T)$ es equivalente a que existen n parejas meridionales ajenas en (M, F'') .

2.2 Descomposiciones de Heegaard de S^3

A partir de ahora el propósito del material subsecuente es guiarnos a la demostración de que toda descomposición de Heegaard de S^3 es estándar; en las sección pasada demostramos este hecho para descomposiciones de Heegaard de género 1 de S^3 , ahora se demostrará para cualquier género.

Definición 2.2.1 *Sea (M, F) una descomposición de Heegaard; sean V y W los cubos con asas en los que F descompone a M . Un sistema de n discos ajenos en V , $v = v_1 \cup \dots \cup v_n$, tal que $v \cap \partial V = \partial v$, se llama un **buen sistema de discos meridianos en V** si existe un sistema de n discos ajenos en W , $w = w_1 \cup \dots \cup w_n$ y $w \cap \partial W = \partial w$, tal que (al enumerar apropiadamente las componentes de v y w) se cumple: $\partial v_j \cap \partial w_j$ es exactamente un punto de intersección transversal y $\partial v_i \cap \partial w_j = \emptyset$ si $i > j$. A w le llamamos un **sistema coordinado** con v .*

Si v es un buen sistema de discos meridianos en V y w es un sistema coordinado con v , entonces w es (por la misma definición) un buen sistema de discos meridianos en W y v es un sistema coordinado con w .

Hacemos notar que un buen sistema de discos meridianos no necesariamente es un sistema de discos meridianos completo, es decir, el número de discos en un buen sistema de discos meridianos puede ser menor que g , si consideramos a g como el género de F .

Teorema 2.2.1 *Sea v un buen sistema de n discos meridianos en V y sea w un sistema coordinado con v .*

(1) *Existe un sistema \tilde{w} coordinado con v tal que $\partial v_j \cap \partial \tilde{w}_j$ es exactamente un punto de intersección y $\partial v_i \cap \partial \tilde{w}_j = \emptyset$, si $i \neq j$.*

(2) *Sea $\tilde{U} = U(F \cup v \cup w)$ una vecindad regular de $F \cup v \cup w$ en M y sea $\tilde{F} = \partial \tilde{U} \cap V$. Entonces \tilde{U} es homeomorfa a $\tilde{F} \times I$ (I es el intervalo unitario).*

Demostración.

(1) Construiremos el sistema \tilde{w} a partir de w . Sea i el índice más chico tal que existe un punto de intersección $q \subset \partial v_i \cap \partial w_j$ para $j > i$. Sea k uno de los arcos en ∂v_i que une a q con el punto de intersección $\partial v_i \cap \partial w_i$. Escojamos k de tal manera que $k \cap w = \emptyset$. Sea $U(w_i \cup k \cup w_j)$ una vecindad regular de $w_i \cup k \cup w_j$ en M . $W \cap \partial U(w_i \cup k \cup w_j)$ se compone de tres 2-discos. Dos de éstos son isotópicos a w_i y a w_j en W ; sea w_j' el tercero. Para cada $h \neq i$, $\partial v_h \cap \partial w_j'$ se compone de tantos puntos como $\partial v_h \cap \partial w_j$; pero $\partial v_i \cap \partial w_j'$ contiene un punto menos que $\partial v_i \cap \partial w_j$. Reemplazamos a w_j con w_j' . Repetimos el procedimiento tantas veces como necesitemos. El sistema finalmente obtenido de w tiene las propiedades enunciadas para \tilde{w} .

(2) Primero probaremos que $U(F \cup v \cup w)$ es homeomorfa a $U(F \cup v \cup \tilde{w})$ para esto vamos a considerar el subíndice i de la parte anterior (1) y vamos a suponer que U^* es una vecindad regular de $F \cup v \cup w_1 \dots \cup w_i$ y $W^* = W - \overset{\circ}{U}^*$, nótese que W^* es un cubo con asas cuyo género es $gen(F) - i$ y $U^* \cap W^* = \partial W^*$. Consideremos ahora la unión de U^* y una vecindad regular de

$$X^* = (U^* \cap W^*) \cup (w_{i+1} \cap W^*) \cup \dots \cup (w_n \cap W^*)$$

en W^* y vemos que la espina de esta unión es la misma que la de $U(F \cup v \cup w)$; del Teorema 1.4.2 se sigue que $U(F \cup v \cup w)$ es homeomorfa a la unión de U^* y una vecindad regular de

$$X^* = (U^* \cap W^*) \cup (w_{i+1} \cap W^*) \cup \dots \cup (w_n \cap W^*)$$

en W^* .

Por otra parte, X^* es isotópico, en W^* , a

$$(U^* \cap W^*) \cup (w_{i+1} \cap W^*) \cup \dots \cup (w_j' \cap W^*) \cup \dots \cup (w_n \cap W^*)$$

porque si se toma una vecindad regular $U(w_i \cup w_j \cup k)$ en W^* (donde k es el mismo arco considerado en (1)) claramente puedo deslizar a w_j sobre w'_j en $U(w_i \cup w_j \cup k)$ y esto implica que w_j es isotópico a w'_j en $U(w_i \cup w_j \cup k)$ (Ver Fig. 2.7); ya que $w_j \cap W^*$ es homeomorfo a w_j — y lo mismo pasa con $w'_j \cap W^*$ y w'_j — entonces se tiene que $w_j \cap W^*$ es isotópico a $w'_j \cap W^*$ en W^* y, por tanto, $U(F \cup v \cup w)$ es homeomorfa a $U(F \cup v \cup \tilde{w})$.

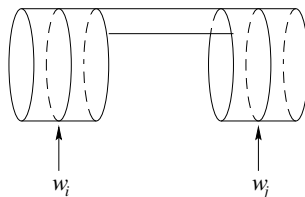


Figura 2.7. w_j es isotópico a w'_j .

Por lo anterior, en la parte (2) de nuestro Teorema, podemos reemplazar a w con w' . Sea U_j una vecindad regular de $v_j \cup \tilde{w}$ en M . U_j es una 3-bola; ∂U_j interseca a V únicamente en dos discos; lo mismo pasa con ∂U_j y W , además $U_j \cap F$ es un toro perforado. Por el Teorema 1.4.2, $U(F \cup v \cup w')$ es homeomorfa a una vecindad regular de $F \cup \bigcup U_j$. Ahora si V es un cubo con asas de género n existen discos propiamente encajados en V , tales que al cortar a lo largo de esos discos obtenemos n cubos con asas de género 1. Hagamos cirugía a lo largo de esos discos; como un buen sistema de meridianos no necesariamente es completo, entonces en la frontera F_j de algunos de estos cubos con asas V_j existen parejas meridionales y en otras no; en las que tienen parejas meridionales tomamos una vecindad regular de $F_j \cup U_j$; ésta va a ser homeomorfa a $S^2 \times I$ (Ver Fig. 2.8).

Consideramos ahora vecindades regulares de la frontera de los cubos con asas restantes, las cuales son homeomorfas a $T \times I$; si pegamos estas vecindades regulares por los discos en los cuales cortamos lo que se obtiene es homeomorfo a $F \cup \bigcup U_j$, pero también a $\tilde{F} \times I$. Por lo tanto \tilde{U} es homeomorfa a $\tilde{F} \times I$. \square

Sea (M, F) una descomposición de Heegaard; sean V y W las subvariedades en las que F descompone a M . Sea v un buen sistema de discos meridianos en V y sea w un sistema coordinado con v ; sean $U(v)$ y $U(w)$ vecindades regulares de v y w en M . Sean

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= V - \overset{\circ}{U}(v), & \tilde{W} &= \overline{(M - \tilde{V})} \\ W^* &= W - \overset{\circ}{U}(w), & V^* &= \overline{(M - W^*)}; \end{aligned}$$

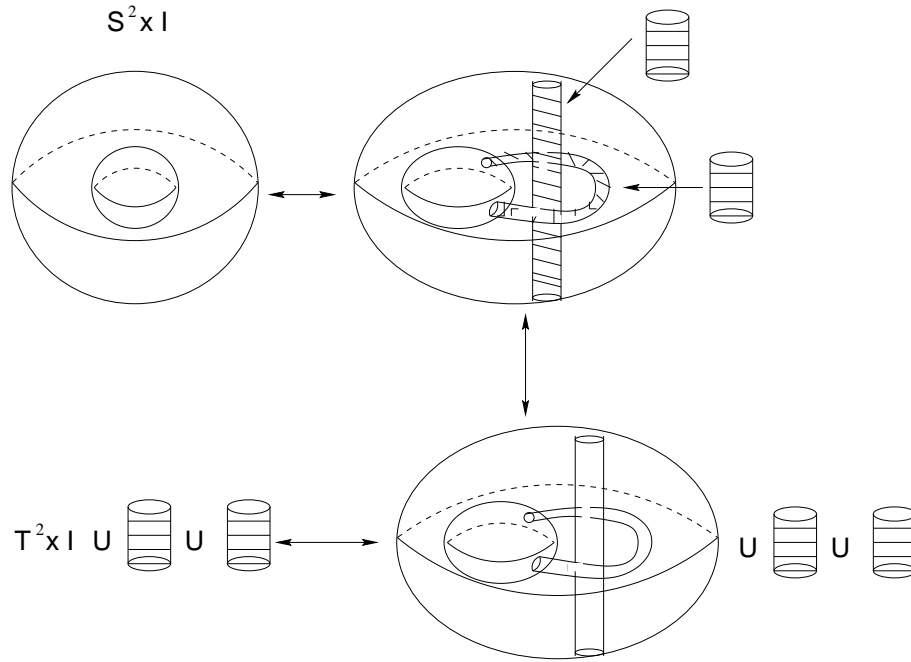


Figura 2.8. $U(F_j \cup U_j)$ es homeomorfo a $S^2 \times I$.

como v no desconecta a V , \tilde{V} es un cubo con asas; lo mismo se cumple para W^* . Además del teorema anterior se sigue que las subvariedades \tilde{V} y V^* son isotópicas en M . Si \tilde{F} es la superficie $\partial\tilde{V}$ provista de la orientación inducida por F , (M, \tilde{F}) es una descomposición de Heegaard. Si $(M, \tilde{F}) \approx (M, -\tilde{F})$, la clase de equivalencia de (M, \tilde{F}) se determina a partir de (M, F) y v , o a través de (M, F) y w . Si (M, \tilde{F}) no es equivalente a $(M, -\tilde{F})$, entonces de las dos orientaciones de F se fija una descomposición también, que se obtiene mediante el siguiente procedimiento: Si considero la orientación de F respecto a la de M y al colocarme sobre F la primera componente que veo es V , entonces al considerar la orientación de \tilde{F} respecto a la de M y al colocarme sobre \tilde{F} , la primera componente que voy a ver será \tilde{V} .

Luego, en ambos casos se determina una descomposición de Heegaard (M, \tilde{F}) a través de (M, F) y v , o a través de (M, F) y w salvo equivalencia; la cual denominamos como **la descomposición de Heegaard que se obtiene de (M, F) mediante una reducción en v o en w** , respectivamente, y escribimos

$$(M, \tilde{F}) \approx (M, F \setminus v) \quad \text{o} \quad (M, \tilde{F}) \approx (M, F \setminus w)$$

según sea el caso; en otras palabras, $(M, F \setminus (v))$ se obtiene de desestabilizar a (M, F) tantas veces como el número de elementos de v .

De la discusión previa captamos el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2 *Sea (M, F) una descomposición de Heegaard tal que F descompona a M en las componentes V y W . Sean v y v' buenos sistemas de discos meridianos en V . Si existe un sistema w en W que es tanto un sistema coordinado con v , como un sistema coordinado con v' , entonces $(M, F \setminus v) \approx (M, F \setminus v')$.*

Teorema 2.2.3 *Sean (M, F_1) y (M, F_2) descomposiciones de Heegaard establemente equivalentes.*

(1) *Entonces existe una descomposición de Heegaard (M, F) y existen buenos sistemas de discos meridianos v y x en V , un sistema w coordinado con v y un sistema y coordinado con x en W , tales que $(M, F \setminus v) \approx (M, F_1)$ y $(M, F \setminus x) \approx (M, F_2)$.*

(2) *Además, $v \cap x = \emptyset$ y $w \cap y = \emptyset$.*

Demostración.

(1) Por ser (M, F_1) y (M, F_2) establemente equivalentes existe una descomposición de Heegaard (M, F) tal que

$$(M, F) \approx (M, F_1) \#_n(S^3, T) \approx (M, F_2) \#_m(S^3, T).$$

Los sistemas v y w se obtienen al estabilizar (M, F_1) y los sistemas x y y se obtienen al estabilizar (M, F_2) . De esta manera es claro que $(M, F \setminus v) \approx (M, F_1)$ y $(M, F \setminus x) \approx (M, F_2)$.

(2) Un disco meridiano es una 2-variedad con frontera, por lo cual v es un sistema de 2-variedades con frontera; lo mismo se tiene para x . Mediante una deformación pequeña podemos poner a v y a x en posición general; nótese que esto se hace disco a disco. Entonces $v \cap x$ es transversal y no contiene vértices de x ni vértices de v y $v \cap x$ es un sistema de curvas simples y arcos; dichas curvas y dichos arcos están sobre los discos de v y x , así que, como consecuencia de haber puesto a v y x en posición general, se tiene que:

$$x \cap y \cap (v \cup w) = \emptyset; \quad v \cap w \cap (x \cup y) = \emptyset$$

Ahora ponemos a $v \cap x$ y $w \cap y$ en posición general con F , sin alterar la condición anterior, de tal manera que:

$$v \cap x \cap F = \partial(v \cap x); \quad w \cap y \cap F = \partial(w \cap y)$$

a) Supongamos que existen curvas cerradas en $v \cap x$. Entonces nos fijamos en los discos de v y x en cuya intersección hay curvas cerradas; tomemos dos de estos discos a los cuales vamos a llamar v_j y x_k ; el número de curvas cerradas sobre estos discos es finito. Entonces existe un disco D innermost en $\overset{\circ}{v}_j$ tal que $D \cap x = \partial D$ y $D^o \cap (v \cap x) = \emptyset$; ∂D bordea un 2-disco D' en el interior de x y $D' \cap v = \emptyset$. Vamos a contruir un 2-disco x'_k a partir de x_k , de la siguiente manera. Primero reemplazamos a D' con D y borramos v_j (Ver Fig. 2.9).

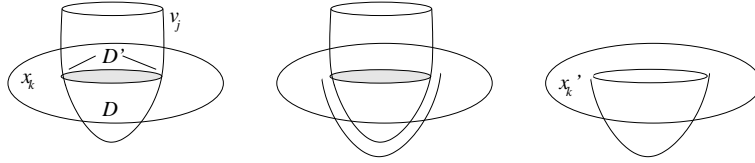


Figura 2.9. Construcción de x' .

De tal manera que construimos un nuevo sistema de discos x' . Puesto que lo que le hicimos a x_k sólo fue una pequeña deformación, pues un cubo con asas es irreducible y $D \cup D'$ es una 2-esfera que, por tanto, es frontera de una 3-bola en el cubo con asas, x_k es isotópico a x'_k , lo cual garantiza que el sistema x' que estamos construyendo es un sistema de discos meridianos; y como para construir x' no movimos nada de la frontera de x , w es sistema coordinado con x y x' , así que, por el Teorema 2.2.2, se tiene que $(M, F \setminus x') \approx (M, F \setminus x)$.

b) Supongamos que existe un arco en $v \cap x$. Supongamos que dicho arco k está en v_j . Sea $U(k)$ una vecindad regular de k en M . Sea \bar{w} un disco en $U(k) \cap \overset{\circ}{V}$ tal que $\bar{w} \cap \partial U(k) = \partial \bar{w}$ no se contrae en $\partial U(k) \cap V$ y toca a v_j sólo en dos puntos. Es evidente que $W' = W \cup U(k)$ es un cubo con asas que tiene por género $gen(W) + 1$. Lo mismo se cumple para $V' = V - \overset{\circ}{U}(k)$, porque el arco k está en el disco v_j . Definimos $F' = V' \cap W'$ y tomamos para F' la orientación inducida en $F' \cap F$ por F . Definimos además

$$\begin{aligned} v'_i &= v_i & \text{y} & & w'_i &= w_i & \text{para} & & i < j \\ v'_{i+1} &= v_i & \text{y} & & w'_{i+1} &= w_i & \text{para} & & i > j \end{aligned}$$

Por lo anterior $V' \cap v = V' \cap v_j$ son dos discos; denotamos con v'_j al que contiene el punto de intersección con w_j y denotamos con v'_{j+1} al otro. Finalmente escribimos

$$w'_j = w_j \quad \text{y} \quad w'_{j+1} = \bar{w}.$$

v' es un buen sistema de $n + 1$ discos en V' y w' es un sistema coordinado con v' ; es claro que

$$(M, F' \setminus v') \approx (M, F \setminus v).$$

Del mismo modo que construimos a v' y w' a partir de v y w , construimos x' y y' a partir de x y y ; tomamos para la nueva componente de y' un disco igual a \bar{w} pero que sea ajeno a \bar{w} .

Después de un número finito de aplicaciones de los pasos (a) y (b), se logra que $v \cap x = \emptyset$ y que $w \cap y = \emptyset$. \square

Armados con las herramientas anteriores podemos demostrar el teorema principal de esta tesis.

