



Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

Una formulación en elemento finito
del sistema diferencial para la
identificación de parámetros
en un acuífero no confinado

T E S I S

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con especialidad en

Matemáticas Aplicadas

P R E S E N T A:

Roberto Alejandro Kú Carrillo

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Miguel Angel Moreles Vázquez

Diciembre del año 2001

Guanajuato, Gto. México

Una formulación en elemento finito del sistema diferencial
para la identificación de parámetros en un acuífero no
confinado

Roberto Alejandro Kú Carrillo.

1 de diciembre de 2001



Índice General

Introducción	v
1 Modelación Matemática. Elementos de Geohidrología	1
1.1 Conceptos de Geohidrología	1
1.1.1 Clasificación de Acuíferos	3
1.2 Modelación Matemática de Acuíferos	3
1.2.1 El Enfoque Hidráulico	3
1.2.2 Mecánica de Medio Continuo para flujos a través del Medio Poroso	4
1.2.3 Inhomogeneidad y Anisotropía	5
1.3 La Ley de Darcy	6
1.3.1 Conductividad Hidráulica	11
1.3.2 Hipótesis de Dupuit	11
1.3.3 Almacenamiento en un acuífero	12
1.3.4 Balance de Masa y Ecuación de Continuidad	15
1.3.5 Ecuación para un Acuífero Freático	18
2 Problema Directo	19
2.1 Método de Galerkin	19
2.1.1 Formulación Débil	21
2.1.2 El método de Galerkin	22
2.1.3 Condiciones de Dirichlet no homogéneas	23
2.1.4 Esquema de aproximación Crank-Nicolson-Galerkin	24
2.2 El método del elemento finito	25
2.3 Caso de estudio de un acuífero no confinado	27
2.4 Configuración Inicial de Sistema	30
2.5 Datos del Transitorio	32
2.6 Otros casos estacionarios	34
3 El Problema Inverso	37
3.1 El método del sistema diferencial	37
3.2 Implementación de sistema diferencial	40
3.2.1 Estabilidad	40
3.2.2 Ruta de mínimo error	42
3.3 Resultados	43

ÍNDICE GENERAL

3.3.1 El caso estacionario	43
3.3.2 El caso transitorio	47
3.3.3 Experimentos con ruido Gaussiano.	57
Conclusiones	66
Bibliografía	69

Introducción

Es un hecho que la necesidad de agua para el ser humano en sus actividades diarias es de vital importancia. El problema principal que se presenta es la escasez de este recurso. A pesar de que la superficie de nuestro planeta esta cubierta en alrededor de sus tres cuartas partes de agua, el 98% de esta agua es salada y por lo tanto, no apta para el consumo humano. El agua para el consumo humano es obtenida principalmente de lagunas, lagos, manantiales, etc. que comúnmente se les conoce como *aguas superficiales*, y de las *aguas subterráneas*, dentro de las cuales se encuentran acuíferos.

El problema de la *administración de recursos hidráulicos subterráneos* consiste en tomar varias decisiones, es decir, asignar valores numéricos a las variables de decisión para modificar un determinado estado del sistema considerado. Ejemplos de estas variables de decisión son la localización, tasa y tiempo de bombeo (o recarga artificial). Como variables de decisión tenemos los niveles piezométricos, las concentraciones de soluto como funciones del espacio y tiempo.

La razón de modificar el sistema hidráulico es llevarlo de un estado a otro más deseable para obtener ciertas metas y objetivos. Esto se necesita hacer, de tal modo, que se tome el mejor conjunto de decisiones. Este conjunto de decisiones se toma en base a ciertos criterios y restricciones tales como: costo, bombeo, etc. y se selecciona la mejor política de administración de los recursos.

Para resolver el problema de administración es indispensable contar con herramientas que nos ayuden a predecir el comportamiento de sistema bajo cualquier política de operación propuesta. Así se obtiene el nuevo estado a partir del inicial dado y con esto se puede verificar si el escenario propuesto satisface las metas, antes fijadas, sin violar las restricciones hechas. Entre las variables que necesitamos predecir se encuentran los niveles de agua en el acuífero, la salinidad, descarga de los acuíferos, etc. En particular, estamos interesados en contar con una herramienta que nos permita predecir los niveles del agua y los flujos que se tienen en el acuífero.

En este trabajo tratamos con una clase particular de acuíferos, los *acuíferos no confinados* o también llamados *freáticos*. Se utiliza un modelo en ecuaciones diferenciales parciales ampliamente conocido en la práctica de administración de recursos hidráulicos subterráneos. Como se explica en el primer capítulo este modelo se basa en una ley empírica, llamada *ley de Darcy*, y bajo una serie de hipótesis pertinentes y la ecuación de continuidad se obtiene la ecuación:

$$\text{div}(K(x, y)h(x, y, t)\nabla h(x, y, t)) + f(x, y) = \eta_e h_t \quad (1)$$

donde las variables y constantes tienen los siguientes significados:

K = conductividad hidráulica, $[L]/[T]$.

h = carga hidráulica (también llamado potencial hidráulico), $[L]$.

η_e = coeficiente de almacenamiento, adimensional.

f = fuente, $[L]/[T]$.

(x, y) = coordenada espacial, $[L]$.

t = tiempo, $[T]$.

h_t = la derivada temporal del potencial hidráulico, $[L]/[T]$.

La ecuación anterior es una ecuación diferencial parcial de difusión. El término principal es el potencial hidráulico, h , en las variables temporales x , y y la temporal t . Los coeficientes de la ecuación son parámetros físicos. La ecuación 1 típicamente está sujeta a condiciones iniciales y de frontera tales como:

$$h(x, y, 0) = h_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (2)$$

$$h(x, y, t) = g(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, T] \quad (3)$$

donde: $h_0 : \Omega \rightarrow R^+$, $g : \Omega \times [0, T] \rightarrow R^+$, Ω es el dominio del acuífero. Como su nombre lo indica la condición de frontera nos da el comportamiento de los potenciales hidráulicos en la frontera y la condición inicial la configuración de los potenciales hidráulicos en el estado inicial.

Dado el modelo ahora necesitamos calibrarlo, es decir, encontrar los parámetros de la ecuación, en nuestro caso K y η_e , y las condiciones de frontera que hacen que se reproduzca el comportamiento del acuífero. Es importante tener modelos calibrados pues una mala calibración conduce a errores predictivos, generando datos que no corresponden al estado final real, y por lo tanto inducen malas políticas de administración de los recursos hidráulicos. La calibración no es un problema del modelo, sino más bien de la información disponible sobre el acuífero y la calidad de la misma. Errores en las mediciones y simplificaciones hechas en la modelación se ven reflejadas en el comportamiento predictivo.

En el caso de los acuíferos, para determinar los parámetros es necesario hacer mediciones experimentales o estimarlos de manera indirecta. Las mediciones experimentales implican la excavación de pozos para hacer las mediciones, lo cual resulta extraordinariamente caro. Hacerlo de manera indirecta conduce al problema llamado en la literatura como **identificación de parámetros**, tal como lo define Yeh [10], en donde se da una revisión sobre los métodos aplicados en la resolución de este problema. El *problema inverso de identificación* consiste en: "Dados valores medidos de h , digamos $h^*(x_i, y_i, t_j)$, en un número finito de tiempos t_j , encontrar un conjunto particular de parámetros, los cuales, al mismo tiempo que no difieren mucho de (posibles) estimaciones previas, llevan una concordancia óptima entre valores medidos y valores calculados de h ". Los parámetros teóricamente son considerados de dimensión infinita. La reducción del número de parámetros de dimensión infinita a su forma finito dimensional es llamada *parametrización*.

El problema inverso de identificación es a menudo *mal condicionado*, porque su solución no es única y es inestable respecto a las condiciones iniciales. El problema de la unicidad en la identificación de parámetros está relacionado al concepto de *identificabilidad*, que se refiere al problema de si es posible obtener soluciones únicas del problema inverso para parámetros desconocidos de interés en el modelo matemático, basados en datos recolectados en el dominio espacio-temporal.

CAPÍTULO 0. INTRODUCCIÓN

Existen dos maneras de llevar a cabo la parametrización:

1. *Método de Zonación*: Este método consiste en dividir el dominio en un número de subregiones o zonas, en donde se considera un valor característico constante en cada zona. Es decir, se considera un valor por cada zona. Aquí la dimensión de la parametrización es el igual al número de zonas.

2. *Método de Interpolación*: En este método la región es subdividida en un número de elementos conectados por un número determinado de nodos. Cada nodo está asociado con una función base. La función del parámetro es aproximada por la combinación lineal de las funciones base, donde la dimensión corresponde al número de valores del parámetro en los nodos.

Con lo discutido hasta el momento podemos plantear los objetivos de la tesis, así como los procedimientos realizados para alcanzarlos. Entre los objetivos de este trabajo de tesis tenemos, proporcionar una herramienta que ayude a resolver el problema de la administración de recursos hidráulicos subterráneos, a través del estudio del modelo en ecuaciones diferenciales parciales. En particular, se programa un simulador en elemento finito que resuelve el problema predictivo de niveles piezométricos, y por ende permite calcular las direcciones de los flujos bajo condiciones de Dirichlet dadas. Al no contar con datos reales, se generan datos sintéticos de h para distintos tiempos. Estos valores simularán los valores del potencial hidráulico para distintos tiempos. El método de Galerkin con elemento finito presenta la ventaja de poderse trabajar con distintos dominios, es decir, para distintas formas de acuíferos. Esto es importante pues en la práctica la forma de los acuíferos es muy diversa.

Como se había mencionado, un modelo sin la debida calibración carece de utilidad. El problema inverso de identificación de parámetros es el tema central de este trabajo. El método que se utiliza para resolver el problema inverso se llama *método del sistema diferencial* (MSD). Este método ha sido aplicado en el caso de un acuífero confinado por Parravicini et al., [1995] [6]. Vázquez et al. [11] lo aplican al caso no confinado utilizando el método de balance de celdas en la parte predictiva. El MSD consiste, para el caso estacionario, en que a partir de al menos dos conjuntos de datos de potenciales hidráulicos, el término fuente y un valor del parámetro a identificar se plantea un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Este sistema se resuelve a través de curvas parametrizadas en los puntos en donde se desean conocer los parámetros. En el caso transitorio es necesario al menos tres conjuntos de datos para determinar la conductividad y el coeficiente de almacenamiento simultáneamente.

Como último punto, se hacen experimentos numéricos al alimentar el método inverso con datos con ruido gaussiano, para obtener evidencia numérica de su estabilidad y sus posibles repercusiones en las simulaciones hechas con estos datos. Esto en la realidad equivale a los errores en las mediciones de los datos. Se aplica también un algoritmo de regularización tomado de la literatura de procesamiento de imágenes, con el fin de mejorar la calidad de los datos con ruido usados en el problema inverso.

El método del sistema diferencial ha demostrado ser útil en la práctica de identificación de parámetros, sin embargo, matemáticamente no ha sido completamente estudiado. Esto ofrece un campo de estudio que pueda dar lugar a futuros trabajos.

Capítulo 1

Modelación Matemática. Elementos de Geohidrología

En este capítulo se hace una breve descripción de los conceptos involucrados en el modelo que estamos estudiando. Se plantean las leyes que gobiernan el fenómeno, y se explican las hipótesis y/o simplificaciones hechas para obtener el modelo.

1.1 Conceptos de Geohidrología

Los conceptos que a continuación se enumeran fueron tomados del libro de Bear [1], referencia clásica en la Hidráulica de aguas subterráneas.

Una posible clasificación de las aguas de nuestro planeta consiste en dividir las en: a) Aguas Superficiales, y b) Aguas Subterráneas, siendo estas últimas las de nuestro interés.

Un **Acuífero**, de acuerdo a Bear [1], es una formación geológica que tiene dos características: i) contiene agua, y ii) permite el movimiento de cantidades significativas de la misma. El término acuífero tiene sus raíces en el Latín, de los prefijos *aqua*, que significa agua, y de *ferre* que significa producir.

Existen otros tipos de formaciones hidrológicas como el: **Acuicludo**, que contiene agua, a veces en cantidades considerables, pero cuya capacidad de transmisión de fluido es significativamente menor a la del acuífero. Generalmente, este tipo de formaciones se considera impermeable.

Acuitardo, es una formación de naturaleza impermeable, es decir, no es impermeable pero de muy baja permeabilidad, pero que en grandes extensiones horizontales puede conducir agua entre acuíferos.

Acuifugo, que no contiene agua ni la transmite.

Estos tipos de formaciones se componen de:

1. **Espacio Poroso**. Es el espacio vacío donde se ha de almacenar el agua. Los poros, también llamados *intersticios* deben estar comunicados de alguna manera para así poder transmitir el agua.

1.1. CONCEPTOS DE GEOHIDROLOGÍA

Los intersticios se pueden clasificar en *originales*, debidos a los sedimentos en su formación, y en *secundarios*, ocasionados por fisuras, uniones, etc.

2. **Matriz Sólida** Es la formación geológica en si, está compuesta de distintos materiales, tales como arcillas, arenillas, etc. y en algunos caso son formaciones fracturadas saturadas de agua, tales como rocas. Dependen del tipo de suelo donde se encuentra el acuífero.

El suelo posee distintos grados de saturación. La **distribución de la humedad** típica (vertical) de la humedad en el suelo se compone de dos zonas,

a. **Zona de Saturación.** Como su nombre lo indica, en esta los poros están completamente llenos de agua. Es aquí donde de manera práctica se encuentran los acuíferos. Para ser más precisos en nuestra terminología, lo que se conoce como **agua subterráneas**, son aquellas que se encuentran en la zona de saturación.

b. **Zona de Aereación.** En esta los poros contienen gases, principalmente vapor de agua, además de tener agua. Va desde el manto freático hasta la superficie de la tierra. Esta a su vez se compone de tres zonas (ver figura 1.1):

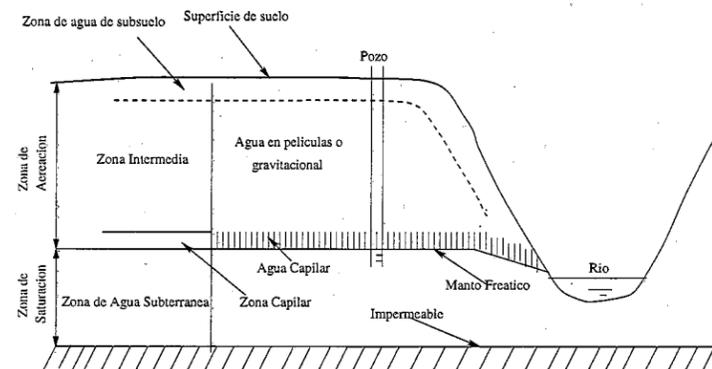


Figura 1.1: Distribución de las zonas del agua subterránea

a) **Zona de Agua Terrestre.** Adyacente a la superficie terrestre, se extiende hasta la zona de las raíces de los árboles. En una zona donde el agua dreña con facilidad hacia la atmósfera debido la evaporación y hacia las zona más profundas. Se llama *capacidad de campo*, a la humedad en esta zona después de un periodo prolongado, sin que haya habido suministro de agua. El *coeficiente hidrosópico*, es la humedad máxima que absorberá un sólido seco cuando se le pone en contacto con la atmósfera con una humedad relativa del 50 % a una temperatura de 25 °C.

b) **Zona Intermedia.** Del límite de la capa de la zona de agua terrestre hasta la capa superior de la zona de capilaridad. Puede no existir, pues esta zona depende de la profundidad del manto freático. La *zona de capilaridad*, es aquella que presenta una humedad por debajo de coeficiente higroscópico, además de que el agua se presenta en películas.

c) **Franja de Capilaridad.** Se extiende desde el manto freático hasta el límite en crecimiento en altura del agua. Su espesor depende del tipo de material. La humedad aumenta

CAPÍTULO 1. MODELACIÓN MATEMÁTICA. ELEMENTOS DE GEOHIDROLOGÍA

con la profundidad. A la zona con una humedad mayor al 74% ya no se considera dentro de la franja capilar, sino dentro de la zona saturada. En esta zona la presión es menor que la presión atmosférica.

El **manto freático**, podemos definirlo como aquella superficie imaginaria en donde la presión registrada es la presión atmosférica (Presión relativa = 0 Pa, Pa = Pascales). De manera práctica, el manto freático se encuentra al perforar un pozo, siendo este el nivel en donde brota el agua. La existencia de una manto freático es sinónimo de acuífero freático; la frontera de un acuífero no confinado define la superficie libre freática.

1.1.1 Clasificación de Acuíferos

La clasificación de acuerdo al manto freático se divide en:

Acuífero Confinado. También llamado *Acuífero de presión*, es aquel que se encuentra encerrado entre dos formaciones impermeables, cuya dimensiones horizontales son más grandes que las verticales. Como su nombre lo indica, se encuentra confinado. Presenta como característica que cuando se cava un pozo a una profundidad más allá de la formación superior, el agua sube a un nivel superior de donde se encontró el agua. En otras palabras, hay cierta presión que hace subir el agua. En ocasiones el agua sube más allá de la superficie, cuando esto ocurre, toman el nombre de *Acuífero Artesiano*.

Acuífero No Confinado. También llamado *Acuífero Freático*, es aquel que tiene como frontera superior al manto freático, en otras palabras que no tiene una superficie impermeable que lo tenga confinado. Aunque en la parte superior del manto freático tenemos la *franja capilar*, esta se desprecia. Aquí la recarga del acuífero se da principalmente a través de la superficie terrestre.

Una característica que a veces se presenta es la *filtración*. Un **acuífero filtrante** se caracteriza por ganar o perder agua a través de las formaciones que lo acotan, ya se sea inferior o superior. La cantidad de agua que escurre (o filtra), depende del tipo de superficie, pero si la extensión horizontal es muy grande la pérdida de agua puede ser considerable. Este flujo de agua depende también de la diferencia de cabezas hidráulicas a través de la formación permeable.

Un tipo de acuífero menos común es el **acuífero colgante**, pues consiste de un acuífero donde existe una capa impermeable o semimpermeable entre la superficie terrestre y el manto freático. Muchas veces este acuífero es temporal, porque en la mayoría de los casos termina escurriendo toda el agua.

1.2 Modelación Matemática de Acuíferos

En esta sección tratamos algunos puntos fundamentales en la modelación matemática de acuífero que se quiere estudiar.

1.2.1 El Enfoque Hidráulico

Este enfoque consiste, dicho en pocas palabras, en que es posible hacer una buena descripción del flujo en un acuífero si consideramos que el flujo es esencialmente horizontal. Discutamos con detalle esta suposición.

Es un hecho que el flujo en un acuífero es tridimensional, es decir, si q es el vector flujo, entonces se describe por medio de tres coordenadas, $q = (q_1, q_2, q_3)$. De manera análoga tenemos que la carga hidráulica depende de la posición en el espacio, y en este caso también del tiempo. Sin embargo, los acuíferos son regiones con extensiones horizontales grandes comparadas con sus extensiones verticales, generalmente a razón de 10 – 100 metros a kilómetros. Entonces se habla del concepto de *flujo esencialmente horizontal*, que consiste en desprejiciar la componente vertical del flujo q . El enfoque hidráulico es ampliamente usado para hacer simplificaciones al modelo tridimensional, sin perder la esencial del modelo inicial.

Entre las consideraciones prácticas tenemos que cuando tenemos pozos de extracción el flujo ya no puede considerarse esencialmente vertical. Se tiene como una regla empírica que el flujo puede ser considerado de nuevo como esencialmente horizontal, fuera de vecindades del pozo de radio de 1.5 a 2.0 veces el ancho del acuífero. Para un acuífero filtrante, se tiene la regla (también empírica), de que el flujo es esencialmente horizontal cuando el coeficiente de conductividad hidráulica del acuífero, sea mucho mayor respecto al coeficiente de conductividad de la formación semimpermeable, de tal manera que los efectos de filtración no modifiquen el flujo esencialmente horizontal o se puedan considerar despreciables.

Para resumir esta discusión, diremos que el enfoque hidráulico consiste en que las ecuaciones de flujo se obtienen promediando las ecuaciones tridimensionales a lo largo de acuífero, usando la suposición de superficies equipotenciales. En la sección 1.3.2 Hipótesis de Dupuit, se completa esta sección, ya el enfoque hidráulico va a la par con la Hipótesis de Dupuit.

1.2.2 Mecánica de Medio Continuo para flujos a través del Medio Poroso

Esta sección se explica algunos puntos del enfoque de la Mecánica Continua. Una referencia clásica es Lin, C. y Segel L. [5]. A continuación presentamos las ideas principales de manera descriptiva y de manera informal.

La Mecánica del Medio Continuo se base en leyes de conservación, tales como la leyes de conservación de masa, momentum lineal y angular. Además se usa la idea de que algunas propiedades de los materiales pueden ser consideradas como promedios en ciertas regiones.

Vamos a introducir algunos conceptos de medio poroso. En primer lugar, llamaremos **Medio Poroso**, al material del que está formado el acuífero puesto que no es un material sólido. Su parte sólida, que se le llama **matriz sólida**, y a la vacía a la que se llama **poros**. El espacio vacío no es completamente utilizado porque no todos los poros se encuentran comunicados. De ahí surge el concepto de **espacio poroso efectivo**, que es el espacio vacío (no sólido) que contribuye a flujo de agua por el acuífero.

El concepto básico es el **Volumen Representativo Elemental**, que por sus siglas en inglés lo llamaremos REV (Representative Elementary Volumen). Para definir el REV hagamos el siguiente experimento mental.

