

CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

**Empacado y Cubierta de Polígonos  
en el Plano**

**T E S I S**

que para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias**

con orientación en

**Matemáticas Aplicadas**

P R E S E N T A:

**Jesús Jerónimo Castro**

DIRECTOR DE TESIS:

**Dr. Francisco Sánchez Sánchez**

Junio 25 de 2003

Guanajuato, Gto. México

## Contenido

Agradecimientos .....	2
Notación básica .....	3
Introducción .....	1
<b>Capítulo 1. Conceptos básicos y algunos resultados clásicos .....</b>	<b>3</b>
1.1 Conceptos básicos .....	3
1.2 Algunos resultados clásicos en el plano .....	8
<b>Capítulo 2. Empacado de polígonos en el plano .....</b>	<b>11</b>
2.1 Un lema importante .....	11
2.2 Polígonos circunscritos de área mínima .....	12
2.3 Empacado de polígonos centralmente simétricos .....	15
2.4 Un resultado de L. Fejes Tóth .....	25
2.5 El cuerpo diferencia .....	28
2.6 Empacado de polígonos no centralmente simétricos .....	30
<b>Capítulo 3. Cubierta de polígonos en el plano .....</b>	<b>35</b>
3.1 Cubierta de polígonos centralmente simétricos .....	35
3.2 Triángulos inscritos de área máxima .....	40
Conclusiones .....	47
Bibliografía .....	48

## Agradecimientos

Agradezco profundamente al CIMAT, pues en él encontré gente siempre dispuesta a ayudarte y cuyas palabras y ejemplo siempre han servido de motivación. Especialmente quiero agradecer a mi asesor de Tesis, pues su amistad siempre fué un gran apoyo.

Agradezco también a CONACYT, pues su apoyo económico fué primordial para poder mantenerme durante mi estancia en CIMAT.

Agradezco también a CONCYTEG, con cuyo apoyo económico pude terminar mi trabajo de Tesis de manera satisfactoria.

Por último, quiero agradecer a mis familiares y amigos, pues siempre creyeron en mi y me brindaron su apoyo y cariño.

## Notación básica

La siguiente notación es usada:

$\mathbb{R}^n$	espacio euclidiano $n$ -dimensional
$\ \cdot\ $	norma euclidiana
$\text{int}(K)$	el interior de $K$
$\text{bd}(K)$	la frontera de $K$ ; i.e. $\text{cl}K \setminus \text{int}K$
$v(K)$	volumen de $K$
$A(K)$	área de superficie de $K$
$\delta(K)$	densidad de empaçado de $K$
$\delta_T(K)$	densidad de empaçado translativo de $K$
$\delta_L(K)$	densidad de empaçado retícula de $K$
$\nu_T(K)$	densidad de cubierta translativa de $K$
$\nu_L(K)$	densidad de cubierta retícula de $K$
$O$	el origen en $\mathbb{R}^n$
$I_n$	cubo unitario en $\mathbb{R}^n$
$\text{card}(X)$	cardinalidad del conjunto $X$
$\overrightarrow{AB}$	el rayo con origen en $A$
$[a, b]$	el segmento de vértices $A$ y $B$
$\text{conv}(K)$	la envolvente convexa de $K$
$AB$	el segmento de vértices $A$ y $B$
$\text{vert}(P)$	el conjunto de vértices de $P$

## Introducción

El *empacado de esferas* es uno de los más fascinantes y retadores temas en matemáticas. Alrededor de cuatro siglos atrás, Kepler estudió las densidades de empackado de esferas y enunció en 1611 su famosa conjetura:

*No existe un empackado de bolas iguales en el espacio tridimensional ( $\mathbb{R}^3$ ) que pueda tener densidad que exceda la del empackado cúbico centrado en las caras.*

La densidad de este empackado es  $\frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0.74048$ . Esta conjetura fué probada en Agosto de 1998 por Thomas C. Hales con la ayuda de su estudiante Samuel P. Ferguson. La versión en  $\mathbb{R}^2$  de la conjetura de Kepler cuestiona acerca del empackado más denso de discos unitarios en el plano. Si se inscribe un disco en cada hexágono, en el mosaico hexagonal regular (también conocido como *panal de abejas*), la densidad de este empackado es  $\frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0.9069$ . En su lectura durante un Congreso en 1892 A. Thue probó que el empackado más denso de discos congruentes es del tipo retícula y tiene esta densidad. El problema dual, para cubierta, fué establecido por Kershner en 1939. El mostró que la densidad (mínima) de cubierta del plano con discos congruentes es al menos  $\frac{2\pi}{\sqrt{27}} \approx 1.209$ , la cual se obtiene circunscribiendo un disco a cada hexágono en el mosaico hexagonal regular en el plano.

En cuanto a polígonos en el plano, Mount y Silverman [24] en 1991 consideraron la complejidad computacional de los siguientes problemas: Para un polígono convexo centralmente simétrico  $P$  con  $n$  vértices, construir la cubierta más delgada del plano con trasladados de  $P$ ; y, para un polígono convexo  $P$  con  $n$  vértices, construir el empackado más denso del plano con trasladados de  $P$ . Ellos mostraron que cada uno de los problemas puede ser resuelto por un algoritmo en tiempo lineal. El problema de cubierta es resuelto inscribiendo el hexágono centralmente simétrico de área máxima en  $P$ , obtenido inscribiendo un triángulo  $T$  de área máxima en  $P$  y después reflejando  $T$  en el centro de simetría de  $P$ . Desde que existe un algoritmo en tiempo lineal para encontrar  $T$ , el problema de cubierta puede ser resuelto en tiempo lineal también. Para el problema de empackado, Mount y Silverman usaron el *truco del cuerpo diferencia* de Minkowski para reducir el problema a polígonos convexos centralmente simétricos. Después, ellos usaron otra observación de Minkowski: el problema de encontrar el empackado más denso con trasladados de un cuerpo convexo centralmente simétrico  $K$  es equivalente al problema de encontrar el *paralelogramo central* de área mínima en  $K$ , donde un paralelogramo central en  $K$  es definido como un paralelogramo en el cual uno de sus vértices es el centro de simetría de  $K$  y los vértices restantes están sobre la frontera de  $K$ . A partir de este paralelogramo central se puede construir el hexágono centralmente simétrico de área mínima el cual contiene a  $K$ . La parte principal de la solución de Mount y Silverman al problema de empackado es un algoritmo en tiempo lineal el cual produce el paralelogramo central de área mínima para  $P$ .

En el presente trabajo se resuelven los mismos problemas para polígonos convexos en el plano. Con los resultados obtenidos es posible establecer algoritmos por medio de los cuales se pueden determinar tanto el empackado del tipo retícula más denso, como la cubierta del tipo retícula más delgada. En este sentido, el trabajo aquí desarrollado no tiene desventaja alguna contra el

trabajo hecho por Mount y Silverman. Además, si restringimos nuestra atención a polígonos regulares, es posible encontrar resultados más finos, es decir, la cantidad de trabajo necesaria para encontrar el empaçado y la cubierta óptimos (del tipo retícula) para un polígono regular dado, se reduce considerablemente. Con esto, es posible mostrar una fórmula que depende del número de lados del polígono y con la cual se obtienen los valores de las densidades correspondientes (tanto de empaçado como de cubierta). Además, también es posible mostrar los arreglos con los cuales se obtienen estas densidades.

En el capítulo 1 se introducen las definiciones y notación básicas necesarias y se mencionan algunos resultados clásicos, algunos de los cuales se utilizan en el desarrollo de temas posteriores y constituyen el punto de partida del presente trabajo. Cabe destacar principalmente el resultado de L. Fejes Tóth, el cual nos proporciona una cota superior para la densidad de empaçado y una cota inferior para la densidad de cubierta del tipo retícula.

En el capítulo 2 se calcula la densidad de empaçado de polígonos regulares en el plano. Para esto, basándonos en el resultado de L. Fejes Tóth, al encontrar el hexágono de área mínima (el cual puede no ser único) el cual circunscribe a un cuerpo convexo  $K$ , encontramos una cota superior para la densidad de empaçado. Para polígonos centralmente simétricos, al encontrar este hexágono (el cual se puede obtener de manera que sea centralmente simétrico), será posible calcular el valor exacto de la densidad de empaçado. También, se demuestra y se utiliza un teorema de Chakerian y Lange acerca de polígonos circunscritos de área mínima y se ve como otro resultado de L. Fejes Tóth se demuestra de manera sencilla utilizando este teorema.

En el capítulo 3 se calcula la densidad de cubierta del plano con polígonos regulares. Nuevamente nos basaremos en el resultado de L. Fejes Tóth, es decir, encontraremos el hexágono de área máxima (el cual puede no ser único) el cual queda inscrito dentro de un polígono  $K$  y con esto habremos encontrado una cota inferior para la densidad de cubierta. Cuando  $K$  sea un polígono centralmente simétrico, al encontrar el hexágono de área máxima inscrito en  $K$  (el cual se puede obtener de manera que sea centralmente simétrico), encontraremos exactamente el valor de la densidad de cubierta translativa. Para los polígonos regulares con un número impar de vértices encontraremos solamente cubiertas del tipo retícula cuyas densidades se aproximan a la cota dada por el teorema de Fejes Tóth. También, se darán algunos teoremas relativos a triángulos inscritos de área máxima con los cuales podría ser posible reducir el trabajo de encontrar el hexágono centralmente simétrico de área máxima inscrito en  $K$ , lo cual a su vez nos proporcionaría el valor de la densidad de cubierta translativa para estos polígonos.

## Capítulo 1. Conceptos básicos y algunos resultados clásicos

### 1.1 Conceptos básicos

Debido a que trataremos con arreglos de figuras convexas en el plano, introduciremos la siguiente terminología:

Primero tenemos que un *empaçado* es una familia de figuras cuyos interiores son ajenos, y una *cubierta* es una familia de figuras cuya unión es el plano completo (en nuestro caso  $\mathbb{R}^2$ ). Restringiremos nuestra atención al empaçado y cubierta de figuras convexas, por esto uno de los conceptos primordiales será la noción de cuerpo convexo.

**Definición 1.1.1** Un conjunto convexo  $K \in \mathbb{R}^n$  será llamado un *cuerpo convexo* si es compacto y con interior no vacío en  $\mathbb{R}^n$ . Además, diremos que es *estrictamente convexo* si su frontera no contiene segmentos de línea.

Hemos definido un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^n$  aunque sólo trataremos con cuerpos convexas en el plano, además, de ahora en adelante nos referiremos a ellos solamente como *cuerpos*. También, diremos que  $K$  es *centralmente simétrico* si existe  $p \in \mathbb{R}^n$ , tal que

$$x \in K \iff 2p - x \in K.$$

Es decir, un cuerpo es centralmente simétrico con centro de simetría  $p$ , si siempre que  $x$  esté en el cuerpo también tendremos que  $2p - x$  lo está. La siguiente figura es centralmente simétrica:

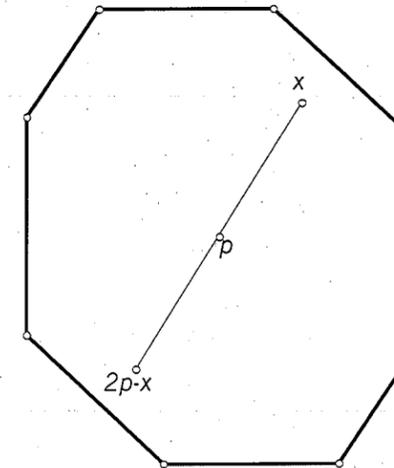


Figura 1.

Sean  $v \in \mathbb{R}^n$  y  $S \subset \mathbb{R}^n$ , entonces

$$v + S = \{v + x : x \in S\},$$

y el conjunto  $v + S$  será llamado *el trasladado* de  $S$  por  $v$ . También, si  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  tenemos que

$$\Lambda + S = \bigcup_{v \in \Lambda} (S + v).$$

Además, si  $r \in \mathbb{R}$  tenemos que

$$rS = \{rx : x \in S\}$$

y escribiremos  $-S$  en lugar de  $(-1)S$ .

Los trasladados del conjunto  $S$  pueden llevarse a cabo por medio de un conjunto finito ó infinito de puntos en  $\mathbb{R}^n$ . Estaremos especialmente interesados en el caso de que  $\Lambda$  esté formado por los puntos que pertenezcan a una *retícula*, tenemos entonces la siguiente definición:

**Definición 1.1.2** Si  $v_1, v_2, \dots, v_n$  son  $n$  vectores linealmente independientes en  $\mathbb{R}^n$ , entonces el conjunto

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i : a_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

es llamado una *retícula* y el conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una *base* para  $\Lambda$ . Además, al conjunto

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}$$

se le llama *paralelepípedo fundamental* de  $\Lambda$ . Al valor absoluto del determinante  $|v_{ij}|$  se le llama *determinante de la retícula*, se denota por  $\det(\Lambda)$  y es igual al volumen de  $Q$ ,  $v(Q)$ .

De manera particular, para todo par de vectores linealmente independientes  $v_1$  y  $v_2$  en  $\mathbb{R}^2$ , la retícula generada por  $v_1$  y  $v_2$  es el conjunto de vectores

$$\Lambda = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 : a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\}$$

y el paralelogramo generado por  $v_1$  y  $v_2$  es llamado un *paralelogramo básico* de la retícula (ver Figura 2).

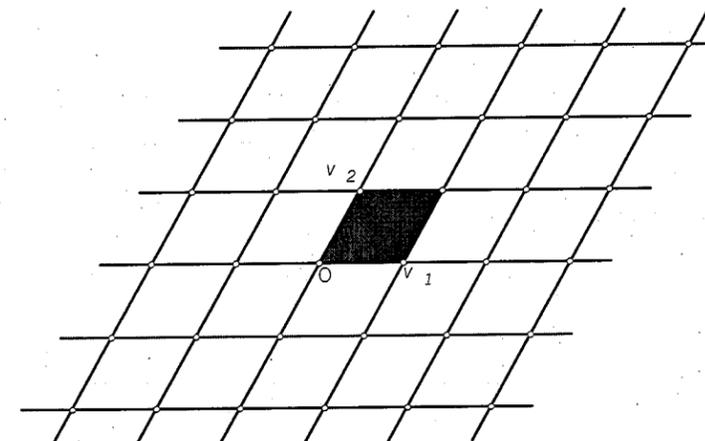


Figura 2. Retícula en  $\mathbb{R}^2$ .

Una familia  $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots\}$  de cuerpos  $K_1, K_2, \dots$ , en  $\mathbb{R}^n$  forman un *empacado* de  $\mathbb{R}^n$  si no existen dos de los cuerpos  $K_1, K_2, \dots$  que tengan un punto interior en común.

**Definición 1.1.3** Sea  $X$  un conjunto discreto de puntos en  $\mathbb{R}^n$ . Llamaremos a  $K + X$  un *empacado traslativo* de  $K$  si

$$(\text{int}(K) + x_1) \cap (\text{int}(K) + x_2) = \emptyset$$

para todo  $x_1$  y  $x_2$  distintos en  $X$ . Si  $X$  es una retícula llamaremos a  $K + X$  un *empacado retícula*.