Teorema 2.2.4 *Sea (M, G) una descomposición de Heegaard irreducible de la 3-esfera. Entonces G tiene género 0.*

Demostración. Sea (M, G') la descomposición de Heegaard de género 0 de la 3-esfera. Por el teorema de Reidemeister y Singer se tiene que (M, G) y (M, G') son establemente equivalentes. Por tanto del teorema anterior se sigue que existe una descomposición de Heegaard (M, F) con las siguientes propiedades:

Sean V y W las subvariedades tales que $V \cup W = M$, $V \cap W = F$; sea n el género de F . Existe un buen sistema $v = v_1 \cup \dots \cup v_n$ en V y un sistema $w = w_1 \cup \dots \cup w_n$ coordinado con v en W . Existe un buen sistema $x = x_1 \cup \dots \cup x_m$ en V y un sistema $y = y_1 \cup \dots \cup y_m$ coordinado con x en W tales que $(M, G) \approx (M, F \setminus x)$. Además se tiene, por el teorema anterior que $v \cap x = \emptyset$ y que $w \cap y = \emptyset$.

Suponemos que de entre todas las descomposiciones de Heegaard con estas propiedades, (M, F) se escogió de tal manera que n es mínimo. Suponemos además que $n > 0$. Mostraremos que una de estas suposiciones es falsa.

Mediante una deformación pequeña en F , en x y en y se cumple adicionalmente que $\partial v \cap \partial y$ y $\partial x \cap \partial w$ son transversales y consisten sólo de puntos aislados.

Afirmación: Mediante una modificación sólo de y obtenemos que $y \cap v_n$ consta a lo más de un punto; además $y \cap w = \emptyset$.

Esto lo demostraremos por inducción sobre el número de puntos en $y \cap v_n$.

1er. caso: La componente y_j de y interseca a v_n en al menos dos puntos. Como $v_n \cap w$ es un único punto, existe un arco en k en ∂v_n ajeno a w tal que $k \cap y_j = \partial k$. Sea $U(w)$ una vecindad regular de w en M ; se tiene que $y_j \cup k$ está contenido en $W - U(w)$. $W - \overset{\circ}{U}(w)$ es una 3-bola y y_j la descompone en dos 3-bolas. Como M es

S^3 existe un disco D en $W - U(w)$ tal que $D \cap \partial W = k$ y $D \cap y_j = \partial D \cap y_j = \overline{(\partial D - k)}$ (Ver Fig. 2.10).

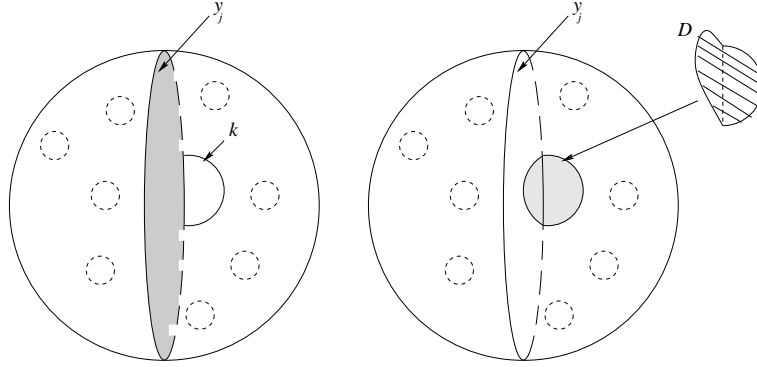


Figura 2.10. Disco D .

Mediante una deformación de D , constante en ∂D , después de haber eliminado de la manera usual las eventuales curvas cerradas de intersección que aparecieran, se tiene también que $D \cap y$ es un sistema de arcos simples ajenos, ninguno de los cuales termina en $D \cap y_j$; si esto no sucede podemos elegir otro disco y_j que sí cumpla con esto y, en consecuencia, podemos suponer que $D \cap y_j = D \cap y$.

Sean $U(D \cup y_j)$ una vecindad regular de $D \cup y_j$ en M . $W \cap \partial U(D \cup y_j)$ consta de tres 2-discos. Uno de éstos corta a v_n en tantos puntos como y_j y es isotópico a y_j en W . Sean y_j^1 y y_j^0 los otros dos. $y_j^1 \cup y_j^0$ y v_n se cortan en dos puntos menos que y_j y v_n . Para cada i , $(y_j^1 \cup y_j^0) \cap x_i$ consiste de tantos puntos como $y_j \cap x_i$. En particular $(y_j^1 \cup y_j^0) \cap x_i$ es exactamente un punto; este punto está, digamos, en y_j^1 . Reemplazamos a y_j con y_j^1 , que también es un meridiano ya que corta a x_i únicamente en un punto; por el Teorema de la Curva de Jordan, esto implica que y_j^1 es esencial sobre ∂V y sobre ∂W .

2do. caso: Cada componente de y corta a v_n en cuando mucho un punto; pero $y \cap v_n$ consiste de al menos dos puntos. Entonces existe un arco k en ∂v_n ajeno de w tal que

$$\partial k = k \cap y = (k \cap y_i) \cup (k \cap y_j);$$

sea, digamos, $i < j$. Tomamos una vecindad regular $U(y_i \cup k \cup y_j)$ de $y_i \cup k \cup y_j$ en M . $W \cap \partial U(y_i \cup k \cup y_j)$ consiste de tres discos. Dos de éstos son isotópicos a y_i y a y_j en W . Sea y'_j el tercero. Se tiene que $y'_j \cap v_n = \emptyset$. El punto de intersección de y'_j con algún x_h corresponde al de $y_i \cup y_j$ con x_h . También y continúa siendo un sistema

coordinado con x cuando reemplazamos y_j con y'_j .

Ahora, para continuar con la demostración del teorema, consideramos los siguientes casos:

- (a) $y \cap v_n \neq \emptyset$.
- (b) $y \cap v_n = \emptyset$

(a) Por lo anterior se va a tener que $y \cap v_n$ es exactamente un punto; consideremos que dicho punto está en y_j .

(I) Reemplazamos a x y y con x' y y' , respectivamente, como sigue:

$$\begin{aligned} x'_m &= v_n \quad y \quad y'_m = y_j, \\ x'_i &= x_i \quad y \quad y'_i = y_i, \quad \text{si } i < j \\ x'_{i-1} &= x_i \quad y \quad y'_{i-1} = y_i \quad \text{si } j < 1 \leq m. \end{aligned}$$

x' es un buen sistema de discos meridianos y y' es un sistema coordinado con x' ; del Teorema 2.2.2 se sigue que

$$(M, F \setminus x') \approx (M, F \setminus x) \approx (M, G).$$

(II) Conservamos a x' y desechamos a y' por y'' , donde y'' se construye de la siguiente manera: $y''_m = w_m$ y $y''_i = y'_i$ si $i < m$; y'' es asimismo un sistema coordinado con x' .

(III) Sea $U(v_n \cup w_n)$ una vecindad regular de $v_n \cup w_n = x'_m \cup y''_m$ en M . Sea $\tilde{V} = V - U^\circ(v_n \cup w_n)$ y $\tilde{W} = W \cup U(v_n \cup w_n)$; sea $\tilde{F} = \tilde{V} \cap \tilde{W}$ con la orientación inducida en $\tilde{F} \cap F$ por F .

Como $v_n \cap w = v_n \cap w_n$ y $v_n \cap y'' = v_n \cap y''_m$ se tiene que

$$w_i \cap \partial \tilde{W} = \partial w_i \quad \text{para } i < n \quad \text{y}$$

$$y''_i \cap \partial \tilde{W} = \partial y''_i \quad \text{para } i < m.$$

Así $\tilde{v} = \tilde{v}_1 \cup \cdots \cup \tilde{v}_{n-1} = (v_1 \cap \tilde{V}) \cup \cdots \cup (v_{n-1} \cap \tilde{V})$ es un buen sistema de $n - 1$ discos meridianos en \tilde{V} y $\tilde{w} = w_1 \cup \cdots \cup w_{n-1}$ es un sistema coordinado con \tilde{v} . Lo correspondiente se cumple para $\tilde{x} = \tilde{x}_1 \cup \cdots \cup \tilde{x}_{m-1} = (x'_1 \cap \tilde{V}) \cup \cdots \cup (x'_{m-1} \cap \tilde{V})$ y $\tilde{y} = y''_1 \cup \cdots \cup y''_{m-1}$

Se tiene que $(M, \tilde{F} \setminus \tilde{x}) \approx (M, F \setminus x)$, además $\tilde{v} \cap \tilde{x} = \emptyset$ y $\tilde{w} \cap \tilde{y} = \emptyset$. Como \tilde{F} tiene género menor que F , tenemos una contradicción a nuestra elección de (M, F) .

(b) Definimos

$$\begin{aligned} x_{m+1}^* &= v_n \quad \text{y} \quad y_{m+1}^* = w_n \\ x_i^* &= x_i \quad \text{y} \quad y_i^* = y_i \quad \text{para} \quad i \leq m \end{aligned}$$

x^* es un buen sistema de $m+1$ discos meridianos en V y y^* es un sistema coordinado con x^* . De aquí que $(M, G) \approx (M, F \setminus x) \approx (M, F \setminus x^*) \# (S^3, T)$, en contradicción a nuestra suposición de que (M, G) es irreducible. \square

2.3 Ejemplos

A continuación damos algunas descomposiciones de Heegaard generadas usando cubiertas ramificadas de una espina especial, que nos proporcionó el matemático ruso S. Matveev, del complemento del nudo ocho y que puede ser apreciada en la *Figura 2.11*.

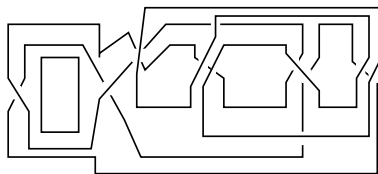


Figura 2.11. Espina de Matveev.

Nuestro propósito es ver que estas descomposiciones de Heegaard son de S^3 poniendo en práctica algunas de las técnicas aprendidas en la sección anterior, específicamente la que usamos para demostrar la parte (1) del Teorema 2.2.1. Con dicha técnica, lo que haremos es construir un buen sistema de discos meridianos con su correspondiente sistema coordinado; ya con esto podemos aplicar la parte (1) del Teorema 2.2.1 para encontrar un sistema coordinado \tilde{w} tal que $\partial v_i \cap \partial w_i$ es exactamente un punto y $\partial v_i \cap \partial w_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y de esta manera concluir que la descomposición de Heegaard es de S^3 .

Para realizar lo anterior vamos a trabajar con el diagrama de Heegaard de la descomposición de Heegaard, es decir, con la superficie inducida por la descomposición de Heegaard y la frontera de los sistemas de discos meridianos de los cubos con asas dados por la descomposición de Heegaard.

Ejemplo 1. Esta descomposición de Heegaard es de género 3 y su diagrama de Heegaard es mostrado en la *Figura 2.12*.

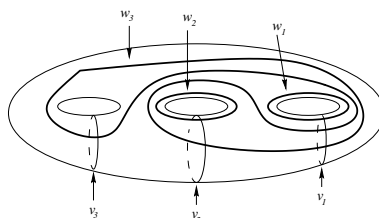


Figura 2.12. Ejemplo 1 (Diagrama de Heegaard).

Notemos que en esta descomposición de Heegaard ya tenemos un buen sistema de meridianos con su correspondiente sistema coordinado. Así que ahora vamos a construir el sistema coordinado \tilde{w} ; notemos que w_3 interseca dos veces a v_1 y una vez a v_2 , por lo cual, vamos a empezar reduciendo el número de intersecciones con v_1 ; tomamos un arco k y una vecindad regular de $w_3 \cup w_1 \cup k$ y de su frontera tomamos el disco no isotópico a w_3 , el cual va a ser el nuevo w_3 (Ver *Fig. 2.13*).

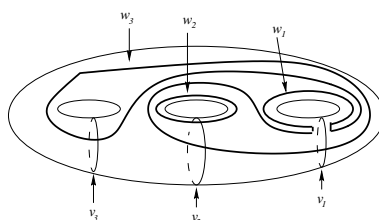


Figura 2.13. Ejemplo 1 (Primera reducción en v_1).

De una manera análoga a la anterior volvemos a reducir la intersección del nuevo w_3 con v_1 y posteriormente con v_2 . Lo que finalmente obtenemos puede ser apreciado en la *Figura 2.14*.

Ejemplo 2. Esta es una descomposición de Heegaard de género 13; A partir de la *Figura 2.15* hasta la *Figura 2.27* son mostrados los meridianos de los cubos con asas de esta descomposición de Heegaard; cada meridiano de v con su correspondiente meridiano en w tendrá su propio dibujo para tener una mejor visualización.

Aquí todavía no tenemos un buen sistema de discos meridianos así que debemos construirlo; para esto hay que notar que los únicos meridianos que debemos modificar

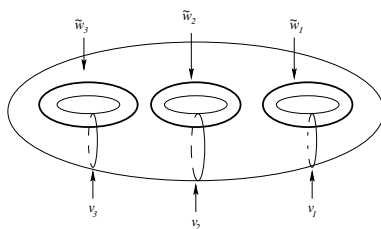


Figura 2.14. Ejemplo 1 (\tilde{w}).

son w_1 , w_3 , w_5 , w_6 y w_{10} , puesto que son los que nos están evitando tener un buen sistema de discos meridianos; a los otros los dejamos como están sin realizarles ningún cambio. Los cambios efectuados en los meridianos señalados pueden ser vistos a partir de la *Figura 2.28*. Tal como se dijo anteriormente, por el Teorema 2.2.1 existe un sistema \tilde{w} con las propiedades ya mencionadas.

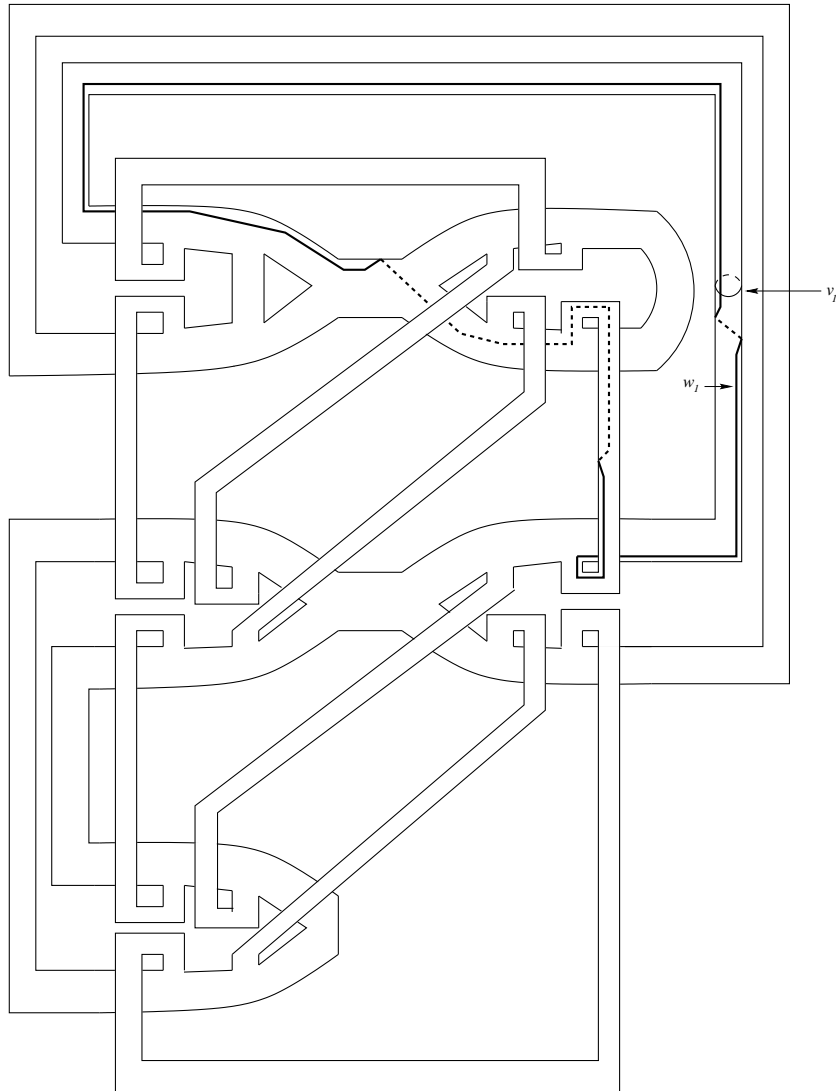


Figura 2.15. Ejemplo 2 (v_1 y w_1).

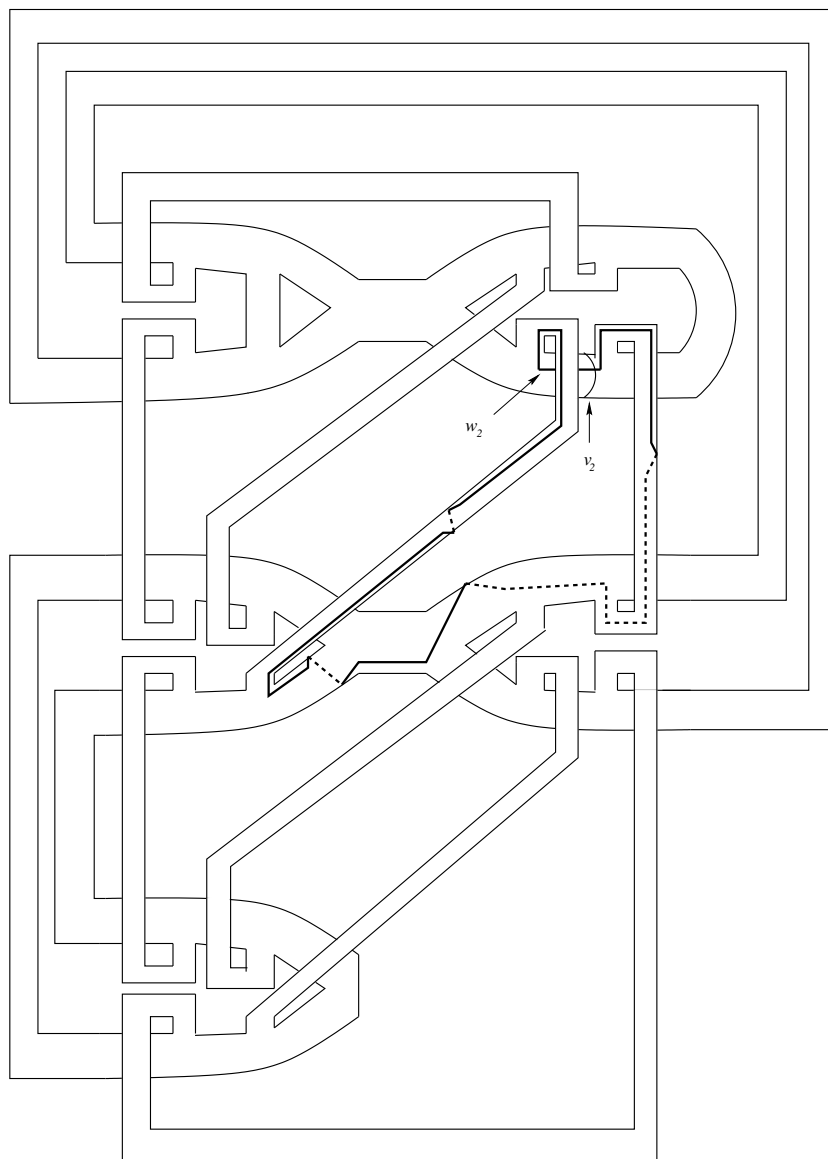


Figura 2.16. Ejemplo 2 (v_2 y w_2).