Supongamos que tenemos un medio poroso y $U(x) \subset R$ un volumen centrado en el punto x . Sea E una cierta propiedad extensiva, es decir, que depende de la cantidad en U . Entonces definimos

$$\rho_E(x, t; U(x)) = \frac{E \text{ en } U(x)}{U(x)} \quad (1.1)$$

con la densidad promedio de E sobre U en el tiempo t . En general, ρ_E depende del tamaño, la forma, la orientación y el tiempo de U . Nuestra meta está hacer depender a ρ_E solamente de x y t . Para hacer esto debemos encontrar un volumen U_0 , tal que:

$$\frac{\partial \rho_E[x, t; U_0(x)]}{\partial U_0} \quad (1.2)$$

En otras palabras queremos encontrar un volumen U en donde la propiedad E sea una propiedad intensiva. De este modo se define la función $\rho_{E,t}$, en todo el dominio R como un continuo. Para cada E podemos encontrar este volumen U_0 , que es el que llamamos REV de sistema material R .

Para entender este concepto vamos a dar un ejemplo que surge precisamente en nuestro problema.

Sea P un punto (matemático) en el espacio poroso, y U^i un volumen esférico centrado en P , tal que U^i es mucho menor el volumen de un poro. La propiedad que vamos a poner de ejemplo es la *cantidad de espacio vacío*, cuyo volumen lo denotaremos por U_v .

Si construimos una sucesión de volúmenes tal que:

$$U^1 > U^2 > U^3 > \dots \quad (1.3)$$

Se obtiene un comportamiento tal que cuando U^i es muy grande entonces $n^i = \frac{U_v^i}{U^i}$ sufre pocos cambios porque simplemente las variaciones de espacio vacío son pequeñas, digamos que estamos mirando desde muy lejos, y por lo tanto no podemos distinguir tanto. Sin embargo, si a nuestra lupa le incrementamos su poder de acercamiento, digamos que $\lim_{U^i \rightarrow 0} \frac{U_v^i}{U^i}$, entonces el volumen que estamos observando sería muy pequeño, tanto que las variaciones del espacio vacío serían muy bruscas (convergería en un punto lleno o en uno vacío), y por lo tanto no nos serviría.

Lo que necesitamos entonces es un valor intermedio, $U_{\min} < U_0 < U_{\max}$, de tal modo que:

$$n(p) = \frac{U_{0v}}{U_0}; \quad \frac{\partial U_{0v}}{\partial U_0} = 0; \quad 0 < n < 1 \quad (1.4)$$

o visto de otro modo,

$$n(P) = \lim_{U^{(i)} \rightarrow U_0} n^{(i)}[U^{(i)}(P)] = \lim_{U^{(i)} \rightarrow U_0} \frac{U(P)_v^{(i)}}{U(P)^{(i)}} \quad (1.5)$$

donde: $U_{0v} \equiv$ Volumen del vacío en U_0 , $n(P)$ Porosidad (volumétrica) del medio.

Como queremos reemplazar nuestro medio poroso por un continuo ficticio, entonces asignamos valores de E , a $P(x)$ como promedios. Ejemplos de algunos tipos de propiedades que han sido tratadas de este modo son: presión, velocidad, concentración de soluto.

1.2.3 Inhomogeneidad y Anisotropía

La **permeabilidad** del medio poroso, K , es la característica del material, que nos indica cuanta agua es capaz de transmitir (permear) a través del acuífero.

Se dice que un **medio poroso es homogéneo** si su permeabilidad es la misma en todas sus partes. De otro modo, se dice que el medio es **inhomogéneo**. En la práctica se tienen

1.3. LA LEY DE DARCY

medios porosos que son inhomogeneos, es decir, depende de las variables espaciales, así como de la temporal.

Otro concepto que nos interesa es la Isotropía. Decimos que un medio es isotrópico, si la permeabilidad es independiente de la dirección en la que fluye el fluido. El concepto de isotropía puede ser aplicado también a la conductividad hidráulica y la transmisividad en un acuífero confinado.

En general se distinguen dos tipos de dominios de acuíferos inhomogéneos: *tipo 1* en donde se tiene un cambio gradual en la conductividad, y *tipo 2* con cambios abruptos a través de superficies bien definidas de discontinuidad.

1.3 La Ley de Darcy

En esta sección se explica la ecuación principal que modela el flujo en un acuífero no confinado, y se hacen observaciones sobre su validez.

El agua subterránea se mueve a velocidades extremadamente pequeñas, pero su importancia radica en los grandes volúmenes. El modelo que usamos fue el resultado de la investigación realizada por Henry Darcy en 1856. Su trabajo consistió en estudiar filtros de arena homogénea relacionadas con las fuentes de la ciudad de Dijon (Francia). En la figura 1.2 se muestra un esquema del experimento de Darcy. Su resultado principal se resume en la

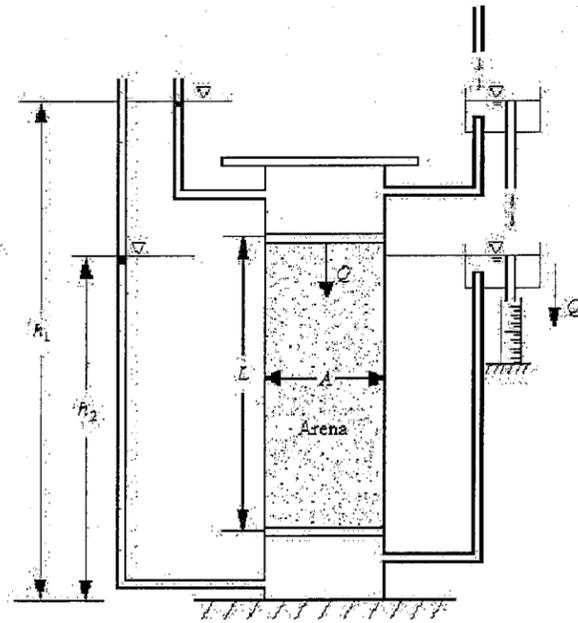


Figura 1.2: Experimento de Darcy

siguiente ley: "La tasa de flujo (volumen de agua por unidad de tiempo), Q , es proporcional

CAPÍTULO 1. MODELACIÓN MATEMÁTICA. ELEMENTOS DE GEOHIDROLOGÍA

a: (a) área transversal, (b) la diferencia de alturas, $h_1 - h_2$, (c) al inverso de la longitud, L . Poniéndolo en una fórmula.

$$Q = KA(h_1 - h_2)/L \quad (1.6)$$

donde: $h_1 - h_2$ = es la carga piezométrica a través de la longitud L , $\frac{h_1 - h_2}{L}$ = gradiente hidráulico, porque la cabeza hidráulica incluye la suma de presiones, q = descarga específica (volumen/unidad de tiempo)

También podemos escribirla como:

$$q = KJ \quad (1.7)$$

donde: $q = \frac{Q}{A}$ y $J = \frac{h_1 - h_2}{L}$.

La figura 1.3 muestra como la ley de Darcy puede ser extendida a un flujo a través de un medio poroso que se encuentra inclinado, cuya expresión es:

$$Q = KA \frac{\phi_1 - \phi_2}{L} \quad q = K(\phi_1 - \phi_2)/L = KJ \quad \phi = z + P/\gamma \quad (1.8)$$

donde: p = Presión, γ = Peso específico, y $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ = pérdida de energía debida al flujo a través de un medio tortuoso (la energía cinética se desprecia.)

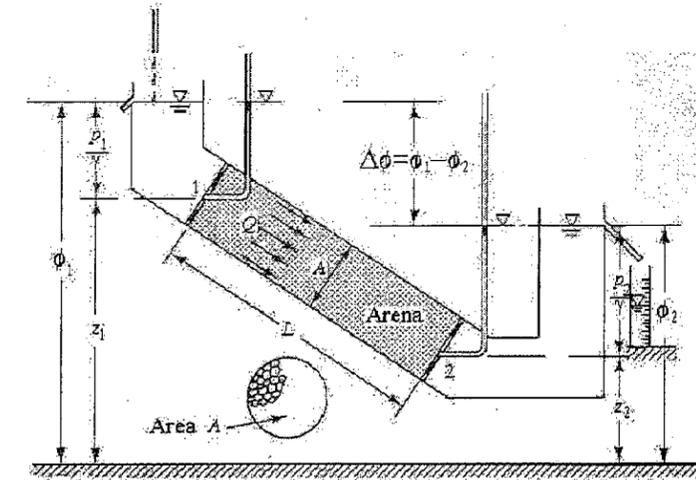


Figura 1.3: Experimento de Darcy

Cuando tenemos la condición isotérmica sobre el sistema, $\gamma = \gamma(p)$, y entonces la cabeza de presión se define como:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\gamma(p)} \quad (1.9)$$

1.3. LA LEY DE DARCY

entonces la carga piezométrica se convierte en:

$$\phi^* = z + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\gamma(p)} \quad (1.10)$$

donde: z = carga debida a la energía potencial. Esta ecuación fue introducida por Hubbert en 1940.

Es importante explicar que el flujo se da de valores grandes de h a los menores. Es decir, se puede dar el caso en el que el flujo se da en contra de las presiones, siempre y cuando el flujo se da a favor de la diferencia de potenciales. En el caso en que $z_1 = z_2$, tendríamos la ecuación es:

$$Q = KA \frac{p_1 - p_2}{\gamma L} \quad (1.11)$$

Tenemos que hacer varias precisiones de la ecuación que hemos planteado.

1. El flujo sólo se da en parte del área A , debido a que el medio es poroso y el flujo no se da a través de la matriz sólida.
2. Se puede mostrar que la porosidad de la matriz vista como área es igual a la porosidad volumétrica. La porción de A disponible para el flujo del agua en nA está dada por:

$$V = \frac{Q}{nA} = \frac{q}{n} \quad (1.12)$$

3. Puede ocurrir que existan poros donde parte del fluido es inmóvil o prácticamente lo es. Esto puede ocurrir cuando el flujo se da en un medio con textura muy fina donde la adhesión es un factor importante. También puede ocurrir que existen poros sin salidas. En estos casos se define la porosidad efectiva con respecto al flujo en el medio, n_{ef} , ($< n$), tal que:

$$V = \frac{q}{n_{ef}} \quad (1.13)$$

4. Hay que diferenciar entre:

- $q \equiv$ descarga (volumen a través de una unidad de área)
- velocidad promedio, para determinar la velocidad del frente de las partículas.
- velocidad microscópica, que es local a nivel del poro.

5. La dimensiones con las que trabajamos son:

$$[q] = \frac{L}{T} \quad [v] = \frac{L}{T} \quad [K] = \frac{L}{T} \quad (1.14)$$

CAPÍTULO 1. MODELACIÓN MATEMÁTICA. ELEMENTOS DE GEOHIDROLOGÍA

6. $K \equiv$ Conductividad hidráulica del medio poroso, a veces se llama coeficiente de permeabilidad. Depende de las propiedades de la matriz sólida y del fluido, en la sección 1.3.1 se dará una discusión más detallada de este coeficiente.

Ahora bien, el experimento se realizó para un flujo que se mueve en una dimensión. Sin embargo, se puede extender a un flujo bidimensional, considerando el enfoque hidráulico, y también a flujo tridimensional.

Extensión de la ley de Darcy

La generalización de la Ley de Darcy es prácticamente inmediata al considerar las tres dimensiones, y el gradiente en vez de la derivada,

$$\mathbf{q} = K\mathbf{J} = -K\nabla\phi; \quad \mathbf{v} = \mathbf{q}/n \quad (1.15)$$

donde: $\mathbf{v} \equiv$ vector velocidad, $\mathbf{q} \equiv$ descarga específica y $\mathbf{J} = \nabla\phi$, gradiente hidráulico.

Si el acuífero es homogéneo entonces K es un escalar. Por otro lado, consta de tres ecuaciones. En cualquier dimensión podemos escribir la ecuación como:

$$\mathbf{q}_s = q \cdot \mathbf{1}_s = -K \frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{1}_s} = n\mathbf{V}_s \quad (1.16)$$

donde: $\mathbf{1}_s$ es el vector unitario en una dirección dada. Por otro lado se pueden relacionar las variables microscópicas con las macroscópicas, es decir, si hacemos $V \equiv \bar{U}$, y usando el lenguaje de la Mecánica del medio continuo obtenemos:

$$\bar{V}_j = \frac{1}{U_{0v}} \int_{(U_{0v})} V_j dU_v \quad (1.17)$$

y

$$n\bar{V}_j \equiv q_j = \frac{1}{U_{0v}} \int_j V_j dU_v \quad (1.18)$$

donde $V_j \equiv$ j-ésima componente de la velocidad local. La velocidad definida en la ley de Darcy es la velocidad respecto a la matriz sólida. Esta se mueve ligeramente, pero se puede considerar que la matriz es fija.

De la ley de Darcy tenemos que el gradiente de q y ∇h son colineales, y de las propiedades del gradiente se sigue que q es ortogonal a la superficie donde ϕ es constante.

Existen otras formas de la Ley de Darcy que pueden ser deducidas a partir de la ecuación de Navier-Stokes como lo son:

$$\mathbf{q} = \frac{-k}{\mu} (\nabla p + \rho g \mathbf{1}_z) = \frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{1}_y + \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right) \mathbf{1}_z \right] \quad (1.19)$$

$$\mathbf{q} = \frac{k}{\mu} (\nabla p - \rho \mathbf{g}) \quad (1.20)$$

1.3. LA LEY DE DARCY

donde: μ = viscosidad dinámica, $\rho = \gamma/g$ densidad del fluido, k = permeabilidad promedio y g = vector gravedad.

Otro caso es cuando tenemos un fluido que es compresible, $\rho = \rho(p)$, entonces tenemos,

$$\mathbf{q} = -K\nabla\phi^* \quad (1.21)$$

donde: ϕ^* = potencial de Hubbert.

Rango de Validez de la Ley de Darcy

Para darnos una idea del rango de validez es necesario analizar el comportamiento que se presenta en la figura 1.4. De manera análoga a flujo de fluidos a través de tuberías se define el número de Reynolds como:

$$Re = qd/\nu \quad (1.22)$$

donde: $d \equiv$ longitud representativa de la matriz porosa (generalmente se toma como la longitud representativa de los granos), ν = viscosidad dinámica.

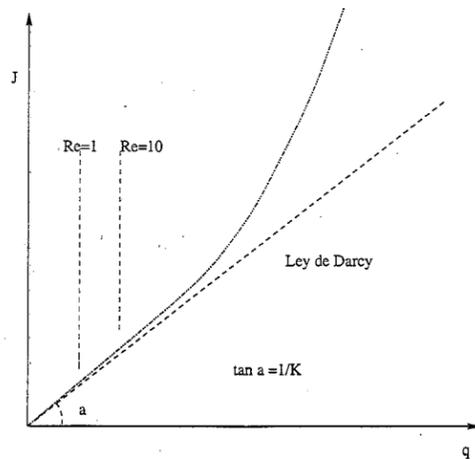


Figura 1.4: Rango de validez de la ley de Darcy.

Algunas maneras que se sugiere calcular el diámetro representativo son:

1. d_{10} = el diámetro, tal que el 10% (en peso) de los granos son menores a su diámetro,
2. Collins, 1961, sugiere $d = (k/n)^{1/2}$,
3. Ward, 1964, sugiere $k^{1/2}$ para d .

CAPÍTULO 1. MODELACIÓN MATEMÁTICA. ELEMENTOS DE GEOHIDROLOGÍA

La evidencia experimental señala que la ley de Darcy es válida entre números de Reynolds entre $1 \leq Re \leq 10$, donde las fuerzas predominantes son las viscosas.

El flujo subterráneo ocurre a un número de Reynold menor a 10, con régimen laminar. Teóricamente la ley de Darcy no tiene un límite inferior de validez, siempre que existe un gradiente pequeño para iniciar el flujo.

1.3.1 Conductividad Hidráulica

La conductividad hidráulica se define como,

$$K = j\rho g/\nu = kg/\nu \quad (1.23)$$

donde: k es la constante de permeabilidad, ρ la densidad del agua, g la constante gravitacional. Esta constante expresa la facilidad con la que el fluido fluye a través del medio poroso. Como se aprecia de la fórmula depende las propiedades físicas de la matriz sólida, tales como: el tamaño del grano, forma del grano, tortuosidad, superficie específica y porosidad. Así como también de las propiedades del fluido, tales como: la densidad y las viscosidad dinámica. Para el caso isotrópico, la conductividad hidráulica se puede definir como $K \equiv q/\nabla\phi$, es decir, la constante de proporcionalidad de la Ley de Darcy. Entre las unidades usadas de K tenemos: 1) m/día, 2) cm/s, 3) Conductividad Hidráulica Estándar, 4) Campo (Acuífero).

Los valores de K se ven afectados por causas como: a) Resequead del área, b) temperatura, c) actividad biológica en los poros, o d) se puede tapar por estar acarreado materiales finos.

1.3.2 Hipótesis de Dupuit

Antes de explicar la hipótesis de Dupuit vamos a hacer algunas precisiones. En la franja capilar, con una altura h_c , por encima de la superficie freática, la presión es negativa, además la zona no se encuentra totalmente saturada. Como mencionamos anteriormente se considera saturada una zona si la humedad es mayor al 75%. En el caso de acuíferos no confinados, debido a que generalmente la altura de la franja capilar es pequeña en comparación al grosor del acuífero, entonces se desprecia tomando como límite superior del acuífero al manto freático.

La suposición de Dupuit surge de problema que se tiene porque la superficie freática nunca es completamente horizontal, ver figura 1.5. Entonces $\phi(x, y, z, t)$ se tendría que calcular resolviendo una ecuación diferencial parcial, en la que tendríamos que especificar una condición de frontera (no lineal) libre. La suposición se basa en que:

- 1) Las pendientes o inclinaciones de h son muy pequeñas, del orden de 1/1000 a 10/1000.
- 2) Para un fluido estacionario en el plano x,z , la superficie freática es una línea suave.

De la Ley de Darcy se tiene que para cualquier punto en esta línea, la descarga específica está en la dirección tangente a la línea,

$$q_s = -Kd\phi/ds = -Kdz/ds = -K \sin \theta \quad (1.24)$$

dado que el superficie freática $p = 0$ y por lo tanto $\phi = z$.

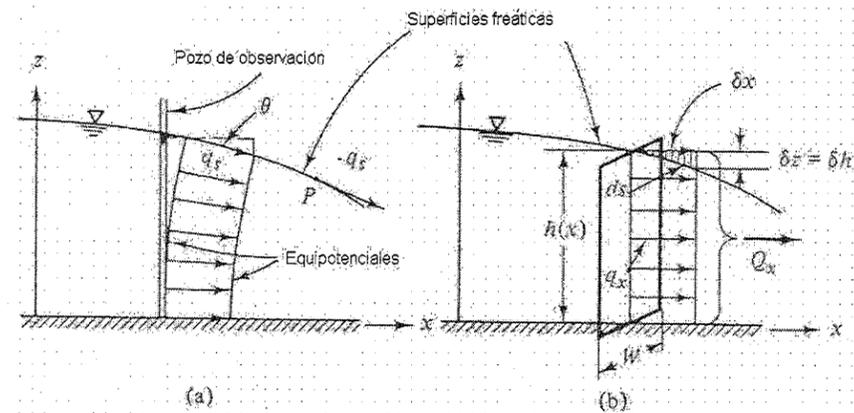


Figura 1.5: Suposición de Dupuit.

Lo que sugiere Dupuit (1863) es reemplazar el $\sin \theta$ por $\tan \theta$ que es igual a dh/dx , dado que θ es pequeña. Como $h = h(x, y, t)$ entonces la hipótesis de Dupuit queda:

$$q_x = -K \frac{\partial h}{\partial x}; \quad q_y = -K \frac{\partial h}{\partial y} \quad (1.25)$$

El que θ sea pequeña equivale a decir que las superficies equipotenciales son verticales y que el flujo es esencialmente horizontal. Esto implica que:

$$q_x = -K dh/dx, \quad h = h(x) \quad (1.26)$$

En general querría decir que :

$$q_x = -K \partial h / \partial x, \quad q_y = -K \partial h / \partial y; \quad h = h(x, y) \quad (1.27)$$

Como q no depende de z , entonces la descarga total a través de una superficie vertical de ancho W (normal a la dirección del flujo).

$$Q_x = -K \partial h \partial x, \quad Q_y = -K \partial h \partial y, \quad h = h(x, y) \quad (1.28)$$

Si dividimos por el ancho de acuífero tendríamos:

$$Q' \equiv Q/W = -Kh \nabla' h = -K \nabla' (h^2/2) \quad (1.29)$$

1.3.3 Almacenamiento en un acuífero

Considere una unidad horizontal de área de un acuífero freático. El volumen de agua almacenado en el acuífero está dado por el *manto freático*. Si como resultado del flujo en el acuífero, un volumen de agua deja esta área en exceso del volumen entrante, entonces el manto freático descenderá. La definición de **Almacenamiento de un Acuífero No Confinado** es:

$$S = \frac{\Delta U_w}{A \Delta h} \quad (1.30)$$

donde: U_w es el volumen de agua, A es el área horizontal, h el potencial hidráulico.

Esta fórmula nos dice que el almacenamiento en un acuífero es la razón de agua que entra (o sale) respecto al volumen formado por el área horizontal y al potencial hidráulico. En un acuífero confinado se define un coeficiente de almacenamiento, pero la diferencia es que ahí en lugar de la h se toma la ϕ porque la presión es importante en el confinado. Al almacenamiento de un acuífero freático también se le conoce como **descarga específica**, S_y , porque da la producción de un acuífero por unidad de área, por unidad de decremento de la carga hidráulica.