Una familia  $\mathcal{C} = \{K_1, K_2, \dots\}$  de cuerpos en  $\mathbb{R}^n$  forman una *cubierta* de  $\mathbb{R}^n$  (esto es, cubren  $\mathbb{R}^n$ ) si cada punto de  $\mathbb{R}^n$  pertenece a algún cuerpo que pertenezca a  $\mathcal{C}$ .

**Definición 1.1.4** Sea  $X$  un conjunto discreto de puntos en  $\mathbb{R}^n$ . Llamaremos a  $K + X$  una *cubierta traslativa* de  $\mathbb{R}^n$  con copias de  $K$  si

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{x \in X} (K + x).$$

además, si  $X$  es una retícula, la llamaremos una *cubierta retícula* de  $\mathbb{R}^n$ .

El problema básico en la teoría de empaado y en la teoría de cubierta es la determinación de el empaado y cubierta más eficientes con copias de un conjunto dado  $K$  en  $\mathbb{R}^n$ . La medida usual para la eficiencia de un arreglo es la *densidad*. Intuitivamente, las densidades de empaado y cubierta pueden ser entendidas como la razón de la suma de los volúmenes (áreas, en el caso de que estemos en el plano) de los trasladados de  $K$  al volumen del espacio entero. Esta densidad es a lo más 1 para un empaado y al menos 1 para una cubierta. Veamos ahora la definición formal para la densidad de empaado:

**Definición 1.1.5** Sean  $l \in \mathbb{N}$  y  $m(K, l)$  el máximo número de trasladados  $K + x$  que se pueden empaclar en el cubo  $lI_n$ . Se define la densidad de  $K$  en  $\mathbb{R}^n$  como

$$\delta_T(K) = \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{m(K, l)v(K)}{v(lI_n)}$$

mientras que la densidad de un empaclado translativo dado  $K + X$  se define como

$$\delta_T(K, X) = \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(X \cap lI_n)v(K)}{v(lI_n)}.$$

Es posible demostrar que

$$\delta_T(K) = \sup_X \delta_T(K, X),$$

donde el supremo se toma sobre todos los  $X$  tales que  $K + X$  es un empaclado. Además, si  $X$  es una retícula, diremos que  $K + X$  es un empaclado retícula y denotaremos su densidad de empaclado como  $\delta_L(K, X)$ .

Básicamente, en los empaclados retícula lo que se hace es colocar una copia congruente de  $K$  en cada punto de la retícula (ver Figura 3),

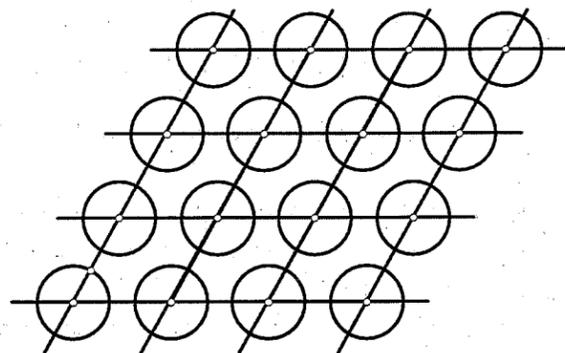


Figura 3. Empaclado retícula de Discos Congruentes.

así de este modo, la densidad de un empaclado retícula o una cubierta retícula de un cuerpo  $K$  (en el plano), generada por  $\{a_1, a_2\}$ , puede ser vista como la razón del área de  $K$  al área del paralelogramo generado por  $a_1$  y  $a_2$ . De manera sencilla puede deducirse que

$$\delta_L(K) = \sup_{\Lambda} \frac{A(K)}{\det(\Lambda)},$$

donde el supremo se toma sobre todos los  $\Lambda$  tales que  $K + \Lambda$  es un empaclado retícula. Además, si permitimos que las copias de  $K$  sean rotadas, intuitivamente podría ser posible llegar a un arreglo donde la densidad fuera mayor. Es decir, si denotamos al supremo de estas densidades permitiendo rotaciones de  $K$  como  $\delta(K)$ , podríamos tener arreglos de las figuras para los cuales

$\delta_T(K) \leq \delta(K)$ . Es fácil ver que para todo cuerpo convexo  $K$

$$\delta_L(K) \leq \delta_T(K) \leq \delta(K) \leq 1.$$

De la definición 1.1.5 surge de manera natural la siguiente pregunta: ¿Obtendremos el mismo valor para  $\delta_T(K)$  si en lugar de usar el cubo unitario  $I_n$  usamos cualquier otro cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^n$ ? El siguiente teorema nos da la respuesta.

**Teorema 1.1.1** Sea  $A$  un cuerpo convexo tal que  $O \in \text{int}(A)$ , y sea  $m(K, lA)$  el máximo número de copias de trasladados  $K + x$  que pueden ser empaclados en  $lA$ . Entonces

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{m(K, lA)v(K)}{v(lA)} = \delta_T(K).$$

**Demostración.** Ver [4]. ■

**Definición 1.1.6** Sea  $\mathcal{Y}$  la familia de conjuntos  $Y$  tales que  $K + Y$  es una cubierta de  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $\mathcal{L}$  la familia de retículas  $\Lambda$  tales que  $K + \Lambda$  es una cubierta retícula de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces definimos

$$\nu_T(K) = \liminf_{\substack{l \rightarrow \infty \\ Y \in \mathcal{Y}}} \frac{\text{card}\{Y \cap lI_n\}v(K)}{l^n}$$

y

$$\nu_L(K) = \liminf_{\substack{l \rightarrow \infty \\ \Lambda \in \mathcal{L}}} \frac{\text{card}\{\Lambda \cap lI_n\}v(K)}{l^n}.$$

Usualmente,  $\nu_T(K)$  y  $\nu_L(K)$  son llamadas la densidad de la cubierta translativa más delgada de  $\mathbb{R}^n$  y la densidad de la cubierta retícula más delgada de  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente. Nos referiremos a ellas simplemente como *densidad de cubierta translativa* y *densidad de cubierta retícula*. Además, de igual manera que para la densidad de empaclado retícula, se puede ver que

$$\nu_L(K) = \inf_{\Lambda \in \mathcal{L}} \frac{v(K)}{\det(\Lambda)}.$$

También aquí, si permitimos que las copias de  $K$  sean rotadas, podría ser posible llegar a un arreglo donde la densidad de cubierta fuera menor. Denotamos el ínfimo de estas densidades de cubierta permitiendo rotaciones de  $K$  como  $\nu(K)$ . Es fácil ver que para todo cuerpo convexo  $K$

$$1 \leq \nu(K) \leq \nu_T(K) \leq \nu_L(K).$$

## 1.2 Algunos resultados clásicos en el plano

Uno de los teoremas en la teoría de empaçado, establece que la máxima densidad de cualquier empaçado en el plano con discos circulares congruentes es igual a

$$\frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0.90689968\dots$$

lograda inscribiendo cada círculo dentro de un hexágono regular y después teselando el plano con los hexágonos. Este arreglo es conocido como *panal de abejas* (ver Figura 4)

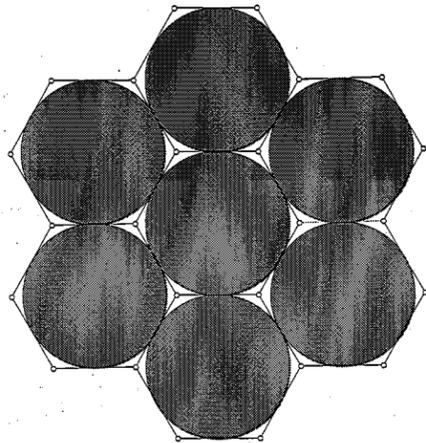


Figura 4. Empaçado más denso con círculos congruentes.

La primera demostración de éste resultado fué dada por Thue [28] en 1892. En cuanto a cubierta, el resultado análogo al anterior fué dado por Kershner [18] en 1939. Este establece que la densidad mínima de cualquier cubierta del plano con discos circulares congruentes es igual a

$$\frac{2\pi}{\sqrt{27}} = 1.20919957\dots$$

logrado también con el arreglo de los discos en forma de panal de abejas, solo que ahora los hexágonos regulares quedan inscritos en los círculos.

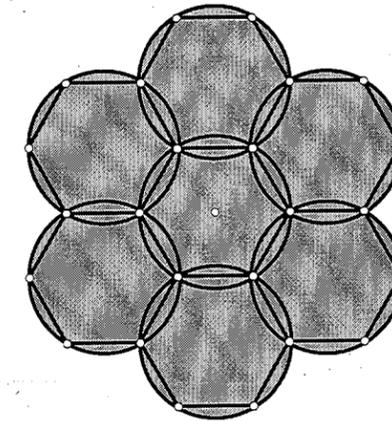


Figura 5. Cubierta más delgada con círculos congruentes.

Por otro lado, para un cuerpo convexo  $K$  dado, denotaremos con  $H(K)$  al hexágono de área mínima el cual circunscribe a  $K$  y con  $h(K)$  denotaremos al hexágono de área máxima inscrito en  $K$  (aquí cabe mencionar que  $H(K)$  y  $h(K)$  no son necesariamente regulares). En 1950, L. Fejes Tóth [11] probó que

$$\delta(K) \leq \frac{A(K)}{A(H(K))} \quad \text{y} \quad \nu_T(K) \geq \frac{A(K)}{A(h(K))}$$

para todo cuerpo convexo  $K$ . Fejes Tóth conjeturó también que

$$\nu(K) \geq \frac{A(K)}{A(h(K))}.$$

Además, por un teorema debido a Dowker [6], si  $K$  es un cuerpo centralmente simétrico, entonces  $h(K)$  y  $H(K)$  pueden ser obtenidos inscribiendo y circunscribiendo a  $K$ , respectivamente, un hexágono centralmente simétrico. Como es sabido que los trasladados de cualquier hexágono centralmente simétrico teselan el plano, las copias trasladadas de  $K$  generadas por la correspondiente retícula, producen un empaçado retícula cuya densidad es igual a la cota dada por la desigualdad anterior. Entonces, para cada cuerpo convexo centralmente simétrico tenemos

$$\begin{aligned} \delta(K) &= \delta_L(K) = \frac{A(K)}{A(H(K))}, \\ \nu_T(K) &= \nu_L(K) = \frac{A(K)}{A(h(K))}. \end{aligned}$$

En 1951 Rogers [26] probó que  $\delta_T(K) = \delta_L(K)$  para todo cuerpo convexo  $K$ . Por otro lado, la conjetura de que  $\nu_T(K) = \nu_L(K)$  se cumple en general para todo cuerpo convexo  $K$  (no necesariamente centralmente simétrico) permanece aún abierta.

Por un  $p$ -hexágono entenderemos un hexágono convexo con un par de lados opuestos paralelos y de la misma longitud. Sabemos además, que es posible teselar el plano con copias de estos hexágonos [19] (ver Figura 6).

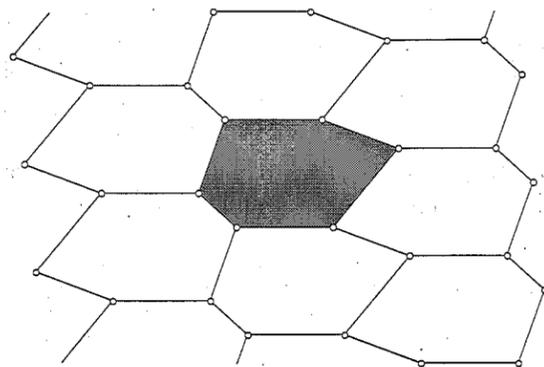


Figura 6. Teselación del plano con  $p$ -hexágonos.

Otro resultado interesante, demostrado usando la técnica de los  $p$ -hexágonos es el siguiente

$$\frac{\delta(K)}{\nu(K)} \geq \frac{3}{4},$$

el cual fué obtenido por W. Kuperberg [22] en 1987. Este resultado ya había sido demostrado por L. Fejes Tóth [12] en 1972 para cuerpos convexos centralmente simétricos.

## Capítulo 2. Empacado de polígonos en el plano

En este capítulo, nuestro objetivo será calcular la densidad de empaqueo de polígonos regulares en el plano. Para esto, basándonos en el resultado de L. Fejes Tóth, al encontrar el hexágono de área mínima el cual circunscribe a un cuerpo convexo  $K$ , tendremos una cota superior para  $\delta(K)$ . Cuando  $K$  sea un polígono centralmente simétrico, al encontrar  $H(K)$  habremos encontrado exactamente el valor de  $\delta(K)$ . Para los polígonos que no son centralmente simétricos, procederemos de acuerdo a un teorema de Minkowski y encontraremos el valor exacto para  $\delta_L(K)$ .

Como podemos observar, el trabajo se ha reducido a encontrar  $H(K)$  para un polígono regular dado  $K$ . Utilizaremos un teorema de Chakerian y Lange para lograr esto y analizaremos un lema, el cual juega un papel muy importante en la demostración del teorema de Chakerian y Lange. También veremos como otro resultado de L. Fejes Tóth se demuestra de manera sencilla utilizando este teorema.

### 2.1 Un lema importante

Recordemos que nuestro trabajo se reduce a encontrar polígonos de área mínima los cuales circunscriben a un cuerpo convexo  $K$ , específicamente, el trabajo se reduce a encontrar un hexágono de área mínima el cual circunscriba a  $K$ . Para esto demostraremos el teorema de Chakerian y Lange y lo utilizaremos. En esta sección demostraremos el lema con el cual se demuestra este teorema.

**Lema 2.1.1** Sea  $\angle XOY < \pi$  un ángulo dado. Entonces

- Para cada punto  $M \in \text{int}(\angle XOY)$  existe una y sólo una cuerda  $AB$  que pasa por  $M$ , con los puntos  $A$  en  $\overrightarrow{OX}$  y  $B$  en  $\overrightarrow{OY}$ , la cual es bisectada por  $M$ .
- Consideremos todos los triángulos  $\triangle AOB$ , con  $A$  en  $\overrightarrow{OX}$ ,  $B$  en  $\overrightarrow{OY}$  y además  $M \in \text{int}(AB)$ . Entonces  $\mathcal{A}(AOB)$  se minimiza cuando  $AM = MB$ .