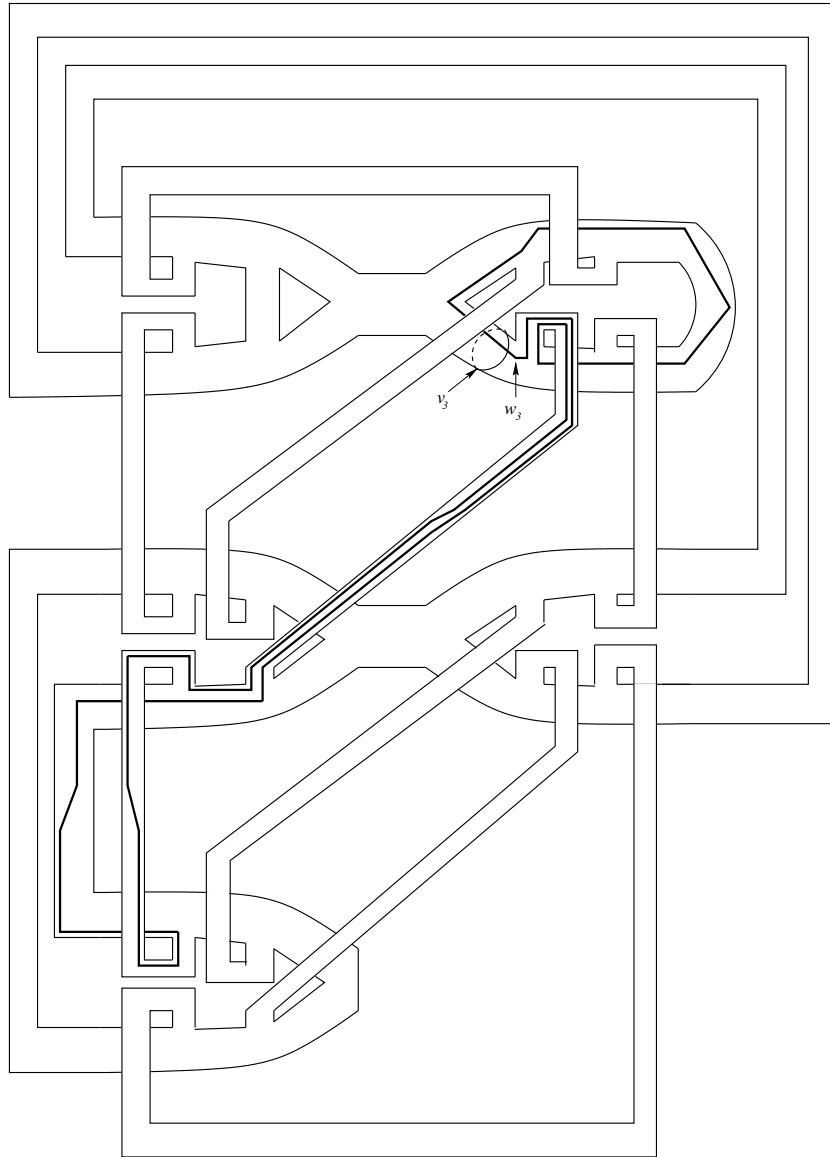


Figura 2.17. Ejemplo 2 (v_3 y w_3).

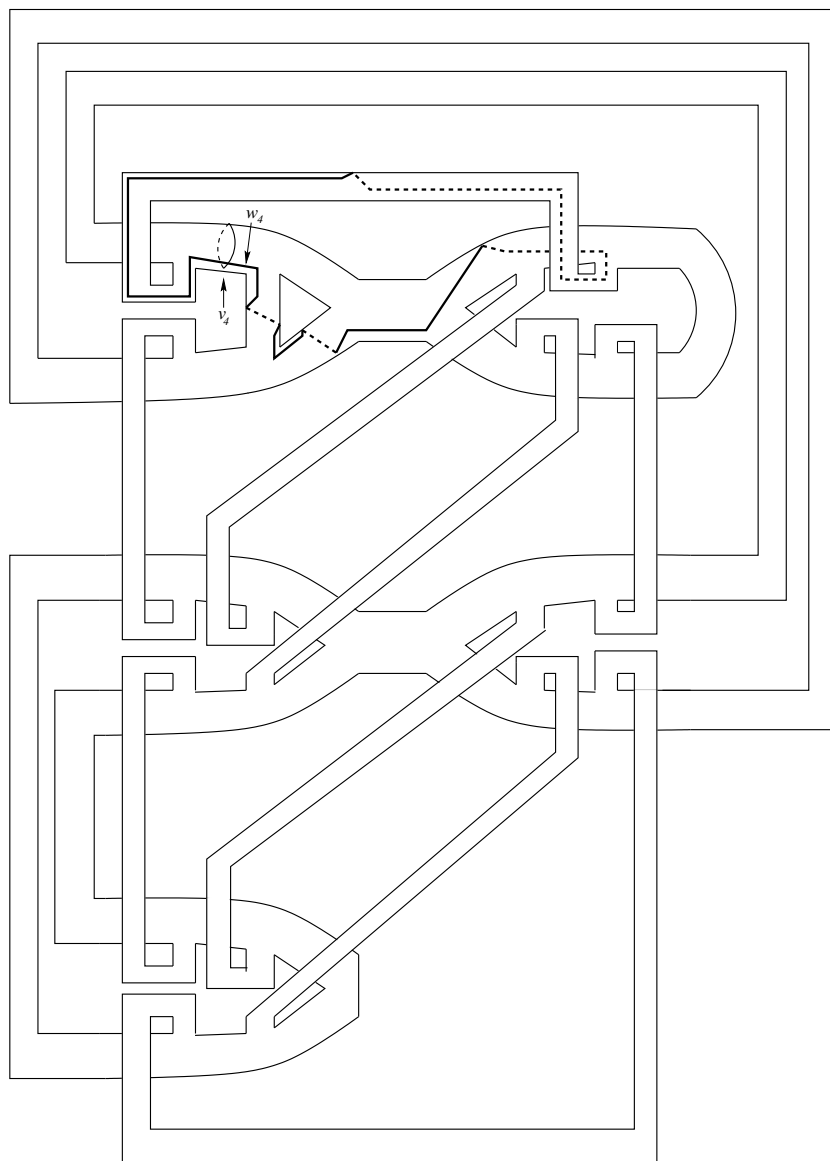


Figura 2.18. Ejemplo 2 (v_4 y w_4).

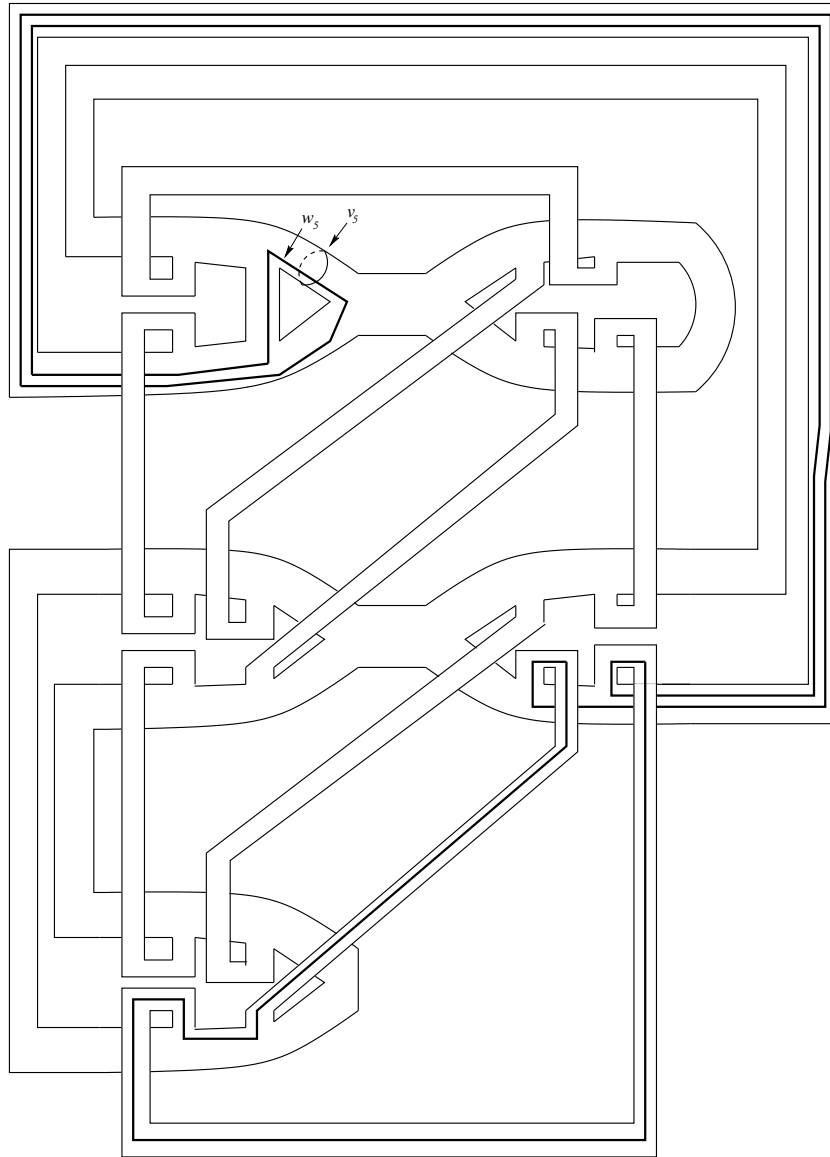


Figura 2.19. Ejemplo 2 (v_5 y w_5).

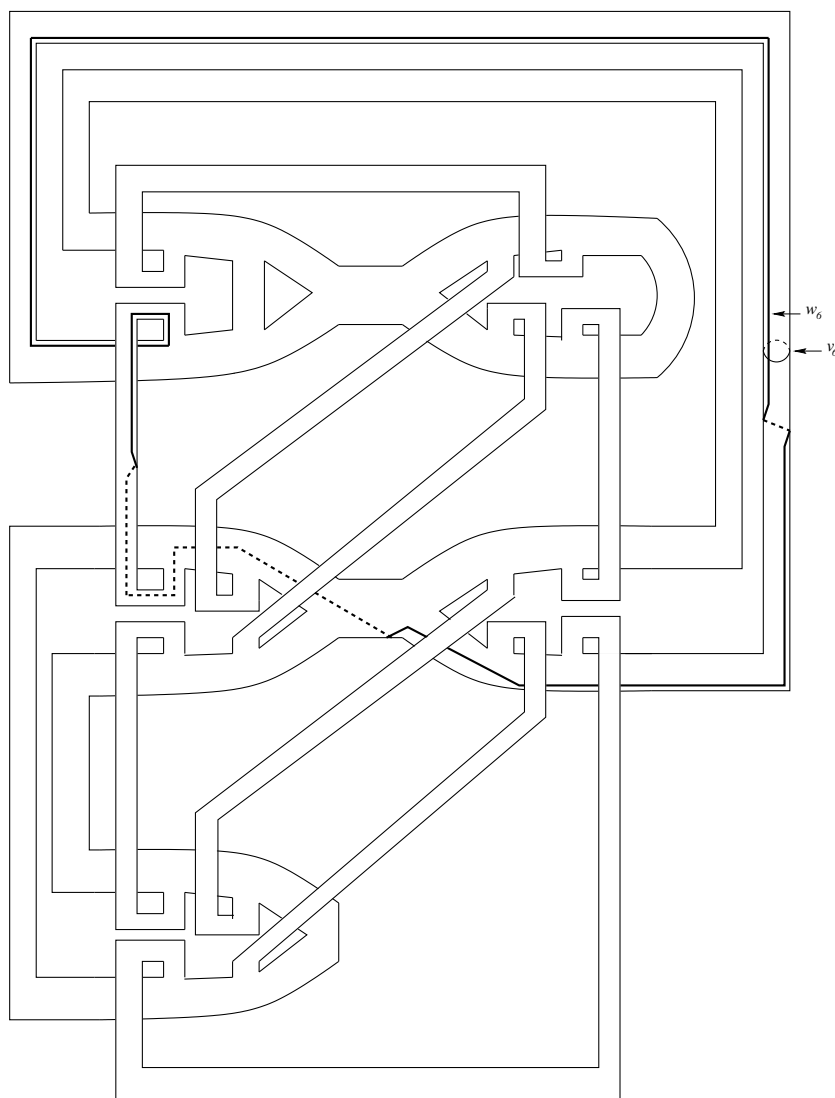


Figura 2.20. Ejemplo 2 (v_6 y w_6).

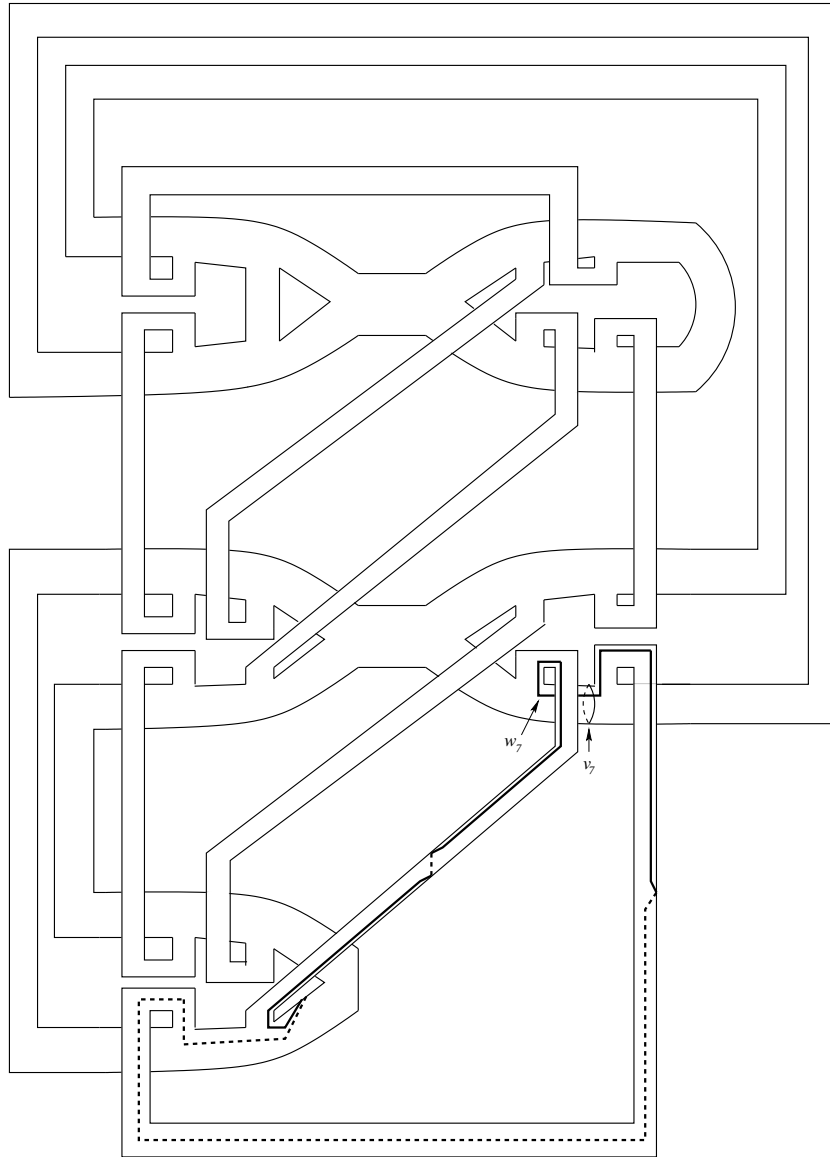


Figura 2.21. Ejemplo 2 (v_7 y w_7).