Cabe señalar que la *producción específica* no es lo mismo que la porosidad de un acuífero. Esto debido a que cuando el agua se drena los poros nunca quedan completamente secos, debido a las fuerzas capilares y/o intermoleculares. Se define entonces el concepto de **retención específica**, como el volumen de agua que queda en los poros después del drenaje, i.e.

$$S_y + S_r = n \quad (1.31)$$

La figura 1.6 muestra las relaciones entre S_y y S_r , además de los valores típicos que toma para distintos tipos de formaciones.

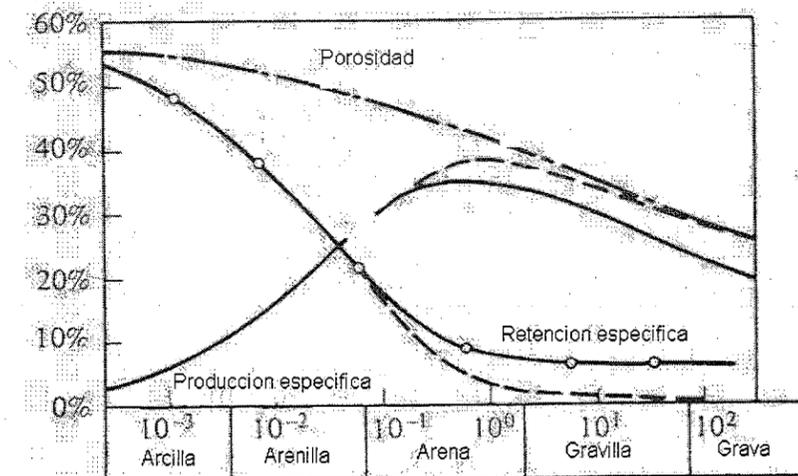


Figura 1.6: Coeficiente de Almacenamiento para distintos materiales.

Existen otros conceptos relacionados que a continuación se explican: Un acuífero está sujeto a cierta carga, σ , incluyendo la presión atmosférica. Esta carga está en equilibrio con el esfuerzo en la matriz sólida, σ' y por la presión del agua, p ,

$$\sigma = \sigma' + p \quad (1.32)$$

1.3. LA LEY DE DARCY

Cuando ocurren cambios en la carga total, también se producen cambios en σ' y p . Pero si la carga total se mantiene constante y las otras cambian entonces tenemos,

$$d\sigma = d\sigma' + dp = 0 \quad (1.33)$$

Entonces una reducción en la presión de agua produce un incremento en la esfuerzo de la matriz sólida, y viceversa.

Por otro lado, el agua es compresible y este hecho es importante en nuestra aplicación. Definimos el coeficiente de compresibilidad del agua, β como,

$$\beta = -\frac{1}{U_w} \frac{\partial U_w}{\partial p} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (1.34)$$

donde U_w y ρ son el volumen y la densidad, respectivamente, de una masa de agua dada sujeta a cambios en la presión.

El **Coefficiente de Compresibilidad** de la matriz sólida, α , se define por,

$$\alpha = -\frac{1}{U_b} \frac{\partial U_b}{\partial \sigma'} \quad (1.35)$$

donde U_b es el volumen del medio poroso.

Dado que el volumen de los sólidos U_s en U_b permanece constante, tenemos las siguientes relaciones,

$$U_s \equiv (1-n)U_b = \text{const}; \quad \frac{\partial U_s}{\partial \sigma'} = 0; \quad \frac{1}{U_b} \frac{\partial U_b}{\partial \sigma'} = \frac{1}{(1-n)} \frac{\partial n}{\partial \sigma'} \quad (1.36)$$

$$\alpha = -\frac{1}{1-n} \frac{\partial n}{\partial \sigma'} = \frac{1}{1-n} \frac{\partial n}{\partial p}$$

la cual relaciona α a los cambios de la porosidad, n resultado de los cambios de presión en el agua.

El **almacenamiento específico**, S_{op} , de un medio poroso en un acuífero es el volumen del agua liberada de éste, o en su defecto adicionada, en una unidad de volumen del acuífero por unidad de declinación, o aumento, en la presión.

$$S_{op} = \Delta U_m / U_b \Delta p \quad (1.37)$$

Por unidad de carga piezométrica

$$S_o \equiv S_{o\phi*} = \Delta U_w / U_b \Delta \phi^* \quad (1.38)$$

que tiene las dimensiones de L^{-1} . De la ecuación anterior se sigue que al adicionar un volumen de ΔU_w , a un acuífero de volumen U_b , la cabeza piezométrica se incrementará por:

$$\Delta \phi^* = \Delta U_w / U_b S_o \quad (1.39)$$

Se define el **Almacenamiento Específico**, S_0 , de medio poroso por medio de la ecuación 1.38.

CAPÍTULO 1. MODELACIÓN MATEMÁTICA. ELEMENTOS DE GEOHIDROLOGÍA

1.3.4 Balance de Masa y Ecuación de Continuidad

Balance de Masa

La ley de Darcy establece la ley de movimiento, ahora es necesario completarla con ley de conservación de masa. Se presenta una deducción un tanto intuitiva, suficiente para nuestro propósito.

Supongamos que tenemos un *volumen de control* que tiene una forma de una caja rectangular de dimensiones δx , δy y δz , centradas en el mismo punto, $P(x, y, z)$, en el dominio de un acuífero, vea la figura 1.7. Se ha fijado el volumen de control, así como su posición, lo que nos interesa ahora es escribir la ecuación de balance para este volumen, es decir, hacer el balance entre lo que entra y lo que sale. Se le llama *enfoque euleriano*, cuando se fija el volumen al hacer el balance. Cuando se fija la masa se llama *enfoque lagrangiano*.

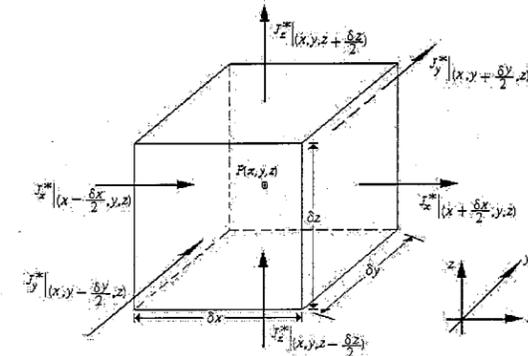


Figura 1.7: Conservación de masa para un volumen de control.

Denotemos a J^* , como el flujo de masa (masa por unidad de área por unidad de tiempo) de agua (o cualquier otro fluido) cuya densidad es ρ en un punto $P(x, y, z)$, entonces,

$$J^* = \rho q \quad (1.40)$$

En el eje x el exceso de flujo que entra respecto al que sale durante un intervalo de tiempo corto δt , a través de las caras de las superficies de la caja que son perpendiculares se expresan como:

$$\left[J_x^* \Big|_{x-\frac{\delta x}{2}, y, z} - J_x^* \Big|_{x+\frac{\delta x}{2}, y, z} \right] \quad (1.41)$$

De manera similar se pueden obtener los excesos de flujo en las direcciones y y z .

$$\left[J_y^* \Big|_{x, y-\frac{\delta y}{2}, z} - J_y^* \Big|_{x, y+\frac{\delta y}{2}, z} \right] \quad (1.42)$$

$$\left[J_z^* \Big|_{x,y,z-\frac{\delta z}{2}} - J_z^* \Big|_{x,y,z+\frac{\delta z}{2}} \right] \quad (1.43)$$

Sumando las tres últimas expresiones, obtenemos una expresión para el exceso total de masa del flujo que entra sobre el que sale, durante el tiempo δt ,

$$\left[\frac{J_x^* \Big|_{x-\frac{\delta x}{2},y,z} - J_x^* \Big|_{x+\frac{\delta x}{2},y,z}}{\delta x} + \frac{J_y^* \Big|_{x,y-\frac{\delta y}{2},z} - J_y^* \Big|_{x,y+\frac{\delta y}{2},z}}{\delta y} + \frac{J_z^* \Big|_{x,y,z-\frac{\delta z}{2}} - J_z^* \Big|_{x,y,z+\frac{\delta z}{2}}}{\delta z} \right] \delta x \delta y \delta z \delta t \quad (1.44)$$

donde: $\delta x \delta y \delta z = \delta U$ es el volumen de la caja. Si dividimos la ecuación 1.44 por δU y δt obtenemos el balance de masa por unidad de volumen por unidad de tiempo. Entonces, haciendo que las dimensiones de la caja converja al punto $P(x, y, z)$, es decir, $\delta x, \delta y, \delta z$ y $\delta t \rightarrow 0$ el exceso de flujo entrante sobre el saliente por unidad de volumen del medio alrededor del punto $P(x, y, z)$ y por unidad de tiempo se convierte en:

$$-(\partial J_x^* / \partial x + \partial J_y^* / \partial y + \partial J_z^* / \partial z) \quad \nabla J^* \quad J^* = \rho q \quad (1.45)$$

Por el principio de conservación de masa, en ausencia de fuentes y/o sumideros, el exceso de masa expresado por 1.45 tiene que ser igual a su cambio en el tiempo δt dentro de la caja. Dado que la masa es $m = \rho n \delta U$, la acumulación de masa durante el tiempo δt puede ser expresado como:

$$m|_{t+\Delta t} - m|_t \equiv [(\rho n)|_{t+\Delta t} - (\rho n)|_t] \delta U \quad (1.46)$$

De manera análoga, dividimos esta expresión por δU y por el tiempo t , para después hacerlos tender a cero, para obtener $\partial(\rho n) / \partial t$, como la masa de agua acumulada por unidad de volumen y unidad de tiempo en el punto P .

Entonces la ecuación de balance de masa puede ser ahora establecida como:

$$-\text{div}(\rho q) = \partial(\rho n) / \partial t \quad (1.47)$$

donde cada lado de la ecuación expresa la masa de agua por unidad de tiempo por unidad de volumen del medio poroso cerca del punto P . Esta ecuación es la que necesitamos para completar nuestro modelo. Se utiliza en muchísimos modelos físicos.

De las condiciones para 1.33, y para $\rho = \rho(p)$ tenemos:

$$\frac{\partial(\rho n)}{\partial t} = \rho \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\rho \frac{\partial n}{\partial p} + n \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.48)$$

Haciendo uso de 1.33, 1.34, 1.35, 1.36 y 1.10 obtenemos de 1.48

$$\frac{\partial(\rho n)}{\partial t} = \rho[\alpha(1-n) + \beta n] \frac{\partial p}{\partial t} = g \rho^2 [\alpha(1-n) + n\beta] \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial t} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.50)$$

Entonces, la expresión $g \rho^2 [\alpha(1-n) + \beta n] \equiv S_{0\phi^*}$ puede ser interpretada como el almacenamiento de masa específico relacionado al cambio de potencial. Da la masa de agua adicionada al almacenamiento (o desechada de este) en una unidad de volumen del medio poroso por unidad de aumento (o decremento) del potencial ϕ^* , comparando estas definiciones con el almacenamiento volumétrico específico expresado por 1.38, obtenemos,

$$S_{0\phi^*} = \rho S_{0\phi^*}; \quad S_{0\phi^*} = \rho g [\alpha(1-n) + n\beta] - g S_{0p}^* - \rho g S_{0p} \quad (1.51)$$

donde el subíndice ϕ^* indica la cantidad medida.

En la práctica es difícil determinar α y n , por lo que se determina $S_{0\phi^*}$ directamente de las observaciones de ϕ^* .

Por último regresando a 1.47 e insertando en esta $\partial(\rho n) / \partial t$ de 1.50 y 1.51 obtenemos la ecuación de continuidad,

$$-\text{div}(\rho q) = \rho S_{0\phi^*} \partial \phi^* / \partial t \quad (1.52)$$

Ecuación de Continuidad

El siguiente paso es introducir la ecuación de movimiento (Ley de Darcy) en la ecuación de continuidad, 1.47. Antes que nada tenemos que la ecuación de continuidad para un flujo estacionario o cuando ambas fluido y matriz sólida son incompresibles (como se supone en una acuífero no confinado), la ecuación 1.52 se reduce a:

$$\text{div}(q) = 0 \quad (1.53)$$

Recordemos que la ley de Darcy da la velocidad promedio respecto a la matriz sólida, y entonces para ser precisos se debería tomar en cuenta la velocidad de la matriz sólida. Se supondrá que: a) La velocidad de los sólidos es muy pequeña con respecto a q en 1.52 y que 1.53 aun puede ser expresada por la ley de Darcy.

b) K es constante, aunque $\rho = \rho(p)$, o si el medio es inhomogéneo, K varía en el espacio independientemente de la variabilidad de ρ .

c) S_0 y K no son afectados por las variaciones de n debidas a las deformaciones de la matriz.

d) $q \cdot \text{grad}(\rho) \ll n \partial \rho / \partial t$ de tal modo que 1.47 se reduce a $\rho \text{div} q + \partial(\rho n) / \partial t = 0$, es decir,

1.3. LA LEY DE DARCY

se supone que las variaciones espaciales en ρ son muchas más pequeñas que las locales y temporales.

Bajo estas suposiciones 1.52 puede ser escrita en términos de una sola variable ϕ^* , el * significa que estamos tratando con un fluido compresible.

$$-\text{div}q \equiv \text{div}(K \cdot \text{grad}\phi^*) = S_0 \partial\phi^* / \partial t \quad (1.54)$$

1.3.5 Ecuación para un Acuífero Freático

En la ecuación de continuidad en su forma 1.54 sustituimos la Ley de Darcy, para la cual aplicamos la hipótesis de Dupuit 1.25 tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Kh \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Kh \frac{\partial h}{\partial y} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1.55)$$

donde: $S \equiv S_y$, porque el almacenamiento debido al drenaje es mucho mayor al almacenamiento elástico, i.e. $S_y \gg S_0 h$.

Ahora bien, esta sería de la ecuación de un acuífero no confinado, para un medio poroso inhomogéneo, isotrópico, con una conductividad K y un coeficiente de almacenamiento $S = \eta_\epsilon$. Sin embargo, para nuestra modelación se requiere un término fuente, f , este término representa la extracción de pozos o la alimentación de acuífero debida a la recarga total promedio. Esta sólo tenemos que adicionarla en lado izquierdo de la ecuación 1.55 puesto que se obtuvo con el balance de masa para acuífero sin fuentes. Haciendo además la sustitución $S = \eta_\epsilon$ la ecuación se transforma en,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Kh \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Kh \frac{\partial h}{\partial y} \right) + f = \eta_\epsilon \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1.56)$$

Esta es la ecuación básica para el flujo de agua en acuífero subterráneo con base impermeable horizontal, también llamada **Ecuación de Boussinesq**.

Capítulo 2

Problema Directo

Como hemos mencionado el problema directo en la modelación de un acuífero (confinado o freático) consiste en el problema predictivo, es decir, encontrar los potenciales hidráulicos para un cierto periodo de tiempo. La solución de éste es una herramienta que se usa en la administración de recursos hidráulicos. En este capítulo se presenta la aplicación del método de Galerkin para ecuaciones parabólicas como solución del problema directo, además de generar datos sintéticos que nos serán de utilidad en el problema inverso.

2.1 Método de Galerkin.

La idea de esta sección es explicar a detalle el método que se siguió para obtener la aproximación de la solución. Esta discusión se basa en el artículo de Douglas & Dupont, [4], sobre el método de Galerkin. El método en sí consta de tres partes, a) la formulación débil, b) el método de Galerkin y c) el elemento finito. El procedimiento presentado a continuación se aplica a la ecuación 1.56 sujeta a condiciones de frontera homogéneas y condiciones iniciales, es decir,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Kh \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Kh \frac{\partial h}{\partial y} \right) + f = \eta_\epsilon \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$h(x, t, 0) = h_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (2.2)$$

$$h(x, y, t) = 0, \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, T] \quad (2.3)$$

Antes de comenzar con la descripción del método es conveniente tener una breve descripción de los espacios de funciones con los que se trabajará.

Un espacio $L^p(\Omega)$ es el espacio de Lebesgue de funciones que toman valores reales o complejos definidas sobre un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, siendo p un número natural, que son integrables con la norma,

$$\|v\|_{p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{1/p}, \quad v \in L^p(\Omega)$$

2.1. MÉTODO DE GALERKIN.

El espacio $C^k(\bar{\Omega})$, para $k = 1, 2, 3, \dots$ es el espacio de funciones, cuyas derivadas clásicas, hasta de orden k , son $C(\bar{\Omega})$. El espacio $C_0^\infty(\bar{\Omega})$, es el espacio de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en Ω ,

$$C_0^\infty(\bar{\Omega}) = \cap_{k=1}^\infty C^k(\bar{\Omega})$$

y

$$C_0^\infty = \{v \in C_0^\infty(\bar{\Omega}) \mid \text{supp } v \subset \Omega\}$$

Los espacios de nuestro interés son una clase particular de espacios de Sobolev $H^k(\Omega)$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Estos espacios son las clases de funciones que toman valores reales o complejos definidas sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ cuyas derivadas generalizadas, hasta el orden k están en $L^2(\Omega)$.

Usamos la notación multíndice para denotar derivadas de la siguiente manera. La m -ésima derivada (clásica o generalizada) de una función $v \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ es,

$$D^m v = \frac{\partial^{|m|} v}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_d^{m_d}}$$

donde m_1, m_2, \dots, m_d son enteros no negativos, y $|m| = m_1 + \dots + m_d$.

Ahora, para una función $v \in L^2(\Omega)$ se dice que tiene m -ésima derivada generalizada en $L^2(\Omega)$, si existe una función $z \in L^2(\Omega)$ tal que,

$$\int_{\Omega} z w \, d\Omega = (-1)^{|m|} \int_{\Omega} v D^m w \, d\Omega, \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega)$$

Entonces $D^m v = z$

Poniendo de manera más formal la definición para un espacio $H^k(\Omega)$ tenemos;

$$H^k(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid D^m v \in L^2(\Omega), |m| \leq k\}$$

Estos espacios se representan con la letra H , porque son espacios de Hilbert con el producto interior,

$$\langle v, w \rangle_{k,\Omega} = \sum_{|m| \leq k} D^m v \overline{D^m w}, \quad v, w \in H^k(\Omega)$$

y la norma inducida correspondiente. Una propiedad importante es que como las derivadas clásicas también son derivadas generalizadas, entonces se da la contención $C^k(\Omega) \subset H^k(\Omega)$.

El espacio con el que se plantea la formulación débil y el elemento finito es entonces,

$$H_0^1 = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$$

De manera simple, podemos decir que este espacio es el espacio de funciones medibles, cuya primera derivada (generalizada) es integrable y que se anulan en la frontera. Notemos que otra manera de describir a este espacio es $H_0^1 = C_0^\infty(\bar{\Omega})$, es decir la cerradura del conjunto de las funciones infinitamente diferenciables. También podemos decir que $H_0^1(\Omega)$ es la completación del espacio $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ bajo la norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

CAPÍTULO 2. PROBLEMA DIRECTO

2.1.1 Formulación Débil

La *formulación débil* consiste en transformar el problema 2.1 en un problema equivalente bajo condiciones de suavidad adecuadas. Primeramente multiplicando, la ecuación por una función $v \in H_0^1(\Omega)$.

$$\langle \eta_\epsilon \frac{\partial h}{\partial t}, v \rangle - \int_{\Omega} \nabla \cdot (Kh \nabla h) v \, d\Omega = \langle -f, v \rangle, \quad v \in H_0^1 \quad (2.4)$$

Se usa la notación de producto interior \langle, \rangle para representar la integración de dos funciones.

$$\langle w, z \rangle = \int_{\Omega} w z \, d\Omega \quad (2.5)$$

Procedemos ahora a integrar por partes aplicando la identidad:

$$v \nabla \cdot h = \nabla \cdot (vh) - h \cdot \nabla v \quad (2.6)$$

donde: v es una función escalar y h una función vectorial, para así obtener:

$$\langle \eta_\epsilon \frac{\partial h}{\partial t}, v \rangle - \int_{\Omega} \nabla \cdot (vKh \nabla h) \, d\Omega + \int_{\Omega} Kh \cdot \nabla v \, d\Omega = \langle -f, v \rangle, \quad v \in H_0^1 \quad (2.7)$$

Simplificando y aplicando el teorema de la divergencia al segundo término, obtenemos una integral en la frontera de una función que es un producto donde uno de sus factores es $v \in H_0^1$, lo cual nos dice a posteriori la conveniencia del tomar el espacio H_0^1 , pues las funciones en este espacio se anulan en la frontera,

$$\langle \eta_\epsilon \frac{\partial h}{\partial t}, v \rangle - \int_{\partial\Omega} vKh \nabla h \frac{\partial v}{\partial n} + \int_{\Omega} Kh \cdot \nabla v \, d\Omega = \langle -f, v \rangle, \quad v \in H_0^1 \quad (2.8)$$

Entonces la formulación débil es:

$$\langle \eta_\epsilon \frac{\partial h}{\partial t}, v \rangle + \int_{\Omega} Kh \nabla h \cdot \nabla v \, d\Omega = \langle -f, v \rangle, \quad v \in H_0^1 \quad (2.9)$$

sujeta a las condiciones iniciales y de frontera:

$$\langle h(x, y, 0), v \rangle = \langle h_0, v \rangle \quad (x, y) \in \Omega \quad \in H_0^1 \quad (2.10)$$

$$\langle h(x, y, t), v \rangle = 0 \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad \in H_0^1 \quad (2.11)$$

A esta formulación se le conoce como formulación débil porque podemos decir que es una solución en un sentido más débil, es decir, la h obtenida por este método no tiene la garantía de ser dos veces continuamente diferenciable. Por otro lado, se satisface una ecuación tipo integral, y entonces le podemos dar la interpretación de que la solución de la formulación débil satisface la ecuación original como un promedio (debido a la integral).

