Propiedades de órbitas periódicas de Hamiltonianos genéricos en el sentido de Mañé

Sea M una variedad cerrada y T^*M el cotangente con la estructura simpléctica canónica ω. Sea $H : T^*M \to \mathbb{R}$ un Hamiltoniano de clase C^2 *convexo* (i.e., para cada $x \in M$, la restricción $H(x, \cdot) : T_xM \to \mathbb{R}$ con Hessiana positiva) y *superlineal* (i.e., $\lim_{\|p\|\to\infty} \frac{H(x,p)}{\|p\|} = \infty$, uniformemente en $x \in M$). El Campo Hamiltoniano X_H de H está definido por la igualdad:

$$\omega(X_H, \cdot) = dH(\cdot)$$

El flujo Hamiltoniano $\phi_t^H : T^*M \to T^*M$ de H es el flujo correspondiente al campo X_H. Este flujo preserva la función Hamiltoniano y la estructura simpléctica ω. Los subconjuntos $H^{-1}(c) \subset T^*M$ son llamados Niveles de energía de H.

Vamos a discutir sobre propiedades genéricas en el sentido de Mañé de la dinámica de órbitas periódicas del flujo Hamiltoniano. Específicamente, consideraremos $C^\infty(M)$ el espacio de las funciones $u : M \to \mathbb{R}$ con la topologia C^∞. Un subconjunto $\mathcal{O} \subset C^\infty(M)$ es *residual* si es una intersección numerable de conjuntos abiertos y densos. Decimos que una propiedad es genérica en el sentido de Mañé, cuando para cada Hamiltoniano $H : T^*M \to \mathbb{R}$, existe un residual $\mathcal{O} \subset C^\infty(M)$, tal que la propiedad es válida para todo $H_u = H + u$, con $u \in \mathcal{O}$. Este concepto de genérico (o típico) fue introducido por R. Mañé en 1996 para estudiar la teoría de Aubry-Mather.

En este contexto, vamos a enunciar resultados genéricos tales como una versión del Teorema de Kupka-Smale y sobre un trabajo en colaboración con el Prof C. Carballo (UFMG) sobre perturbaciones de la aplicación de Poincaré de órbitas periódicas.

Estas propiedades son motivadas por el hecho de que la estabilidad de un sistema dinámico cerca de una órbita elíptica depende de las derivadas de orden mayor o igual que tres.