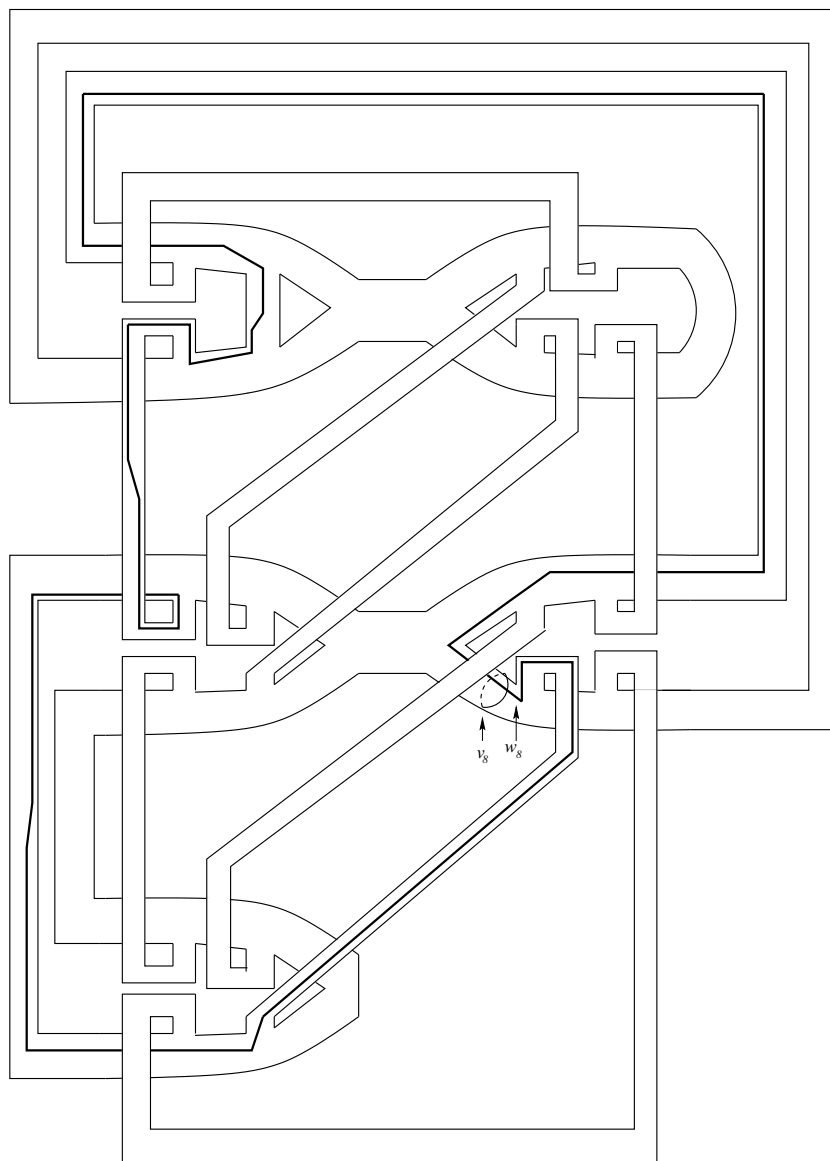


Figura 2.22. Ejemplo 2 (v_8 y w_8).

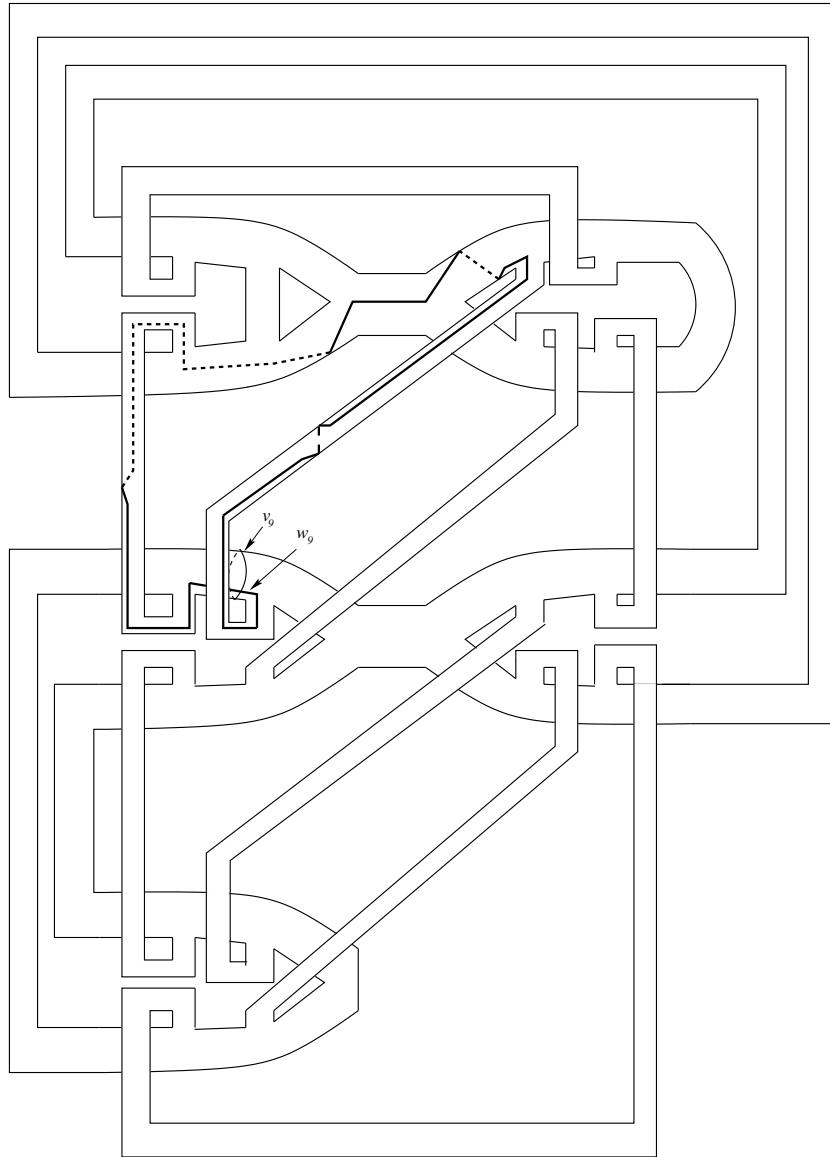


Figura 2.23. Ejemplo 2 (v_θ y w_θ).

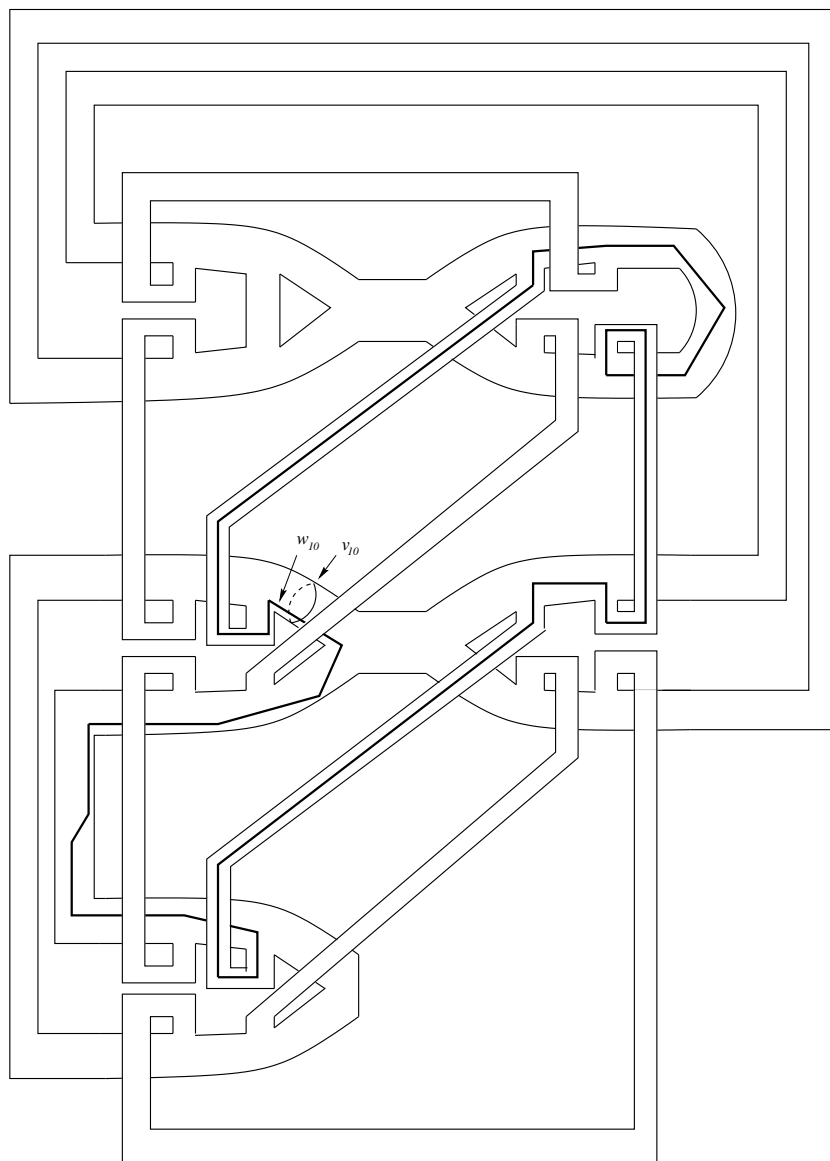


Figura 2.24. Ejemplo 2 (v_{10} y w_{10}).

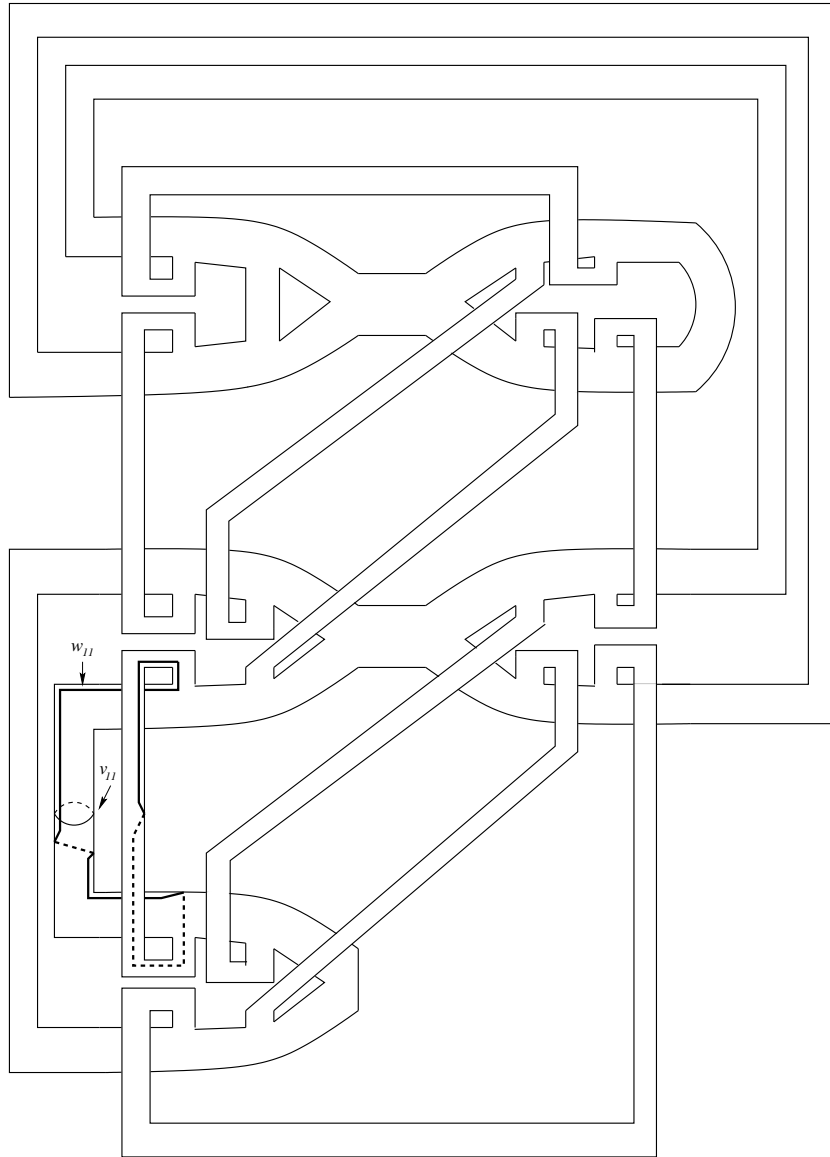


Figura 2.25. Ejemplo 2 (v_{11} y w_{11}).

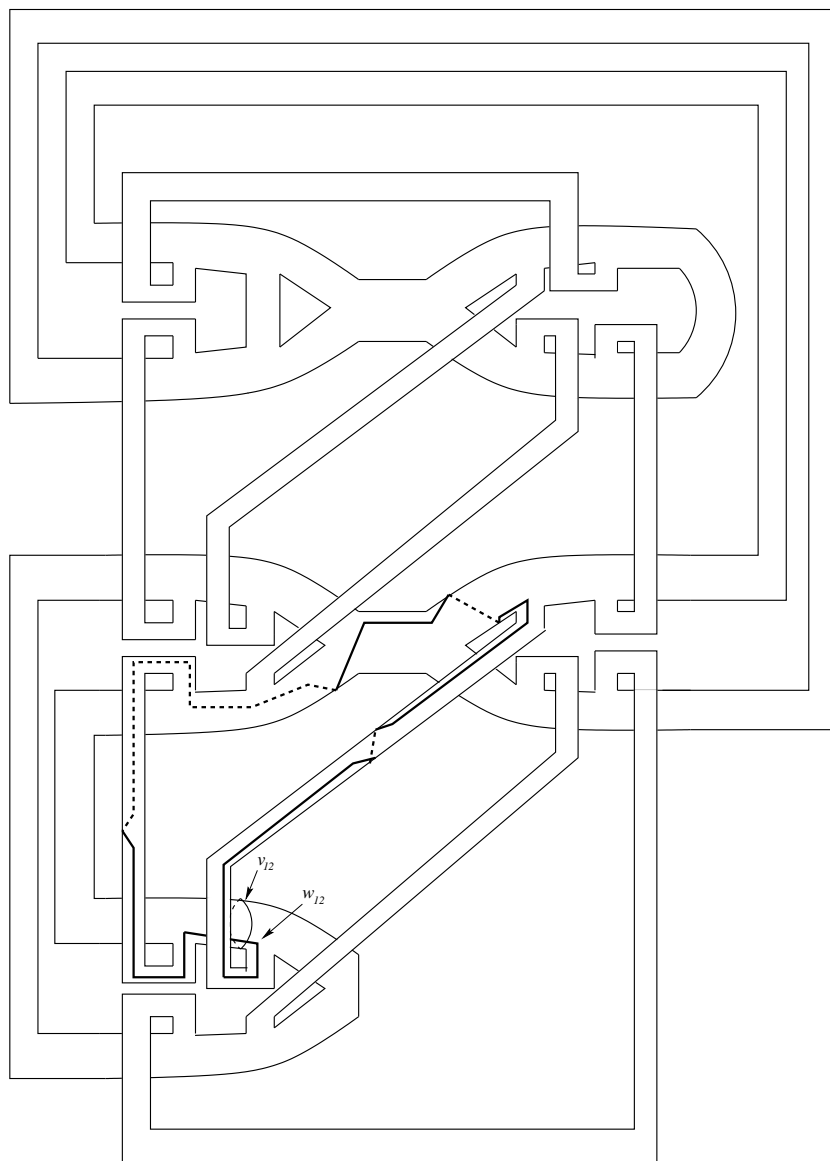


Figura 2.26. Ejemplo 2 (v_{12} y w_{12}).

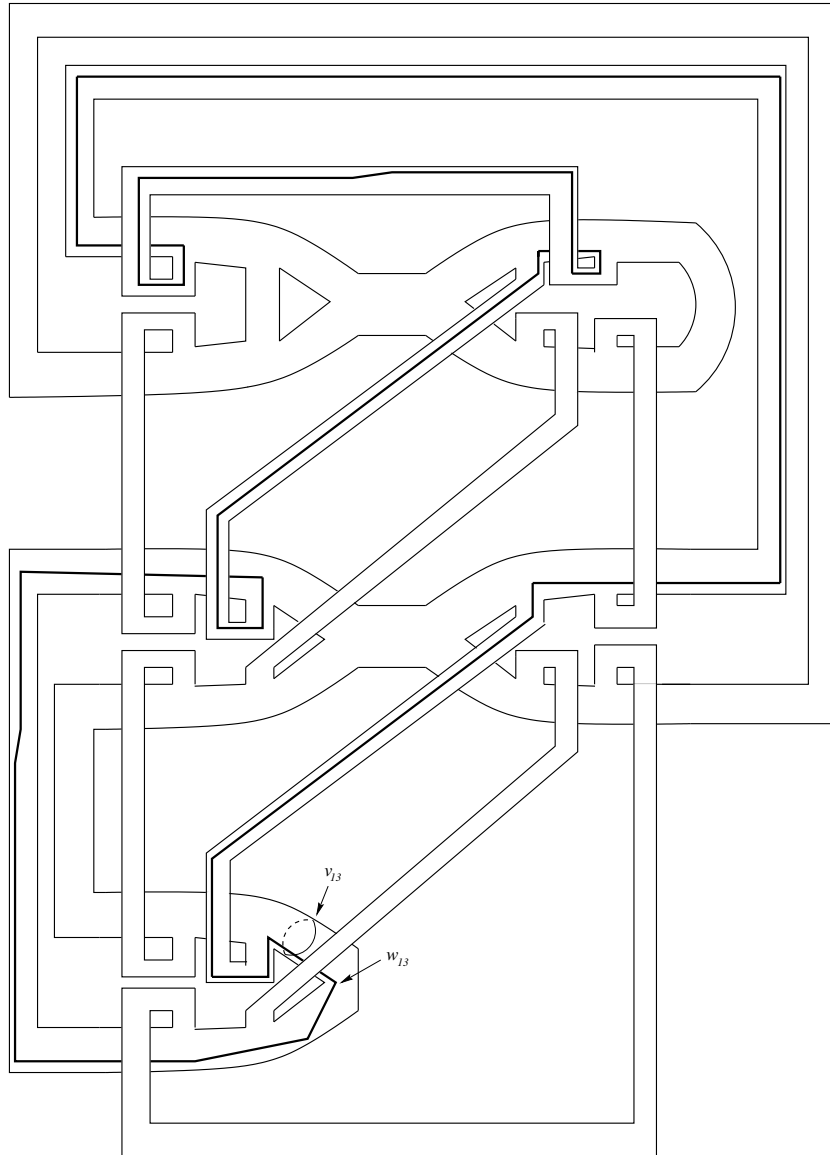


Figura 2.27. Ejemplo 2 (v_{13} y w_{13}).