2.1.2 El método de Galerkin

La aproximación de Galerkin consiste en encontrar una aproximación al problema 2.9, para todo tiempo, en un espacio finito dimensional de funciones. Si este subconjunto finito dimensional es $\mathcal{M} \subset H_0^1$, entonces la aproximación debe ser uno de sus elementos, es decir, debemos resolver el siguiente problema,

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial t}, V \right\rangle + \int_{\Omega} KU \nabla U = \langle -f, V \rangle, \quad t > 0, \quad V \in \mathcal{M} \quad (2.12)$$

$$\langle U, V \rangle = \langle h_0, V \rangle, \quad t = 0, \quad V \in \mathcal{M}$$

Si $\{v_i\}_{i=1}^N$ es una base de este subespacio, $\mathcal{M} = \text{gen}\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$, entonces la aproximación de Galerkin sería la combinación lineal,

$$U(x, y, t) = \sum_{l=1}^N \alpha_l(t) v_l(x, y) \quad (2.13)$$

Los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ son funciones que dependen solamente del tiempo. Observemos que el espacio \mathcal{M} contiene funciones que solamente dependen de las variables espaciales. Analizando detenidamente, el sistema 2.12 es en realidad un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineal, sujeto a condiciones iniciales. Para ver esto se sustituye la aproximación de Galerkin en el sistema 2.12,

$$\left\langle \eta_\epsilon \frac{\partial \sum_{l=1}^n \alpha_l v_l}{\partial t}, V \right\rangle - \int_{\Omega} K \nabla \cdot K \left(\sum_{l=1}^n \alpha_l v_l \right) \nabla \left(\sum_{l=1}^n \alpha_l v_l \right) V d\Omega = \langle -f, V \rangle \quad (2.14)$$

$$t > 0, V \in \mathcal{M}$$

que se tiene que satisfacer para cada $V \in \mathcal{M}$. Esta condición es equivalente a que se satisfaga para cada elemento de su base. Entonces, al factorizar las coeficientes temporales que salen de la integral, puesto que solo dependen del tiempo se obtiene,

$$\sum_{l=1}^n \langle \eta_\epsilon v_l, v_k \rangle \frac{\partial \alpha_l}{\partial t} + \int_{\Omega} K \left(\sum_{l=1}^n \alpha_l v_l \right) \nabla \left(\sum_{l=1}^n \alpha_l v_l \right) \cdot \nabla v_k d\Omega = \langle -f, v_k \rangle$$

$$t > 0, V \in \mathcal{M} \quad (2.15)$$

Expresándola como matrices obtenemos:

$$A\dot{\alpha} + C(\alpha) = \langle f, v_k \rangle, \quad t > 0, v_k \in \mathcal{M} \quad (2.16)$$

$$C\alpha(0) = (\langle h_0, v_1 \rangle, \dots, \langle h_0, v_N \rangle)^T$$

donde: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $A_{k,l} = \langle \eta_\epsilon v_k, v_l \rangle$, $C_{k,l}(\alpha) = K \nabla v_k \nabla v_l$. Cabe señalar que C y $A(\alpha)$ son positivas definidas. De la teoría de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, se sigue fácilmente que $\alpha(t)$ existe para $t > 0$.

2.1.3 Condiciones de Dirichlet no homogéneas

En el método descrito en la sección anterior se supone que las condiciones de Dirichlet a las que se encuentra sujeta la edp son homogéneas. Para tratar condiciones de Dirichlet no homogéneas, se replantea el problema con condiciones homogéneas. Partimos de la formulación débil pero con condiciones de frontera no homogéneas,

$$\left\langle \eta_\epsilon \frac{\partial h}{\partial t}, v \right\rangle + \int_{\Omega} Kh \nabla h \cdot \nabla v d\Omega = \langle -f, v \rangle, \quad v \in \mathcal{M} \quad (2.17)$$

$$\langle h(x, y, 0), v \rangle = \langle h_0, v \rangle, \quad (x, y) \in \Omega \quad v \in \mathcal{M} \quad (2.18)$$

$$\langle h(x, y, t), v \rangle = \langle g(x, y), v \rangle \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad v \in \mathcal{M} \quad (2.19)$$

entonces definimos una función $w(x, y, t) = h(x, y, t) - g(x, y)$, que tiene condición de frontera cero, y que satisface el problema,

$$\left\langle \eta_\epsilon \frac{\partial (w+g)}{\partial t}, v \right\rangle + \int_{\Omega} K(w+g) \nabla (w+g) \cdot \nabla v d\Omega = \langle -f, v \rangle, \quad v \in \mathcal{M} \quad (2.20)$$

$$\langle w(x, y, 0), v \rangle = \langle h_0 - g(x, y), v \rangle \quad (x, y) \in \Omega \quad v \in \mathcal{M} \quad (2.21)$$

$$w(x, y, t), v \rangle = 0 \quad (x, y) \in \partial\Omega v \in \mathcal{M} \quad (2.22)$$

$$(2.23)$$

Se supone que la función $w \in \mathcal{M}$ para cada $t > 0$ y que $h, g, \nabla h, \nabla g, h_t$ y g_t están en $L^2(\Omega \times (0, T))$. Es reformulación es válida si h y g son suaves. Al recomodar la formulación débil obtenemos,

$$\left\langle \eta_\epsilon \frac{\partial w}{\partial t}, v \right\rangle + \int_{\Omega} K(w+g) \nabla w \nabla v d\Omega + \int_{\Omega} K(w+g) \nabla g \nabla v d\Omega = \langle -f, v \rangle, \quad v \in H_0^1 \quad (2.24)$$

Se introduce notación para esta formulación débil que nos será de utilidad en la siguiente sección. Llamamos

$$A(x, y, t, w) = K(w+g)$$

y

$$B(x, y, t, u) = K(u+g) \nabla g$$

Luego se define a y b como:

$$a(w; u, v) = \int_{\Omega} A(x, y, t, w) \nabla u \nabla v d\Omega \quad (2.25)$$

$$b = \int_{\Omega} B(x, t, u) \nabla v d\Omega \quad (2.26)$$

2.1. MÉTODO DE GALERKIN.

Entonces nuestra formulación débil usando esta nueva notación se ve como:

$$\left\langle \frac{\partial w}{\partial t}, v \right\rangle + a(w; w, v) + b(x, y, t, w) = \langle -f, v \rangle, \quad v \in H_0^1 \quad (2.27)$$

Ahora el problema se ha transformado de tal modo, que tenemos que encontrar la aproximación a una función w aplicando el método de Galerkin. Este método se aplica sin cambio alguno, y las matrices que se obtienen tienen las mismas propiedades.

2.1.4 Esquema de aproximación Crank-Nicolson-Galerkin

Para completar esta sección se presenta el esquema de aproximación que se usa para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales proveniente de la aproximación de Galerkin. Este método es un predictor-corrector que trata la parte temporal de manera análoga, al Crank-Nicolson en diferencias finitas. De ahí su nombre para aproximación Crank-Nicolson-Galerkin.

Definimos la aproximación $U_m \in \mathcal{M}$, como la aproximación en el tiempo t_m . Sea $t_m = t_{m-1} + \Delta t$, donde $\Delta t = t_m - t_{m-1}$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Sea $f_m = f(t_m)$. Considérese $t_{m+\frac{1}{2}} = (t_m + t_{m+1})/2$ en a , b y f , según la notación dada en la sección anterior. En las siguientes ecuaciones se toma $v \in \mathcal{M}$,

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial t}, v \right\rangle + a(U; U, v) + b(U, v) = \langle f(U), v \rangle \quad (2.28)$$

se define $\beta_1 = \frac{1}{2}(1 + \theta)$ y $\beta_2 = \frac{1}{2}(1 - \theta)$, θ vaía entre cero y uno, el esquema de aproximación completo entonces queda determinado por las ecuaciones,

Predictor:

$$\left\langle \frac{W_{m+1} - U_m}{\Delta t}, v \right\rangle + a(U_m; \beta_2 U_m + \beta_1 W_{m+1}, v) + b(U_m, v) = \langle f(U_m), v \rangle \quad (2.29)$$

Corrector:

$$\left\langle \frac{U_{m+1} - U_m}{\Delta t}, v \right\rangle + a(\beta_2 U_m + \beta_1 W_{m+1}; \beta_1 U_{m+1} + \beta_2 U_m, v) + b(\beta_2 U_m + \beta_1 W_{m+1}, v) = \langle f(\beta_2 U_m + \beta_1 W_{m+1}), v \rangle \quad (2.30)$$

Poniendo este sistema como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, como se describió anteriormente, y después de multiplicar por Δt tenemos,

Predictor:

$$\left[\langle \eta_\epsilon v_l, v_k \rangle + \beta_1 \Delta t \int_{\Omega} K(U_m + g) \nabla v_l \nabla v_k \, d\Omega \right] \alpha_p = \langle \eta_\epsilon v_l, v_k \rangle + \Delta t \langle -f, v_k \rangle - \Delta t \beta_2 \int_{\Omega} K(U_m + g) \nabla U_m \nabla v_k \, d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} K(U_m + g) \nabla g \nabla v_k \, d\Omega \quad (2.31)$$

CAPÍTULO 2. PROBLEMA DIRECTO

Corrector:

$$\left[\langle \eta_\epsilon v_l, v_k \rangle + \Delta t \beta_1 \int_{\Omega} K(\beta_2 U_m + \beta_1 W_{m+1}) \nabla v_l \nabla v_k \, d\Omega \right] \alpha_p = \langle \eta_\epsilon v_l, v_k \rangle + \Delta t \langle -f, v_k \rangle - \beta_2 \Delta t \int_{\Omega} K(\beta_2 U_m + \beta_1 W_{m+1}) \nabla U_m \nabla v_k \, d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} K(\beta_2 U_m + \beta_1 W_{m+1} + g) \nabla g \nabla v_k \, d\Omega \quad (2.32)$$

Como se puede observar este esquema involucra la aproximación de la derivada temporal. En el caso estacionario, no es necesario usar este esquema, porque el problema puede ser transformado en un sistema lineal. Los coeficientes β_1 y β_2 , que dependen de $\theta \in [0, 1]$, nos dicen con qué peso considerar las aproximaciones hacia adelante y hacia atrás. Con $\theta = 0$ lo que tomamos es el promedio.

Estos sistemas de ecuaciones dan lugar a matrices ralas, positivas definidas.

Es importante señalar que las integrales deben efectuarse de la manera más exacta posible, pues las cantidades involucradas en la edp están mal escaladas, es decir, las cantidades involucradas son muy dispares en órdenes de magnitud. En nuestro caso en particular, las funciones que se integran solamente involucran polinomios, por lo que se pueden resolver por medio del método de la cuadratura de Gauss.

2.2 El método del elemento finito.

En esta sección se describe como construir las funciones base de las que se han hablado en la sección anterior. Las ideas tratadas en esta sección fueron tomadas de Ciarlet, P. G. [3]. El

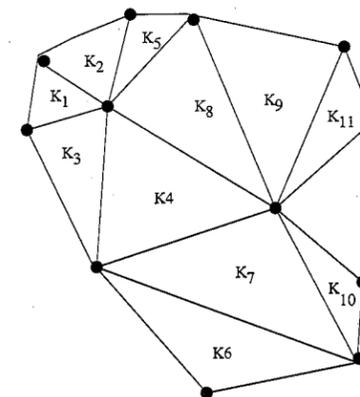


Figura 2.1: Triangulación de un dominio usando elementos triangulares.

método del Elemento finito nos indica de que manera debemos escoger la base de \mathcal{M} en el método de Galerkin, es decir, las funciones base del subespacio finito dimensional. A este tipo de espacios les llamaremos *espacio de elemento finito*. Existen tres aspectos fundamentales que caracterizan al método del elemento finito,

Característica 1

Se establece una **triangulación** \mathcal{T} sobre el conjunto $\bar{\Omega}$, es decir, este conjunto es dividido en un número finito de subconjuntos K , los cuales se llaman *elementos finitos*, de tal modo que las siguientes propiedades se satisfacen:

- i) $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}} K$.
- ii) Para $K \in \mathcal{T}$ el conjunto K es cerrado y su interior K° es no vacío.
- iii) Para cada K_i, K_j , con $i \neq j$ tenemos que $K^\circ \cap K^\circ = \emptyset$.
- iv) Cualquier cara de cualquier $K \in \mathcal{T}$ es un subconjunto de $\partial\Omega$, o una cara de otro elemento en triangulación.

En palabras más comunes una **triangulación**, consiste en dividir el dominio en regiones, que en este caso son triángulos. De manera análoga, se puede dividir la región en otros dominios poligonales, que pueden ser cuadrados, rectángulos u otra forma geométrica, con tal de que, dividan a todo el dominio Ω , sean distintos del vacío, y que la intersección entre dos elementos sea un vértice o una arista, propiedad iv.

Una vez establecida la triangulación, figura 2.1, se definen las funciones que generan al espacio del elemento finito. Por el momento lo llamamos X_h . Entonces dado un espacio X_h definimos los espacio,

$$P_k = \{v_h|_K : v_h \in X_h\} \tag{2.33}$$

generado por las restricciones $v_h|_K$ de las funciones en X_h a los elementos de la triangulación. Por el momento nos basta saber que bajo ciertas restricciones se tiene que $X_h \subset H^2(\Omega)$ y que $X_{0h} = \{v_h : v_h = 0 \text{ en } \partial\Omega \subset H_0^1 \cap H_0^1(\Omega)(\Omega)$. Esto es necesario de las suposiciones hechas en la formulación de Galerkin.

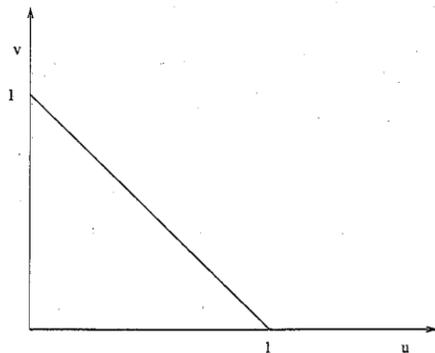


Figura 2.2: Elemento triangular con funciones base lineales

Característica 2

Los espacios $P_k, K \in \mathcal{T}_h$, contienen polinomios, o al menos funciones cercanas a polinomios, como lo son funciones polinomiales por pedazos.

Este punto es la razón de los resultados de convergencia, además dan lugar a que los cálculos numéricos se puedan tratar con facilidad.

Característica 3

Existe por lo menos una base canónica en el espacio V_h que corresponde a las funciones base que tienen soporte pequeño, además que las funciones base pueden ser fácilmente descritas.

Una función base se define de la siguiente manera:

Sea $\{z_j\}_{j=1}^M$ los vértices de los triángulos en la triangulación. Decimos que una **base de funciones** para esta triangulación $v_l, j = 1, 2, \dots, M$, está definida si,

- i) $v_l(x, y) \in C(\bar{\Omega})$,
- ii) v_l restringida a K_i es un polinomio de grado 1 (en este caso, porque puede variar), para $j = 1, 2, \dots, m$,
- iii) $v_l(z_k) = \delta_{l,k}$

Entonces,

$$\mathcal{M}_0 = \text{gen}\{v_1, v_2, \dots, v_M\} \tag{2.34}$$

Como un ejemplo en particular mostramos las funciones base en un elemento triangular, que se toma de hecho, como el dominio normalizado donde se realizan las operaciones de integración, después de aplicar un cambio de variable, ver figura 2.2

$$v_l(u, v) = 1 - u - v \tag{2.35}$$

$$v_l(u, v) = 1 - u \tag{2.36}$$

$$v_l(u, v) = 1 - v \tag{2.37}$$

2.3. Caso de estudio de un acuífero no confinado.

En esta sección describimos el acuífero sintético. Sin embargo, los valores de los coeficientes y su configuración son realistas. Este acuífero fue propuesto en el reporte de investigación Vázquez, R., Moreles, M. A. y Avila, F. [11], en donde se trata el problema directo con el método de balance de celdas.

El acuífero que estudiamos tiene un dominio cuadrado, figura 2.3, de dimensiones 200 metros

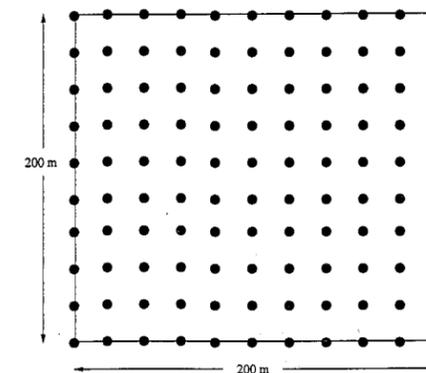


Figura 2.3: Distribución de nodos en un acuífero sintético.

2.3. CASO DE ESTUDIO DE UN ACUÍFERO NO CONFINADO.

por 200 metros en los ejes x y y, respectivamente. En base al enfoque hidráulico, discutido previamente, se supone que el flujo es esencialmente horizontal. Se considera que la base de acuífero es completamente horizontal impermeable. El término fuente describe las recargas naturales del acuífero y los pozos extractores, tabla 2.1.

Como se puede observar los datos se dan para sólo ciertos puntos, a los cuales llamamos

Tabla 2.1: Término fuente sin pozos en los nodos, 10^{-4}

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-0.3675	-0.3075	-0.2675	-0.2475	-0.2475	-0.2675	-0.3075	-0.3675	-0.4475
2	-0.2475	-0.1875	-0.1475	-0.1275	-0.1275	-0.1475	-0.1875	-0.2475	-0.3275
3	-0.1675	-0.1075	-0.0675	-0.0475	-0.0475	-0.0675	-0.1075	-0.1675	-0.2475
4	-0.1275	-0.0675	-0.0275	-0.0075	-0.0075	-0.0275	-0.0675	-0.1275	-0.2075
5	-0.1275	-0.0675	-0.0275	-0.0075	-0.0075	-0.0275	-0.0675	-0.1275	-0.2075
6	-0.1675	-0.1075	-0.0675	-0.0475	-0.0475	-0.0675	-0.1075	-0.1675	-0.2475
7	-0.2475	-0.1875	-0.1475	-0.1275	-0.1275	-0.1475	-0.1875	-0.2475	-0.3275
8	-0.3675	-0.3075	-0.2675	-0.2475	-0.2475	-0.2675	-0.3075	-0.3675	-0.447
9	-0.5275	-0.4675	-0.4275	-0.4075	-0.4075	-0.4275	-0.4675	-0.5275	-0.6075

nodos. Estos nodos se encuentran separados unos de otros 25 metros. Por lo tanto, tenemos que el dominio existen 81 nodos, de ellos 49 son nodos interiores y los restantes están en la frontera.

Todas las funciones de los coeficientes de la ecuación se interpolan por la base de funciones del elemento finito. Para describir entonces el caso que se está estudiando basta con poner los valores de los coeficientes del acuífero, así como su fuente y los datos de Dirichlet en los nodos donde se supone que tenemos la información. Estos se muestran en la tabla 2.2.

Tabla 2.2: Niveles piezométricos en la frontera

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	40.00	40.05	40.10	40.15	40.25	40.30	40.30	40.35	40.40
2	39.80	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	40.20
3	39.60	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	40.00
4	39.40	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	39.85
5	39.20	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	39.70
6	39.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	39.55
7	38.80	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	39.40
8	38.60	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	39.30
9	38.40	38.50	38.60	38.70	38.80	38.90	39.00	39.10	39.20

Los parámetros de los cuales partimos son la conductividad, y el coeficiente de almace-

CAPÍTULO 2. PROBLEMA DIRECTO

namiento. La conductividad se muestra en la tabla 2.3.

Tabla 2.3: Conductividad del acuífero freáticos en los nodos.

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.525	0.510	0.495	0.480	0.465	0.450	0.435	0.420	0.405
2	0.475	0.460	0.445	0.430	0.415	0.400	0.385	0.370	0.355
3	0.425	0.460	0.445	0.430	0.415	0.400	0.385	0.370	0.355
4	0.425	0.410	0.395	0.380	0.365	0.350	0.335	0.320	0.305
5	0.375	0.360	0.345	0.330	0.315	0.300	0.285	0.270	0.255
6	0.325	0.310	0.295	0.280	0.265	0.250	0.235	0.220	0.205
7	0.275	0.260	0.245	0.230	0.215	0.200	0.185	0.170	0.155
8	0.225	0.210	0.195	0.180	0.165	0.150	0.135	0.120	0.105
8	0.175	0.160	0.145	0.130	0.115	0.100	0.085	0.070	0.055
9	0.125	0.110	0.095	0.080	0.065	0.050	0.035	0.020	0.005

El coeficiente de almacenamiento se muestra en la tabla 2.4. Recordemos que el coeficiente de almacenamiento debe tomar un valor entre cero y uno.

Tabla 2.4: Coeficiente de almacenamiento en los nodos. Factor 10^{-6} .

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	033333	044444	050000	053333	055556	057143	058333	059259	060000
2	044444	066667	080000	088889	095238	100000	103704	106667	109091
3	050000	080000	100000	114286	125000	133333	140000	145455	150000
4	053333	088889	114286	133333	148148	160000	169697	177778	184615
5	055556	095238	125000	148148	166667	181818	194444	205128	214286
6	057143	100000	133333	160000	181818	200000	215385	228571	240000
7	058333	103704	140000	169697	194444	215385	233333	248889	262500
8	059259	106667	145455	177778	205128	228571	248889	266667	282350
9	060000	109091	150000	184615	214286	240000	262500	282353	300000

En la tabla 2.5 se muestran los nodos donde se encuentran ubicados los pozos de extracción. Es decir, a la fuente se le sustituyen estos valores en los nodos que se indican con pozos. La fuente que se obtiene es un término fuente distinto al de configuración sin pozos.