**Demostración.**

a) Sea  $AB$  una cuerda bisectada por  $M$  con  $A$  en  $\overrightarrow{OX}$  y  $B$  en  $\overrightarrow{OY}$ . Supongamos que existe otra cuerda  $CD$  de tal manera que  $C$  está en  $\overrightarrow{OX}$ ,  $D$  está en  $\overrightarrow{OY}$ ,  $M \in \text{int}(CD)$  y  $CM = MD$ . Entonces, tenemos que  $\triangle AMC \sim \triangle BMD$  y esto implica que  $AC$  es paralelo a  $DB$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto, Para cada punto  $M \in \text{int}(\angle XOY)$  existe una y sólo una cuerda  $AB$  que pasa por  $M$ , con los puntos  $A$  en  $\overrightarrow{OX}$  y  $B$  en  $\overrightarrow{OY}$ , la cual es bisectada por  $M$ .

b) Nuevamente, consideremos que  $AB$  es la cuerda bisectada por  $M$  con  $A$  en  $\overrightarrow{OX}$  y  $B$  en  $\overrightarrow{OY}$ . Sea  $CD$  una cuerda distinta de  $AB$  con  $M \in \text{int}(CD)$ ,  $C$  en  $\overrightarrow{OX}$  y  $D$  en  $\overrightarrow{OY}$ . Aquí hay dos casos:

I)  $CM > MD$  (ver Figura 7). Sabemos que existe  $E \in \text{int}(CM)$  tal que  $AE$  es paralelo a  $DB$ , entonces

$$A(AME) = A(DBM)$$

y como

$$A(AOB) = A(AODM) + A(DBM)$$

y

$$A(COD) = A(AODM) + A(AME) + A(AEC),$$

además,  $A(AEC) > 0$ , tenemos que

$$A(COD) > A(AOB).$$

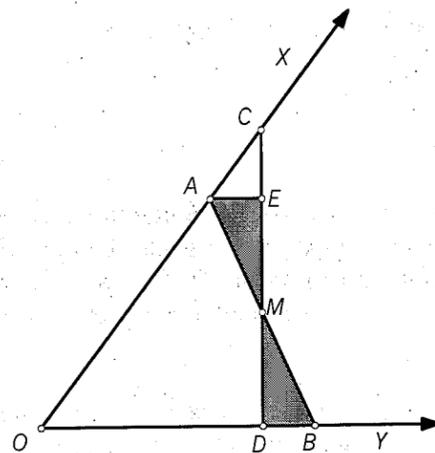


Figura 7

II)  $CM < MD$ . Este caso se demuestra de manera análoga al caso anterior. ■

## 2.2 Polígonos circunscritos de área mínima

Empezaremos llamando  $n$ -ágono a un polígono convexo con  $n$  vértices, el cual puede o no ser un polígono regular. Si además es regular, nos referiremos a él como  $n$ -ágono regular. Sea  $K$  un cuerpo convexo y  $n \geq 3$  un entero dado, entonces existe al menos un  $n$ -ágono convexo de área mínima el cual contiene a  $K$ . Nótese que tal  $n$ -ágono debe estar circunscrito alrededor de  $K$ , esto es, sus lados deben intersectar la frontera de  $K$ . El siguiente teorema se debe a Chakerian y Lange [3] y juega un papel muy importante al buscar el polígono de área mínima el cual circunscribe a un cuerpo convexo dado.

**Teorema 2.2.1** Sea  $K$  un cuerpo convexo y  $n \geq 3$  un entero dado. Sea  $P$  un  $n$ -ágono convexo de área mínima el cual contiene a  $K$ . Entonces los puntos medios de los lados de  $P$  están sobre la frontera de  $K$ .

**Demostración.** Supongamos que  $P$  es un  $n$ -ágono de área mínima circunscrito alrededor de un cuerpo convexo  $K$ . Sea  $AB$  un lado del polígono, de tal manera que su punto medio  $M$  no pertenece a  $K$ . Tenemos tres posibles casos, en cada uno de ellos demostraremos que podemos construir un  $n$ -ágono de menor área que  $P$ :

a) Las prolongaciones de los lados adyacentes al lado  $AB$  se intersectan en un punto  $O$  de tal manera que el  $\triangle AOB$  no contiene a  $K$ . En este caso existe una línea soporte  $l$  la cual separa a  $M$  de  $K$ . Sea  $m$  una línea paralela a  $l$  la cual pase por  $M$ . Debido al lema 1, tenemos que  $m$  corta un triángulo de área estrictamente mayor que el área de  $\triangle AOB$  y con mayor razón tenemos que  $l$  corta un triángulo de área mayor que la de  $\triangle AOB$ . Así, utilizando  $P$  y la línea  $l$ , podemos construir un  $n$ -ágono de área menor que la de  $P$ .

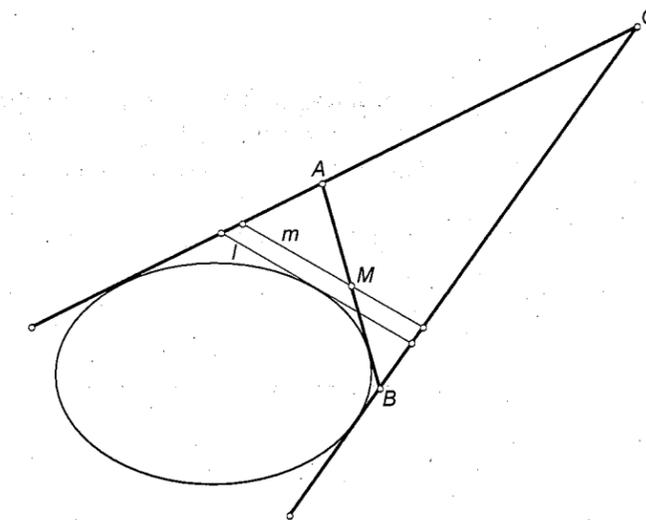


Figura 8.

b) Las prolongaciones de los lados adyacentes al lado  $AB$  se intersectan en un punto  $O$  de tal manera que el  $\triangle AOB$  contiene a  $K$ . En este caso podemos trazar el segmento  $CD$  el cual separa a  $M$  de  $K$  y el cual tiene su punto medio sobre  $AB$ . Por el lema 2.2.1, tenemos que  $A(COD) < A(AOB)$ . Nuevamente, podemos trazar una línea soporte  $l$  paralela a  $CD$ . Utilizando  $l$  y  $P$  podemos construir un  $n$ -ágono de área menor que la de  $P$ .

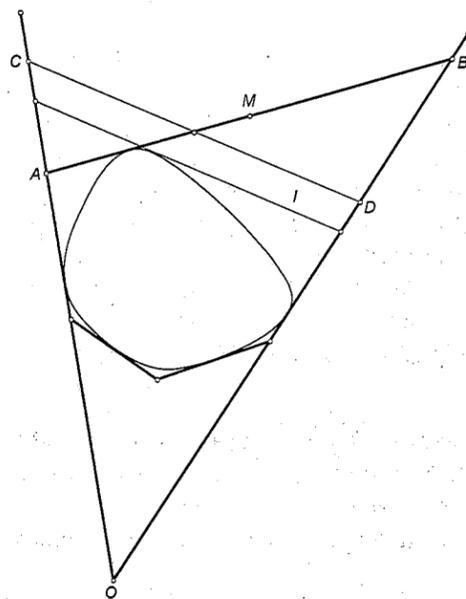


Figura 9.

c) Los dos lados adyacentes a  $AB$  son paralelos. Sea  $l$  una línea soporte la cual separe a  $M$  de  $K$ . Sea  $m$  una línea paralela a  $l$  la cual pase por  $M$ . Utilizando  $m$  y  $P$  podemos construir un  $n$ -ágono de igual área que  $P$ , y usando  $l$  podemos obtener un  $n$ -ágono de menor área que  $P$ .

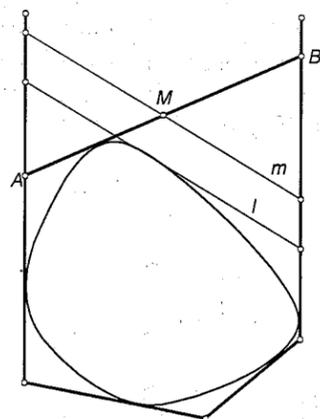


Figura 10.

### 2.3 Empacado de polígonos centralmente simétricos

En esta sección se mostrará como encontrar  $H(K)$  para polígonos regulares centralmente simétricos, en los cuales se puede observar que siempre deben tener un número par de vértices, esto es,  $\text{card}(\text{vert}(K)) = 2n$  con  $n \in \mathbb{N}$ .

Empezaremos denotando con  $P_{2n}$  al polígono regular de  $2n$  lados y a  $H(P_{2n})$  lo llamaremos simplemente  $H$ . Tenemos que  $H$  debe de contener dos lados opuestos de  $P_{2n}$ , de no ser así, podemos obtener un hexágono centralmente simétrico de área menor por medio de una rotación de  $P_{2n}$  y trasladando algunos de los lados de  $H$ . Llamemos  $l$  y  $m$  a dos líneas paralelas las cuales contienen a dos lados opuestos de  $P_{2n}$  y denotaremos con  $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5$  y  $H_6$  a los vértices de  $H$  (ver figura 11).

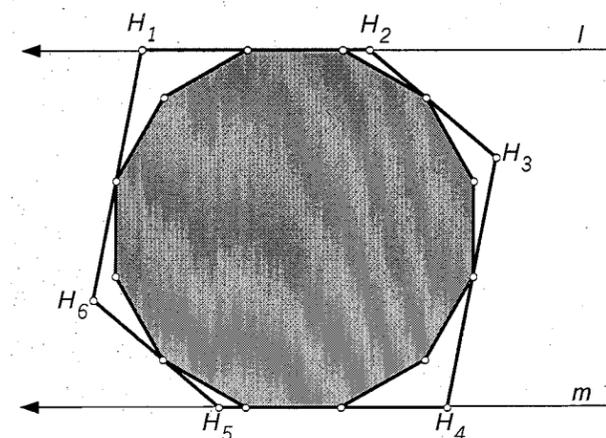


Figura 11.

Como se vió en el teorema anterior, los puntos medios de los lados de  $H$  deben pertenecer a la frontera de  $P_{2n}$ , además, tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 2.3.1** *Los puntos medios de  $H$  deben ser puntos regulares de  $P_{2n}$ , es decir, no pueden ser vértices de  $P_{2n}$ .*

**Demostración.** Sean  $H_1H_2$  y  $H_5H_4$  dos lados de  $H$  los cuales contienen a dos lados opuestos (y paralelos) de  $P_{2n}$ . Sea  $A$  el punto de intersección de  $\overline{H_4H_3}$  con  $l$  (ver Figura 12). Supongamos que el punto medio de  $H_2H_3$  es un vértice de  $P_{2n}$ , digamos  $A_i$ . Por  $A_i$  trazamos una línea soporte de  $P_{2n}$  distinta de  $H_2H_3$  la cual intersecciona a  $l$  y a  $\overline{H_4H_3}$  en los puntos  $C$  y  $B$ , respectivamente. Debido al lema 2.1.1 tenemos que  $A(AH_2H_3) < A(ACB)$ . Con esto podemos construir un hexágono centralmente simétrico de área menor que el área de  $H$ . Esto contradice el hecho de que  $H$  es el hexágono centralmente simétrico de área mínima el cual circunscribe a

$P_{2n}$ . Concluimos entonces que los puntos medios de los lados de  $H$  no pueden ser vértices de  $P_{2n}$ .

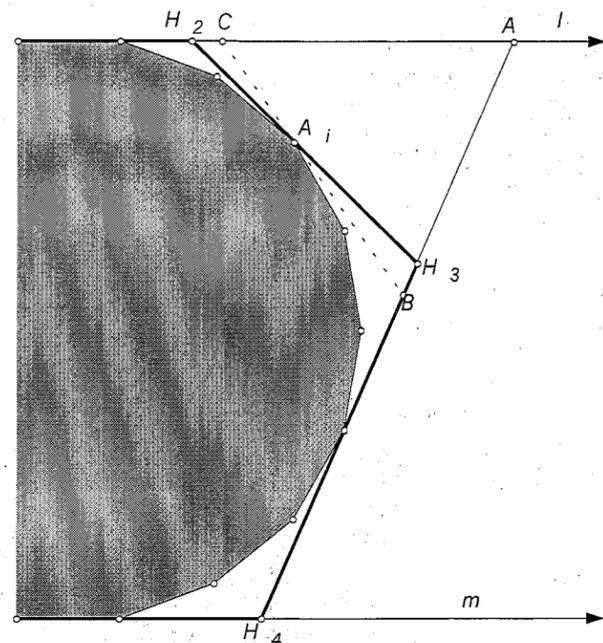


Figura 12

**Observación 2.3.2.** Si  $K$  es un cuerpo convexo en el plano,  $n \geq 3$  un número natural fijo y  $P$  es un  $n$ -ágono convexo de área mínima el cual circunscribe a  $K$ , podemos ver que este resultado sigue siendo válido siempre y cuando para cualesquiera dos vértices adyacentes de  $P$  se cumpla que la suma de los ángulos interiores en esos dos vértices sea mayor que  $180^\circ$ .

Ahora ya sabemos que todos los lados de  $H$  deben de contener a algún lado de  $P_{2n}$ . Denotaremos con  $P^k$  a un polígono cóncavo contenido en  $H$  el cual tiene  $k + 2$  lados, dos de los cuales son prolongaciones de dos lados de  $P_{2n}$  y los restantes  $k$  lados son lados de  $P_{2n}$ . Por ejemplo, el polígono  $H_3A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$  es un polígono  $P_{2n}^3$  (ver Figura 13), ya que está formado por las prolongaciones de los lados  $A_{i-1}A_i$  y  $A_{i+4}A_{i+3}$ , y por los lados  $A_iA_{i+1}$ ,  $A_{i+1}A_{i+2}$  y  $A_{i+2}A_{i+3}$ .

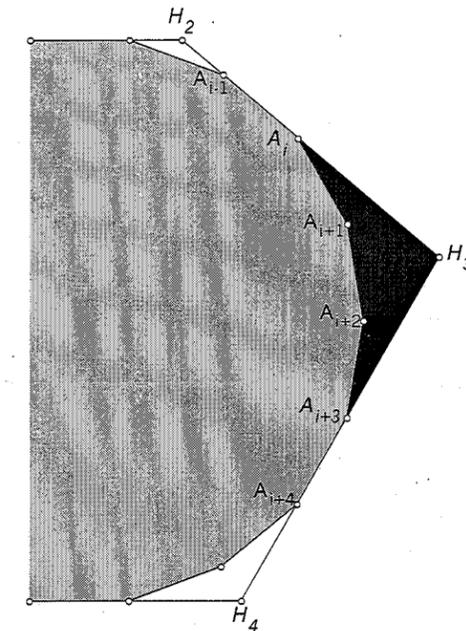


Figura 13.

Debido a esto,  $H$  estará compuesto por  $P_{2n}$  y 6 polígonos cóncavos (algunos de ellos quizá degenerados, es decir, de la forma  $P_{2n}^0$ ). Además, con un cálculo sencillo se tiene que el área de  $P_{2n}^k$  se puede expresar como

$$A(P_{2n}^k) = \frac{R^2}{2} \left[ 2\text{Sen}^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \text{Tan}\left(\frac{(k+1)\pi}{2n}\right) + \text{Sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right) - k\text{Sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \right],$$

donde  $R$  es el radio de la circunferencia circunscrita a  $P_{2n}$ .

Tenemos ahora la siguiente proposición:

**Proposición 2.3.3** Sea  $P_{2n}^k$  un polígono cóncavo contenido en  $H$ , entonces  $k < \left[\frac{n}{2}\right]$ . Donde con  $[x]$  denotamos la parte entera de un número real  $x$ .