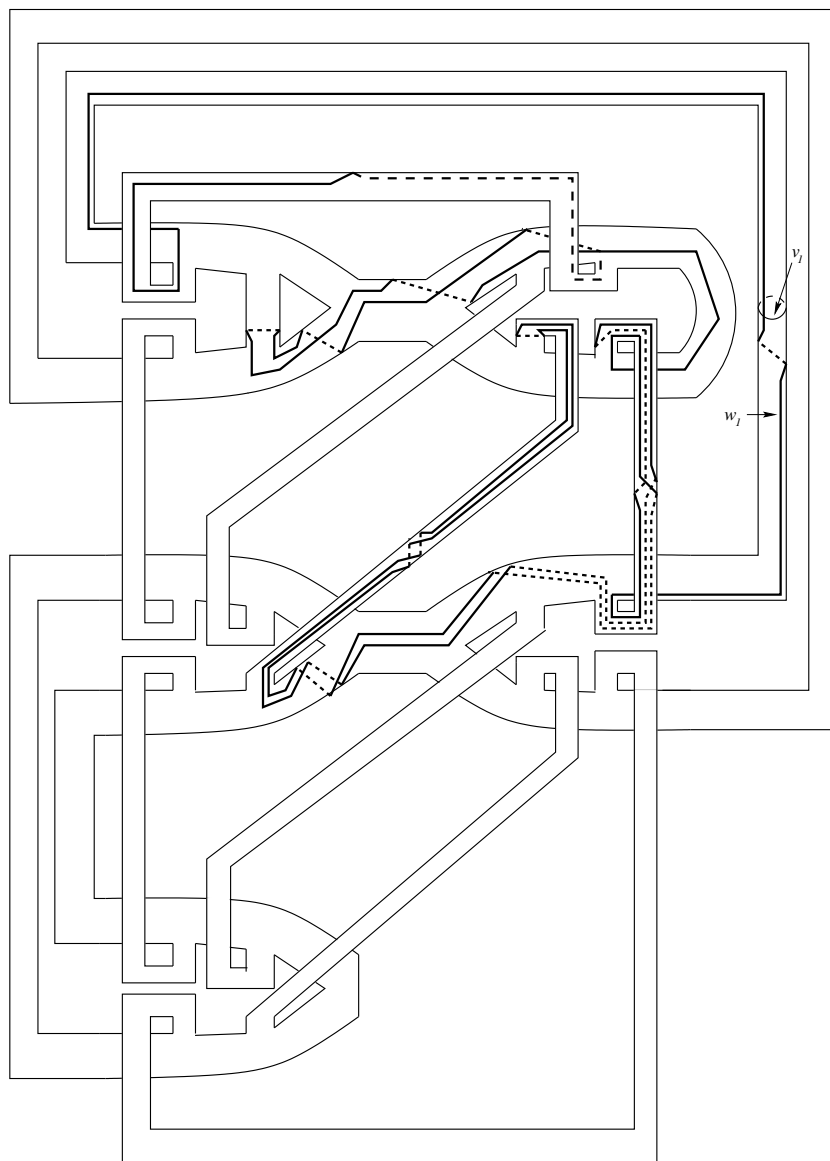


Figura 2.28. Ejemplo 2 (w_1 modificado).

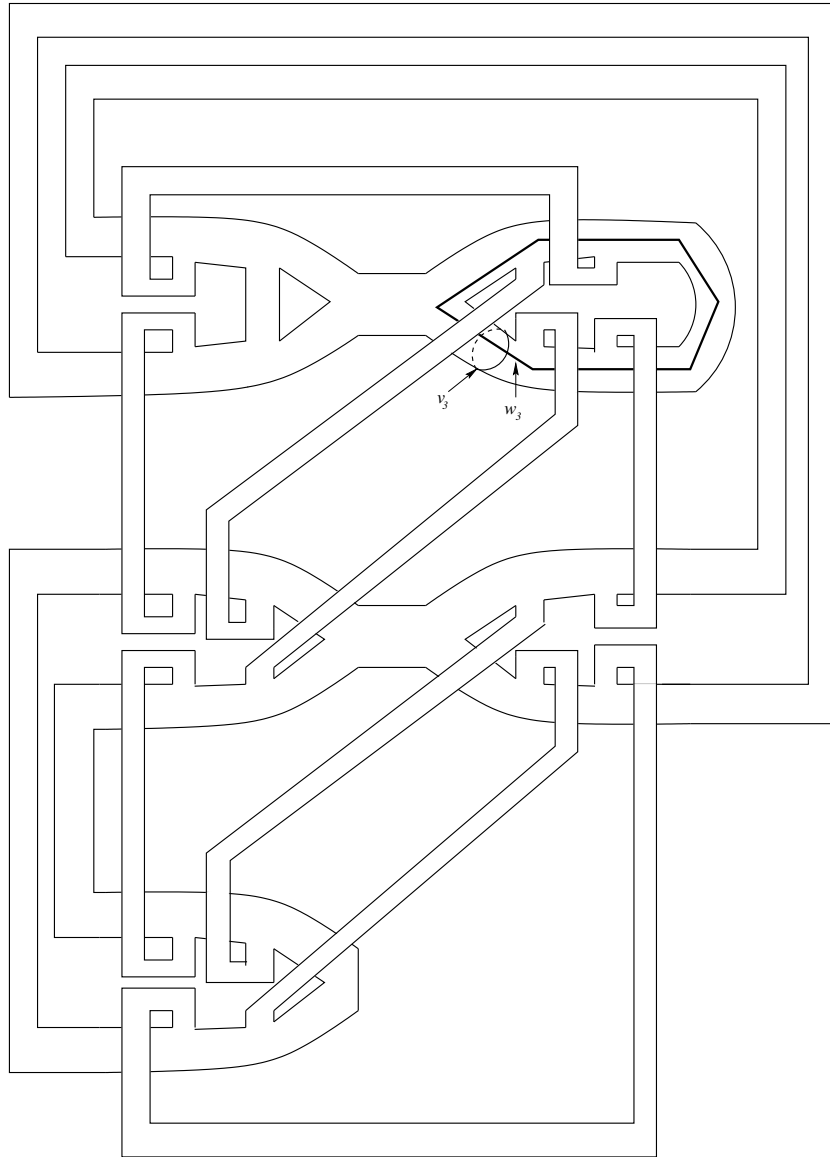


Figura 2.29. Ejemplo 2 (w_3 modificado).

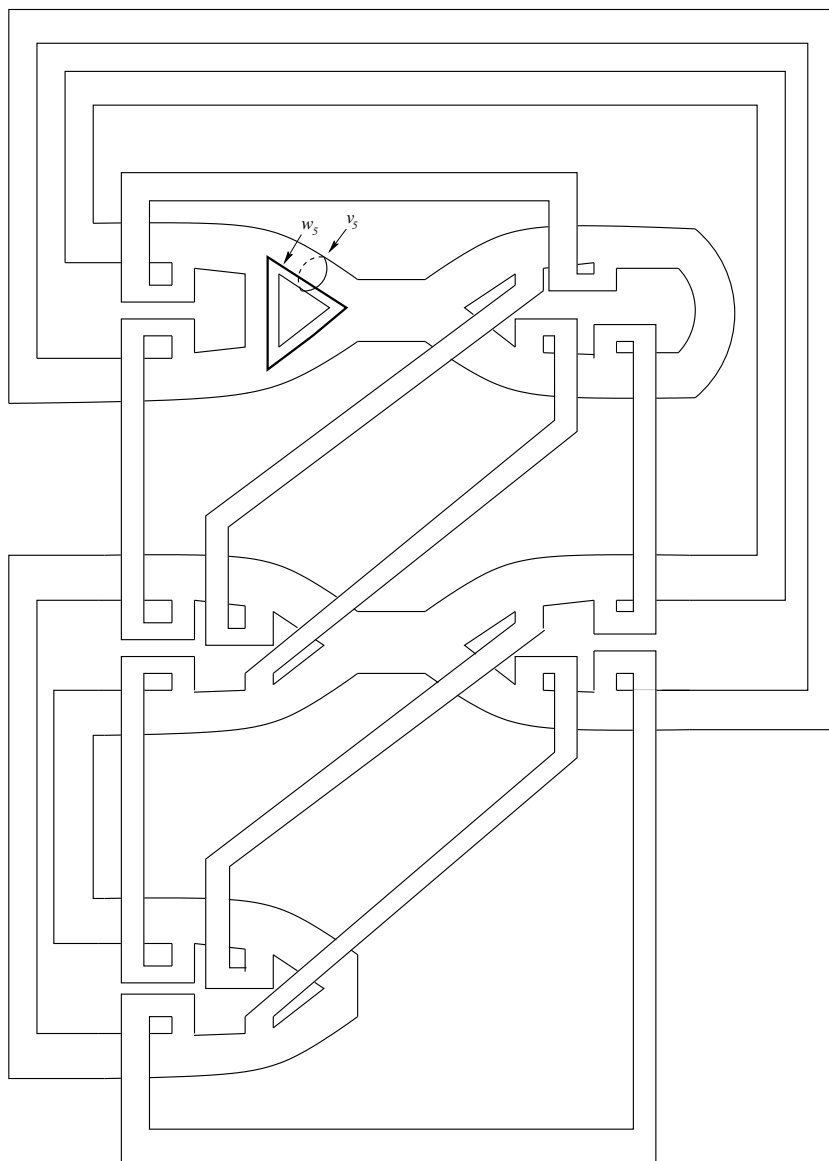


Figura 2.30. Ejemplo 2 (w_5 modificado).

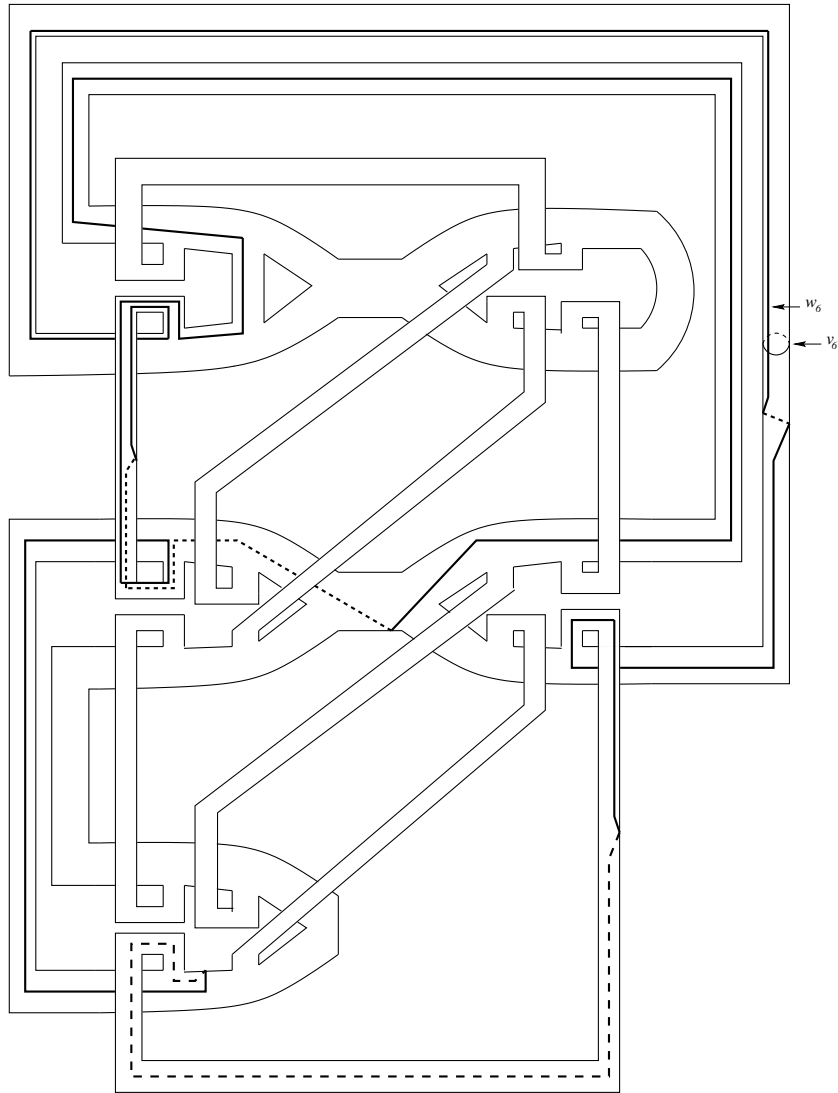


Figura 2.31. Ejemplo 2 (w_6 modificado).

Capítulo 3

Reducción de gráficas en S^3

En este capítulo presentamos un enfoque diferente de las descomposiciones de Heegaard considerando 3-variedades llamadas cubos con compresiones, en lugar de nuestros ya conocidos cubos con asas. La intención es presentar una demostración alternativa para el último teorema del capítulo anterior; desarrollamos técnicas modernas que se basan en el estudio de gráficas en S^3 que cumplen ciertas propiedades.

3.1 Cubos con compresiones y sus espinas

La construcción de un **cubo con compresiones** es como sigue: para empezar tomamos la vecindad regular en \mathbb{R}^3 de una superficie compacta y orientable S ; consideremos ahora un sistema de curvas simples cerradas sobre $S \times \{0\}$ y agregamos a $S \times \{1\}$ 2-asas a lo largo de dichas curvas (nótese que las 2-asas que agregamos a $S \times \{1\}$, son 1-asas para $S \times \{0\}$); si aparecieran esferas en dicho proceso las tapamos con 3-asas y a lo que obtenemos le llamamos “el cubo con compresiones H ” (Ver Fig. 3.1).

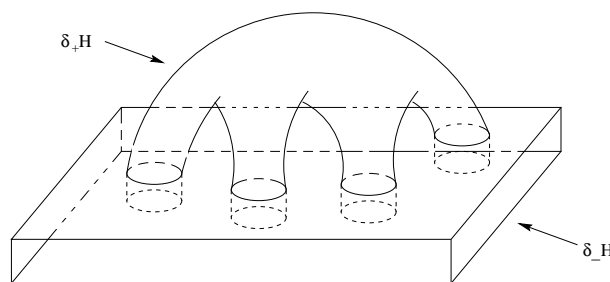


Figura 3.1. Cubo con compresiones.

A la componente $S \times \{1\}$ de ∂H después del procedimiento anterior la denotaremos con $\partial_+ H$ y al resto, $\partial H - \partial_+ H$, lo denotamos con $\partial_- H$; nótese que esta última 2-variedad puede ser conexa o no. Si $\partial_- H = \emptyset$, H es cubo con asas usual y sus meridianos están justamente en las 2-asas que agregamos. Si $H = \partial_+ H \times I$, decimos que H es un cubo con compresiones trivial.

Un cubo con compresiones es un concepto más general que un cubo con asas y de ahora en adelante, las descomposiciones de Heegaard que consideraremos serán en cubos con compresiones y no necesariamente en cubos con asas como lo veníamos haciendo. Esta consideración nos será muy útil a lo largo de este capítulo.

Definición 3.1.1 *Sea F una superficie cerrada y conexa encajada en una 3-variedad M . F es una **superficie de descomposición** si F divide a M en dos cubos con compresiones H_1 y H_2 de tal manera que $\partial_+ H_1 = F = \partial_+ H_2$.*

Para este tipo de descomposiciones de Heegaard se tienen también los conceptos de estabilización, equivalencia estable, etc. Los cuales se definen de manera análoga para este caso. Sin embargo, añadiremos una definición más para descomposiciones de Heegaard ayudados del siguiente concepto.

Definición 3.1.2 *Un **disco de reducción en la frontera**, al cual llamaremos disco de ∂ -reducción, es un disco propiamente encajado en la 3-variedad M cuya frontera es esencial en ∂M .*

Definición 3.1.3 *Una descomposición de Heegaard de M es **∂ -reducible**, si existe un disco de ∂ -reducción para M que interseca a F sólo en una circunferencia.*

Las 3-variedades que tienen discos de ∂ -reducción se llaman **∂ -reducible**.

Las descomposiciones de Heegaard reducibles y ∂ -reducibles tienen una propiedad bonita. Supongamos que S es una esfera que interseca a F en una curva c esencial en F . Quitamos una vecindad $S \times I$ de S en N y tapamos las esferas $S \times \partial I$ con 3-bolas; lo que creamos es una nueva 3-variedad M' que puede ser conexa o no. Simultáneamente comprimimos a F a lo largo del disco en H_1 (o H_2) del cual c es frontera y la nueva F también es una superficie de descomposición para M' . Esto es algo similar al proceso de desestabilización que ya conocíamos para cubos con asas. Lo mismo se puede hacer si N se ∂ -reduce a lo largo de un disco que es de ∂ -reducción para la descomposición de Heegaard.

Más adelante hablaremos acerca de gráficas, por lo cual, es conveniente dar en estos momentos su definición.

Definición 3.1.4 Una gráfica es un conjunto de puntos llamados **los vértices** de la gráfica e intervalos que se llaman **las aristas** de la gráfica cuyos extremos están en los vértices; es decir, es un 1-complejo.

Como una gráfica es un 1-complejo las definiciones de “frontera de la gráfica” y “gráfica propiamente encajada en una 3-variedad” son las mismas que para 1-complejos.

Definición 3.1.5 Una espina para un cubo con compresiones H es un 1-complejo Q propiamente encajado en H , tal que H se colapsa a $Q \cup \partial_- H$ (Ver Fig. 3.2a).