Tabla 2.5: Ubicación de los pozos de extracción.

Pozo	m	n	m^3/s
1	2	2	0.010
2	3	8	0.010
3	4	8	0.010
4	6	8	0.010
5	7	8	0.010

2.4 Configuración Inicial de Sistema

En esta sección se describe el proceso que se sigue para obtener los potenciales sintéticos para las condiciones iniciales. Una manera de generar estados estacionarios del sistema, es resolviendo la ecuación 1.56, con el término de la derivada temporal igualada a cero, $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$,

$$-\nabla \cdot (Kh\nabla h) = -f, \quad t > 0 \quad (2.38)$$

La idea es aplicar el procedimiento de aproximación que se describió anteriormente. Pero antes se transforma la ecuación en una ecuación que es lineal en la h^2 , para así facilitar su solución, para obtener,

$$-\nabla \cdot \left(\frac{K}{2} \nabla h^2\right) = -f \quad (2.39)$$

Luego definimos la función $H = h^2$, que sustituimos en la ecuación para obtener:

$$-\nabla \cdot (K\nabla H) = -2f \quad (2.40)$$

Sujeta a las condiciones iniciales y de frontera,

$$H(x, y, 0) = h^2(x, y, 0) = h_0(x, y) \quad \text{en } \Omega \quad (2.41)$$

$$H(x, y, t) = h^2(x, y, t) = g^2(x, y) \quad \text{en } \partial\Omega \quad (2.42)$$

La formulación débil es como sigue:

$$\int_{\Omega} K\nabla v \nabla H d\Omega = 2 \langle -f, v \rangle \quad v \in \mathcal{M} \quad (2.43)$$

sujeta a las condiciones,

$$\langle H(x, y, 0), v \rangle = \langle h_0(x, y), v \rangle, \quad v \in \mathcal{M} \quad (2.44)$$

$$\langle H(x, y, 0), v \rangle = \langle g(x, y), v \rangle, \quad v \in \mathcal{M} \quad (2.45)$$

Aplicando el método de Galerkin para encontrar la solución en un espacio finito dimensional,

$$\int_{\Omega} K\nabla v_k \nabla H d\Omega = 2 \langle -f, v_k \rangle \quad v_k \in \mathcal{M} \quad (2.46)$$

Ahora tenemos un problema que es lineal para la función H . Sin embargo, queremos aproximar h por medio de funciones en \mathcal{M} . Estas funciones se escogen de tal modo que se anulan en la frontera, además que la discusión se hizo para el caso homogéneo. Sin embargo en la sección 3.1.3, se explicó como dar condiciones de frontera no homogéneas, y para esta ecuación entonces tendríamos que definir la $w = H - g^2$. Que al ser sustituida en 2.46 nos da una ecuación cuya incógnita es w con condiciones de frontera homogéneas.

$$\int_{\Omega} K\nabla v_k \nabla (w + g^2) d\Omega = 2 \langle -f, v_k \rangle \quad v_k \in V(0) \quad (2.47)$$

Las condiciones de frontera entonces quedan como:

$$\langle w(x, y, 0), v_k \rangle = w_0(x, y) = \langle H_0(x, y) - g(x, y) \rangle \quad v \in H_0^1 \quad (2.48)$$

$$w(x, y, t) = 0 \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (2.49)$$

Retomando nuestro esquema numérico, queremos aproximar w por medio de las funciones de \mathcal{M} . w se obtiene encontrando los coeficientes α de la siguiente combinación lineal,

$$w = \sum_{l=1}^n \alpha_l v_l \quad \alpha = \alpha(t) \quad (2.50)$$

Sustituyendo esta aproximación en 2.47 tenemos,

$$\int_{\Omega} K\nabla v_k \nabla \left(\sum_{l=1}^n \alpha_l v_l + g^2\right) d\Omega = 2 \langle -f, v_k \rangle \quad v_k, v_l \in \mathcal{M} \quad (2.51)$$

Como las α no dependen de las variables temporales salen del ∇ y reordenado los términos obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales, cuyo vector a determinar es $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$,

$$\sum_{l=1}^n \alpha_l \int_{\Omega} K\nabla v_k \nabla (v_l + g^2) d\Omega = 2 \langle -f, v_k \rangle - K\nabla v_k \nabla (g^2) d\Omega \quad v_k, v_l \in \mathcal{M} \quad (2.52)$$

Para resolver este sistema es necesario hacer las integraciones correspondientes. Para este caso se hicieron de manera exacta, por medio de la transformación lineal que manda el soporte de cada función base a un soporte normalizado.

Los potenciales hidráulicos se muestran en la tabla 2.6. Como se puede observar los gradientes hidráulicos son pequeños. Las diferencias entre estos potenciales hidráulicos son apenas del orden de décimas o centésimas.

2.5. DATOS DEL TRANSITORIO

Tabla 2.6: Valores de h inicial obtenidos por elemento finito.

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	40.0	40.0500	40.1000	40.1500	40.2500	40.3000	40.3000	40.3500	40.4
2	39.8	39.8812	39.9530	40.0209	40.0934	40.1435	40.1690	40.1927	40.2
3	39.6	39.7045	39.7942	39.8729	39.9421	39.9929	40.0221	40.0299	40.0
4	39.4	39.5234	39.6280	39.7168	39.7899	39.8438	39.8748	39.8791	39.85
5	39.2	39.3391	39.4565	39.5550	39.6350	39.6942	39.7287	39.7329	39.7
6	39.0	39.1513	39.2788	39.3860	39.4741	39.5412	39.5823	39.5892	39.55
7	38.8	38.9572	39.0896	39.2032	39.2999	39.3779	39.4312	39.4474	39.4
8	38.6	38.7484	38.8755	38.9896	39.0933	39.1852	39.2605	39.3075	39.3
9	38.4	38.5000	38.6000	38.7000	38.8000	38.9000	39.0000	39.1000	39.2

Y los valores correspondientes de h_0 en los nodos, se muestran en la figura 2.4. En esta figura podemos observar que el flujo en el acuífero se da en dirección noroeste sureste. Recordemos que las líneas equipotenciales son normales al flujo. Los datos obtenidos sirvieron como condición inicial de la ecuación diferencial parcial. A partir de estos se generaron los datos en el caso transitorio.

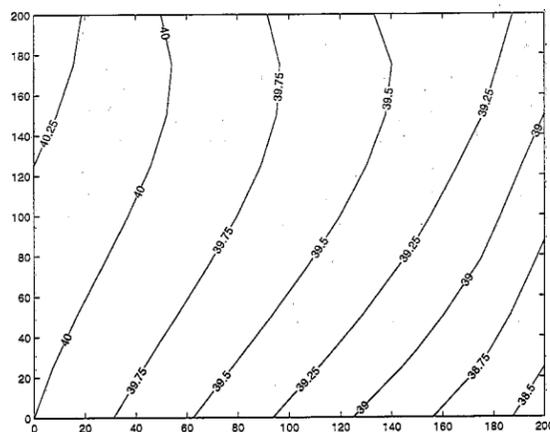


Figura 2.4: Potencial hidráulico inicial.

2.5 Datos del Transitorio

En este caso el esquema de aproximación se encuentra descrito en la sección de Esquema de Aproximación Galerkin-Crank-Nicholson. Es decir, a partir del valor inicial y de frontera se siguió ese esquema para así obtener las siguientes valores. Los tiempos considerados para

CAPÍTULO 2. PROBLEMA DIRECTO

calcular los potenciales hidráulicos en el transitorio, fueron tomados también de [11]. Se consideran los tiempo en años 0, 0.0010, 0.0025, 0.0050, 0.010, 0.022.

Tabla 2.7: Valores de h obtenidos por elemento finito.

Tiempo 1									
n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	39.8562	39.9113	39.9656	40.0186	40.0698	40.1183	40.1623	40.2
3	39.6	39.6619	39.7223	39.7811	39.8377	39.8911	39.9396	39.9792	40
4	39.4	39.4677	39.5337	39.5976	39.6589	39.7164	39.7686	39.8135	39.85
5	39.2	39.2739	39.346	39.4159	39.4829	39.546	39.6039	39.6551	39.7
6	39	39.0807	39.1595	39.236	39.3099	39.38	39.4446	39.5018	39.55
7	38.8	38.8878	38.9737	39.0577	39.1395	39.2181	39.2916	39.3557	39.4
8	38.6	38.6947	38.7878	38.8798	38.9705	39.0595	39.1456	39.2268	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2
Tiempo 2									
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	39.9981	39.9886	40.0192	40.0718	40.1372	40.2151	40.2686	40.2
3	39.6	39.7413	39.8075	39.8596	39.926	40.0118	40.1361	40.291	40
4	39.4	39.5199	39.6075	39.6823	39.7619	39.8597	39.9976	40.1857	39.85
5	39.2	39.3168	39.4128	39.4985	39.5865	39.6899	39.8239	39.9307	39.7
6	39	39.1193	39.2202	39.3122	39.4073	39.5252	39.7155	40.0142	39.55
7	38.8	38.9224	39.0264	39.1221	39.2204	39.3405	39.5386	39.9316	39.4
8	38.6	38.721	38.8258	38.9241	39.0224	39.1285	39.2555	39.4101	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2
Tiempo 3									
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	40.0073	40.0045	40.0405	40.0987	40.1693	40.2488	40.2927	40.2
3	39.6	39.757	39.837	39.9009	39.9793	40.077	40.2073	40.3456	40
4	39.4	39.5399	39.6464	39.739	39.8372	39.9543	40.1042	40.2706	39.85
5	39.2	39.339	39.457	39.5645	39.6767	39.8076	39.9631	40.0447	39.7
6	39	39.1415	39.2648	39.38	39.5026	39.6565	39.8868	40.1731	39.55
7	38.8	38.9418	39.0654	39.1817	39.3054	39.4623	39.7105	40.116	39.4
8	38.6	38.7335	38.8511	38.9626	39.0771	39.2069	39.3672	39.5371	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2

2.6. OTROS CASOS ESTACIONARIOS

Continuación de la tabla 2.7.

Tiempo 4									
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	40.0122	40.0142	40.0548	40.1164	40.1884	40.2658	40.303	40.2
3	39.6	39.767	39.857	39.9305	40.0167	40.1182	40.2449	40.3689	40
4	39.4	39.5546	39.6763	39.7838	39.8953	40.0201	40.1661	40.3102	39.85
5	39.2	39.3573	39.4947	39.6224	39.7537	39.8982	40.0523	40.1043	39.7
6	39	39.1613	39.3062	39.4449	39.5918	39.7664	40.0016	40.2547	39.55
7	38.8	38.9596	39.1036	39.243	39.3925	39.5749	39.8366	40.2136	39.4
8	38.6	38.745	38.8762	39.0039	39.1378	39.2894	39.4667	39.6236	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2
Tiempo 5									
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	40.0144	40.0185	40.0609	40.1238	40.196	40.2722	40.3067	40.2
3	39.6	39.7715	39.8659	39.9435	40.0325	40.1347	40.2591	40.3772	40
4	39.4	39.5614	39.6901	39.8042	39.9206	40.0472	40.19	40.3245	39.85
5	39.2	39.3661	39.5128	39.6497	39.7887	39.937	40.0875	40.1261	39.7
6	39	39.1712	39.3269	39.4771	39.6344	39.8156	40.0482	40.2847	39.55
7	38.8	38.9689	39.1235	39.2748	39.4363	39.6281	39.8901	40.2504	39.4
8	38.6	38.7511	38.8896	39.0262	39.17	39.3307	39.512	39.6583	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2
Tiempo 6									
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	40.0149	40.0195	40.0623	40.1255	40.1977	40.2736	40.3075	40.2
3	39.6	39.7725	39.868	39.9465	40.0361	40.1384	40.2622	40.379	40
4	39.4	39.563	39.6933	39.809	39.9265	40.0534	40.1952	40.3275	39.85
5	39.2	39.3683	39.5172	39.6563	39.797	39.9459	40.0953	40.1308	39.7
6	39	39.1737	39.332	39.4849	39.6446	39.827	40.0587	40.2912	39.55
7	38.8	38.9713	39.1284	39.2827	39.4471	39.6406	39.9023	40.2583	39.4
8	38.6	38.7527	38.893	39.0318	39.178	39.3408	39.5224	39.6659	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2

Cabe señalar que fue necesario hacer algunos experimentos numéricos para determinar el mejor valor de θ en el esquema de aproximación, tomando este el valor de uno. Con este valor se obtuvieron datos con mayor calidad que permiten recuperar con mayor precisión los parámetros en el problema inverso.

2.6 Otros casos estacionarios

Ya hemos encontrado una configuración inicial del sistema. Sin embargo, como se detalla en el siguiente capítulo, el método propuesto para resolver el problema inverso requiere al menos dos conjuntos de datos. Es decir, se necesita por lo menos otra configuración estacionaria. Los potenciales iniciales son regimenes estacionarios, así como los estados finales después de dejar pasar cierto tiempo razonable. Es por esto, que como parte del problema directo se

CAPÍTULO 2. PROBLEMA DIRECTO

generan otros casos estacionarios. Estos los generamos también de manera sintética. Para hacer esto, cambiamos las configuraciones de los pozos con el fin de tener distintas situaciones de flujo. Después se corre el programa que genera los datos del transitorio, hasta el último tiempo para el que se corrió el transitorio. A continuación se presentan distintos casos que se generaron.

1) Caso 0. Corresponde a la configuración obtenida como en último tiempo de hacer correr el programa para el transitorio con las condiciones iniciales que se encontraron en la sección anterior. Los resultados se muestran en la tabla 2.8.

Tabla 2.8: Configuración inicial para el caso 0.

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	39.985	40.025	40.07	40.134	40.206	40.284	40.305	40.2
3	39.6	39.78	39.888	39.964	40.052	40.152	40.273	40.327	40
4	39.4	39.575	39.714	39.832	39.948	40.071	40.204	40.268	39.85
5	39.2	39.383	39.541	39.685	39.826	39.972	40.12	40.124	39.7
6	39	39.19	39.36	39.519	39.68	39.859	40.085	40.196	39.55
7	38.8	38.989	39.158	39.32	39.487	39.678	39.925	40.145	39.4
8	38.6	38.767	38.918	39.065	39.216	39.383	39.564	39.703	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2

2) Caso 1. Solo se encienden los pozos ubicados en (2, 2), (3, 8), (7, 8), los resultados se encuentran en la tabla 2.9

Tabla 2.9: Configuración inicial para el caso 1.

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	39.98	40.014	40.052	40.105	40.165	40.234	40.264	40.2
3	39.6	39.77	39.866	39.926	39.992	40.063	40.144	40.207	40
4	39.4	39.56	39.682	39.777	39.861	39.936	39.995	40.005	39.85
5	39.2	39.365	39.503	39.619	39.721	39.809	39.871	39.854	39.7
6	39	39.172	39.321	39.451	39.571	39.688	39.806	39.812	39.55
7	38.8	38.974	39.124	39.262	39.396	39.54	39.728	39.912	39.4
8	38.6	38.758	38.897	39.028	39.159	39.297	39.452	39.593	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2

3) Caso 2. Se encienden solo los pozos ubicados en (2, 2) y (7, 8), los resultados se muestran en la tabla 2.10.

2.6. OTROS CASOS ESTACIONARIOS

Tabla 2.10: Configuración inicial para el caso 2.

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	39.978	40.009	40.043	40.088	40.134	40.172	40.196	40.2
3	39.6	39.766	39.857	39.91	39.964	40.011	40.041	40.043	40
4	39.4	39.555	39.672	39.758	39.831	39.888	39.921	39.912	39.85
5	39.2	39.36	39.492	39.601	39.694	39.771	39.823	39.81	39.7
6	39	39.168	39.311	39.436	39.55	39.66	39.776	39.789	39.55
7	38.8	38.97	39.117	39.25	39.38	39.52	39.708	39.898	39.4
8	38.6	38.756	38.893	39.021	39.149	39.286	39.441	39.585	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2

4) Caso 3. Se encienden solo los pozos ubicados en (4, 8) y (6, 8)
Los resultados se muestran en la tabla 2.11

Tabla 2.11: Configuración inicial para el caso 3.

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	39.885	39.96	40.03	40.096	40.158	40.21	40.23	40.2
3	39.6	39.713	39.811	39.901	39.986	40.066	40.142	40.147	40
4	39.4	39.536	39.655	39.763	39.866	39.968	40.076	40.139	39.85
5	39.2	39.354	39.49	39.614	39.732	39.85	39.973	40	39.7
6	39	39.167	39.314	39.448	39.576	39.707	39.856	39.971	39.55
7	38.8	38.971	39.12	39.257	39.386	39.512	39.625	39.679	39.4
8	38.6	38.756	38.894	39.023	39.147	39.266	39.369	39.416	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2

Capítulo 3

El Problema Inverso

Este capítulo trata sobre la identificación de parámetros en base a los datos que se obtuvieron sintéticamente en el capítulo anterior. Se explica el método del sistema diferencial para los casos transitorio y estacionario, para después aplicarlos a un ejemplo sintético. Se realizan pruebas numéricas con datos con ruido y un algoritmo de regularización.

3.1 El método del sistema diferencial

El método del Sistema Diferencial fue propuesto por Parravicini et al. [1995] [7] y permite identificar los parámetros de conductividad, K y coeficiente de almacenamiento, η_e cuando se dan cuatro conjuntos de datos del potencial hidráulico, h y los correspondientes términos fuente, f . Se necesita que al menos uno de ellos sea transitorio. Además tiene la ventaja de que sólo es necesario conocer el valor de conductividad en un sólo punto para determinar las demás.

Este método fue aplicado por Giudici, M. et al [1995] [7], para el caso de un acuífero confinado, régimen estacionario, con casos de estudio sintéticos. En este mismo artículo, se muestra que en la práctica es posible obtener conjuntos de datos independientes. Para obtener conjunto de datos independientes, es necesario medir los potenciales hidráulicos para condiciones de flujo distintas. Esto se observa con mayor detalle cuando se forma el sistema algebraico de cual hablaremos más adelante.

Este es un método directo, y como tal, es sensible a errores pequeños en los potenciales hidráulicos, que pueden introducir errores grandes en los gradientes hidráulicos y por consiguiente en la identificación de parámetros. Sin embargo, se puede dar una manera de controlar el error, lo cual da cierta certidumbre en los parámetros identificados.

El método de sistema diferencial consiste en lo siguiente, considere la ecuación que modela el flujo en un acuífero freático.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Kh \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Kh \frac{\partial h}{\partial y} \right) + f = \eta_e \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.1)$$

Supongamos ahora que tenemos los valores del potencial y la fuente para distintos tiempos,

3.1. EL MÉTODO DEL SISTEMA DIFERENCIAL

$t_r, r = 0, 1, \dots, p$, digamos p tiempos. Usamos la siguiente notación:

$$f(x, y, t_i) \equiv f^i \quad h(x, y, t_i) \equiv h^i \quad \frac{\partial h(x, y, t_i)}{\partial t} \equiv \frac{\partial h^i}{\partial t}$$

Con esta notación la ecuación 3.1 queda como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K h^i \frac{\partial(h^i)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K h^i \frac{\partial(h^i)}{\partial y} \right) = \eta_\epsilon \frac{\partial h^i}{\partial t} - f^i \quad (3.2)$$

Desarrollamos las derivadas parciales en los términos obtenemos para cada tiempo,

$$\frac{\partial K}{\partial x} h^i \frac{\partial h^i}{\partial x} + K \frac{\partial}{\partial x} (h^i \frac{\partial h^i}{\partial x}) + \frac{\partial K}{\partial y} h^i \frac{\partial h^i}{\partial y} + K \frac{\partial}{\partial y} (h^i \frac{\partial h^i}{\partial y}) = \eta_\epsilon \frac{\partial h^i}{\partial t} - f^i$$

dejando del lado izquierdo los términos que contienen de manera explícita las parciales con respecto a x, y y con respecto t tenemos:

$$\frac{\partial K}{\partial x} h^i \frac{\partial h^i}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} h^i \frac{\partial h^i}{\partial y} - \eta_\epsilon \frac{\partial h^i}{\partial t} h^i = -K \left[h^i \Delta h^i + \left(\frac{\partial h^i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h^i}{\partial y} \right)^2 \right] - f^i \quad (3.3)$$

Como podemos ver, tenemos que la ecuación se satisface para cada conjunto de datos. Podemos entonces escribir para cada punto en el dominio el sistema algebraico,

$$\begin{pmatrix} h^1 \frac{\partial h^1}{\partial x} & h^1 \frac{\partial h^1}{\partial y} & -\frac{\partial h^1}{\partial t} \\ h^2 \frac{\partial h^2}{\partial x} & h^2 \frac{\partial h^2}{\partial y} & -\frac{\partial h^2}{\partial t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h^p \frac{\partial h^p}{\partial x} & h^p \frac{\partial h^p}{\partial y} & -\frac{\partial h^p}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial K}{\partial x} \\ \frac{\partial K}{\partial y} \\ \eta_\epsilon \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} \overline{\Delta h^1} \\ \overline{\Delta h^2} \\ \vdots \\ \overline{\Delta h^p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \vdots \\ f^p \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

donde, $\overline{\Delta h^i} = [h^i \Delta h^i + \left(\frac{\partial h^i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h^i}{\partial y} \right)^2]$.