**Demostración.** Sean  $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$  los vértices de  $P_{2n}$  y  $H_1, H_2, \dots, H_6$  los vértices de  $H$ , como se muestra en la Figura 14:

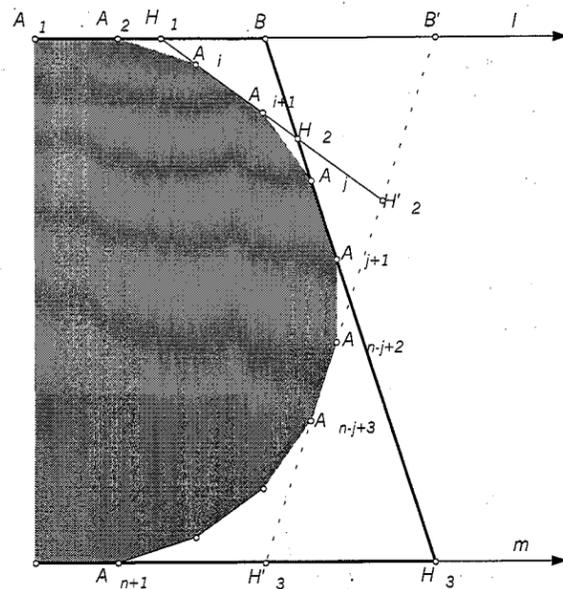


Figura 14.

Consideremos los tres polígonos cóncavos  $H_1A_2\dots A_i$ ,  $H_2A_{i+1}\dots A_j$  y  $H_3A_{j+1}\dots A_{n+1}$ , los cuales son de la forma  $P^{i-2}$ ,  $P^{j-(i+1)}$  y  $P^{n+1-(j+1)}$ , respectivamente. Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $n-j \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Trazamos la recta que pasa por  $A_{n-j+2}$  y  $A_{n-j+3}$ , la cual corta a las rectas  $l$  y  $m$  en los puntos  $B'$  y  $H'_3$ , respectivamente. Sea  $H'_2$  el punto de intersección entre  $\overline{A_iA_{i+1}}$  y  $\overline{A_{n-j+3}A_{n-j+2}}$ . Tenemos que

$$A(A_2BH_3A_{n+1}) = A(A_2B'H'_3A_{n+1}).$$

Como

$$A(A_2H_1H_2H_3A_{n+1}) = A(A_2BH_3A_{n+1}) - A(BH_1H_2)$$

y

$$A(A_2H_1H'_2H'_3A_{n+1}) = A(A_2B'H'_3A_{n+1}) - A(B'H_1H'_2),$$

y además,

$$A(BH_1H_2) < A(B'H_1H'_2),$$

tenemos que

$$A(A_2H_1H'_2H'_3A_{n+1}) < A(A_2H_1H_2H_3A_{n+1}).$$

Así de este modo, podemos construir un hexágono centralmente simétrico de área menor que el área de  $H$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . ■

Ahora, dada  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 3$ , definimos  $f_n : [0, n/2] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f_n(k) = 2\text{Sen}^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \text{Tan}\left(\frac{(k+1)\pi}{2n}\right) + \text{Sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right) - k\text{Sen}\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

entonces tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 2.3.4**  $f_n$  es una función estrictamente convexa.

**Demostración.** Derivamos  $f_n$ , entonces tenemos

$$\begin{aligned} f'_n(k) &= \frac{2\pi}{n} \text{Sen}\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \text{Cos}\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \text{Tan}\left(\frac{(k+1)\pi}{2n}\right) \\ &\quad + \frac{\pi}{n} \text{Sen}^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \text{Sec}^2\left(\frac{(k+1)\pi}{2n}\right) + \frac{\pi}{n} \text{Cos}\left(\frac{k\pi}{n}\right) - \text{Sen}\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} f'_n(k) &= \frac{\pi}{n} \text{Sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{Tan}\left(\frac{(k+1)\pi}{2n}\right) \\ &\quad + \frac{\pi}{n} \text{Sen}^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \left(\text{Tan}^2\left(\frac{(k+1)\pi}{2n}\right) - 1\right) \\ &\quad + \frac{\pi}{n} - \text{Sen}\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Observamos que  $f'_n(k)$  es estrictamente creciente para  $k \in [0, \frac{n}{2}]$ , además,

$$f'_n(0) = \frac{\pi}{n} - \text{Sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) > 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

esto implica que  $f'_n(k) > 0$  para  $k \in [0, \frac{n}{2}]$ , por lo tanto, concluimos que  $f_n$  es estrictamente convexa en el intervalo  $[0, \frac{n}{2}]$ . ■

Recordemos que  $H$  es centralmente simétrico y que cada uno de sus lados contiene a alguno de los lados de  $P_{2n}$ , entonces, bastará con minimizar la suma de las áreas de tres de los  $P_{2n}^{k_i}$  con la restricción de que  $k_1 + k_2 + k_3 = n - 3$ . Es decir, basta con minimizar  $\sum_{i=1}^3 \mathcal{A}(P_{2n}^{k_i})$  para poder encontrar  $H$ . Por otro lado, como sabemos que  $f_n$  es estrictamente convexa, podemos aplicar la desigualdad de Jensen:

$$f_n\left(\frac{k_1 + k_2 + k_3}{3}\right) \leq \frac{1}{3}(f_n(k_1) + f_n(k_2) + f_n(k_3)),$$

además, tenemos que  $k_1 + k_2 + k_3 = n - 3$ , obtenemos entonces que

$$3f_n\left(\frac{n-3}{3}\right) \leq f_n(k_1) + f_n(k_2) + f_n(k_3),$$

y dado que la igualdad se alcanza cuando  $k_1 = k_2 = k_3$ , tenemos que el mínimo de  $\sum_{i=1}^3 \mathcal{A}(P_{2n}^{k_i})$  se obtiene cuando  $k_1 = k_2 = k_3 = \frac{n-3}{3}$ . Por otro lado, tenemos que  $k_1, k_2$  y  $k_3$  deben ser números naturales y entonces la igualdad anterior se da solamente cuando  $n-3$  es un múltiplo de 3. En los casos cuando  $n = 3m+1$  ó  $n = 3m+2$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $\frac{n-3}{3}$  no es entero, así que si definimos como  $k_{\max} = \max\{k_1, k_2, k_3\}$  y  $k_{\min} = \min\{k_1, k_2, k_3\}$  tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 2.3.4** Sea  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $n$  no es múltiplo de 3. Entonces  $\sum_{i=1}^3 \mathcal{A}(P_{2n}^{k_i})$  se minimiza cuando  $k_{\max} - k_{\min} = 1$ .

**Demostración.** Sabemos que  $f_n$  es estrictamente convexa. Supongamos que  $k_{\max} - k_{\min} > 1$ , entonces tenemos que

$$f_n(k_{\min} + 1) - f_n(k_{\min}) < f_n(k_{\max}) - f_n(k_{\max} - 1)$$

esto implica que

$$f_n(k_{\min} + 1) + f_n(k_j) + f_n(k_{\max} - 1) < f_n(k_{\min}) + f_n(k_j) + f_n(k_{\max}),$$

donde  $\{k_j\} = \{k_1, k_2, k_3\} \setminus \{k_{\min}, k_{\max}\}$ . Esto significa que

$$\mathcal{A}(P_{2n}^{k_{\min}+1}) + \mathcal{A}(P_{2n}^{k_j}) + \mathcal{A}(P_{2n}^{k_{\max}-1}) < \mathcal{A}(P_{2n}^{k_{\min}}) + \mathcal{A}(P_{2n}^{k_j}) + \mathcal{A}(P_{2n}^{k_{\max}}).$$

Aplicando éste procedimiento podemos seguir obteniendo valores menores para  $\sum_{i=1}^3 \mathcal{A}(P_{2n}^{k_i})$  siempre que  $k_{\max} - k_{\min} > 1$ . Entonces  $\sum_{i=1}^3 \mathcal{A}(P_{2n}^{k_i})$  se minimizará cuando  $k_{\max} - k_{\min} = 1$ . ■

Con todo lo que hemos probado tenemos ya la herramienta necesaria para poder calcular la densidad de empaqueo de polígonos regulares con un número par de lados, además, es posible dar un arreglo con el cual se alcanza esta densidad. Recordemos que  $H$  contiene a 6 lados del polígono al cual queremos empaacar. Además,  $H = P_{2n} \cup \sum_{i=1}^6 P_{2n}^{k_i}$ , con  $\sum_{i=1}^6 k_i = 2n - 6$ . Con esto, lo único que tenemos que hacer es encontrar una partición de  $2n - 6$  en seis sumandos los cuales cumplan las condiciones anteriormente establecidas. Tenemos los siguientes casos:

a) Para  $2n = 6m$  lados tenemos que  $6m - 6 = 6(m - 1)$ , entonces

$$\delta(P_{6m}) = \frac{\mathcal{A}(P_{6m})}{\mathcal{A}(P_{6m}) + 6\mathcal{A}(P_{6m}^{m-1})}.$$

En la siguiente figura se muestra el empaqueo del polígono regular con 18 lados, el cual tiene una densidad aproximada  $\delta(P_{18}) = 0.91622186799684$ .

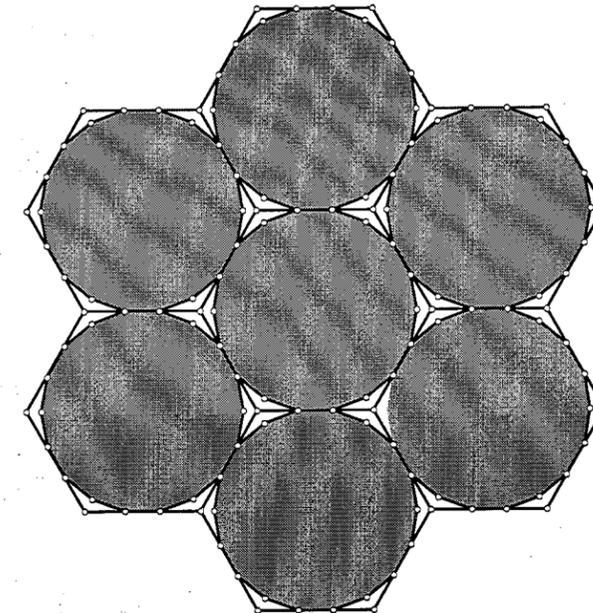


Figura 15. Empacado de un polígono de 18 lados.

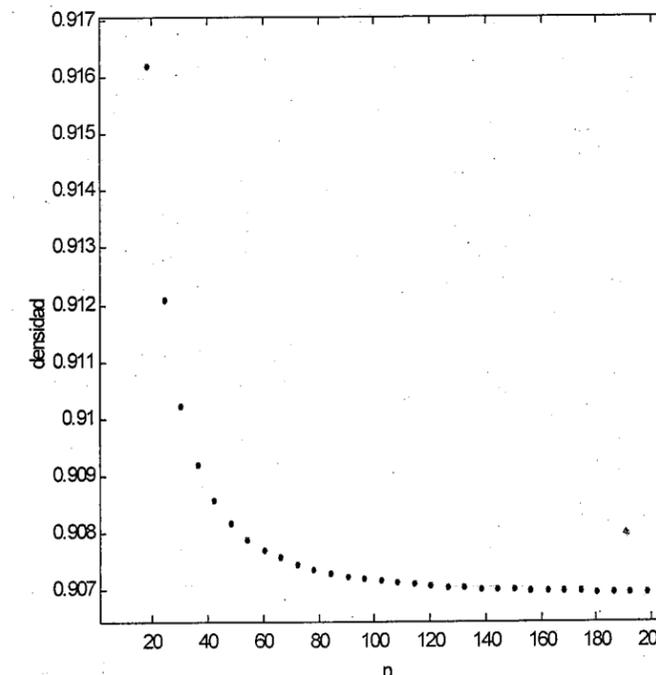


Figura 16. Gráfica de densidad contra el número de lados para el caso de  $6m$  lados.

b) Para  $2n = 6m + 2$  lados tenemos que  $6m + 2 - 6 = 2m + 4(m - 1)$ , entonces

$$\delta(P_{6m+2}) = \frac{A(P_{6m+2})}{A(P_{6m+2}) + 2A(P_{6m+2}^m) + 4A(P_{6m+2}^{m-1})}$$

En la siguiente figura se muestra el empaçado del polígono regular con 20 lados, el cual tiene una densidad aproximada  $\delta(P_{20}) = 0.90733866131280$ .

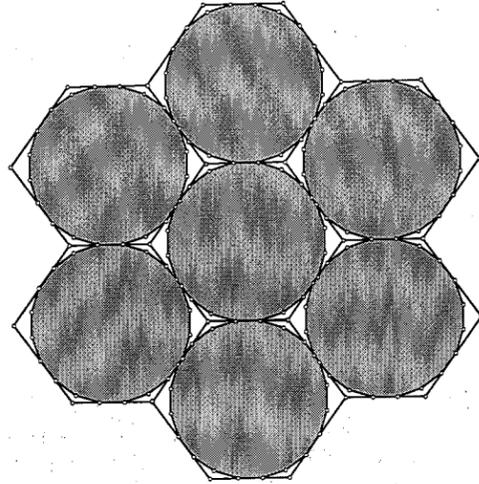


Figura 17. Empacado de un polígono de 20 lados.

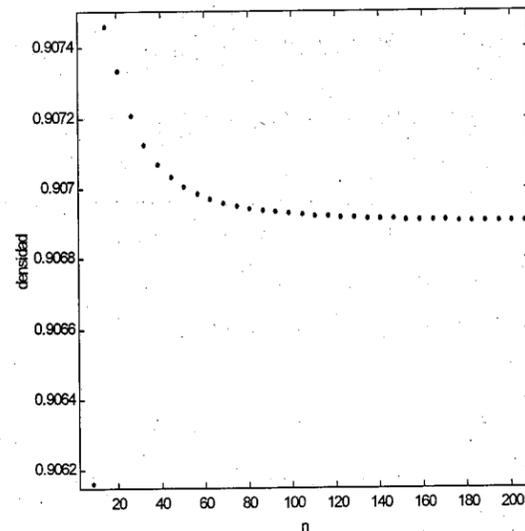


Figura 18. Gráfica de densidad contra número de lados para el caso  $6m+2$ .

c) Para  $2n = 6m + 4$  lados tenemos que  $6m + 4 - 6 = 4m + 2(m - 1)$ , entonces

$$\delta(P_{6m+4}) = \frac{A(P_{6m+4})}{A(P_{6m+4}) + 4A(P_{6m+4}^m) + 2A(P_{6m+4}^{m-1})}$$

En la siguiente figura se muestra el empaçado del polígono regular con 10 lados, el cual tiene una densidad aproximada  $\delta(P_{10}) = 0.91371998815778$ .