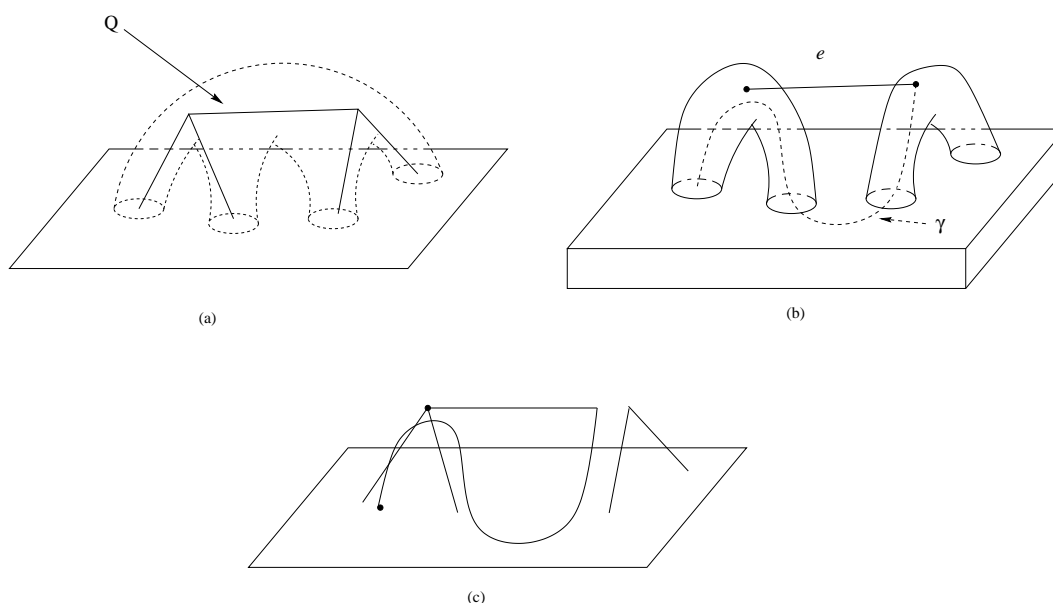


Figura 3.2. Espina y deslizamiento de una arista.

Una espina Q para un cubo con compresiones H no es única, por supuesto, ya que ésta puede ser alterada mediante una operación que vamos a llamar **deslizamiento de una arista**. Dicha operación es como sigue: Escogemos una arista e en Q y llamamos \overline{Q} a la gráfica $Q - e$. Sea \overline{H} una vecindad regular de $\partial_- H \cup \overline{Q}$ tal que H es la unión de \overline{H} y una 1-asa h pegada a $\partial_+ \overline{H}$. El ánima de h es la arista e , con sus extremos en \overline{H} borrados, de tal forma que $\partial e \subset \partial_+ \overline{H}$. Supongamos que γ es una trayectoria en $\partial_+ \overline{H}$ que inicia en un extremo de e ; entonces este extremo de e puede ser movido con una isotopía a lo largo de γ después de que h es pegada (Ver Fig. 3.2b). El efecto sobre Q es reemplazar a e con la unión de e y una copia de γ (Ver Fig. 3.2c).

Esta no es la única forma de hacer un deslizamiento de una arista; existe otra forma evidentemente más general a la que llamaremos **rompimiento y deslizamiento de una arista**, la cual se realiza de la siguiente manera: Tomamos un punto x en el interior de e ; dicho punto divide a e en dos segmentos que llamaremos e' y e'' . Supongamos que γ es una trayectoria en $\partial_+ \overline{H}$ que inicia en un meridiano de e en x y nunca interseca un meridiano de e' . Entonces introducimos un nuevo vértice en x y a e' le hacemos un deslizamiento de arista usando a γ como anteriormente (Ver Fig. 3.3). Después de haber mencionado la forma en que realizamos esta operación, el nombre parece muy natural.

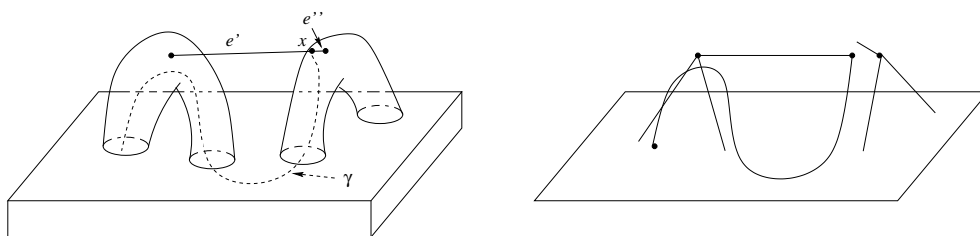


Figura 3.3. Rompimiento y deslizamiento de una arista.

Subrayamos que el resultado de aplicar a Q alguna de las operaciones anteriores es de nuevo una espina para H .

Supongamos que tenemos una familia de discos Δ propiamente encajados en una 3-variedad M y D es un disco en M cuyo interior es disjunto de Δ y su frontera está completamente sobre Δ ; o bien ∂D es la unión de dos arcos, uno sobre Δ y el otro sobre ∂M . Entonces la frontera de una vecindad regular de $\Delta \cup D$ está formada de dos conjuntos, uno que es isotópico a Δ y el otro que es un nuevo conjunto de discos propiamente encajados, Δ' (junto con una 2-esfera, si $\partial D \subset \Delta$) (Ver Fig. 3.4). Decimos que Δ' se obtiene de Δ a través de un **intercambio de discos en \mathbf{D}** . Si $\partial D \subset \Delta$, entonces Δ' tiene el mismo número de discos; en caso contrario tiene uno más.

Una propiedad de la familia Δ que se conserva bajo intercambios de discos se dice que es **una propiedad que se conserva bajo intercambios de discos**.

3.2 Gráficas formadas por espinas y superficies

En esta sección trabajaremos con gráficas que construiremos poniendo en posición general a la espina de un cubo con compresiones y ciertas superficies; también explotaremos varios de los conceptos definidos en la sección anterior.

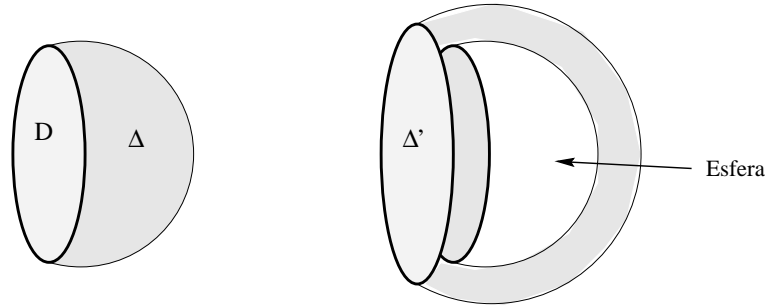


Figura 3.4. Intercambio de discos.

Definición 3.2.1 Sea M una 3-variedad, H un cubo con compresiones en M ; diremos que H está **propriadamente encajado** en M si $\partial M \cap H = \partial_- H$.

Supongamos que M es una 3-variedad compacta y orientable; sea H un cubo con compresiones propriadamente encajado en M con espina Q . Sea $(T, \partial T) \subset (N, \partial N - \partial_- H)$ una superficie propriadamente encajada en N y $(\Delta, \partial \Delta)$ una familia de discos propriadamente encajados en $M = N - H$. Extendemos a Δ con la retracción $H \rightarrow \partial_- H \cup Q$, de tal manera que Δ se vuelve una colección de discos en N cuyo interior es disjunto de Q y cuya frontera (singular) está en $\partial_- H \cup Q$. Ponemos a T en posición general con respecto a Q y Δ . Entonces $Q \cap T$ es un conjunto finito de puntos y $(\Delta \cap T) - Q$ es el interior de una 1-variedad cuya frontera está en $Q \cap T$. Si ignoramos las componentes cerradas de $\Delta \cap T$, podemos ver el resultado como una gráfica Λ en T con vértices en $Q \cap T$ y aristas las arco-componentes de $\Delta \cap T$ (Ver Fig. 3.5).

Definición 3.2.2 Una arista en Λ es **simple** si sus extremos están sobre diferentes vértices; de otra manera es un **lazo basado en el vértice común** a ambos de sus extremos (Ver Fig. 3.5).

Definición 3.2.3 Un lazo es **inesencial** si hay un disco del cual es frontera en T que es disjunto de Q ; de otra manera es llamado **esencial**.

Definición 3.2.4 Un vértice en Λ está **aislado** si no es extremo de aristas y no es base de lazos (Ver Fig. 3.5).

Definición 3.2.5 Una arista α de Λ con un extremo en un vértice w se llama una **arista en w** .

Una arista α en w divide al disco $D \in \Delta$ en el que está en dos discos. Supongamos que uno de ellos, E , no contiene aristas de Λ en w . Entonces decimos que α es **outermost para w** y E es su correspondiente **disco outermost**. Nótese que E puede contener algunas componentes de intersección con T , pero ninguna será arista en w .

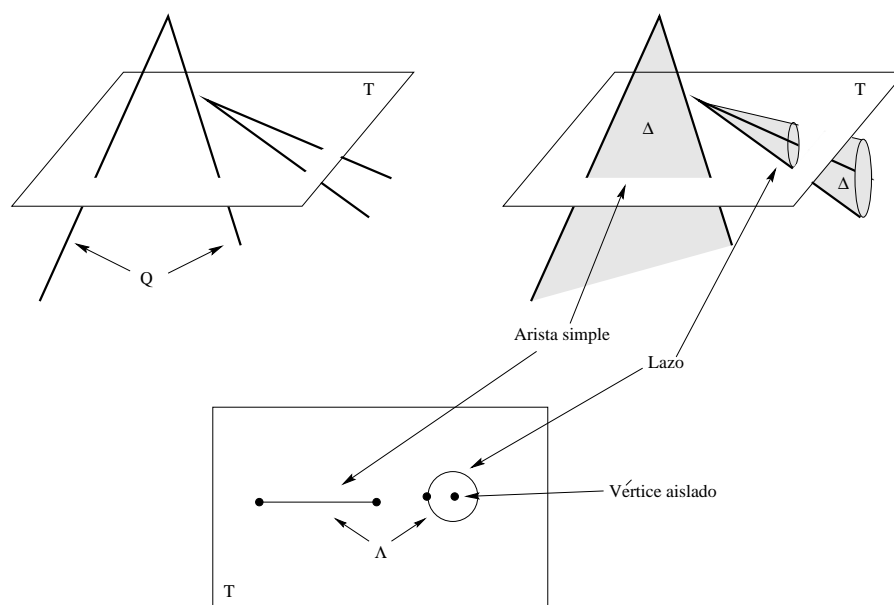


Figura 3.5. Gráfica en T , tipos de aristas y vértices.

Teorema 3.2.1 Sean M una 3-variedad, H un cubo con compresiones propiamente encajado en M , Q una espina de H y Δ una familia de discos propiamente encajados en M con una propiedad que se conserva bajo intercambios de discos; dicha familia se escoge de tal manera que la pareja $(|Q \cap T|, |\Delta \cap T|)$ es mínima entre todas las elecciones posibles. Entonces cada uno de los vértices de Λ en T está aislado o es base de un lazo esencial en T .

Demostración. Supongamos que existe un vértice w que no está aislado ni es base de un lazo esencial; entonces w es extremo de alguna arista simple de Λ o es base de un lazo inesencial. Esto último no ocurre, porque si ésto pasara, tomamos un lazo inesencial innermost (o una componente disco de $T - \Delta$ dentro de él) y hacemos un intercambio de discos en el disco en T del cual dicho lazo es frontera y reducimos así $|\Delta \cap T|$. Por lo tanto nos preocupamos sólo del caso en el cual w es extremo de una arista simple. Sea α la arista outermost de Λ en w ; sea E el disco outermost correspondiente y sea e la arista en Q sobre la cual está w . Como $\partial\Delta$ proviene de una familia de curvas simples cerradas en $\partial\eta(Q)$, los subarcos de $\partial\Delta$ que están sobre $\eta(e)$ pueden pensarse como copias de e . Como α es una arista outermost para w , ninguna copia completa de e puede estar en $\partial E \cap \partial\Delta$. Tenemos entonces tres casos posibles de como el arco $\partial E \cap \partial\Delta$ puede intersectar copias de e en $\partial\Delta$ (Ver Fig. 3.6).

- (a) $\partial E \cap \partial \Delta$ es un subsegmento de e .
- (b) un extremo de $\partial E \cap \partial \Delta$ está en una copia de e .
- (c) cada uno de los extremos de $\partial E \cap \partial \Delta$ están en una copia de e .

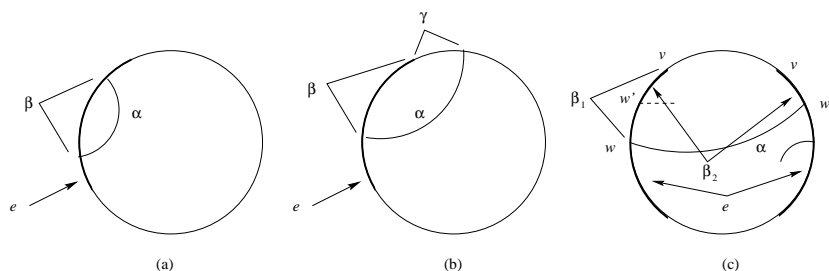


Figura 3.6. $\partial E \cap \partial \Delta$ interseca copias de e .

Ahora veremos que el número $|Q \cap T|$ se puede reducir en cada uno de los tres casos anteriores, lo cual es una contradicción. Esta parte es muy importante ya que ella nos enseña el procedimiento que podemos seguir para reducir $|Q \cap T|$.

Supongamos que sucede el caso (a); entonces $\partial E = \alpha \cup \beta$, donde β es un subsegmento de e ; mediante una isotopía que lleva β a α podemos eliminar w y el otro extremo de α (Ver Fig. 3.7) y reducimos así $|Q \cap T|$.

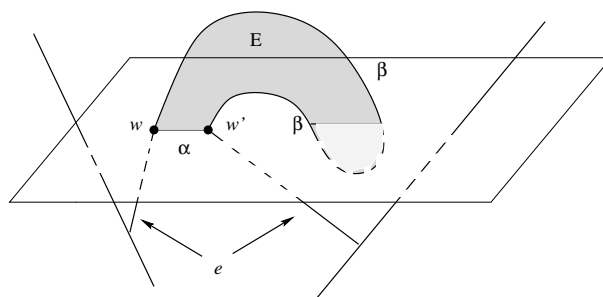


Figura 3.7. Caso (a) visto en T .

Supongamos ahora que sucede el caso (b) y no sucede el caso (a); entonces $\partial E \cap \partial \Delta$ es la unión de un segmento β y una trayectoria γ ; β tiene un extremo de e y va de w hasta un vértice v de e en Q ; γ inicia en v y termina en el otro extremo de α en $Q - e$ (Ver Fig. 3.8); usamos γ para realizar un deslizamiento de arista del extremo

v de e . Este deslizamiento hace que el caso (b) se reduzca al caso (a).

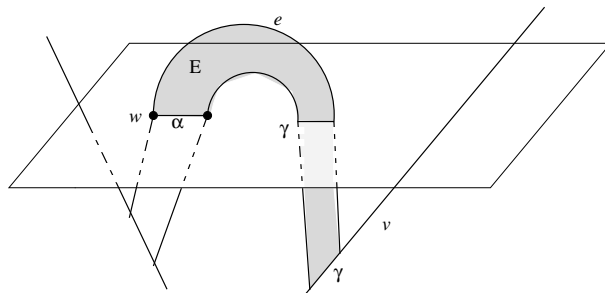


Figura 3.8. Caso (b) visto en T .

Por último si sucede el caso (c) y no sucede ninguno de los anteriores, se tiene que $\partial E \cap \partial \Delta$ es la unión de tres segmentos: un segmento β_1 , una trayectoria γ y segmento β_2 ; β_1 es un extremo de e y va desde w a un vértice v de e en Q ; γ va de v hasta un vértice v' de e en Q ; y β_2 inicia en v' y llega hasta al otro extremo de α que llamaremos w' (Ver Fig. 3.9). Notemos que β_2 no puede contener a w porque α es outermost para w . Si v' y v son extremos diferentes de e , aplicamos el mismo argumento del caso (b) a $\gamma \cup \beta_2$ en vez de a γ ; esto nos lleva otra vez al caso (a). Cuando $v' = v$ se tiene que $\beta_2 \subset \beta_1$, así que rompemos la arista e en w' e introducimos un nuevo vértice en w' . Entonces realizamos un deslizamiento de arista de $e - \beta_2$ a lo largo de la frontera del disco $D \in \Delta$ que contiene a α , de tal forma que este deslizamiento mueve el segmento $\beta_1 - \beta_2$ a α . Esto es un rompimiento y deslizamiento de arista que mueve el punto w y probablemente algunos puntos de $(\beta_1 - \beta_2) \cap T$ en $Q \cap T$; se reduce nuevamente a $|Q \cap T|$. \square

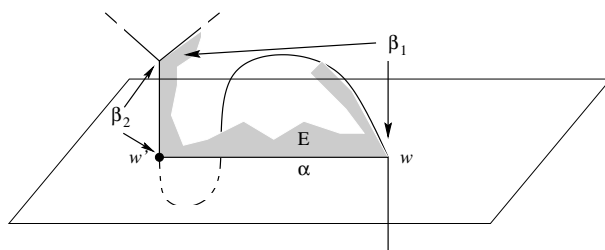


Figura 3.9. Caso (c) visto en T .

Como consecuencia del teorema anterior tenemos los siguientes resultados.