Este sistema de ecuaciones puede volverse a escribir en forma compacta usando la notación,

$$A = \begin{pmatrix} h^1 \frac{\partial h^1}{\partial x} & h^1 \frac{\partial h^1}{\partial y} & -\frac{\partial h^1}{\partial t} \\ h^2 \frac{\partial h^2}{\partial x} & h^2 \frac{\partial h^2}{\partial y} & -\frac{\partial h^2}{\partial t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h^p \frac{\partial h^p}{\partial x} & h^p \frac{\partial h^p}{\partial y} & -\frac{\partial h^p}{\partial t} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \overline{\Delta h^1} \\ \overline{\Delta h^2} \\ \vdots \\ \overline{\Delta h^p} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \vdots \\ f^p \end{pmatrix}$$

como:

$$Au = -Kz + f \quad (3.5)$$

donde:

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA INVERSO

$$u = \left(\frac{\partial K}{\partial x}, \frac{\partial K}{\partial y}, \eta_\epsilon \right)^t$$

Resaltamos que las dos primeras columnas de la matriz tienen los términos de los gradientes hidráulicos. Esto sugiere que una manera de obtener conjuntos independientes es teniendo condiciones distintas de flujo. Sin embargo, esto no es totalmente cierto, pues que en la tercera columna las entradas corresponden a las derivadas temporales de los potenciales, que no está relacionada de manera directa por los flujos en el acuífero. Por otro lado, para que esta matriz tenga solución en el sentido de los mínimos cuadrados es necesario que su rango sea completo. La solución del sistema algebraico 3.5 es equivalente a resolver los sistemas algebraicos,

$$Aa = z \quad (3.6)$$

$$Ab = f \quad (3.7)$$

y así obtener un vector u

$$u = -Ka + b \quad (3.8)$$

La ecuación 3.8 es el sistema diferencial de método de identificación de parámetros. De esta manera, hemos transformado el problema de identificación de parámetros en un problema de Cauchy.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial K}{\partial x} \\ \frac{\partial K}{\partial y} \\ \eta_\epsilon \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Sujeto a la condición inicial,

$$K(x_0, y_0) = K_0 \quad (3.10)$$

Este sistema diferencial presenta la característica de que la tercera ecuación se encuentra desacoplada. Esto quiere decir, que tenemos un sistema diferencial para K en las dos primeras ecuaciones, y el valor del parámetros η_ϵ se calcula con la tercera ecuación al sustituir el valor de K encontrado en el punto.

Es importante hacer notar que si tenemos más de tres conjunto de datos, entonces estos deben ser dependientes, puesto que se supone que provienen de la ecuación diferencial parcial. En la práctica, los datos vienen con ruido. Esto indica que podemos tomar los conjuntos de datos que son más independientes, sin importar que excedan los tres conjuntos de datos.

En esta deducción del sistema diferencial hemos supuesto que se conoce el valor de la K . En realidad este valor de K , es el que se quiere encontrar como solución de sistema de ecuaciones diferenciales.

Como problema de Cauchy se debe garantizar la existencia y unicidad de las soluciones. Esto está garantizado con un resultado clásico de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales. Citamos el artículo por Parravicini, G. et al. [7] en donde se analiza con mayor detalle los casos en los que este sistema tiene solución en base al origen de los datos con lo que se forma.

3.2. IMPLEMENTACIÓN DE SISTEMA DIFERENCIAL

Teorema 1 Sean a y b funciones vectoriales continuas sobre un dominio abierto y conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con valores en \mathbb{R}^N , y sean K_1 y K_2 dos funciones continuas que toman valores reales que satisfacen el sistema 3.8, y además satisfacen la misma condición inicial en un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$. Entonces las dos funciones coinciden en Ω .

En nuestra ecuación la continuidad de los coeficientes está asegurada dado que los valores de a y b , se calculan como el inverso de una función lineal, que es continua. Esta a su vez proviene de derivadas parciales de h que por ser solución a una ecuación diferencial parcial, tiene derivadas de segundo orden que son continuas. El dominio de trabajo es conexo, por lo que la independencia de trayectorias está asegurada.

Además en el sistema diferencial se ve que las dos primeras ecuaciones del sistema son las que contienen las derivadas. La tercera es un término desacoplado cuyo valor depende de la solución de las dos primeras ecuaciones.

3.2 Implementación de sistema diferencial

Ya hemos explicado en qué consiste el método del sistema diferencial. Para su implementación tomamos los datos sintéticos que generamos, y los datos de la fuente que usamos para identificar los parámetros, conductividad y coeficiente de almacenamiento.

La trayectoria que escogimos fueron las líneas rectas que unen los nodos en donde originalmente teníamos los valores de conductividad y coeficiente de almacenamiento. Es decir, si $\mathbf{x}_A = (x_A, y_A)$ un punto que corresponde a un nodo, y $\mathbf{x}_B = (x_B, y_B)$ es un punto que corresponde al nodo más cercano. La línea que los une se parametriza como $\mathbf{x}(s) = x_A + s(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A)$ con $0 \leq s \leq 1$. Si partimos de un valor conocido de K en x_A obtenemos el valor de K en x_B integrando sobre esta trayectoria. Para este tipo de trayectoria se obtiene la fórmula:

$$K(s) = \exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right)(K(x_A) + \int_0^s b(r) \exp\left(\int_0^r a(p)dp\right) dr) \quad (3.11)$$

Esta fórmula nos dice que si sabemos el valor de la conductividad en un nodo podemos conocerla en todos los nodos aplicando iterativamente la fórmula 3.11. Con estos valores de K , se aplica la tercera ecuación del sistema para evaluar n_e . De esta manera obtenemos el valor de los coeficientes en cada punto.

3.2.1 Estabilidad

En esta sección mostramos un resultado de estabilidad para el sistema diferencial. El análogo al caso confinado se encuentra en el artículo Giudici et al. [6]. La importancia de este resultado de estabilidad radica en que la independencia de trayectorias no es numéricamente estable. En otras palabras, no se obtienen buenos resultados cuando se integra sobre trayectorias arbitrarias.

Suponga que tenemos la parametrización por trayectorias poligonales a través de los nodos, tal como se describió en la sección anterior. La solución del sistema diferencial se obtiene integrando sobre la trayectoria, es decir,

$$\frac{dK}{ds}(s) = -K(s)a(s) + b(s) \quad (3.12)$$

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA INVERSO

Ahora supongamos que tenemos una solución aproximada del sistema, en donde el subíndice A nos indica que es trata de la solución aproximada del sistema,

$$\frac{dK_A}{ds}(s) = -K_A(s)a_A(s) + b_A(s) \quad (3.13)$$

Si restamos la ecuación 3.12 menos 3.13 entonces tenemos que:

$$\frac{dK}{ds}(s) - \frac{dK_A}{ds}(s) = [K(s) - K_A(s)]a_A(s) - K(s)[a(s) - a_A(s)] + [b(s) - b_A(s)] \quad (3.14)$$

De donde obtenemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} [K(s) - K_A(s)]^2 = [K(s) - K_A(s)] \left(\frac{dK}{ds}(s) - \frac{dK_A}{ds}(s) \right) = -[K(s) - K_A(s)]^2 a_A(s) - \quad (3.15)$$

$$K(s)[K(s) - K_A(s)][a(s) - a_A(s)] + [K(s) - K_A(s)][b(s) - b_A(s)]$$

Introduciendo la notación,

$$L(s) \equiv \int_0^s a_A(r)dr$$

$$\Phi(s) \equiv (s) \exp[2L(s)][K(s) - K_A(s)]^2$$

La derivada de Φ con respecto a s está dada por,

$$\frac{d\Phi}{ds}(s) = 2 \frac{dL}{ds} \exp[2L(s)][K(s) - K_A(s)]^2 + \exp[2L(s)] \frac{d}{ds} [K(s) - K_A(s)] \quad (3.16)$$

De la ecuaciones 3.15 y 3.16 obtenemos las siguiente desigualdad:

$$\frac{d\Phi}{ds}(s) = \exp[2L(s)][K(s) - K_A(s)] \{-K(s)[a(s) - a_A(s)] + [b(s) - b_A(s)]\} \leq 2 \exp[2L(s)] \quad (3.17)$$

$$[K(s) - K_A(s)] \cdot [|K(s)||a(s) - a_A(s)|$$

$$+ |b(s) - b_A(s)|] = 2 \exp[L(s)] \Phi(s)^{1/2} \cdot [|K(s)||a(s) - a_A(s)| + |b(s) - b_A(s)|]$$

Para un parámetro $\mu > 0$, número real positivo, de la desigualdad 3.17 obtenemos,

$$\frac{1}{2|\Phi(s) + \mu|^{1/2}} \frac{d\Phi}{ds}(s) = \frac{d}{ds} [\Phi(s) + \mu]^{1/2} \leq \exp[L(s)] \cdot [|K(s)||a(s) - a_A(s)| + |b(s) - b_A(s)|] \quad (3.18)$$

3.2. IMPLEMENTACIÓN DE SISTEMA DIFERENCIAL

Integrando la desigualdad 3.18 entre cero y s , obtenemos la desigualdad,

$$[\Phi(s) + \mu]^{1/2} - [\Phi(0) + \mu]^{1/2} \leq \int_0^s \exp[L(r)] [|T(r)| |a(r) - a_A(r)| + |b(r) - b_A(r)|] dr \quad (3.19)$$

Tomando el límite cuando $\mu \rightarrow 0$, y usando la notación de la Φ y multiplicando ambos miembros de la desigualdad 3.19 por $\exp\{-L(s)\}$, obtenemos

$$|K(s) - K_A(s)| \leq \exp\left[-\int_0^s a_A(r) dr\right] [|K(0) - K_A(0)| + \exp\left(\int_0^s a_A(t) dt\right) [|K(r)| |a(r) - a_A(r)| + |b(r) - b_A(r)|] dr \quad (3.20)$$

Suponiendo que el valor de $K_A(0)$ es aproximadamente cercano al valor real $K(0)$ entonces el término $|K(0) - K_A(0)|$ debe ser pequeño. El mismo argumento se aplica a los términos $|a - a_A|$ y $|b - b_A|$, por lo que concluimos que también son pequeños. El término que crece más rápido y sobre el que no tenemos ningún control es $\exp(\int_0^s a_A(t) dt)$. Entonces, para controlar el error se escoge la ruta de integración de tal modo que,

$$\sum_{\text{ruta}} |a_A| \quad (3.21)$$

sea mínima en toda la ruta de integración.

3.2.2 Ruta de mínimo error

Se analizó en la sección anterior que una cota para el error puede ser dada en función del término a . Este término depende de la ruta que se escoja para llegar a un nodo partiendo de otro. El problema entonces se convierte en un problema de optimización combinatoria, al minimizar la norma de a escogiendo la ruta pertinente. Se escoge el algoritmo de Dijkstra [9] que sirve para calcular la ruta más corta en el sentido de nuestra penalización.

Para dar el algoritmo de Dijkstra eficientemente necesitamos algunos conceptos. Una *red dirigida* es una gráfica ponderada $G = (V, E)$, donde V es el conjunto de vértices y E el conjunto de arcos dirigidos. Cada arco tiene asociado un *costo* (también llamado *peso* o *longitud*), c_{ij} . Hacemos $n = |V|$ y $m = |E|$.

Una ruta dirigida tiene *longitud* $\sum_{(i,j) \in P} c_{ij}$. Una *ruta mínima* del vértice s al vértice j es una ruta dirigida de s a j teniendo la mínima longitud. Un *árbol dirigido* es un árbol que empieza en el vértice s y cuyos arcos están dirigidos de tal modo, que se alejan de s . Un vector $d(\cdot)$ es el vector de *etiquetas de distancia*, si para cada vértice $j \in V$, $d(j)$ es la longitud de una ruta dirigida del vértice fuente s al vértice j , con $d(s) = 0$. La ruta dirigida $P = [i_0, i_1, \dots, i_r]$, que va del vértice i_0 a i_r puede ser representado usando los índices del predecesor: $\text{pred}(i_1) = i_0$, etc.

Se debe tener en cuenta los siguientes hechos sobre las rutas mínimas:

1. Si $P = \{s, i_1, i_2, \dots, i_r\}$ es una ruta mínima de s a i_r entonces $Q = \{s, i_1, \dots, i_k\}$ es una

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA INVERSO

ruta mínima para de s a i_k para cada $k \leq r$.

2. Las condiciones óptimas de ruta óptima son: el vector $d(\cdot)$ representa las distancias de la ruta mínima si y solo si, $d(j) \leq d(i) + c_{ij}$ para todo $(i, j) \in E$.

El algoritmo de Dijkstra, 1959, es el algoritmo popular para resolver problema de ruta mínima con arcos de costo no negativo. Consiste de dos pasos: 1) Selección de vértice, que escoge un vértice i con la distancia mínima en LISTA para examinar, y 2) actualización de distancia, verifica las distancias los arcos $(i, j) \in A(i)$ y actualiza el vector $d(j)$, si es necesario, para reestablecer la condición de optimalidad para el arco (i, j) .

Algoritmo de Dijkstra.

Entrada: Red dirigida G con $c_{ij} \geq 0$, vértice fuente s .

Salida: Árbol dirigido de ruta T^* con raíz en s .

$d(s) := 0$

$\text{pred}(s) := 0$

$d(j) := \infty$ para toda $j \in V - s$

LISTA := V

while LIST $\neq \emptyset$

(Selección del Vértice)

Sea $i \in \text{LIST}$ un vértice de $d(i) = \min\{d(j) | j \in \text{LISTA}\}$

Remueve i de LIST

(Actualización de Distancia) for cada $(i, j) \in A(i)$

If $d(j) > d(i) + c_{ij}$

$d(j) := d(i) + c_{ij}$

$\text{pred}(j) := i$

En nuestro caso la red dirigida que manejamos es la red que se forma con los nodos y las líneas poligonales horizontales y verticales que las unen, que son los arcos dirigidos. El costo o peso asociado $c_{i,j}$ en nuestro caso es la norma del vector formado con las dos primera componentes del vector a . Lo que nos interesa encontrar es el árbol dirigido, es decir, a partir de un vértice inicial encontrar el todas las rutas mínimas a los demás nodos. Por último las distancias $d(i, j)$ es 3.21.

3.3 Resultados

En esta sección se presentan los resultados numéricos que se obtuvieron. Es decir, se muestran los coeficientes identificados junto con sus errores correspondientes. Después se usan estos datos en el problema directo con la finalidad de mostrar como se reproducen los flujos en el acuífero.

3.3.1 El caso estacionario

El método del sistema diferencial se planteó y explicó en la primera sección para caso transitorio. En esta sección mostraremos el sistema algebraico y diferencial que se obtiene, al aplicar el método del sistema diferencial en el caso estacionario. En este caso sólo es posible

3.3. RESULTADOS

identificar las conductividades del acuífero, para el coeficiente de almacenamiento es necesario tener el término de la derivada temporal.

El sistema algebraico para un punto en el dominio, teniendo p conjuntos de datos está dado por:

$$\begin{pmatrix} h^1 \frac{\partial h^1}{\partial x} & h^1 \frac{\partial h^1}{\partial y} \\ h^2 \frac{\partial h^2}{\partial x} & h^2 \frac{\partial h^2}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ h^p \frac{\partial h^p}{\partial x} & h^p \frac{\partial h^p}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} \text{div}(h^1 \nabla h^1) \\ \text{div}(h^2 \nabla h^2) \\ \vdots \\ \text{div}(h^p \nabla h^p) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

De nuevo introducimos notación,

$$A = \begin{pmatrix} h^1 \frac{\partial h^1}{\partial x} & h^1 \frac{\partial h^1}{\partial y} \\ h^2 \frac{\partial h^2}{\partial x} & h^2 \frac{\partial h^2}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ h^p \frac{\partial h^p}{\partial x} & h^p \frac{\partial h^p}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \overline{\Delta h^1} \\ \overline{\Delta h^2} \\ \vdots \\ \overline{\Delta h^p} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \vdots \\ f^p \end{pmatrix}$$

para expresar el sistema como:

$$Au = -Kz + f \quad (3.23)$$

donde:

$$u = \left(\frac{\partial K}{\partial x}, \frac{\partial K}{\partial y} \right)^t$$

El sistema algebraico se resuelve en el sentido de mínimos cuadrados, si el rango de la matriz es completo. En este caso conjunto de datos independientes es completamente equivalente a condiciones de flujo distintas, o líneas equipotenciales que no se traslapan. Resolver el sistema 3.23 es equivalente a resolver los sistemas:

$$Aa = z \quad (3.24)$$

$$Ab = f \quad (3.25)$$

$$(3.26)$$

y así obtener un vector u

$$u = -Ka + b \quad (3.27)$$

El sistema diferencial explícito queda como,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial K}{\partial x} \\ \frac{\partial K}{\partial y} \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA INVERSO

Sujeto a la condición inicial,

$$K(x_0, y_0) = K_0 \quad (3.29)$$

De igual manera se tiene que resolver a través de cierta trayectoria. Se escogió las trayectorias poligonales que unen los nodos, de tal modo que minimizamos la norma del vector a en vista del resultado de estabilidad que tenemos.

En la tabla 3.1, se muestra los parámetros identificados para la conductividad hidráulica que se generaron con datos sintéticos para el caso estacionario. Como se puede observar, en los nodos $(m, n) = (8, 6)$ y $(m, n) = (8, 7)$ se obtuvieron valores particularmente pequeños. Esto se debe a la presencia de pozos que cambian las condiciones de flujo, pues se modifica de esencialmente horizontal a vertical, además que las velocidades de extracción en los pozos también son considerablemente mayores comparadas con las velocidad del flujo en el acuífero.

En la figura 3.1 se muestra el potencial hidráulico que se obtuvo al generar de nuevo estos

Tabla 3.1: Conductividad identificada de datos sintéticos. Caso estacionario. (10^{-3})

n \ m	2	3	4	5	6	7	8
2	0.345	0.359	0.430	0.414	0.398	0.656	0.596
3	0.331	0.362	0.380	0.365	0.349	0.713	0.327
4	0.361	0.345	0.330	0.315	0.299	0.449	0.190
5	0.310	0.295	0.280	0.265	0.249	0.493	0.554
6	0.260	0.245	0.229	0.214	0.200	0.281	9.28E-08
7	0.210	0.194	0.179	0.164	0.149	0.226	8.41E-05
8	0.160	0.144	0.129	0.113	9.95E-08	0.236	0.691

potenciales para el caso estacionario. Se puede apreciar que las líneas isopotenciales se reprodujeron fielmente.

Como se observa de las tablas, no se identificaron los valores en la frontera, puesto que falta información para aproximar las derivadas espaciales por diferencias centradas. Ciertamente, estas derivadas podrían aproximarse de tal modo que no se necesitara la información, pero se prefirió tomar los mismo valores que se obtuvieron en los nodos más cercanos. La pruebas numérica mostraron que no existe diferencia significativa al generar los potenciales, si los valores de los parámetros en la frontera se estiman de otro modo, o extrapolándolos.

3.3. RESULTADOS

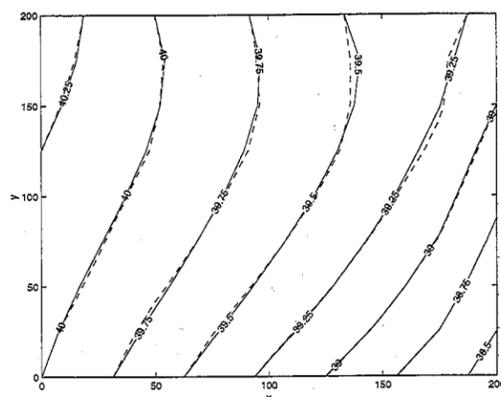


Figura 3.1: Líneas isopotenciales con parámetros identificados. Estacionario

En la tabla 3.2 se muestran los errores porcentuales correspondientes al hacer esta identificación. El signo en el error nos indica si el valor del parámetro identificado está por abajo (signo más) o si está por arriba del real. Como se puede observar los errores son pequeños, 29 nodos con errores menores al 1%, 32 menores al 20%. Sin embargo, hay nodos donde estos errores se disparan alcanzando valores con órdenes del cientos. Esto nodos corresponden a los nodos donde se encuentran encendidos los pozos. Es importante señalar que en los nodos donde se encuentran los pozos siempre presentan errores grandes. El valor de los parámetros con frecuencia es negativo, por lo que pierde su significado físico. Esto se puede explicar, puesto que en las cercanías de los pozos el flujo deja de ser horizontal, y por lo tanto pierden validez las suposiciones que se hicieron.

Tabla 3.2: Errores obtenidos al identificar parámetros con los casos 0 y 1.

n \ m	2	3	4	5	6	7	8
2	136.37	19.392	0	0.19221	0.4118	-70.312	-61.129
3	19.176	8.2504	-0.03213	0.072633	0.19146	-112.98	180.9
4	-0.15868	-0.09635	0.002746	0.099907	0.20045	-57.697	493.53
50	-0.12924	-0.01618	0.097692	0.17266	0.21711	-109.84	-151.96
60	-0.07153	0.1148	0.25407	0.29937	0.24634	-51.894	173.43
70	-0.00641	0.30205	0.51107	0.56611	0.50596	-67.237	403.75
80	0.005594	0.53465	0.99227	1.388	0.51798	-177.91	-886.63

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA INVERSO

3.3.2 El caso transitorio

Los resultados en el caso transitorio son igualmente satisfactorios. En la tabla 3.3, se muestran los valores de la conductividad identificada, usando 4 conjuntos de datos. Como se puede observar existen otra vez problemas en los nodos donde se encuentran pozos de extracción. De igual modo, se obtienen valores negativos que no tiene sentido físico. En la tabla 3.4, se

Tabla 3.3: Conductividad con 4 datos. Factor 1.0e-003

n \ m	2	3	4	5	6	7	8
2	0.0993	0.4348	0.43	0.3847	0.4142	0.5833	0.8094
3	0.3207	0.4733	0.3797	0.3678	0.3766	0.4827	0.0778
4	0.3081	0.3852	0.2953	0.3283	0.3185	0.3422	-0.906
5	0.3277	0.2942	0.2823	0.2648	0.2751	0.3098	0.4965
6	0.2732	0.223	0.2306	0.2141	0.2105	0.3146	0.1551
7	0.2091	0.195	0.1804	0.157	0.1451	0.1822	0.2235
8	0.1596	0.1935	0.1811	0.1687	0.1569	0.0975	0.0519

muestra el coeficiente de almacenamiento identificado.