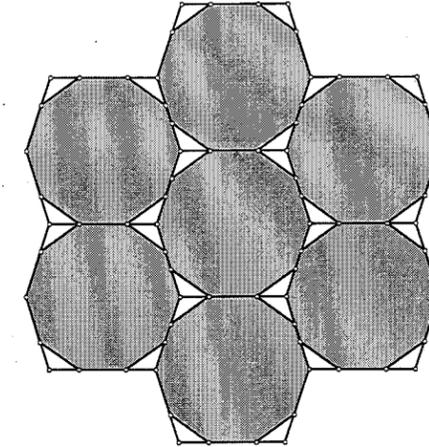


Figura 19. Empacado de un polígono de 10 lados.

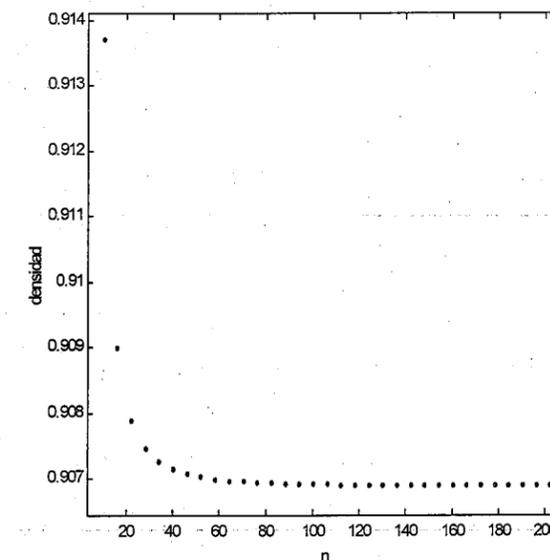


Figura 20. Gráfica de densidad contra número de lados para el caso  $6m+4$ .

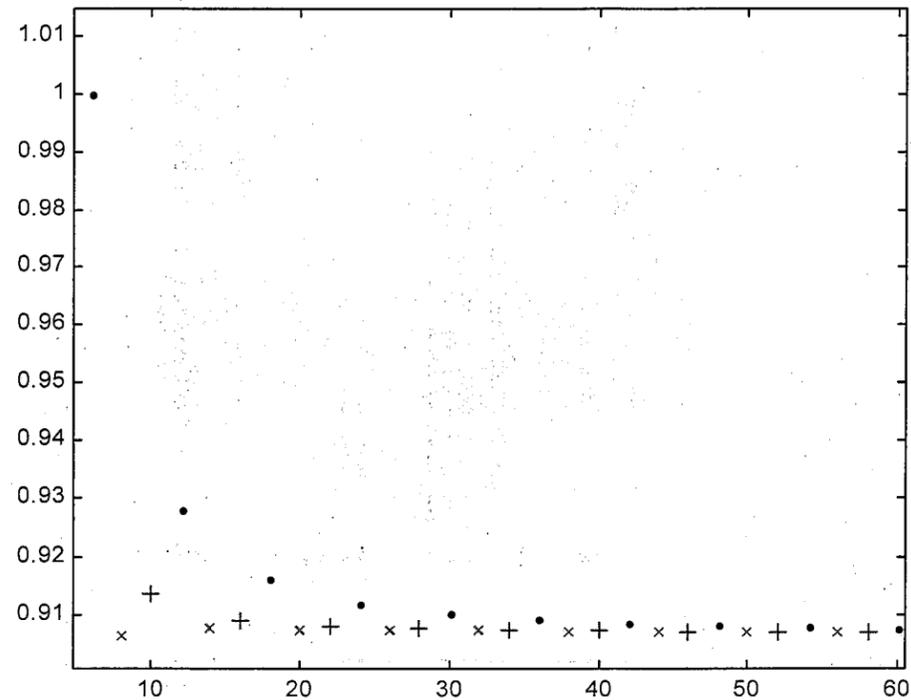


Figura 21. Gráfica de densidad contra número de lados para los tres casos juntos.

En la figura anterior se representa la densidad de empacado con  $\cdot$ ,  $\times$  y  $+$  para los casos de  $6m$ ,  $6m + 2$  y  $6m + 4$  lados, respectivamente.

**Observación 2.3.5.** Aplicando las propiedades de las transformaciones afines, hemos encontrado al mismo tiempo la densidad de empacado de los *polígonos afinmente regulares* [15] con un número par de lados. Es decir, hemos encontrado la densidad de empacado de aquéllos polígonos los cuales mediante una transformación afín pueden ser llevados a algún polígono regular, en el sentido convencional.

**Observación 2.3.6.** Utilizando el teorema 2.2.1 y la observación 2.3.2 es posible encontrar  $H(K)$  cuando  $K$  sea un polígono convexo no necesariamente regular. Recordemos que si además  $K$  es centralmente simétrico, entonces podemos encontrar  $H(K)$  de manera que también sea centralmente simétrico. Con esto, es posible calcular la densidad de empacado de todos los polígonos centralmente simétricos, además, es posible exhibir arreglos por medio de los cuales se alcance esta densidad.

Enseguida se muestra una tabla con los valores de la densidad de empacado (redondeada a 14 cifras) para algunos polígonos regulares con número par de lados:

Número de vértices	Densidad de empacado $\delta$
6	1
8	0.90616367864395
10	0.91371998815778
12	0.92820323027551
14	0.90746551628130
16	0.90901716417421
18	0.91622186799684
20	0.90733866131280
22	0.90789620803734
24	0.91211525905883
26	0.90721164107942
28	0.90747244694961
96	0.90722356004571
98	0.90693081449450
100	0.90693606145665
996	0.90690268972207
998	0.90690001173195
1000	0.90690001683501

## 2.4 Un resultado de L. Fejes Tóth

En 1.2 mencionamos un resultado obtenido por L. Fejes Tóth [12] para cuerpos centralmente simétricos, específicamente, mencionamos que W. Kuperberg [22] demostró en 1987 que

$$\frac{\delta(K)}{\nu(K)} \geq \frac{3}{4}$$

para todo cuerpo convexo en el plano y que L. Fejes Tóth había demostrado esto en 1972 para el caso en que  $K$  es centralmente simétrico. La idea, en esta sección, es dar una demostración alterna del resultado de Fejes Tóth utilizando el Teorema 2.2.1, pero antes necesitaremos demostrar el siguiente lema:

**Lema 2.4.1** Sea  $H$  un hexágono convexo centralmente simétrico y sea  $D$  el hexágono que tiene como vértices a los puntos medios de los lados de  $H$ , entonces

$$\frac{A(D)}{A(H)} = \frac{3}{4}.$$

**Demostración.** Sean  $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$  los vértices de  $D$  y  $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$  los vértices de  $H$ . Sea  $M \in \text{int}(H)$  tal que los cuadriláteros  $H_1H_6MH_2$ ,  $H_2MH_4H_3$  y  $MH_6H_5H_4$  son paralelogramos (ver Figura 22).

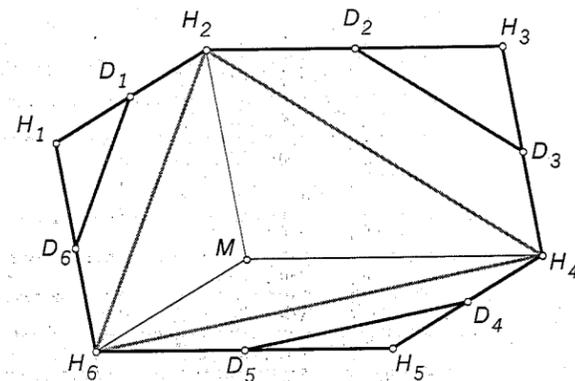


Figura 22.

Observemos que  $A(H_2H_6H_4) = \frac{1}{2}A(H)$ , también

$$A(H_1D_6D_1) = \frac{1}{4}A(H_1H_6H_2),$$

$$A(H_5D_4D_5) = \frac{1}{4}A(H_6H_5H_4),$$

$$A(H_3D_2D_3) = \frac{1}{4}A(H_3H_2H_4).$$

Con esto tenemos que

$$A(H_1D_6D_1) + A(H_5D_4D_5) + A(H_3D_2D_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}A(H) = \frac{1}{8}A(H).$$

De manera análoga se prueba que

$$A(H_2D_1D_2) + A(H_6D_5D_6) + A(H_4D_3D_4) = \frac{1}{8}A(H),$$

y con esto tenemos que

$$A(D) = A(H) - \frac{1}{4}A(H) = \frac{3}{4}A(H).$$

■ Ahora si estamos en condiciones de probar el resultado de L. Fejes Tóth.

**Teorema 2.4.2** Si  $K$  es un cuerpo centralmente simétrico en el plano, tenemos que

$$\frac{\delta_L(K)}{\nu_L(K)} \geq \frac{3}{4}.$$

**Demostración.** Recordemos que

$$\delta(K) = \delta_L(K) = \frac{A(K)}{A(H(K))}$$

$$\text{y } \nu_T(K) = \nu_L(K) = \frac{A(K)}{A(h(K))}$$

para todo  $K$  centralmente simétrico, entonces

$$\frac{\delta_L(K)}{\nu_L(K)} = \frac{A(h(K))}{A(H(K))} \geq \frac{A(D)}{A(H(K))},$$

donde  $D$  es cualquier hexágono inscrito en  $K$ . Por el teorema 2.2.1 tenemos que los puntos medios de los lados de  $H(K)$  pertenecen a la frontera de  $K$ . Tomemos  $D$  como el hexágono que tiene como vértices a estos puntos medios. Por el lema 2.4.1 tenemos que

$$A(D) = \frac{3}{4}A(H(K)),$$

entonces

$$\frac{\delta_L(K)}{\nu_L(K)} \geq \frac{A(D)}{A(H(K))} = \frac{3}{4}. \quad \blacksquare$$

De acuerdo al resultado que acabamos de probar

$$\frac{\delta_L(K)}{\nu_L(K)} \geq \frac{3}{4},$$

para todo cuerpo convexo centralmente simétrico. Además, sabemos que  $\delta(K) \geq \delta_L(K)$  y  $\nu(K) \leq \nu_L(K)$ , entonces

$$\frac{\delta(K)}{\nu(K)} \geq \frac{\delta_L(K)}{\nu_L(K)} \geq \frac{3}{4}$$

para todo cuerpo convexo  $K$  centralmente simétrico.

### 2.5 El cuerpo diferencia

Dados dos conjuntos  $K, L \subset \mathbb{R}^n$ , llamaremos a

$$K + L = \{x + y : x \in K, y \in L\}$$

la *suma de Minkowski* de  $K$  y  $L$ .

**Teorema 2.5.1** Si  $\tau$  denota una translación, entonces para cualesquiera conjuntos  $K, L \subset \mathbb{R}^n$ , tenemos que

$$\tau(K) + L = \tau(K + L) = K + \tau(L).$$

**Demostración.** Como  $\tau$  está dado por un vector de translación  $t$ , el resultado se sigue de

$$(t + K) + L = t + (K + L) = K + (t + L). \blacksquare$$

El resultado anterior significa que la forma del conjunto obtenido como suma de Minkowski de dos conjuntos  $K$  y  $L$ , permanece invariante bajo el cambio de origen o translación de los sumandos. Además, es posible probar que si  $K$  y  $L$  son conjuntos convexos entonces también  $K + L$  es un conjunto convexo.

**Teorema 2.5.2** Sean  $K_1$  y  $K_2$  dos polígonos convexos y sea  $C = K_1 + K_2$ . Entonces

- a)  $C$  es también un polígono convexo.
- b) Si  $K_1$  y  $K_2$  no tienen lados paralelos y similarmente dirigidos<sup>1</sup>, entonces el número de lados de  $C$  es igual a la suma del número de lados de  $K_1$  y  $K_2$ .
- c)  $C$  consiste de todos los segmentos que son iguales y paralelos a los lados de  $K_1$  y  $K_2$ .
- d) El perímetro de  $C$  es igual a la suma de los perímetros de  $K_1$  y  $K_2$ .

**Demostración.** La demostración no es esencial para este trabajo pero si así lo desea puede verla en [30].  $\blacksquare$

Denotaremos con  $D(A)$  al *conjunto diferencia* de un conjunto convexo  $A$ . En otras palabras,

$$D(A) = \{x - y : x, y \in A\}.$$

Tenemos que  $D(A)$  es centralmente simétrico, ya que si  $x, y \in A$  entonces  $(x - y), (y - x) \in D(A)$ . Como ejemplo de la suma de Minkowski veamos la siguiente figura (ver Figura 23), en la cual  $Q$  es un decágono regular con  $\text{vert}(Q) = \{Q_i : i = 1, 2, \dots, 10\}$  obtenido como suma de Minkowski de los pentágonos regulares  $P$  con  $\text{vert}(P) = \{P_i : i = 1, 2, \dots, 5\}$  y  $-P$  con  $\text{vert}(-P) = \{P_{-i} : i = 1, 2, \dots, 5\}$ . Con las líneas punteadas está trazado el cuerpo diferencia del pentágono  $P$ .

<sup>1</sup> Dos lados son paralelos y similarmente dirigidos si las líneas soporte correspondientes tienen la misma normal exterior.

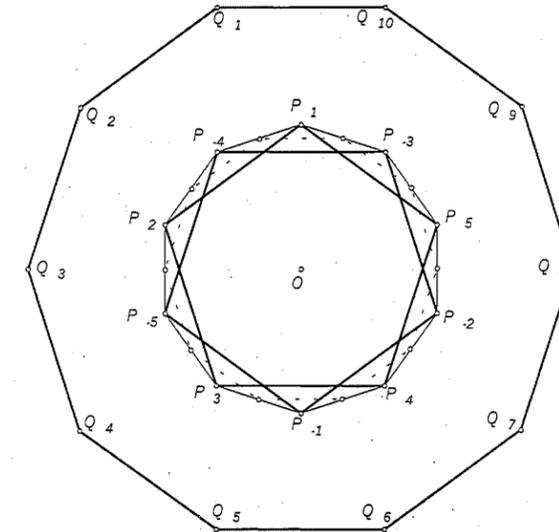


Figura 23. Cuerpo diferencia de un pentágono regular.

El siguiente teorema se debe a Minkowski [31] y tiene gran importancia ya que debido a éste es posible demostrar que  $\delta_L(K) = \delta_T(K)$  para todo cuerpo convexo  $K$ .