Corolario 3.2.1 *Si Q es una gráfica propiamente encajada en una 3-variedad M que es reducible o ∂ -reducible y $M - \eta(Q)$ es irreducible, pero también es ∂ -reducible, entonces, después de algunos deslizamientos de aristas de Q , existe un disco de ∂ -reducción para $M - \eta(Q)$ cuya frontera es disjunta de alguna arista de Q .*

Demostración. Aplicamos el Teorema anterior suponiendo que T es una esfera de reducción o un disco de ∂ -reducción de M ; suponemos que H es una vecindad regular de $\partial M \cup Q$ y suponemos que Δ es una familia de discos que contiene un disco de ∂ -reducción. Esta es una propiedad que se conserva bajo intercambios de discos, porque si tomo un disco D cuyo interior es disjunto de Δ y su frontera esté sobre el disco de ∂ -reducción, al tomar una vecindad regular de $\Delta \cup D$ en M la nueva familia de discos Δ' contiene un disco cuya frontera es esencial en ∂M , es decir, tiene también un disco de ∂ -reducción. Lo mismo pasa si D tiene sólo una parte de su frontera sobre Δ y la otra parte sobre ∂M .

Si Q es disjunto de T , por el hecho de que $M - \eta(Q)$ es irreducible, T no puede ser una esfera de reducción; por lo tanto T es un disco ∂ -reducción en $M - \eta(Q)$ que tiene frontera disjunta de Q .

Si Q no es disjunto de T , con los métodos usados en la demostración del teorema anterior podemos reducir $(|Q \cap T|, |\Delta \cap T|)$, por lo cual los vértices de Λ están aislados o son bases de lazos esenciales.

Pero debe existir al menos un vértice aislado w , porque si no, un lazo innermost de Λ podría ser inessential; esto implicaría que $\partial\Delta$ es disjunto de la arista Q que contiene a w . \square

A continuación se enunciará un corolario que presenta resultados muy conocidos en la teoría de las descomposiciones de Heegaard, pero antes enunciaremos un lema cuya demostración involucra al Teorema anterior y que es más débil que el corolario al que nos referimos.

Lema 3.2.1 *Una descomposición de Heegaard de una 3-variedad reducible o ∂ -reducible es reducible o ∂ -reducible.*

Demostración. Para esto aplicamos el teorema anterior con los siguientes datos: T es una esfera de reducción o un disco de reducción para M ; H uno de los dos cubos con compresiones en la descomposición de Heegaard de M y Δ es una familia de discos en el otro cubo con compresiones H' que contiene una colección completa de discos ∂ -reducción para H' ; por un razonamiento análogo al que se usó en el corolario anterior, esta propiedad se conserva bajo intercambios de discos.

El argumento del Corolario 3.2.1 muestra que: o algún disco de ∂ -reducción es disjunto de Q , con lo cual la descomposición es ∂ -reducible, o alguna arista e de la espina Q de H es disjunta de la frontera de una colección completa de discos de ∂ -reducción para H' . En este último caso la frontera μ de un meridiano de e es paralelo en H' a una circunferencia c en ∂_-H' ; esto debido a la construcción de los cubos con compresiones; si H' es cubo con asas, μ también es frontera de un disco en H' .

Para cubos con compresiones, si c es esencial en ∂_-H , nosotros tenemos un disco de ∂ -reducción que interseca a la superficie de descomposición sólo en μ , por lo cual la descomposición es ∂ -reducible. Si c es inesencial en ∂_-H , μ es frontera de un disco en H' ; de estos dos discos pegados por su frontera obtenemos una esfera que sólo interseca la superficie de descomposición en μ . Para cubos con asas es fácil ver que la descomposición es reducible, ya que, otra vez, μ es frontera de dos discos. Así que en cualquiera de los casos la descomposición es reducible o ∂ -reducible. \square

Corolario 3.2.2 (Teorema de Haken) (a) *Una descomposición de Heegaard de una 3-variedad reducible es reducible.*

(b) *Una descomposición de Heegaard de una 3-variedad ∂ -reducible es ∂ -reducible.*

Demostración. Si tengo una 3-variedad reducible M , nosotros podemos concluir que su descomposición de Heegaard (M, F) también es reducible usando el siguiente argumento: Si la descomposición (M, F) no es reducible, entonces debe de ser ∂ -reducible, por lo cual existen discos de ∂ -reducción que intersecan a F en circunferencias que son esenciales en F y que reducen tanto a F como a M . En un número finito de pasos (finito porque, cada vez que usamos un disco de ∂ -reducción, estamos disminuyendo el género de ∂_+H), el resultado es una nueva descomposición de Heegaard (M', F') , donde M' es una nueva 3-variedad que sigue siendo reducible. Ya que no hay más discos de ∂ -reducción sobre M' , concluimos que (M', F') debe ser reducible; pero una esfera de reducción para F' lo es también para F , por lo tanto (M, F) es reducible. Un argumento similar se aplica cuando empezamos con una 3-variedad M que es ∂ -reducible. \square

3.3 Gráficas reducidas en S^3

La Teoría de Morse es otra de las herramientas para estudiar n -variedades y se basa en funciones reales cuyos puntos críticos son no degenerados, es decir, si $df(x) = 0$ entonces $d^2f(x) \neq 0$ para toda x ; a dichas funciones se les da el nombre de funciones de Morse. El teorema principal de la Teoría de Morse es que toda función de Morse en una vecindad de un punto crítico se ve (salvo un difeomorfismo de la vecindad)

como una función cuadrática (o lineal). En esta sección aplicaremos un poco de la Teoría de Morse a gráficas que están en S^3 .

Sea Γ una gráfica finita en S^3 en la que cada uno de sus vértices tiene valencia tres. Sea $h : S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la función proyección de $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ sobre una coordenada, de tal manera que salvo en los dos polos los conjuntos de nivel $h^{-1}(t)$ de h son esferas concéntricas en S^3 . Alternativamente, podemos pensar que Γ está en \mathbb{R}^3 y que $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es la distancia desde el origen. Sea V el conjunto de vértices de Γ y $S(t)$ la esfera $h^{-1}(t)$.

Definición 3.3.1 Una gráfica en S^3 está en **posición de Morse** con respecto a h si:

- (a) Sobre cada arista e de Γ , los puntos críticos de $h|_e$ son no degenerados y están en el interior de e .
- (b) Los puntos críticos de $h|(\Gamma - V)$ y los vértices de V están en alturas diferentes.

Al conjunto de alturas en el que hay puntos críticos de $h|(\Gamma - V)$ o vértices de V le llamaremos **conjunto de alturas críticas para Γ** . Las alturas en las cuales no hay puntos críticos se llaman **alturas regulares**. Los vértices V de Γ pueden ser clasificados en 4 tipos (Ver Fig. 3.10):

- $\bar{V} = \{v \in V : \text{los extremos de aristas incidentes a } v \text{ están por abajo de } v\}$
- $\underline{V} = \{v \in V : \text{los extremos de aristas incidentes a } v \text{ están por arriba de } v\}$
- $V_Y = \{v \in V : \text{exactamente dos extremos de aristas incidentes a } v \text{ están por arriba de } v\}$
- $V_\lambda = \{v \in V : \text{exactamente dos extremos de aristas incidentes a } v \text{ están por abajo de } v\}$

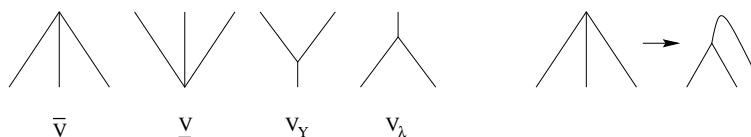


Figura 3.10. Tipos de vértices.

Ahora bien los vértices tipo \bar{V} y \underline{V} pueden ser convertidos en vértices V_λ y un máximo cercano al vértice o en vértices V_Y y un mínimo cercano, respectivamente, mediante una isotopía de los vértices (Ver Fig. 3.10). Entonces podemos suponer que todos los vértices son de tipo V_λ o V_Y .

Definición 3.3.2 Sea Γ una **gráfica** cuyos vértices tienen valencia tres, diremos que Γ está en **forma normal** si todos los vértices de Γ son de tipo V_Y o V_λ

Una vecindad regular $\eta(\Gamma)$ de Γ se puede pensar como la unión de 0-asas (vecindades regulares de los vértices) y 1-asas (vecindades regulares de las aristas).

Definición 3.3.3 Una **curva simple cerrada** en $\partial\eta(\Gamma)$ está en **forma normal** si interseca a la frontera $\partial B^2 \times \{1\}$ de cada una 1-asa en una 1-fibra e interseca a la frontera ∂B^3 de cada 0-asa en arcos esenciales contenidos en el complemento de los tres discos donde se pegan las tres 1-asas respectivas.

El decir que la curva interseca la frontera de cada una 1-asa en una 1-fibra significa que no permitimos que la curva se regrese a la misma frontera donde comenzó (Ver Fig. 3.11), es decir, que la intersección es una fibra (intervalo) de la estructura producto de la 1-asa.

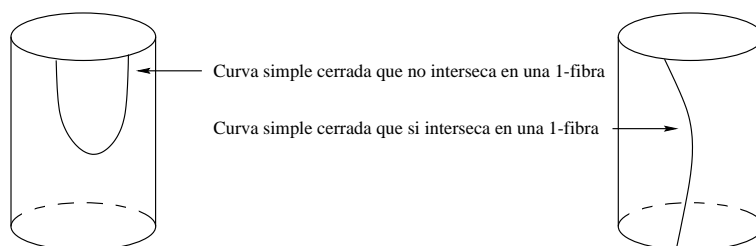


Figura 3.11. Ejemplo de intersección en una 1-fibra.

Definición 3.3.4 Un **disco** $(D, \partial D) \subset (S^3 - \eta(\Gamma), \partial\eta(\Gamma))$ está en **forma normal** si:

- (a) ∂D está en forma normal sobre $\partial\eta(\Gamma)$.
- (b) Cada uno de los puntos críticos de h sobre D es no degenerado.
- (c) Ningún punto crítico de h sobre el $\text{int}(D)$ está en una altura crítica de Γ .
- (d) Dos puntos críticos de h sobre el $\text{int}(D)$ no están a la misma altura.
- (e) El mínimo de $h|_{\partial D}$ en vértices Y es un extremo local de h sobre D , es decir, es una singularidad de “medio-centro” (Ver Fig. 3.12). Similarmente el mínimo de Γ y el máximo de $h|_{\partial D}$ en vértices λ también lo son.
- (f) El máximo de $h|_{\partial D}$ en vértices Y es una singularidad de “media-silla” de h sobre D (Ver Fig. 3.12). El mínimo de $h|_{\partial D}$ en vértices λ es también una singularidad de “media-silla” de h sobre D .

La Teoría de Morse estándar muestra que cualquier disco esencial propiamente encajado $(D, \partial D) \subset (S^3 - \eta(\Gamma), \partial\eta(\Gamma))$ se puede poner en posición normal. A la imagen de un disco en forma normal bajo la retracción $(S^3, \eta(\Gamma)) \rightarrow (S^3, \Gamma)$, con un ligero abuso de terminología, le seguiremos llamando disco en forma normal $(D, \partial D) \subset (S^3, \Gamma)$.

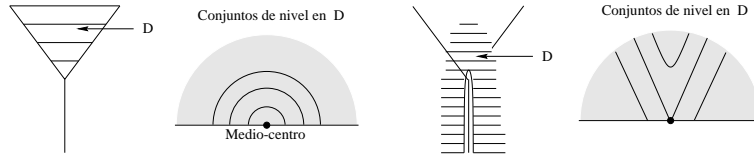


Figura 3.12. Singularidades.

Supongamos que $(D, \partial D) \subset (S^3, \Gamma)$ es un disco en forma normal. Para t una altura regular de $h|_D$, $S(t)$ interseca a D en la unión disjunta de arcos propiamente encajados y circunferencias. En una altura crítica de $h|(\Gamma - V)$, la intersección puede también incluir una colección finita de puntos sobre ∂D que corresponden a mediasillas y que pueden ser los extremos de dos arco-componentes de $S(t) \cap D$.

Para cada valor de t definimos la **función anchura** $w(t) = |\Gamma \cap S(t)|$, que nos indica el número de veces que Γ y $S(t)$ se intersecan. Dicha función se incrementa en 2 en un mínimo de $\Gamma - V$; se incrementa en 1 en un vértice Y ; decrece en 2 en un máximo de $\Gamma - V$ y decrece en 1 en un vértice λ .

Definición 3.3.5 Sea $\Gamma \subset S^3$ una gráfica y sea $w(t)$ su función anchura tal que W es el valor más grande de $w(t)$ y n el número de veces que W aparece como máximo de $w(t)$; decimos que Γ está en **thin position** si entre todas las gráficas en forma normal obtenidas de Γ por isotopías y deslizamientos de aristas, la pareja $w(\Gamma) = (W, n)$ es mínima respecto al orden lexicográfico.

Definición 3.3.6 Sea Γ una gráfica en S^3 . Un **ciclo no anudado** en Γ es una parte de Γ que es homeomorfa a una circunferencia y que es frontera de un disco en S^3 .

Teorema 3.3.1 Supongamos que una gráfica Γ en S^3 está en thin position y existe una familia de discos $(\Delta, \partial\Delta) \subset (S^3, \Gamma)$ no vacía con una propiedad que se conserva bajo intercambios de discos. Entonces existe una familia de discos tales cuya frontera es disjunta de alguna arista de Γ o, después de a lo más dos deslizamientos de aristas, Γ contiene un ciclo no anudado.

Demostración. Supongamos que para toda familia de discos Δ con una propiedad que se conserva bajo intercambios de discos, $\partial\Delta$ está sobre cada arista de Γ . Mostraremos que después de a lo más dos deslizamientos de aristas, Γ contiene un ciclo no anudado.

Para una altura regular t las arco-componentes de $\Delta \cap S(t)$ y los puntos de $\Gamma \cap S(t)$ crean, como antes, una gráfica $\Lambda(t)$ en $S(t)$. Ya que $\partial\Delta$ está sobre cada arista de Γ , ningún vértice de $\Lambda(t)$ es aislado. Tampoco existen vértices de $\Lambda(t)$ que tengan valencia uno, porque si fuera así Γ tiene una arista e tal que la frontera de un disco $D \in \Delta$ recorre exactamente una vez a e . Por lo tanto $\partial D - e$ es una trayectoria en $\Gamma - e$ y un deslizamiento de arista de e a lo largo de esta trayectoria convierte a e en un ciclo no anudado. Así podemos suponer que cada vértice de $\Lambda(t)$ tiene al menos valencia dos.

Ahora escogemos Δ de tal forma que, con deslizamientos de aristas, intercambios de discos e isotopías el número $|\partial\Delta \cap \{\text{meridianos de } \Gamma\}|$ es minimizado. Un lazo en $\Lambda(t)$ divide a $S(t)$ en dos discos y ambos deben de contener vértices de $\Lambda(t)$ porque si este no fuera el caso, reduciríamos el número $|\partial\Delta \cap \{\text{meridianos de } \Gamma\}|$ mediante un intercambio de discos en un disco en $S(t)$ bordeado por un lazo inesencial innermost de $\Lambda(t)$. Por lo tanto, una arista en un vértice de $\Lambda(t)$ dentro de un lazo innermost debe ser simple.

Supongamos que α es una arco outermost para un vértice w de $\Lambda(t)$ y E es su disco outermost correspondiente. Decimos que E es disco superior o disco inferior, si está arriba o está abajo de α de acuerdo a la función altura h sobre S^3 , respectivamente. Si w está en un lazo innermost, todas las aristas son simples y alguna arista simple es outermost para w . Por lo tanto, podemos concluir que $\Lambda(t)$ es vacío o contiene al menos una arista simple outermost.

Supongamos que e es la arista de Γ que interseca $S(t)$ en el vértice w de $\Lambda(t)$; supongamos que α es una arista simple de $\Lambda(t)$ que es outermost para w y que E es su disco outermost correspondiente. Igual que en la demostración del Teorema 3.2.1, E se puede usar para realizar un deslizamiento de arista (o rompimiento y deslizamiento de arista) o una isotopía del segmento β de e ; recordemos que β es un segmento de e , si $\partial E \cap \partial\Delta \subset e$; es una trayectoria en e que va de w hasta un vértice v de Γ , si un extremo de $\partial E \cap \partial\Delta$ está en e y, finalmente, aquí entendemos por β a la trayectoria $\gamma \cup \beta_2$, cuando cada uno de los extremos de $\partial E \cap \partial\Delta$ estaba en una copia de e y $v = v'$; o si $v \neq v'$ β es la trayectoria sobre la frontera del disco $D \in \Delta$ que contiene a α . Si E es un disco superior, la isotopía puede usarse para reemplazar a β con un arco que esté por debajo de α . Si E es disco inferior, podemos reemplazar a β con un arco que esté por arriba de α .

Para explotar que Γ está en *thin position*, necesitamos aplicar lo anterior a un par de aristas simples. Usaremos los siguientes lemas técnicos.

Lema Técnico 3.3.1 *Supongamos que existen aristas simples outermost para los vértices w y w' de $\Lambda(t)$ y que no existen lazos de $\Lambda(T)$ basados en w' . Entonces existen aristas simples α y α' outermost para w y w' , respectivamente, de tal forma que la frontera de E (disco outermost correspondiente a α) es disjunta de w' , o la frontera de E' (disco outermost correspondiente a α') es ajena a w .*

Demostración. Supongamos que $\partial E'$ interseca a w . Entonces, como no hay lazos en w' , un arco outermost para w en E' corta un disco outermost que es disjunto de w . \square

Lema Técnico 3.3.2 *Supongamos que E y E' son discos outermost para w y w' , respectivamente, y ∂E es disjunto de w' . Sea β el segmento de ∂E como se describió antes del Lema Técnico 3.3.1 y sea β' en $\partial E'$ un segmento análogo a β . Si β y β' son disjuntos, entonces mediante isotopías y deslizamientos de aristas podemos reemplazarlos con α y α' , respectivamente. Si β y β' se intersecan, entonces con una isotopía y deslizamientos de aristas los reemplazamos con α' y movemos w' hasta situarlo en uno de los extremos de la arista que lo contiene.*

Demostración. Si β y β' son disjuntos, fácilmente se tiene lo que se quiere demostrar. Supongamos que β y β' no son disjuntos; entonces como ∂E es disjunto de w' , tenemos que $\beta \subset \beta'$. Entonces hacemos un deslizamiento de arista e isotopamos primero a E y posteriormente a E' ; como γ nunca pasa por w' , E' sigue siendo un disco outermost para w' . \square

Continuemos con la demostración del Teorema 3.3.1.