Los errores porcentuales de los parámetros identificados usando 4 conjuntos de datos, se

Tabla 3.4: Coeficientes de almacenamiento con 4 datos.

n \ m	2	3	4	5	6	7	8
2	0.0522	0.0633	0.0889	0.0727	0.0931	0.1086	0.1391
3	0.0572	0.1133	0.1409	0.1199	0.1371	0.1593	0.0043
4	0.0964	0.1417	0.1029	0.1291	0.16	0.1762	-0.4323
5	-0.2606	0.1209	0.1427	0.1478	0.1839	0.2379	0.3852
6	0.1194	0.1086	0.1563	0.1756	0.1879	0.2887	0.1035
7	0.1043	0.1352	0.1642	0.1605	0.1787	0.273	-1.1107
8	0.0876	0.1363	0.1863	0.233	0.2737	0.1605	0.0655

muestran en las tablas 3.5 y 3.6.

Cabe señalar que este es el menor número de conjuntos de datos que se puede usar, pues se están aproximando las derivadas temporales con diferencias finitas hacia atrás.

Para la conductividad hidráulica, en 30 nodos se obtuvieron errores menores al 20%, lo cual es un resultado excelente en la identificación de parámetros.

De igual modo que el caso estacionario, los nodos en los que se encuentran los pozos son los que presentan los errores más grandes.

Para el coeficiente de almacenamiento en 29 nodos se obtuvieron errores menores al 20%. En la literatura relacionada con el método del sistema diferencial, este parámetro generalmente no es identificado.

Tabla 3.5: Errores para la conductividad con 4 datos.

n \ m	2	3	4	5	6	7	8
2	78.4054	2.288	0	7.3022	3.5596	51.5045	118.7457
3	21.7875	19.8341	0.0681	0.7746	7.6123	44.0995	75.6898
4	14.4201	11.6584	10.5144	4.2229	6.162	20.0648	435.5566
5	5.694	0.2834	0.8092	0.0655	10.0239	31.8258	125.696
6	5.086	8.9597	0.2501	0.4417	5.2748	70.0562	8.7561
7	0.4347	0.0024	0.1986	4.8216	3.2829	34.9996	86.2232
8	0.2683	33.4726	39.3233	46.7155	56.8837	14.6704	25.8408

Tabla 3.6: Errores para el coeficiente de almacenamiento con 4 datos.

n \ m	2	3	4	5	6	7	8
2	21.7752	20.8386	0	23.6416	6.9382	4.6979	30.3972
3	28.515	13.308	23.3102	4.0456	2.8012	13.7787	97.049
4	8.4061	23.9605	22.7988	12.8867	0.0058	3.826	343.162
5	373.6606	3.2849	3.6793	11.3287	1.1601	22.3732	87.7854
6	19.3623	18.5258	2.3301	3.4101	6.0402	34.0524	54.7056
7	0.6095	3.3948	3.2665	17.4596	17.0242	17.0018	546.2509
8	17.8767	6.2984	4.7808	13.6015	19.7335	35.5029	75.4244

Los potenciales que se reprodujeron en base a los parámetros identificados con 4 conjuntos de datos se muestran en la tabla 3.3.2.

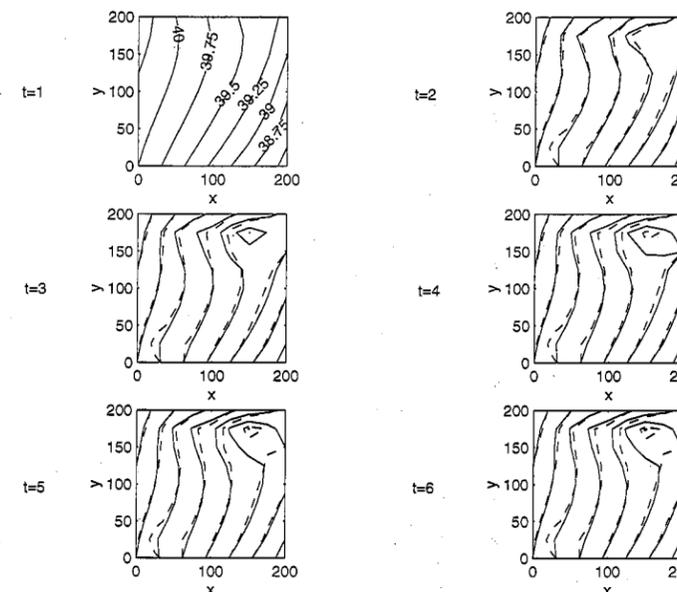


Figura 3.2: Líneas isopotenciales con parámetros identificados. Transitorio 4 datos.

Vemos en la figura 3.3.2, que se reproducen las líneas equipotenciales en el acuífero, usando 4 conjuntos de datos. Más aún, si consideramos que se usó 4 conjuntos de datos, en la figura se muestran dos conjuntos de datos más. La figura muestra que los flujos en el acuífero se pueden reproducir cualitativamente. Este es un punto importante, sobre todo cuando se incluyen también en el modelo transporte de contaminantes. Además las líneas equipotenciales están cercanas, por lo que cuantitativamente también se reproducen los flujos con precisión. Los resultados numéricos se muestran en la tabla 3.7.

3.3. RESULTADOS

Tabla 3.7: Potencial hidráulico con los parámetros identificados, 4 datos.

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tiempo 1.									
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	39.8796	39.9489	40.0111	40.0674	40.1173	40.1591	40.189	40.2
3	39.6	39.7022	39.7889	39.8632	39.9261	39.9769	40.0123	40.0254	40
4	39.4	39.521	39.623	39.7087	39.779	39.8328	39.8668	39.875	39.85
5	39.2	39.3369	39.4521	39.5485	39.6269	39.6861	39.7223	39.7293	39.7
6	39	39.1494	39.275	39.3807	39.4678	39.5348	39.577	39.586	39.55
7	38.8	38.9555	39.0865	39.199	39.2949	39.3727	39.4267	39.4444	39.4
8	38.6	38.7471	38.8733	38.9867	39.0898	39.1815	39.2569	39.3048	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2
Tiempo 2.									
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	39.6549	39.8592	39.9624	40.0291	40.0786	40.1107	40.1559	40.2
3	39.6	39.5892	39.6982	39.8009	39.8672	39.8978	39.8695	39.8207	40
4	39.4	39.4716	39.5703	39.6543	39.7159	39.7347	39.6913	39.6107	39.85
5	39.2	39.3072	39.4157	39.501	39.5647	39.5861	39.5527	39.5405	39.7
6	39	39.1309	39.2425	39.3378	39.4063	39.4301	39.3598	39.2657	39.55
7	38.8	38.94	39.0461	39.1441	39.2238	39.2699	39.2261	39.0846	39.4
8	38.6	38.7301	38.8325	38.9285	39.0182	39.0911	39.1349	39.112	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2
Tiempo 3.									
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	39.6395	39.8428	39.9453	40.0103	40.0586	40.0933	40.1463	40.2
3	39.6	39.5715	39.6719	39.7701	39.8309	39.8557	39.8256	39.7907	40
4	39.4	39.4543	39.5405	39.615	39.6655	39.6722	39.622	39.5548	39.85
5	39.2	39.291	39.385	39.4569	39.5047	39.5079	39.4655	39.4759	39.7
6	39	39.1158	39.2125	39.292	39.3419	39.3418	39.2548	39.1865	39.55
7	38.8	38.9266	39.0189	39.1016	39.1635	39.1861	39.1204	38.9998	39.4
8	38.6	38.7213	38.8146	38.9003	38.9782	39.0371	39.0654	39.048	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA INVERSO

Continuación de tabla 3.7.

Tiempo 4.									
n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	39.6339	39.8349	39.9357	39.9994	40.0479	40.085	40.1422	40.2
3	39.6	39.5629	39.6573	39.7512	39.8084	39.8321	39.8048	39.7784	40
4	39.4	39.4438	39.5208	39.5877	39.6314	39.6346	39.5877	39.5318	39.85
5	39.2	39.2793	39.3616	39.4224	39.4601	39.4573	39.4192	39.4474	39.7
6	39	39.1038	39.1878	39.2539	39.2909	39.2818	39.1974	39.1514	39.55
7	38.8	38.9157	38.9969	39.067	39.1158	39.1274	39.0616	38.9625	39.4
8	38.6	38.7145	38.8011	38.8791	38.9485	38.9997	39.0244	39.0188	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2
Tiempo 5.									
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	39.632	39.8322	39.9324	39.9957	40.0444	40.0825	40.1409	40.2
3	39.6	39.5599	39.6522	39.7446	39.8007	39.8245	39.7984	39.7748	40
4	39.4	39.4399	39.5136	39.5778	39.6193	39.6221	39.5771	39.525	39.85
5	39.2	39.2748	39.3526	39.4093	39.4438	39.4401	39.4046	39.439	39.7
6	39	39.0989	39.1779	39.2389	39.2719	39.261	39.179	39.1408	39.55
7	38.8	38.9113	38.988	39.0532	39.0975	39.1066	39.0425	38.9513	39.4
8	38.6	38.7118	38.7956	38.8707	38.937	38.9861	39.0109	39.0099	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2
Tiempo 6.									
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	39.6317	39.8317	39.9318	39.9951	40.0438	40.0821	40.1407	40.2
3	39.6	39.5593	39.6512	39.7434	39.7994	39.8232	39.7973	39.7742	40
4	39.4	39.4392	39.5122	39.576	39.6172	39.62	39.5753	39.5239	39.85
5	39.2	39.2739	39.3509	39.4069	39.4409	39.4371	39.4022	39.4377	39.7
6	39	39.098	39.1761	39.2362	39.2684	39.2574	39.1759	39.139	39.55
7	38.8	38.9105	38.9863	39.0506	39.0942	39.1029	39.0393	38.9494	39.4
8	38.6	38.7112	38.7946	38.8691	38.9349	38.9837	39.0085	39.0084	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2

3.3. RESULTADOS

Usando 6 conjuntos de datos obtenemos la conductividad identificada, ver tabla 3.8.

Tabla 3.8: Conductividad usando 6 conjuntos de datos. Factor 10^{-3} .

n \ m	2	3	4	5	6	7	8
2	0.0892	0.4379	0.43	0.3864	0.4123	0.5734	0.7999
3	0.3002	0.4721	0.3802	0.3681	0.373	0.4775	0.0917
4	0.3066	0.3852	0.2955	0.3265	0.3168	0.3394	-0.7863
5	0.3068	0.2944	0.2821	0.265	0.2735	0.312	0.4731
6	0.2556	0.245	0.2306	0.211	0.2098	0.3186	0.1683
7	0.2091	0.195	0.1803	0.1566	0.1447	0.1799	0.2227
8	0.1596	0.1453	0.1306	0.1674	0.1557	0.099	0.0531

El coeficiente de almacenamiento se muestra en la tabla 3.9. Como podemos observar de

Tabla 3.9: Coeficiente de almacenamiento con 6 conjunto de datos.

n \ m	2	3	4	5	6	7	8
2	0.0542	0.0639	0.0889	0.0719	0.0926	0.1084	0.1367
3	0.053	0.1148	0.1376	0.1205	0.1366	0.1581	0.0056
4	0.0936	0.1374	0.1038	0.1311	0.1598	0.175	-0.3682
5	0.1729	0.1253	0.1435	0.148	0.1839	0.2373	0.3596
6	0.1116	0.1325	0.1558	0.1572	0.1878	0.2921	0.1165
7	0.1046	0.1347	0.1621	0.1579	0.1767	0.2718	-1.1529
8	0.0877	0.1232	0.1526	0.2251	0.2645	0.1537	0.0636

estas tablas, tenemos de nuevo el comportamiento extraño en los nodos cercanos a donde se encuentran los pozos.

Para analizar con mayor detalle veamos los errores porcentuales obtenidos para la identificación de la conductividad, ver tabla 3.10.

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA INVERSO

Tabla 3.10: Errores obtenidos al identificar la conductividad, usando 6 conjunto de datos.

n \ m	2	3	4	5	6	7	8
2	80.6074	1.5914	0	6.9001	3.0854	48.937	116.1827
3	26.784	19.5144	0.0489	0.836	6.5669	42.5315	71.3292
4	14.8311	11.6494	10.4521	3.6573	5.6057	19.0713	391.2196
5	1.0386	0.1867	0.7425	0.001	9.4023	32.763	115.0493
6	1.6798	0.0097	0.2462	1.8616	4.9169	72.2157	1.0233
7	0.4324	0.0071	0.1427	5.0742	3.5559	33.2857	85.6216
8	0.2644	0.185	0.4586	45.5959	55.6999	16.419	24.0989

3.3. RESULTADOS

y para los errores obtenidos al identificar el coeficiente de almacenamiento ver tabla 3.11.

Tabla 3.11: Errores coeficiente de almacenamiento con usando 6 datos.

n \ m	2	3	4	5	6	7	8
2	18.6463	20.169	0	24.5499	7.4165	4.5748	28.1862
3	33.7539	14.8135	20.3625	3.6189	2.4663	12.8949	96.1766
4	5.2719	20.2599	22.1457	11.5395	0.1432	3.1484	307.104
5	81.5976	0.2358	3.1491	11.1927	1.1253	22.0222	75.3277
6	11.5811	0.5915	2.6212	13.5164	6.1203	35.6397	49.013
7	0.9059	3.7538	4.4669	18.8024	17.9719	16.4929	563.2176
8	17.8177	15.3078	14.1604	9.7374	15.7303	38.2321	76.1622

Estos errores nos muestran, que los resultados obtenidos no difieren mucho de los correspondientes a 4 conjuntos de datos. De igual modo, los errores en la identificación de parámetros son en su mayoría menores al 20%, lo cual es adecuado. Por otro lado, se observa de la figura 3.3.2 que las líneas equipotenciales se reproducen adecuadamente.

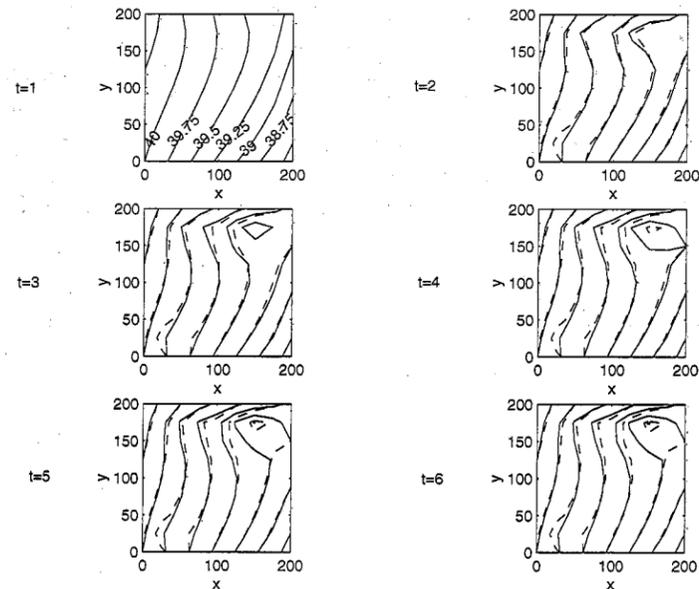


Figura 3.3: Líneas isopotenciales con parámetros identificados. Transitorio 6 datos.

Con esto podemos concluir, que numéricamente los resultados que se obtienen al usar el método del sistema diferencial para la identificación de parámetros son buenos, en el

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA INVERSO

sentido que se obtienen errores en su mayoría menores al 20 %, y que la reproducción de los potenciales hidráulicos corresponde al comportamiento previo de los datos con lo que hizo dicha identificación. Por último presentamos, los potenciales hidráulicos que se generaron usando los parámetros identificados, tabla 3.12.

Tabla 3.12: Potenciales con parámetros de 6 conjunto de datos.

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	39.8796	39.9489	40.0111	40.0674	40.1173	40.1591	40.189	40.2
3	39.6	39.7022	39.7889	39.8632	39.9261	39.9769	40.0123	40.0254	40
4	39.4	39.521	39.623	39.7087	39.779	39.8328	39.8668	39.875	39.85
5	39.2	39.3369	39.4521	39.5485	39.6269	39.6861	39.7223	39.7293	39.7
6	39	39.1494	39.275	39.3807	39.4678	39.5348	39.577	39.586	39.55
7	38.8	38.9555	39.0865	39.199	39.2949	39.3727	39.4267	39.4444	39.4
8	38.6	38.7471	38.8733	38.9867	39.0898	39.1815	39.2569	39.3048	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	39.6484	39.8593	39.9625	40.0292	40.0782	40.1096	40.1546	40.2
3	39.6	39.588	39.6995	39.8017	39.8676	39.8976	39.8688	39.8209	40
4	39.4	39.473	39.5721	39.6557	39.7166	39.7345	39.6902	39.6087	39.85
5	39.2	39.312	39.4196	39.5038	39.5662	39.586	39.5507	39.5371	39.7
6	39	39.1362	39.2506	39.343	39.4095	39.4316	39.3607	39.2673	39.55
7	38.8	38.9447	39.064	39.1614	39.2311	39.2724	39.2276	39.088	39.4
8	38.6	38.7309	38.8455	38.9499	39.0293	39.0941	39.1352	39.1132	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	39.6323	39.8429	39.9456	40.0106	40.0583	40.0922	40.145	40.2
3	39.6	39.5702	39.6734	39.7714	39.8317	39.8557	39.8251	39.7913	40
4	39.4	39.456	39.543	39.6173	39.667	39.6723	39.6211	39.5533	39.85
5	39.2	39.2964	39.3903	39.4614	39.5077	39.5086	39.4635	39.4723	39.7
6	39	39.1224	39.2231	39.3004	39.3475	39.3447	39.2565	39.1879	39.55
7	38.8	38.9332	39.0403	39.1231	39.1743	39.1908	39.1233	39.0037	39.4
8	38.6	38.7236	38.8302	38.9245	38.992	39.0422	39.0674	39.0506	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2

Continuación tabla 3.12

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	39.6266	39.835	39.9361	39.9998	40.0476	40.084	40.1409	40.2
3	39.6	39.5615	39.6589	39.7528	39.8095	39.8325	39.8046	39.7793	40
4	39.4	39.4454	39.5234	39.5904	39.6334	39.6352	39.5872	39.5306	39.85
5	39.2	39.2844	39.367	39.4277	39.4639	39.4587	39.4176	39.444	39.7
6	39	39.1102	39.1986	39.2633	39.298	39.2859	39.1999	39.153	39.55
7	38.8	38.9227	39.0184	39.0889	39.128	39.1337	39.0655	38.967	39.4
8	38.6	38.7172	38.8167	38.9028	38.9627	39.0059	39.0277	39.0222	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	39.6247	39.8322	39.9328	39.9961	40.0442	40.0815	40.1397	40.2
3	39.6	39.5584	39.6537	39.7461	39.8019	39.8249	39.7983	39.7757	40
4	39.4	39.4414	39.5161	39.5805	39.6215	39.6229	39.5767	39.524	39.85
5	39.2	39.2796	39.3578	39.4146	39.4479	39.4417	39.4032	39.4357	39.7
6	39	39.1052	39.1885	39.2484	39.2792	39.2654	39.1818	39.1426	39.55
7	38.8	38.9181	39.0091	39.0748	39.1099	39.1132	39.0469	38.956	39.4
8	38.6	38.7144	38.8109	38.8937	38.951	38.9926	39.0146	39.0136	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2
1	40	40.05	40.1	40.15	40.2	40.25	40.3	40.35	40.4
2	39.8	39.6243	39.8317	39.9322	39.9955	40.0436	40.0811	40.1395	40.2
3	39.6	39.5578	39.6527	39.7449	39.8005	39.8236	39.7972	39.7751	40
4	39.4	39.4406	39.5147	39.5787	39.6193	39.6207	39.5749	39.5229	39.85
5	39.2	39.2787	39.3561	39.4122	39.445	39.4387	39.4007	39.4343	39.7
6	39	39.1042	39.1865	39.2456	39.2758	39.2618	39.1787	39.1408	39.55
7	38.8	38.9172	39.0073	39.0721	39.1065	39.1096	39.0437	38.9541	39.4
8	38.6	38.7139	38.8098	38.8919	38.9488	38.9901	39.0123	39.0121	39.3
9	38.4	38.5	38.6	38.7	38.8	38.9	39	39.1	39.2

3.3.3 Experimentos con ruido Gaussiano.

Como última fase, se hicieron experimentos numéricos para datos con ruido. Los experimentos consistieron en añadir ruido a los datos generados con elemento finito y con éstos identificar de nuevo los parámetros. Se usó como ruido los valores de una distribución Gaussiana con media cero, y distribución estándar uno, que se ajustó de tal manera, que tuvieramos ruido con desviación estándar conocida para así poderlo controlar.

Método de regularización.

Tópicos relacionados con la regulación de datos se toma del libro de Bertero y Bocacci [1998] [2], que trata problemas de imágenes.

La idea básica de regularización consiste en considerar una familia de soluciones aproximadas que dependen de un parámetro positivo, al cual llamamos parámetro de regularización. La propiedad principal es las soluciones encontradas por este método convergen a la solución exacta del problema cuando manejamos datos sin ruido, esto en el caso de datos sin ruido.