**Teorema 2.5.3** Sean  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  y sea  $A$  un conjunto convexo. Tenemos que

$$(A + x_1) \cap (A + x_2) \neq \emptyset$$

si y sólo si

$$\left(\frac{1}{2}D(A) + x_1\right) \cap \left(\frac{1}{2}D(A) + x_2\right) \neq \emptyset.$$

**Demostración.**

$\implies$

Sea  $z \in (A + x_1) \cap (A + x_2)$ , entonces  $\exists a_1, a_2 \in A$  tales que

$$a_1 + x_1 = a_2 + x_2 = z,$$

además

$$\frac{1}{2}(a_1 - a_2), \frac{1}{2}(a_2 - a_1) \in \frac{1}{2}D(A),$$

y como

$$\frac{1}{2}(a_1 - a_2) + x_1 = \frac{1}{2}(a_2 - a_1) + x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

tenemos

$$\left(\frac{1}{2}D(A) + x_1\right) \cap \left(\frac{1}{2}D(A) + x_2\right) \neq \emptyset.$$

$\Leftarrow$ )

Ahora, supongamos que  $\left(\frac{1}{2}D(A) + x_1\right) \cap \left(\frac{1}{2}D(A) + x_2\right) \neq \emptyset$ , entonces  $\exists b_1, b_2, c_1, c_2 \in A$  tales que

$$\frac{1}{2}(b_1 - b_2) + x_1 = \frac{1}{2}(c_1 - c_2) + x_2.$$

De aquí, tenemos que

$$\frac{1}{2}(b_1 + c_2) + x_1 = \frac{1}{2}(c_1 + b_2) + x_2,$$

y por la convexidad de  $A$  tenemos que

$$\frac{1}{2}(b_1 + c_2), \frac{1}{2}(c_1 + b_2) \in A,$$

lo cual implica que

$$(A + x_1) \cap (A + x_2) \neq \emptyset. \blacksquare$$

## 2.6 Empacado de polígonos no centralmente simétricos

Hasta ahora, hemos calculado la densidad de empaado de polígonos regulares centralmente simétricos. Queremos, sin embargo, calcular la densidad de polígonos regulares no centralmente simétricos (con un número impar de lados).

En esta sección calcularemos la densidad translativa, la cual es igual a la densidad retícula cuando trabajamos con cuerpos convexos, de polígonos regulares con un número impar de lados. Para esto, haremos uso del Teorema 2.5.3 con el cual se puede observar que un arreglo de trasladados de un cuerpo convexo  $K$  será un empaado si y sólo si los correspondientes trasladados de  $\frac{1}{2}(D(K))$  forman un empaado. Esta observación fué hecha por Minkowski y de acuerdo a ella y a la definición 1.1.5 se sigue que

$$\delta_L(K) = \delta_L\left(\frac{1}{2}D(K)\right) \frac{v(K)}{v\left(\frac{1}{2}D(K)\right)},$$

ya que

$$\delta_L(K) = \sup_{\Lambda} \frac{A(K)}{\det(\Lambda)} \quad \text{y} \quad \delta_L\left(\frac{1}{2}D(K)\right) = \sup_{\Lambda} \frac{A(K)}{\det(\Lambda)}$$

y ambos supremos se alcanzan con la misma retícula. Con esto, es posible calcular  $\delta_T$  para un polígono regular  $K$  con un número impar de vértices una vez que se ha calculado

$$\frac{v(K)}{v\left(\frac{1}{2}D(K)\right)},$$

el cual en nuestro caso es igual a

$$\frac{A(K)}{A\left(\frac{1}{2}D(K)\right)}$$

debido a que estamos trabajando en el plano. De acuerdo al Teorema 2.5.2, es posible demostrar que  $D(K)$  es un polígono regular con el doble de vértices que  $K$ . Es decir,  $D(K)$  es un polígono centralmente simétrico cuya densidad de empaado ya conocemos. Tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 2.6.1** *Sea  $P$  un polígono regular con  $n$  vértices, donde  $n$  es un número natural impar fijo. Entonces*

$$\frac{A(P)}{A\left(\frac{1}{2}D(P)\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

**Demostración.** Sean  $R$  y  $R'$  los radios de las circunferencias circunscritas a  $P$  y  $\frac{1}{2}D(P)$ , respectivamente. Con un sencillo argumento, es posible probar que

$$R' = R \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Tenemos que

$$A(P) = n \frac{R^2}{2} \operatorname{Sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \quad \text{y} \quad A\left(\frac{1}{2}D(P)\right) = n R'^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

entonces, si hacemos  $\lambda = \frac{A(P)}{A\left(\frac{1}{2}D(P)\right)}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{A(P)}{A\left(\frac{1}{2}D(P)\right)} \\ &= \frac{n \frac{R^2}{2} \operatorname{Sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{n R'^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}. \blacksquare \end{aligned}$$

De acuerdo al teorema anterior y a la observación hecha al principio de esta sección, tenemos que para todo número natural impar  $n$ , con  $n \geq 3$

$$\delta_L(P_n) = \delta_L(P_{2n}) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

Enseguida se muestra una gráfica con los valores de densidad de empacado translativo para algunos polígonos regulares con número impar de lados (ver Figura 24).

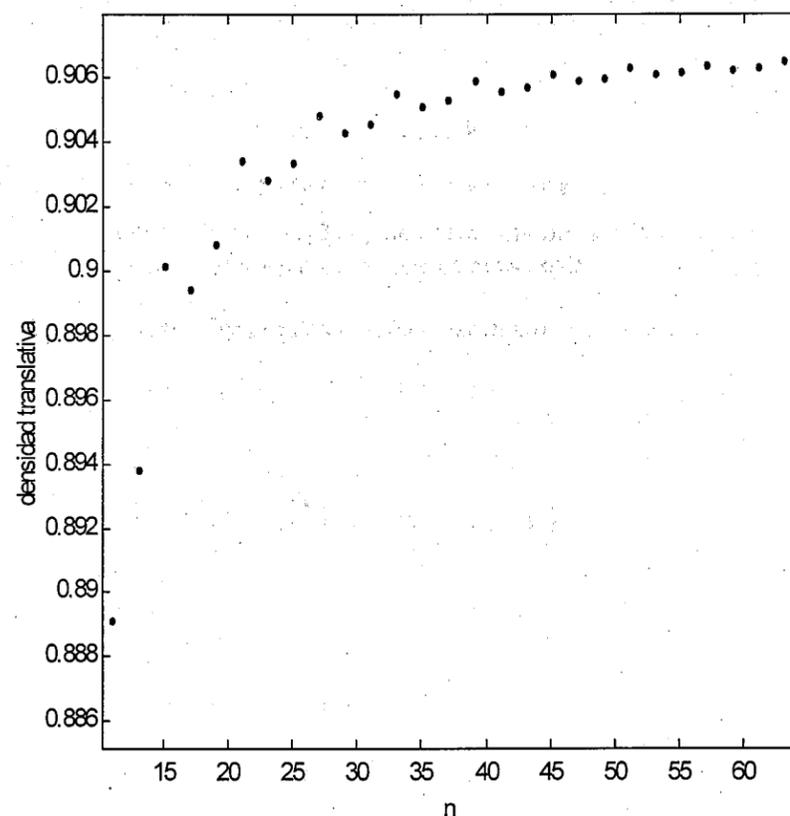


Figura 24. Densidad de empacado translativa de algunos polígonos regulares con número impar de lados.

En la siguiente tabla se muestran los valores de la densidad de empacado translativo y el valor de  $\lambda = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$  (redondeados a 14 cifras) para algunos polígonos regulares con número impar de lados:

Número de vértices	Valor de $\lambda$	Densidad translativa $\delta_T = \delta_L$
5	0.89442719099992	0.81725600236844
7	0.94790491639831	0.86019102434497
9	0.96890879587424	0.88773542687446
11	0.97932780217590	0.88912799802103
13	0.98525670199037	0.89383634949718
15	0.98895309972922	0.90017416469343
17	0.99141344866513	0.89947945347689
19	0.99313382888908	0.90084362229005
21	0.99438405035381	0.90349222518216
23	0.99532118364415	0.90284569124874
25	0.99604174464436	0.90341677752896
27	0.99660771014576	0.90484430275265
95	0.99972655391814	0.90666134355788
97	0.99973771574777	0.90667018494037
99	0.99974820780824	0.90674742433686
995	0.99999750773445	0.90689750600139
997	0.99999751772350	0.90689751391352
999	0.99999752765261	0.90689818733406

También es posible exhibir los arreglos con los cuales se obtienen esas densidades de empacado retícula. Recordemos que la retícula por medio de la cual se obtiene el empacado óptimo para un polígono de  $n$  lados, con  $n$  un número impar, es la misma que la retícula usada para obtener el empacado óptimo de un polígono con  $2n$  lados. En las dos siguientes figuras (Figuras 25 y 26) se muestran los arreglos para un pentágono y para un nonágono regulares los cuales tienen densidades de empacado retícula aproximados de 0.81725600236844 y 0.88773542687446, respectivamente.

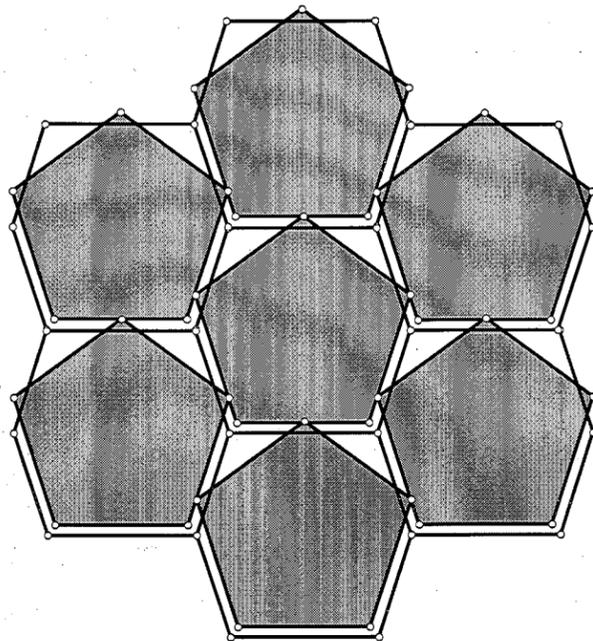


Figura 25. Empacado retícula de un pentágono regular.

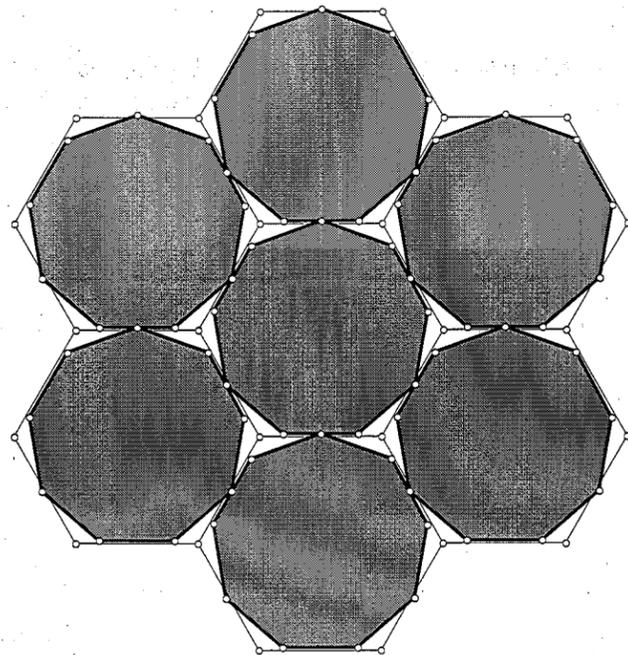


Figura 26. Empacado retícula de el polígono regular de 9 lados.

## Capítulo 3. Cubierta de polígonos en el plano

El objetivo en este capítulo será calcular la densidad de cubierta del plano con polígonos regulares. Nuevamente nos basaremos en el resultado de L. Fejes Tóth, es decir, encontraremos el hexágono de área máxima el cual queda inscrito dentro de un polígono  $K$  y con esto habremos encontrado una cota inferior para  $\nu_T(K)$ . Cuando  $K$  sea un polígono centralmente simétrico, al encontrar  $h(K)$  (el hexágono de área máxima inscrito en  $K$ ) habremos encontrado exactamente el valor de  $\nu_T(K)$ . Para los polígonos que no son centralmente simétricos, encontraremos un hexágono centralmente simétrico de área aproximada al hexágono de área máxima el cual queda inscrito en  $K$  y al cual denotaremos con  $h'_s(K)$ . Con esto, habremos encontrado cubiertas del tipo retícula para los polígonos regulares con un número impar de lados.

### 3.1 Cubierta de polígonos centralmente simétricos

En esta sección calcularemos  $\nu_T(K)$  para el caso cuando  $K$  es un polígono regular con un número par de lados. Recordemos que

$$\nu_T(K) = \nu_L(K) = \frac{A(K)}{A(h(K))},$$

donde  $h(K)$  es el hexágono de área mínima el cual está inscrito en  $K$ . Recordemos que cuando  $K$  es centralmente simétrico, se puede encontrar  $h(K)$  de tal manera que sea centralmente simétrico. Todo el problema se reduce entonces a encontrar  $h_s(K)$  (el hexágono centralmente simétrico de área máxima inscrito en  $K$ ) para un polígono  $K$  dado. Para esto usaremos el siguiente teorema:

**Teorema 3.1.1** *Sea  $K$  un polígono convexo, entonces podemos encontrar  $h(K)$  de tal manera que  $\text{vert}(h(K)) \subset \text{vert}(K)$ .*

**Demostración.** Sean  $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5$  y  $H_6$  los vértices de  $h(K)$ . Supongamos que  $H_2 \notin \text{vert}(K)$  y que  $H_2 \in \text{int}(K_2K_3)$  (ver Figura 27). Probaremos que podemos encontrar un triángulo de área mayor que la de  $\Delta H_1H_2H_3$ . Tenemos dos casos:

a)  $K_2K_3$  es paralelo a  $H_1H_3$ . En este caso tenemos que  $A(H_1K_2H_3) = A(H_1K_3H_3) = A(H_1H_2H_3)$ . Esto significa que podemos escoger a  $K_2$  ó  $K_3$  y con esto podemos formar un hexágono de área igual que la de  $h(K)$  pero el cual tendrá como vértice  $H_2$  a un vértice de  $K$ .

b)  $K_2K_3$  no es paralelo a  $H_1H_3$ . Aquí tenemos que se cumple alguna de las dos desigualdades:

$$A(H_1K_2H_3) > A(H_1H_2H_3) \quad \text{ó} \quad A(H_1K_3H_3) > A(H_1H_2H_3).$$

Según sea el caso, escogemos a  $K_2$  ó  $K_3$  y podemos construir un hexágono de área mayor que la de  $h(K)$ , el cual tendrá como vértice  $H_2$  a un vértice de  $K$ . Esto contradice el hecho de que el área de  $h(K)$  era máxima.

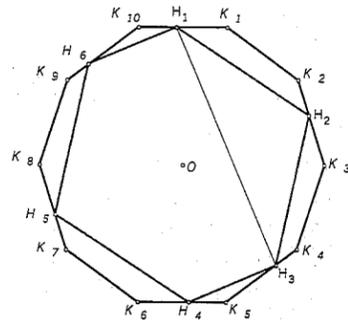


Figura 27.

De acuerdo a lo anterior, podemos encontrar  $h(K)$  de tal manera que sus vértices sean vértices de  $K$ . ■

**Observación 3.1.2.** Si  $K$  es un polígono convexo con  $n$  vértices es posible extender el resultado de este teorema para cualquier polígono convexo  $K'$  inscrito en  $K$ , siempre y cuando el número de vértices de  $K'$  sea menor o igual a  $n$ .

**Observación 3.1.3.** Cuando  $K$  es centralmente simétrico, tenemos que  $\mathcal{A}(h_s(K)) = \mathcal{A}(h(K))$ .

Denotaremos ahora con  $Q_n^r$  a un polígono convexo el cual tendrá como vértices a  $r + 1$  vértices consecutivos de un polígono  $K$  de  $n$  vértices. Por ejemplo, en la siguiente figura (ver Figura 28) tenemos que  $K_1K_2K_3K_4$  es un polígono de la forma  $Q_{10}^3$ .