Sea t una altura regular y supongamos que la función $w(t)$ alcanza su máximo W en t . Entonces la primera altura crítica, que llamaremos t_- , por abajo de t debe ser un mínimo o un vértice Y y la primera altura crítica, t_+ , por encima de t es un máximo o un vértice λ .

Supongamos que en $\Lambda(t)$ existen dos aristas simples outermost una de las cuales es superior y la otra inferior; sean α y α' dichas aristas outermost, respectivamente, con sus discos outermost E y E' correspondientes. Si α y α' son outermost para el mismo vértice w , ambas están sobre la misma arista e y el Teorema 3.2.1 muestra que las partes de e que están sobre ∂E y $\partial E'$ se pueden deslizar e isotopar para que estén en $S(t)$. A menos que ésta sea toda la arista e , este movimiento reducirá la anchura en la altura t sin incrementarla en ningún otro lugar, lo cual contradice que Γ está en *thin position*. Así nosotros concluimos que la arista e puede ser deslizada e isotopada para que esté en $S(t)$.

Si α y α' tienen cada uno sus otros extremos en el mismo vértice, entonces e es un lazo que está sobre $S(t)$ y, por lo tanto, tenemos un ciclo no anudado (Ver Fig. 3.13).

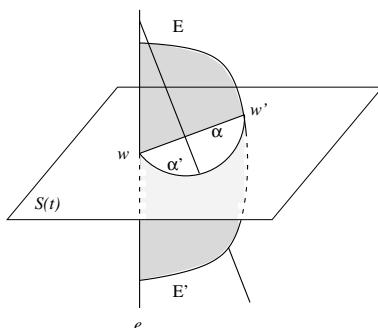


Figura 3.13. α y α' tienen los mismos vértices.

Si los extremos de e están en diferentes vértices, con una movida de Whitehead sobre e , convertimos a la arista horizontal e de Γ en una arista vertical con dos deslizamientos de aristas (Ver Fig. 3.14). Esto regresa a Γ a su forma normal y no incrementa la anchura fuera de $[t_-, t_+]$; además reduce la anchura máxima en $[t_-, t_+]$ para ser a lo más $W - 1$ (alcanzada esta anchura quizás en t_{\pm}).

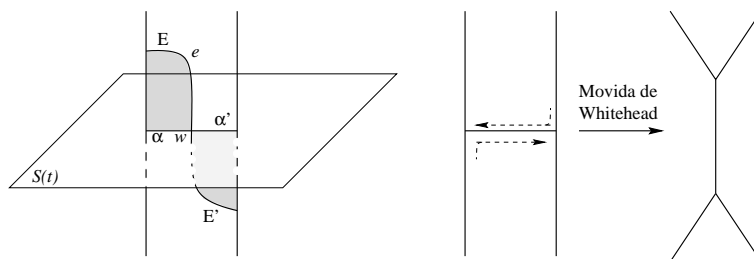


Figura 3.14. α y α' tienen distintos vértices.

Una vez más, esto contradice que Γ está en *thin position*.

Así que para cada vértice en $\Lambda(t)$ o todos los arcos outermost son superiores, o todos son inferiores. Podemos suponer que existe un vértice w que no tiene lazos y que cada arco outermost para w es superior; dicho w existe porque la valencia de los vértices es al menos dos y, si tengo un lazo, entonces debe de haber vértices en los discos bordeados por el lazo en $S(t)$; al tomar un lazo innermost podemos encontrar

dicho w . Supongamos que existe en $\Lambda(t)$ una arista simple outermost inferior, α' , para un vértice w' cuyo disco outermost correspondiente es E' . Entonces, por el Lema Técnico 3.3.1, $\partial E'$ es disjunto de w o algún arco outermost para w corta un disco E con frontera disjunta de w' ; ahora aplicamos el Lema Técnico 3.3.2 a α y a α' . Esto no incrementa la anchura fuera de $[t_-, t_+]$ y, otra vez, reduce la anchura máxima en $[t_-, t_+]$ a ser a lo más $W - 1$. Por lo tanto todos los arcos simples outermost en $\Lambda(t)$ son superiores o inferiores.

Si para alguna altura regular $t \in [t_-, t_+]$ suponemos que sus arcos simples outermost son superiores, podemos concluir que, si $t' \in [t_-, t_+]$, todo arco simple outermost de $\Lambda(t')$ es superior; porque si hubiera un arco simple outermost inferior, éste sería inferior también en t y, para este valor, supusimos que todos los arcos simples outermost eran superiores. Por lo que, en particular, la altura crítica t_- debe ser un vértice Y al que llamaremos v ; si no fuera así, un poco por arriba de t_- podríamos encontrar un disco inferior. Ahora consideremos una altura regular μ situada por abajo de t_- . Si algún arco simple outermost es superior en $\Lambda(\mu)$, parte de su disco superior está más arriba de t_- ; así que con una isotopía, o un deslizamiento de arista, podemos reducir la anchura máxima en $[t_-, t_+]$ a $W - 1$; de esta forma podemos concluir que cuando nosotros descendemos hacia abajo de t_- , todos los arcos simples outermost superiores desaparecen y sólo tenemos arcos simples outermost que son inferiores; por lo tanto, todos los arcos simples outermost deben tener un extremo sobre una de las dos aristas que inciden a v y que están por encima de v , pues el vértice v es el único que puede cambiar aristas simples outermost superiores a aristas inferiores (Ver Fig. 3.15).

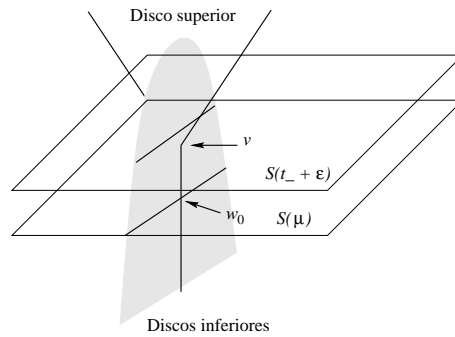


Figura 3.15. Cambio de discos en v .

Sea w_0 el vértice de $\Lambda(\mu)$ correspondiente a la intersección de la arista descendente de v en Γ con $S(\mu)$. Cuando pasamos de $t \in (t_-, t_+)$ a μ , los arcos que teníamos se pegan por sus extremos en w_0 ; esto crea nuevos arcos o, posiblemente, curvas simples cerradas. Los arcos en $\Lambda(t)$ que no son incidentes a w_0 no se afectan. Una arista

simple outermost permanece así después de pasar por t_- . Por lo tanto todos los arcos simples outermost en $\Lambda(\mu)$ deben de ser incidentes a w_0 ; esto implica que no hay lazos en vértices distintos a w_0 , porque si esto sucediera podríamos encontrar un lazo outermost en otro vértice distinto a w_0 ; pero eso no sucede.

A continuación mostraremos la existencia de un ciclo no anudado en Γ .

Caso 1. Si las aristas descendentes de la altura crítica t_+ , que era o un máximo o un vértice λ y que en ambos de los casos lo denotamos con v_+ , son también ascendentes para v , es claro que tenemos un ciclo no anudado (Ver Fig. 3.16).

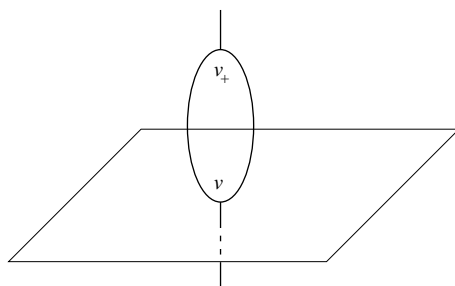


Figura 3.16. Caso (1).

Caso 2. Si una de las dos aristas de v_+ coincide con una de las aristas de v , entonces la otra arista descendente de v_+ debe intersectar a $S(\mu)$ en un vértice w debido a que Γ está en forma normal (Ver Fig. 3.17). Hemos demostrado que no hay lazos de $\Lambda(\mu)$ en w , que alguna arista simple outermost para w tiene su otro extremo en w_0 y que dicha arista debe ser inferior; entonces con un deslizamiento de arista y una isotopía podemos crear un ciclo no anudado en Γ .

Caso 3. Por último si ambas aristas e y e' de v_+ intersectan a $S(\mu)$, llamemos w y w' a dichos puntos de intersección (Ver Fig. 3.18). Una vez más no existen lazos de $\Lambda(\mu)$ basados en w y w' ; por lo cual aplicamos el Lema Técnico 3.3.1 y el Lema Técnico 3.3.2 a los arcos simples outermost α y α' de w y w' , respectivamente. Otra vez, con dos deslizamientos de aristas e isotopías podemos crear un ciclo no anudado.

Por lo tanto, hemos demostrado que después de a lo más dos deslizamientos de aristas, Γ contiene un ciclo no anudado. Si consideramos discos inferiores en lugar de discos superiores, la acción se desarrolla alrededor de un vértice λ en t_+ , pero todo es completamente análogo. \square

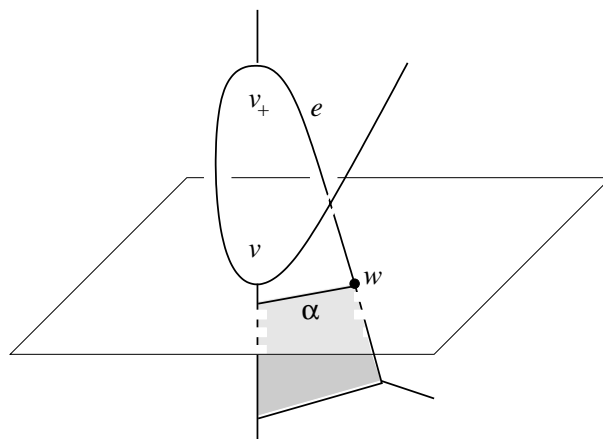


Figura 3.17. Caso (2).

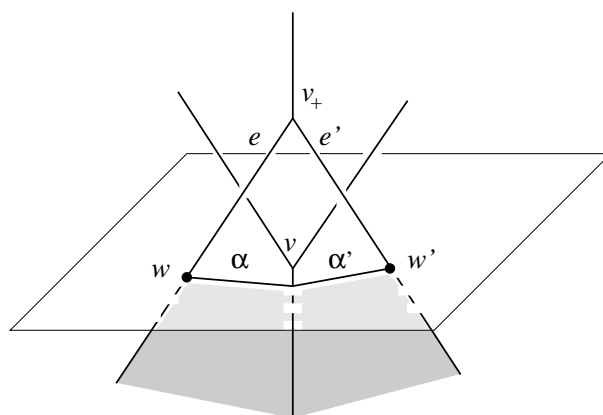


Figura 3.18. Caso (3).

Corolario 3.3.1 *Supongamos que Γ es una gráfica en S^3 y $\overline{S^3 - \eta(\Gamma)}$ tiene un disco de ∂ -reducción cuya frontera es no trivial en $\pi_1(\Gamma)$. Entonces, algunos deslizamientos de aristas convierten a Γ en una gráfica que contiene un ciclo no anudado.*

Demostración. La hipótesis del corolario nos permite definir una familia de discos propiamente encajados Δ en $\overline{S^3 - \eta(\Gamma)}$ con la propiedad de que Δ contiene un disco cuya frontera es esencial en Γ ; dicha propiedad es conservada bajo intercambios de discos por un razonamiento análogo al usado en el Corolario 3.2.1. Notemos que si $\partial\Delta$ es disjunta de alguna arista e de Γ , entonces Δ satisface la misma propiedad para la gráfica $\Gamma - e$. Así que de todas las gráficas en forma normal obtenidas de Γ borrando o deslizando aristas, escogemos Γ' tal que $\partial\Delta$ interseca a cada una de las aristas de Γ' . Ahora ejecutamos isotopías y deslizamientos de aristas hasta que Γ' esté en *thin*

position. Por el teorema anterior se tiene que, después de a lo más dos deslizamientos de aristas, Γ' contiene un ciclo no anudado. Dicho ciclo no anudado también lo es para Γ . \square

Corolario 3.3.2 *Supongamos que Γ es una gráfica en S^3 y $\overline{S^3 - \eta(\Gamma)}$ es ∂ -reducible. Entonces algunos deslizamientos de aristas convierten a Γ en una gráfica que contiene un ciclo no anudado o un enlace separable.*

Demostración. Como $\overline{S^3 - \eta(\Gamma)}$ es ∂ -reducible, debe tener al menos un disco de ∂ -reducción, D . Si ∂D es esencial en Γ , del corolario anterior se sabe que Γ después de algunos deslizamientos de aristas contiene un ciclo no anudado; de otra manera ∂D es inesencial en $\eta(\Gamma)$ y bordea a un disco E en $\eta(\Gamma)$. Una serie de deslizamientos de aristas transforman a Γ en una gráfica Γ' en la cual E es el meridiano de alguna arista e . Por lo tanto $\Gamma' - e$ es partida por la esfera $D \cup E$ y Γ contiene un enlace separable. \square

Corolario 3.3.3 *Sea $\Gamma \subset S^3$ una gráfica conexa que no es un circuito simple y supongamos que $\overline{S^3 - \eta(\Gamma)}$ es ∂ -reducible. Entonces después de algunos deslizamientos de aristas existe un disco de ∂ -reducción para $\overline{S^3 - \eta(\Gamma)}$ tal que la frontera de dicho disco es disjunta de alguna arista de Γ .*

Demostración. Ya que Γ es conexa, $\overline{S^3 - \eta(\Gamma)}$ es irreducible porque en uno de los dos lados de una esfera S^2 en $\overline{S^3 - \eta(\Gamma)}$ está Γ , porque es conexa; del Teorema de Alexander se sigue que S^2 es frontera de una 3-bola en $\overline{S^3 - \eta(\Gamma)}$. Supongamos que $\gamma \subset \Gamma$ es el ciclo no anudado o el enlace separable que obtuvimos en el corolario anterior. Consideremos ahora la 3-variedad $\overline{S^3 - \eta(\gamma)}$ la cual es reducible o ∂ -reducible (dependiendo de lo que sea γ) y sea $Q = \Gamma - \gamma$, de tal forma que $\overline{(S^3 - \eta(\gamma)) - \eta(Q)} = \overline{S^3 - \eta(\Gamma)}$ es ∂ -reducible, pero también es irreducible. Aplicamos ahora el Corolario 3.2.1 a $\overline{S^3 - \eta(\gamma)}$ y se obtiene lo que se quería demostrar. \square

Una vez más demostraremos el teorema principal de esta tesis, pero esta vez nuestra demostración estará basada en el Teorema 3.3.1. Así lo expresa el siguiente corolario y su demostración.

Corolario 3.3.4 *Una descomposición de Heegaard de S^3 es estándar.*

Demostración. Sea (S^3, F) una descomposición de Heegaard de S^3 y supongamos que Γ es una espina de uno de los dos cubos con asas de (S^3, F) . Por inducción es suficiente probar que (S^3, F) es reducible o estabilizada. Definimos una familia de discos propiamente encajados en $\overline{S^3 - \eta(\Gamma)}$ con la propiedad de que Δ contiene un

conjunto completo de discos de ∂ -reducción para el cubo con asas $\overline{S^3 - \eta(\Gamma)}$; esta propiedad se conserva bajo intercambios de discos. Ejecutamos deslizamientos de aristas e isotopías hasta que Γ esté en *thin position* y aplicamos el Teorema 3.3.1.

Si alguna arista e de Γ es disjunta de $\partial\Delta$ entonces la frontera de un meridiano μ de e está sobre la frontera de la 3-bola $\overline{S^3 - \eta(\Gamma \cup \Delta)}$; así éste bordea un disco E en $\overline{S^3 - \eta(\Gamma)}$. La unión por las fronteras de E y el meridiano de e es una esfera que interseca a la descomposición de Heegaard precisamente en μ y por lo tanto la descomposición es reducible.

Por otro lado si Γ contiene un ciclo no anudado γ , entonces el complemento de una pequeña vecindad regular de γ en una vecindad regular de Γ más grande que ésta, es aún un cuerpo de compresión H con $\partial_- H$ igual al toro $\partial\eta(\gamma)$ y $F = \partial_+ H = \partial\eta(\Gamma)$. Entonces F nos da una descomposición de Heegaard del toro sólido $\overline{S^3 - \eta(\gamma)}$. Como el toro sólido es ∂ -reducible, del Teorema de Haken se sigue que la descomposición de Heegaard de $\overline{S^3 - \eta(\gamma)}$ es ∂ -reducible; así que γ bordea un disco cuyo interior es disjunto de Γ . Este disco y un meridiano de γ definen una estabilización de (S^3, F) . \square

Referencias

[**FM**] A.T. Fomenko y S. V. Matveev. Algorithmic and computer methods for 3-manifolds. Kluwer Academic Press. 1997

[**M**] E. E. Moise. Geometric Topology in dimensions 2 and 3. Graduate Texts in Mathematics, 47. Springer-Verlag. 1977

[**ST**] M. Scharlemann y A. Thompson. Thin position and Heegaard splittings of the 3-esphere. J. Diff. Geometry 39 (1994), 343-357.

[**W**] F. Waldhausen. Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphäre. Topology 7 (1968), 195-203.