Considere funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, que es la función que contiene los datos con ruido. Se quiere encontrar una función g de tal modo que sea solución a:

$$Af = g \tag{3.30}$$

donde A es un operador dado. La solución se encuentra en el sentido de mínimos cuadrados. Sin embargo, la regulación consiste en encontrar la solución como mínimo del siguiente funcional.

$$\Phi(f; g) = \|Af - g\|^2 + \mu(a_0\|f\|^2 + \sum_{i=1}^q a_i \|\frac{\partial f}{\partial x_i}\|^2 + \sum_{i,j=1}^q \|\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}\|^2) \tag{3.31}$$

donde, a_0 , a_i y $a_{i,j}$ son números positivos no negativos y $a_{i,j}$ define una matriz positiva semidefinida, μ es el parámetro de regularización y q es el número de variables sobre la que se encuentra definida la funciones f y g .

En nuestro caso particular, las funciones están dadas en los nodos, por lo que introducimos la notación: $f = f_{m,n}$ y $g = g_{m,n}$. El operador A es la identidad. Al minimizar considerando solamente la primera derivada de f , el funcional queda como:

$$\Phi(f; g) = \|f_{m,n} - g_{m,n}\|^2 + \mu(\sum_{i=1}^2 \|\frac{\partial f_{m,n}}{\partial x_i}\|^2) \tag{3.32}$$

Al aproximar las derivadas por diferencias finitas hacia adelante, tenemos que el funcional se transforma en un funcional de $(M-2)(N-2)$ variables, que el total de nodos interiores (en nuestro caso $M=9$, $N=9$),

$$\Phi(f_{m,n}) = \sum_{m=2}^{M-1} \sum_{n=2}^{N-1} (f_{m,n} - g_{m,n})^2 + \mu \sum_{m=2}^{M-1} \sum_{n=2}^{N-1} ((\frac{f_{m+1,n} - f_{m,n}}{\Delta})^2 + (\frac{f_{m,n+1} - f_{m,n}}{\Delta})^2) \tag{3.33}$$

3.3. RESULTADOS

Para minimizar derivamos el funcional respecto a cada variables $f_{m,n}$ e igualamos a cero. Se hace el cambio de variable $\lambda = \mu/\Delta$,

$$\frac{\partial \Phi_{\mu}(f_{k,l})}{\partial f_{k,l}} = 2(f_{k,l} - g_{k,l}) + \lambda[2(f_{k,l} - f_{k-1,l}) + 2(f_{k,l} - f_{k,l-1}) - 2(f_{k+1,l} - f_{k,l}) - 2(f_{k,l+1} - f_{k,l})] = 0 \quad (3.34)$$

Reacomodando los términos obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones y dividiendo entre 2,

$$(1 + 4\lambda)f_{k,l} - \lambda(f_{k-1,l} + f_{k,l-1} + f_{k+1,l} + f_{k,l+1}) = g_{k,l} \quad (3.35)$$

Resolviendo el sistema por un método iterativo como el método de Jacobi obtenemos la siguiente fórmula de recurrencia,

$$f_{k,l}^{p+1} = \frac{1}{1 + 4\lambda}(g_{k,l} + \lambda(f_{k-1,l}^p + f_{k,l-1}^p + f_{k+1,l}^p + f_{k,l+1}^p)) \quad (3.36)$$

Como podemos observar, al minimizar este funcional se está encontrando una aproximación a los datos con ruido g , de tal manera, que estén lo más cercano posible en la norma euclidiana, y se pide además que sus segundas derivadas sean pequeñas. El parámetro de regularización indica que peso se le da a este hecho.

El usar este algoritmo de regularización, viene del hecho de que al medir los potenciales hidráulicos estos presentan errores de medición. Estos errores se ven simulados por medio de ruido gaussiano. Pero de acuerdo al modelo que estudiamos, los datos deben satisfacer una edp, es decir, deben tener cierta condición de regularidad. Entonces, el algoritmo de regularización suaviza los datos obtenidos.

Ruido Gaussiano y regularización.

El ruido utilizado en estos experimentos tiene una desviación estándar de 0.15 metros, es decir, estamos pensando que al hacer una medición del potencial hidráulico se cometió un error de 15 cm. En la actualidad, los instrumentos de medición tienen alta precisión, por lo que este ruido es un tanto exagerado. Sin embargo, se usa así para mostrar la utilidad del algoritmo de regularización.

Para regularizar los datos se usa como parámetro de regularización $\mu = 0.1$, con 10 iteraciones. Estos parámetros fueron determinados por medio de experimentos numéricos al resultar ser los óptimos para recuperar los parámetros.

Los resultados obtenidos son satisfactorios de nuevo, es decir se los parámetros identificados no solo están en el orden de magnitud, sino sus errores son comparables a los obtenidos con datos sin ruido.

En la tabla 3.13, se muestran los resultados para la conductividad usando 6 conjuntos de datos.

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA INVERSO

Tabla 3.13: Conductividad 6 datos regularizados. Factor 10e-3.

n \ m	2	3	4	5	6	7	8
2	2.32E-08	0.4621	0.43	0.39532	0.42803	0.60898	0.88148
3	0.30073	0.47378	0.39054	0.36424	0.3746	0.50036	6.02E-08
4	0.30617	0.38687	0.33491	0.31708	0.31701	0.36065	-0.50084
5	0.31518	0.29872	0.28149	0.26626	0.25156	0.35167	0.50168
6	0.26008	0.24454	0.23039	0.21344	0.21505	0.27228	0.29158
7	0.21323	0.19519	0.1804	0.16224	0.15559	0.21385	-3.43E+012
8	0.16638	0.14794	0.1332	0.16552	0.16155	0.63561	0.25893

3.3. RESULTADOS

Los resultados para el coeficiente de almacenamiento se muestran en la tabla 3.14. En las tablas 3.15 y 3.16 se muestran los errores correspondientes a la identificación de los

Tabla 3.14: Almacenamiento 6 datos regularizados.

n \ m	2	3	4	5	6	7	8
2	0.056754	0.064752	0.088889	0.073474	0.088597	0.10912	0.16042
3	0.053141	0.10938	0.11303	0.11366	0.13023	0.15166	-0.00038413
4	0.082655	0.113	0.12976	0.13524	0.1568	0.17224	-0.21545
5	0.17173	0.14115	0.14869	0.15232	0.18016	0.25599	0.36998
6	0.12112	0.13899	0.15965	0.16169	0.1903	0.25422	0.2493
7	0.11298	0.13921	0.16467	0.16512	0.19173	0.34911	-1.09E+14
8	0.097199	0.12686	0.15363	0.21805	0.26955	4.4701	0.9273

parámetros con 6 conjuntos de datos.

De igual modo, se nota que en las vecindades de los nodos donde se encuentran los pozos

Tabla 3.15: Errores conductividad 6 datos regularizados.

n \ m	2	3	4	5	6	7	8
2	94.962	3.8427	0	4.7411	7.0085	58.176	138.24
3	26.652	19.943	2.7748	0.2085	7.0278	49.361	81.176
4	14.952	12.137	1.4878	0.65882	5.6716	26.543	285.5
5	1.6709	1.2594	0.533	0.47515	0.62204	49.648	128.04
6	0.029296	0.18708	0.17129	0.72537	7.5252	47.18	71.516
7	1.5366	0.097161	0.22444	1.675	3.7276	58.41	2.85E+15
8	3.9868	2.0265	2.4606	43.931	61.547	647.78	269.9

de extracción se presentan los mayores errores. Los parámetros toman valores negativos que no corresponden a la realidad.

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA INVERSO

Tabla 3.16: Errores coeficiente de almacenamiento 6 datos.

n \ m	2	3	4	5	6	7	8
2	14.87	19.06	0	22.852	11.403	5.2265	50.389
3	33.574	9.3756	1.1	9.0683	2.3258	8.3296	100.26
4	7.0129	1.128	2.6819	8.7131	2.0029	1.4961	221.19
5	80.321	12.923	0.36709	8.6067	0.91463	31.652	80.367
6	21.118	4.2436	0.21688	11.069	4.8494	18.03	9.0669
7	8.9426	0.56392	2.9611	15.08	10.981	49.62	4.36E+16
8	8.8759	12.782	13.583	6.2982	17.928	1696	247.74

En la reproducción del comportamiento con los parámetros identificados, se observó que con 6 conjuntos de datos se obtiene una mejor reproducción, figura 3.4.

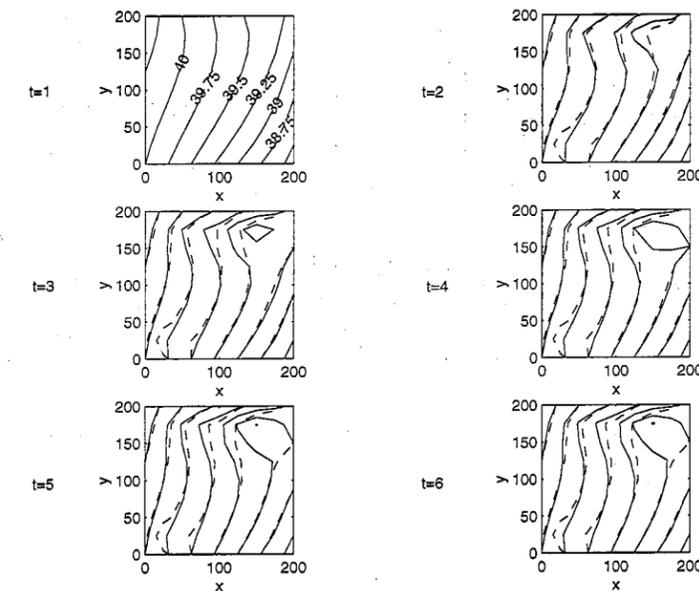


Figura 3.4: Líneas isopotenciales con parámetros identificados. Transitorio 6 datos regularizados.

3.3. RESULTADOS

Los potenciales que se generaron a partir de cuatro conjuntos de datos presentan una mayor discrepancia con los potenciales originales. Esto sugiere que en la práctica es mucho usar los mayores conjuntos de datos que se conozcan con el fin de obtener mejores resultados. Sin embargo, al usar 4 conjuntos de datos, y generar 6, realmente ya estamos usando la información se tiene para predecir más allá de donde partimos. Los resultados indican que el modelo es capaz de hacer predicciones de acuerdo a lo esperado.

En la tabla 3.17 se muestran los valores de conductividad identificada.

Tabla 3.17: Conductividad 4 datos regularizados. $10e-3$.

n \ m	2	3	4	5	6	7	8
2	3.45E-08	0.45844	0.43	0.39395	0.4273	0.61632	0.89145
3	0.31814	0.47498	0.39046	0.36366	0.37669	0.50349	4.62E-08
4	0.30725	0.38673	0.33485	0.31841	0.31818	0.36161	-0.56041
5	0.33342	0.29827	0.28164	0.26621	0.25083	0.35042	0.51892
6	0.27529	0.22608	0.22364	0.21348	0.21584	0.27585	0.27013
7	0.21322	0.19041	0.17481	0.16259	0.15599	0.21762	0.28934
8	0.16638	0.1882	0.17749	0.16656	0.16229	0.40821	0.14714

Los resultados para el coeficiente de almacenamiento se muestran en la tabla 3.18.

Tabla 3.18: Coeficiente de almacenamiento 4 datos regularizados.

n \ m	2	3	4	5	6	7	8
2	0.054292	0.063679	0.088889	0.074403	0.08968	0.10972	0.16296
3	0.056615	0.10795	0.11502	0.11418	0.13041	0.15245	-0.0016423
4	0.085551	0.11774	0.12574	0.13376	0.15687	0.17237	-0.24077
5	-0.20916	0.13962	0.14801	0.15195	0.17765	0.25719	0.38827
6	0.12918	0.11712	0.14104	0.16217	0.1903	0.25639	0.22698
7	0.11291	0.11871	0.14341	0.16744	0.19324	0.35152	-69.332
8	0.097244	0.13687	0.18208	0.2251	0.27656	2.1492	0.40466

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA INVERSO

Los correspondientes a la conductividad en la tabla 3.19. En 30 nodos se identificaron los parámetros con un error menor al 20%

Tabla 3.19: Errores conductividad 4 datos regularizados.

n \ m	2	3	4	5	6	7	8
2	92.504	3.02	0	5.0728	6.8248	60.083	140.93
3	22.405	20.249	2.7514	0.36813	7.6258	50.297	85.566
4	14.653	12.097	1.4708	1.0823	6.0598	26.881	307.56
5	7.5559	1.109	0.58538	0.45713	0.33068	49.114	135.87
6	5.8789	7.7213	2.7664	0.70811	7.9207	49.107	58.9
7	1.5315	2.3525	2.8827	1.4631	3.9912	61.198	141.12
8	3.9862	29.795	36.532	44.836	62.295	380.25	110.2

Tabla 3.20: Errores almacenamiento 4 datos regularizados.

n \ m	2	3	4	5	6	7	8
2	18.562	20.401	0	21.877	10.32	5.8048	52.774
3	29.231	7.9459	0.6433	8.6562	2.1945	8.8928	101.13
4	3.7558	3.0214	5.6951	9.7129	1.9548	1.5726	235.43
5	319.61	11.695	0.093339	8.8292	2.2948	32.268	89.284
6	29.178	12.158	11.847	10.807	4.851	19.036	0.69804
7	8.8813	15.208	15.493	13.885	10.281	50.65	27957
8	8.8343	5.9042	2.4199	9.735	20.997	763.51	51.746

3.3. RESULTADOS

La figura 3.3.3 muestra el comportamiento en la reproducción predicción de los potenciales hidráulicos.

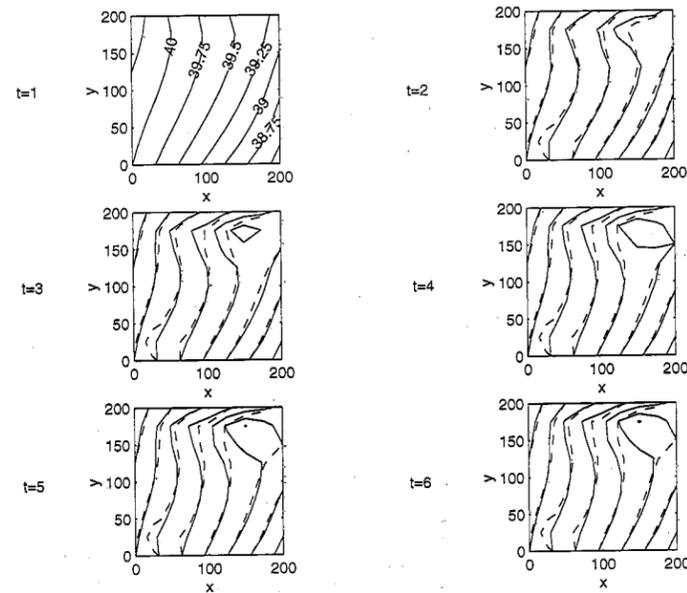


Figura 3.5: Líneas isopotenciales con parámetros identificados. Transitorio 4 datos regularizados.

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA INVERSO

Parámetros identificados de datos con ruido.

Esta sección mostramos los resultados obtenido en la identificación de parámetros a partir de datos con ruido. De la tabla 3.21 se puede observar que la conductividad hidráulica sufre de cambios bruscos en sus magnitudes.

El mayor problema se presenta para el coeficiente de almacenamiento, tabla 3.22. En este,

Tabla 3.21: Conductividad 6 datos con ruido.

n \ m	2	3	4	5	6	7	8
2	-1.8639	0.20084	0.156	0.29912	2.0156	0.50363	3.2358
3	0.38774	0.13442	0.45258	0.45361	9.90E-08	0.59852	0.36453
4	1.1672	0.55269	3.64E-08	3.60E-09	0.3	6.44E-06	0.29506
5	0.10257	8.99E-08	0.15052	12.821	0.13042	0.96245	3.67E-09
6	0.15727	3.69E-08	0.77766	1.3014	0.38805	2.09E-08	-0.1554
7	2.5495	0.24619	0.64424	6.04E-08	0.28787	2.76E-08	-0.97138
8	3.23E-05	3.1023	0.25613	8.33E-09	0.12716	1.84E-08	-0.19768

la mayoría de los términos que se obtuvieron por el método del sistema diferencial, carecen de significado físico; tomaron valores negativos o en su defecto no se encuentran entre el rango de 0 a 1. Estos datos son inservibles como coeficientes, por lo que no se muestran más tablas o figuras para esta caso.

Tabla 3.22: Almacenamiento 6 datos con ruido.

n \ m	2	3	4	5	6	7	8
2	0.75801	-1.8598	-1.0253	-4.6402	-14.011	-1.5001	-18.992
3	-1.6001	-0.29681	-3.8582	-4.8606	-0.25817	-4.0099	-3.3395
4	0.57256	0.21923	-1.6566	-0.45992	0.16	-0.044756	-2.1198
5	-3.4472	-0.21699	-1.2576	-9.5895	-0.57608	-4.8982	-0.0074574
6	-0.55471	0.12807	-3.2983	3.9661	17.3	0.03883	0.066567
7	3.2992	-1.7473	0.85893	-0.4792	-1.5672	-0.19607	-1.6864
8	-0.77587	-1.3387	-1.1085	-0.38789	-0.080578	-0.031191	1.3372

Conclusiones

Las conclusiones a las que se llegan después de este trabajo son las siguientes:

a) El simulador de cargas piezométricas, programado con el método Galerkin y elemento finito, mostró que es capaz de predecir el comportamiento en un acuífero no confinado. Con esto cumplimos con el objetivo de dar una herramienta que sirva para resolución en la administración de recursos hidráulicos subterráneos.

b) Sin embargo, a pesar de que las simulaciones generan datos razonables, el método del sistema diferencial mostró sensibilidad a la calidad de los datos que se le estaban alimentando. Es decir, es necesaria una buena calibración del simulador para así poder obtener buenos resultados.

c) Al resolver el problema inverso de identificación de parámetros el método del sistema diferencial mostró su utilidad al identificar los parámetros con errores menores al 20 % en la mayoría de los nodos.

d) Los errores más grandes en la identificación se localizaron en los nodos donde se encuentran ubicados los pozos y sus alrededores. Una posible explicación a esto es que en la cercanía de los pozos el flujo del acuífero pierde sus características de esencialmente horizontal y las velocidades a las que fluye el fluido son más altas.

e) El método del sistema diferencial es fácilmente aplicable en el caso no confinado, y tiene las siguientes ventajas: sólo se necesita la estimación de la conductividad en un punto para conocerla en los demás nodos. Con sólo este dato también es posible identificar los valores del coeficiente de almacenamiento en todos los nodos. Los valores de la conductividad se pueden obtener sin la necesidad de los valores del coeficiente de almacenamiento. Los errores en la integración son controlables escogiendo la mejor ruta de integración. La identificabilidad de parámetros puede ser mejorada anexando cuanto conjunto de datos de carga hidráulica tengamos. No se necesita la resolución del problema directo, aunque en nuestro caso se hizo para tener datos sobre los cuales trabajar.

f) La principal desventaja del método de sistema diferencial está en que requiere una cantidad importante de datos históricos del comportamiento del acuífero. Sin embargo, funciona correctamente cuando se tienen estos datos.

g) El método de sistema diferencial formulado con datos proveniente de elemento finito mostró dar resultados consistentes. En la literatura sólo están reportados formulaciones con datos calculados con el método de balance de celdas y diferencias finitas, cuyo uso simultáneo presenta una ventaja en la discretización.

h) La evidencia numérica muestra que los algoritmos de regularización aplicados a datos de potenciales hidráulicos fue de gran utilidad, al grado de devolverle coherencia a los datos que contaminados con ruido. Se mostró que técnica ampliamente aplicadas en otras disciplinas

3.3. RESULTADOS

pueden ser utilizadas con éxito en problemas análogos desde el punto de vista matemático.

Bibliografía

- [1] Bear, J. 1979. *Hdraulics of Groundwater*. Mc Graw-Hill Series in Water Resources and Enviromental Engineering.
- [2] Bertero, M. & Boccacci, P. 1998. *Introduction to inverse problems in imaging*, IOP Publishing Ltd.
- [3] Ciarlet, P. G. 1978. *The Finite Element Problem for Elliptic Problems*. Norh Holland Publishing Company.
- [4] Douglas, J. and Dupont, T. 1970. *Galerkin Methods for Parabolic Equations*. SIAM J. Numer. Anal. Vol. 7, No. 4, December 1970.
- [5] Lin C. and Segel. 1988. *Mathematics Applied to Determinisic Problems in the Natural Sciencies*. SIAM. Philadelphia.
- [6] Parravini, G. Morossi, G., Parravicini G., and Ponzini Giansilvio. 1995. *A new method for the identification of distributed transmissivities*. Water Resources Research, Vol. 31, No 8, pp. 1969-1988, august.
- [7] Parravicini, G. , Giudici, M., Morossi G.& Ponzini, G. 1995. *Minimal a priori assignment in a direct method for determining phenomenological coefficients uniquely*. Inverse Problems, Vol. 11 June, pp. 611-629.
- [8] Pinder. G.F. and Frind, E. O. F. 1972. *Application of Galerkin's Procedure to Aquifer Analisys*. Water Resources Research, vol. 8, No. 1, February.
- [9] Rosen, K., Michaels J. G., Gross J. L., Grossman, J. W., Shier, D. R.. 2000. *Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics*. CRC Press
- [10] Yeh, W. W-G. 1986. *Review of Parameter Identification Procedures in Groundwater Hydrology: The Inverse Problem*, Water Resources Research, vol. 22, No. 2 pages 95-180. February.
- [11] Vázquez, R., Moreles, M. A. y Avila, F. 2001. *The differential system method for parameter identification; unconfined aquifer case*. Comunicación interna del CIMAT.