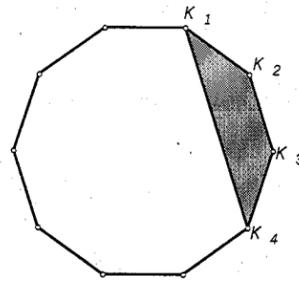


Figura 28.

De acuerdo a esto, encontrar  $h_s(K)$  es equivalente a encontrar seis polígonos  $Q_{2n}^{r_i}$  de tal manera que  $\sum_{i=1}^6 \mathcal{A}(Q_{2n}^{r_i})$  se minimice. También, debido a que  $h_s(K)$  es centralmente simétrico, tenemos que basta con minimizar  $\sum_{i=1}^3 \mathcal{A}(Q_{2n}^{r_i})$ , con  $r_1 + r_2 + r_3 = n$ , donde  $2n$  es el número de vértices de  $K$ .

Tenemos que

$$\mathcal{A}(Q_{2n}^r) = \frac{R^2}{2} \left[ r \text{Sen} \left( \frac{\pi}{n} \right) - \text{Sen} \left( \frac{r\pi}{n} \right) \right].$$

donde  $R$  es el radio de la circunferencia circunscrita a  $K$ .

Ahora, dada  $n \in \mathbb{N}$  definimos  $g_n : [1, n] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$g_n(r) = r \text{Sen} \left( \frac{\pi}{n} \right) - \text{Sen} \left( \frac{r\pi}{n} \right).$$

Tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 3.1.4**  $g_n$  es una función estrictamente convexa.

**Demostración.** Derivamos  $g_n$ , y obtenemos

$$g_n'(r) = \text{Sen} \left( \frac{\pi}{n} \right) - \frac{\pi}{n} \text{Cos} \left( \frac{r\pi}{n} \right),$$

además, observemos que  $g_n'(r)$  es creciente para  $r \in [1, n]$ . Como  $g_n'(1) = 0$  tenemos que  $g_n'(r) > 0$  para  $r \in (1, n]$ . Debido a todo lo anterior concluimos que  $g_n(r)$  es estrictamente convexa para  $r \in (1, n]$ . ■

Nuevamente definimos  $r_{\max} = \max\{r_1, r_2, r_3\}$  y  $r_{\min} = \min\{r_1, r_2, r_3\}$ . Con un procedimiento análogo al que se hizo al trabajar con la densidad de empaqueo llegamos a que  $\sum_{i=1}^3 \mathcal{A}(Q_{2n}^{r_i})$  se minimiza cuando

- a)  $k_{\max} - k_{\min} = 0$ , siempre que  $3 \mid n$ .
- b)  $k_{\max} - k_{\min} = 1$ , siempre que  $3 \nmid n$ .

Denotaremos con  $Q_n$  a un polígono regular con  $n$  lados. Con lo que hemos probado podemos calcular la densidad de cubierta translativa de  $Q_n$  cuando  $n$  sea un número par. Tenemos los siguientes casos:

- a) Para un polígono de  $6m$  lados:

$$\nu_T(Q_{6m}) = \frac{\mathcal{A}(Q_{6m})}{\mathcal{A}(Q_{6m}) - 6\mathcal{A}(Q_{6m}^m)}.$$

- b) Para un polígono de  $6m + 2$  lados:

$$\nu_T(Q_{6m+2}) = \frac{\mathcal{A}(Q_{6m+2})}{\mathcal{A}(Q_{6m+2}) - 4\mathcal{A}(Q_{6m+2}^m) - 2\mathcal{A}(Q_{6m+2}^{m+1})}.$$

- c) Para un polígono de  $6m + 4$  lados:

$$\nu_T(Q_{6m+4}) = \frac{\mathcal{A}(Q_{6m+4})}{\mathcal{A}(Q_{6m+4}) - 4\mathcal{A}(Q_{6m+4}^{m+1}) - 2\mathcal{A}(Q_{6m+4}^m)}.$$

En las figuras siguientes (Figuras 29, 30 y 31) se muestran los arreglos con los cuales se obtienen las cubiertas translativas más delgadas del plano, utilizando polígonos de 12, 20 y 10 lados, respectivamente. Las densidades respectivas son aproximadamente  $\nu_T(Q_{12}) = 1.15470053837925$ ,  $\nu_T(Q_{20}) = 1.20282642346821$  y  $\nu_T(Q_{10}) = 1.18033988749895$ .

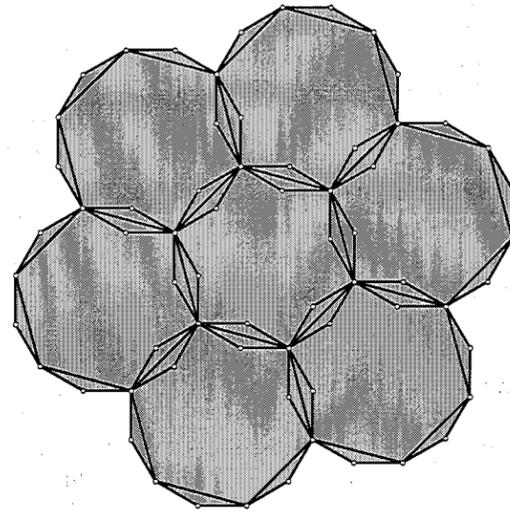


Figura 29. Cubierta translativa del plano con un polígono de 12 lados.

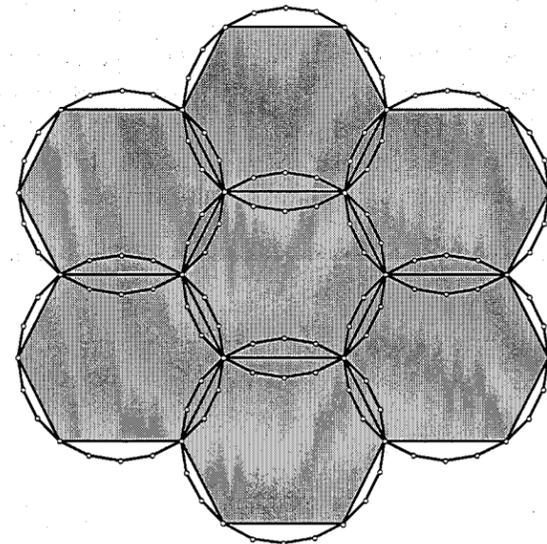


Figura 30. Cubierta translativa del plano con un polígono de 20 lados.

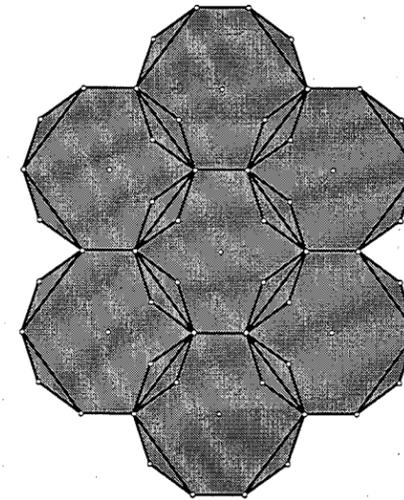


Figura 31. Cubierta translativa del plano con un polígono de 10 lados.

En la siguiente tabla se muestran los valores de densidad de cubierta translativa para algunos polígonos regulares centralmente simétricos:

Número de vértices	Densidad de cubierta translativa
6	1
8	1.17157287525381...
10	1.18033988749895...
12	1.15470053837925...
14	1.19640632179026...
16	1.19828892912843...
120	1.20864713700640...
122	1.20902256302516...
124	1.20902596614868...
600	1.20917747568203...
602	1.20919226794522...
604	1.20919229682674...

**Una observación muy importante es la siguiente:** Utilizando el Teorema 3.1.1 y la Observación 3.1.3 se puede encontrar  $h_s(K)$  cuando  $K$  es un polígono que no es necesariamente regular. El número de casos que deben analizarse es finito, lo cual nos permite calcular la densidad de cubierta translativa para cualquier polígono centralmente simétrico, además, de que también será posible exhibir un arreglo por medio del cual se alcance esta densidad.

### 3.2 Triángulos inscritos de área máxima

El objetivo en esta sección es dar algunas cubiertas del tipo retícula para los polígonos regulares con un número impar de lados. Las densidades de estas cubiertas no son las más pequeñas posibles, sin embargo, son aproximadas a los valores óptimos conjeturados. Otra ventaja es que se pueden obtener los arreglos a partir de los arreglos utilizados para los polígonos con un número par de lados, es decir, dado un polígono regular  $P$  con un número impar de lados, se puede obtener un arreglo para la cubierta utilizando un hexágono centralmente simétrico semejante al utilizado para obtener la cubierta del polígono con el doble de lados. También se darán algunos teoremas concernientes a triángulos de área máxima inscritos en un polígono regular no centralmente simétrico.

Primero, sea  $O$  el centro del polígono regular  $P$  y sean  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sus vértices. Tenemos que  $bd(-P)$  intersecta a  $bd(P)$  en  $2n$  puntos los cuales sirven de vértices de un polígono regular  $Q$  de  $2n$  lados y cuyo centro es  $O$ . Sean  $Q_i$  y  $Q'_i$  los puntos de intersección de  $bd(-P)$  con el lado  $A_i A_{i+1}$  ( $A_{n+1} = A_1$ ) para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Además, consideremos que  $Q_i \in \text{int}(A_i Q'_i)$ . En la siguiente figura (Figura 32) se muestran los puntos de intersección de  $bd(-P)$  con  $bd(P)$  cuando  $P$  es un pentágono regular.

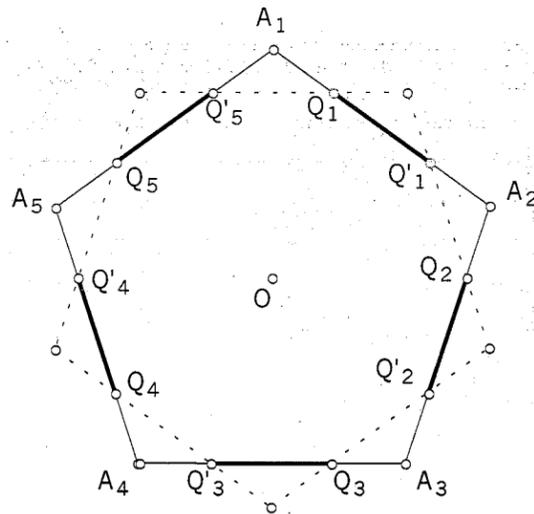


Figura 32.

Sean  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n Q_i Q'_i$ ,  $\Psi = bd(P) \setminus \Omega$  y  $\Phi = \text{vert}(Q)$ . También, sea  $h'_s(P)$  el hexágono centralmente simétrico de área máxima inscrito en  $Q$  (es decir,  $h'_s(P) = h_s(Q)$ ). Sabemos, por el teorema 3.1.1, que podemos encontrar a  $h'_s(P)$  de manera que  $\text{vert}(h'_s(P)) \subset \text{vert}(Q)$ . Tenemos el siguiente lema:

**Lema 3.2.1** Sea  $ABCDEF$  un hexágono centralmente simétrico, entonces

$$A(ACE) = \frac{1}{2}A(ABCDEF).$$

**Demostración.** Sea  $M \in \text{int}(ABCDEF)$  de tal manera que  $ABCM$ ,  $CDEM$  y  $EFAM$  sean paralelogramos (ver Figura.33).

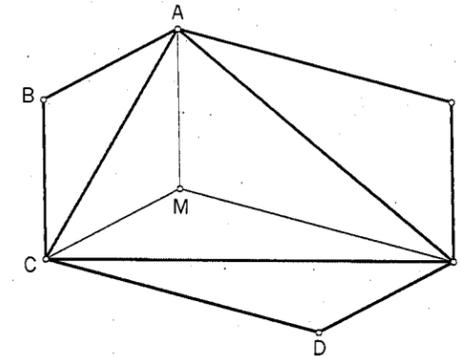


Figura 33.

Tenemos que

$$\begin{aligned} A(ACM) &= \frac{1}{2}A(ABCM), \\ A(CEM) &= \frac{1}{2}A(CDEM) \\ \text{y } A(EAM) &= \frac{1}{2}A(EFAM). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} A(ACE) &= A(ACM) + A(CEM) + A(EAM) \\ &= \frac{1}{2}A(ABCM) + \frac{1}{2}A(CDEM) + \frac{1}{2}A(EFAM) \\ &= \frac{1}{2}A(ABCDEF). \blacksquare \end{aligned}$$

Denotaremos con  $T(Q)$  al triángulo de área máxima inscrito en un cuerpo convexo  $Q$ . Cabe mencionar que  $T(Q)$  puede no ser único, sin embargo, no es posible encontrar un triángulo inscrito en  $Q$  el cual tenga un área mayor que la de  $T(Q)$ . Tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 3.2.2** Sea  $K$  un cuerpo convexo centralmente simétrico, entonces, podemos encontrar  $T(K)$  de tal manera que  $\text{vert}(T(K)) \subset \text{vert}(h_s(K))$ .

**Demostración.** Sean  $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5$  y  $H_6$  los vértices de  $h_s(K)$  y sea  $O$  su centro de simetría. Supongamos que  $\mathcal{A}(T(K)) > \mathcal{A}(H_1H_3H_5) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(h_s(K))$  (por el lema 3.2.1) y denotemos los vértices de  $T(K)$  con  $A, B$  y  $C$ . Sean  $A', B'$  y  $C'$  los puntos simétricos a  $A, B$  y  $C$ , respectivamente, respecto al punto  $O$ . Debido a que  $h_s(K)$  es centralmente simétrico y  $A, B, C \in \text{bd}(h_s(K))$ , tenemos que  $A', B', C' \in \text{bd}(h_s(K))$ . Es fácil observar que  $\text{conv}(ABC A' B' C')$  es un hexágono centralmente simétrico de área igual a  $2\mathcal{A}(ABC)$ , entonces, hemos encontrado un hexágono centralmente simétrico de área mayor que  $\mathcal{A}(T(K))$  el cual está inscrito en  $K$ . Esto contradice el hecho de que  $T(K)$  tenía área máxima, por lo tanto no existe un triángulo inscrito en  $K$  el cual tenga un área mayor que  $\frac{1}{2}\mathcal{A}(h_s(K))$ . De aquí se sigue la afirmación del teorema. ■

El teorema anterior, nos dice que para un cuerpo convexo centralmente simétrico  $K$ , podemos encontrar un triángulo inscrito de área máxima una vez que hayamos encontrado el hexágono centralmente simétrico de área máxima inscrito en él y viceversa. En cuanto a polígonos regulares con un número impar de lados tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 3.2.3** *Sea  $P$  un polígono regular con un número impar de lados ( $n$  lados) y sea  $Q$  como se describió anteriormente. Entonces se cumple que*

$$\mathcal{A}(T(P)) > \mathcal{A}(T(Q)).$$

**Demostración.** Sean  $T_1, T_2$  y  $T_3$  los vértices de  $T(Q)$ . Supongamos que cada uno de los lados de  $T(Q)$  es paralelo al lado de  $P$  donde está contenido el vértice opuesto a ese lado. Digamos por ejemplo que  $T_1T_2$  es paralelo a  $A_kA_{k+1}$  y que  $T_1T_3$  es paralelo a  $A_jA_{j+1}$ , para algunos  $k, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  con  $k \neq j$  (ver Figura 34). Sea  $T'_1$  un punto en el interior del segmento  $A_iA_{i+1}$  con  $T'_1 \neq T_1$  ( $T_1$  está en el interior de  $A_iA_{i+1}$ ). Como  $A_iA_{i+1}$  es paralelo a  $T_3T_2$ , tenemos que

$$\mathcal{A}(T_1T_2T_3) = \mathcal{A}(T'_1T_2T_3),$$

pero  $T'_1T_3$  no es paralelo a  $A_jA_{j+1}$ , esto implica que se cumple alguna de las dos desigualdades

$$\mathcal{A}(T'_1A_jT_3) > \mathcal{A}(T_1T_2T_3) \quad \text{ó} \quad \mathcal{A}(T'_1A_{j+1}T_3) > \mathcal{A}(T_1T_2T_3).$$

Esto implica que  $\mathcal{A}(T(P)) > \mathcal{A}(T(Q))$ . Si alguno de los lados de  $T(Q)$  no es paralelo al lado de  $P$  donde está contenido el tercer vértice, entonces es posible también encontrar un triángulo inscrito en  $P$  el cual tenga área mayor que  $\mathcal{A}(T(Q))$ . Por ejemplo, si  $T_1T_3$  no es paralelo a  $A_jA_{j+1}$  entonces nuevamente se tiene que

$$\mathcal{A}(T_1A_jT_3) > \mathcal{A}(T_1T_2T_3) \quad \text{ó} \quad \mathcal{A}(T_1A_{j+1}T_3) > \mathcal{A}(T_1T_2T_3).$$

Con esto queda completa la demostración. ■

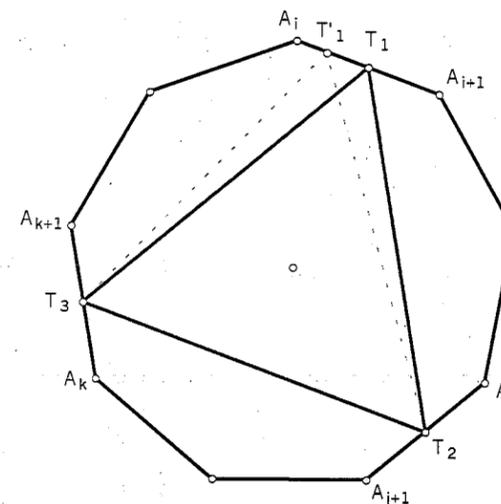


Figura 34.

Este teorema nos dice que si un triángulo inscrito en  $P$  tiene área mayor que  $\mathcal{A}(T(Q))$ , entonces al menos uno de sus vértices debe pertenecer a la región  $\Psi$ . Además, de manera análoga a la demostración del teorema 3.1.1, se puede probar que podemos obtener  $T(P)$  de tal forma que  $\text{vert}(T(P)) \subset \text{vert}(P)$ . Consideremos entonces que los vértices de  $T(P)$  son  $A_i, A_j$  y  $A_k$ . También, consideremos los puntos  $A'_i, A'_j$  y  $A'_k$  de la siguiente manera:  $A'_i \in Q'_{i-1}A_i \cup A_iQ_i$ ,  $A'_j \in Q'_{j-1}A_j \cup A_jQ_j$  y  $A'_k \in Q'_{k-1}A_k \cup A_kQ_k$ . Sea  $\Delta ABC$  el triángulo de área mínima, de entre todos los triángulos tales que  $A \in \{Q'_{i-1}, Q_i\}$ ,  $B \in \{Q'_{j-1}, Q_j\}$  y  $C \in \{Q'_{k-1}, Q_k\}$ . Sean  $\alpha_1 = \mathcal{A}(ABC)$  y  $\alpha_2 = \mathcal{A}(T(P))$ , entonces, para todo número  $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$  existe un triángulo  $A'_iA'_jA'_k$  tal que  $\mathcal{A}(A'_iA'_jA'_k) = \alpha$ . Esto debido a que los triángulos cambian de manera continua al moverse sus vértices sobre los conjuntos  $Q'_{i-1}A_i \cup A_iQ_i$ ,  $Q'_{j-1}A_j \cup A_jQ_j$  y  $Q'_{k-1}A_k \cup A_kQ_k$ . Con esto, tenemos que si un triángulo  $\Delta$  inscrito en  $P$  tiene área mayor que  $\mathcal{A}(T(Q))$ , podemos encontrar un triángulo  $\Delta'$  de área igual a  $\mathcal{A}(\Delta)$  pero de tal manera que  $\text{vert}(\Delta') \subset \Psi \cup \Phi$ .

Ahora, en cuanto a cubierta de los polígonos tenemos lo siguiente:

De acuerdo a la notación usada en esta sección, daremos arreglos para cubiertas del tipo retícula con un polígono  $P$  utilizando el hexágono centralmente simétrico de área máxima inscrito en  $Q$ , es decir,  $h_s(Q)$ . También se dará el valor de la densidad de cubierta respectiva, la cual denotaremos como  $\nu'_L$ . Para calcular  $\nu'_L(P)$  basta con determinar el valor de  $\mathcal{A}(h_s(Q))$  y después calcular

$$\frac{\mathcal{A}(P)}{\mathcal{A}(h_s(Q))}.$$

Para esto, tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 3.2.4** Sean  $R$  y  $R'$  los radios de las circunferencias circunscritas a  $P$  y  $Q$ , respectivamente. Entonces

$$R' = R \cdot \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

**Demostración.** Sea  $C$  uno de los puntos de intersección del lado  $AB$  del polígono  $P$  con un lado del polígono  $-P$  y sean  $O$  el centro de  $P$  y  $M$  el punto medio de  $AB$  (ver Figura 35). De manera sencilla se puede ver que  $R' = OC$ , además de que  $OC$  es la bisectriz del ángulo  $\angle AOM$ . De un resultado de geometría elemental, sabemos que

$$OC = \frac{2OA \cdot OM \cos\alpha}{OA + OM}, \text{ donde } \alpha = \frac{1}{2}\angle AOM, \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned} R' &= \frac{2R \left( R \operatorname{Sen} \frac{(n-2)\pi}{2n} \right) \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{R + R \operatorname{Sen} \left( \frac{(n-2)\pi}{2n} \right)} \\ &= \frac{2R \operatorname{Sen} \frac{(n-2)\pi}{2n} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{1 + \operatorname{Sen} \left( \frac{(n-2)\pi}{2n} \right)} \\ &= R \cdot \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}. \blacksquare \end{aligned}$$

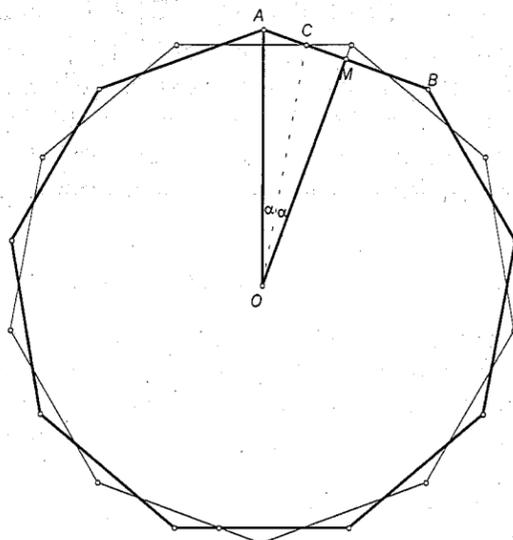


Figura 35.

Sea  $n$  un número natural impar, denotaremos con  $P_n$  al polígono regular con  $n$  lados y cuyo radio de la circunferencia circunscrita es igual a  $R$ , además, denotaremos con  $Q_n$  al polígono  $Q$  respectivo a  $P_n$ . Recordemos que

$$\nu'_L(P_n) = \frac{A(P_n)}{A(h_s(Q_n))},$$

y que  $h'_s(P_n) = h_s(Q_n)$ , además,  $h'_s(P_n) = \lambda \cdot h_s(P_{2n})$ , donde

$$\lambda = \left( \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right)^2$$

Tenemos entonces que

$$\nu'_L(P_n) = \frac{A(P_n)}{\lambda A(h_s(P_{2n}))},$$

y como

$$\begin{aligned} \frac{A(P_n)}{\lambda A(h_s(P_{2n}))} &= \frac{A(P_n)}{\lambda A(P_{2n})} \cdot \frac{\lambda A(P_{2n})}{\lambda A(h_s(P_{2n}))} \\ &= \frac{A(P_n)}{\lambda A(P_{2n})} \cdot \nu_L(P_{2n}), \end{aligned}$$

bastará entonces con encontrar la razón  $\frac{A(P_n)}{\lambda A(P_{2n})}$  y multiplicarla por  $\nu_L(P_{2n})$  (la cual ya conocemos) para encontrar el valor de  $\nu'_L(P_n)$ . Enseguida se muestra una tabla con los valores de  $\nu'_L$  para algunos polígonos regulares con número impar de lados:

Número de vértices	$\nu_L(P_{2n})$	$\nu'_L(P_n)$
3	1	1.5
5	1.18033988749895...	1.31966011250105...
7	1.19640632179026...	1.26215857845337...
9	1.18479253090410...	1.22281120364386...
11	1.20351137846513...	1.22891576833736...
13	1.20539440248707...	1.22343182243976...
147	1.20910753079758...	1.20924561775713...
149	1.20916963082248...	1.20930404184984...
151	1.20917057511156...	1.20930144862592...
601	1.20919774179383...	1.20920600204175...
603	1.20919410585459...	1.20920231137374...
605	1.20919776354805...	1.20920591492955...

La siguiente figura muestra el arreglo para la cubierta del plano utilizando un polígono regular de 9 lados (ver Figura 36):

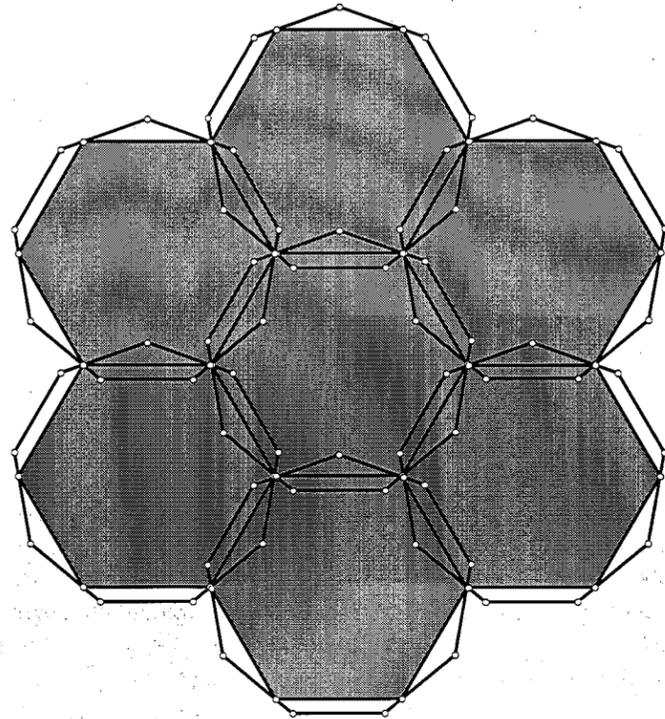


Figura 36. Cubierta del plano utilizando un polígono regular de 9 lados.

## Conclusiones

Los resultados obtenidos en este trabajo dan una solución alterna a los problemas de empaquetamiento y cubierta de polígonos en el plano, problemas que previamente habían sido resueltos por Mount y Silverman. Una diferencia notable, en cuanto al trabajo de Mount y Silverman, es el dar las fórmulas explícitas para las densidades de cubierta y empaquetamiento de los polígonos regulares analizados, lo cual nos da al mismo tiempo las densidades de los polígonos afinmente regulares. Así mismo, se muestran algunos arreglos por medio de los cuales se alcanzan estas densidades. También se obtiene evidencia numérica de que los polígonos regulares se dividen en algunos grupos, en cada uno de los cuales se obtiene una sucesión monótona de las densidades, tanto de cubierta como de empaquetamiento. Otro detalle, el cual puede observarse numéricamente, es la rapidez con que las densidades de cubierta y empaquetamiento para estos polígonos convergen a las densidades de cubierta y empaquetamiento con círculos congruentes.

En cuanto a los polígonos no centralmente simétricos, está conjeturado que el empaquetamiento más denso se obtiene por medio de un empaquetamiento retícula doble [20], el cual consiste en un arreglo de trasladados de  $K$  y trasladados de  $-K$  para un polígono convexo no centralmente simétrico  $K$ . Con los resultados obtenidos, es posible dar los arreglos para algunos polígonos regulares por medio de los cuales se obtienen cubiertas del tipo retícula doble que alcanzan la cota dada por Fejes Tóth para cubierta translativa. Para ello, basta con encontrar un *p-hexágono* inscrito en estos polígonos el cual tenga área igual a la del hexágono inscrito de área máxima.

Es posible, utilizando los resultados de las secciones 2.1 y 2.2, encontrar para un cuerpo convexo  $K$  cualquier polígono circunscrito de área mínima el cual lo circunscribe. Esto es, se extiende el resultado no solamente para hexágonos circunscritos de área mínima, sino para polígonos con cualquier cantidad de lados. También, utilizando la observación 3.1.2, es posible encontrar polígonos convexos de área máxima inscritos en un polígono convexo  $K$  los cuales tengan sus vértices contenidos en el conjunto de vértices de  $K$ .

Quizá sea posible encontrar, en un futuro no muy lejano, las densidades de cubierta retícula de los polígonos regulares con un número impar de lados. Para ello, bastaría con encontrar los hexágonos centralmente simétricos de área mínima inscritos en ellos. Al parecer, los resultados obtenidos en la sección 3.2 podrían simplificar tal trabajo.

## Bibliografía

- [1] R.P. Bambah and C.A. Rogers (1952). *Covering the plane with convex sets*, J. London Math. Soc. 27, 304-314.
- [2] J.W.S. Cassels (1971). *An introduction to the geometry of numbers, 2nd edn*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- [3] G.D. Chakerian and L.H. Lange (1971). *Geometric extremum problems*, Math. Mag. 44, 57-69.
- [4] Chuanming Zong (1999). *Sphere Packings*, Springer-Verlag.
- [5] J.H. Conway and Sloane (1988). *Sphere packings, lattices and groups*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo.
- [6] C. H. Dowker (1944). *On minimum circumscribed polygons*, Bull. Amer. Math. Soc. 50, 120-122.
- [7] G. Fejes Tóth (1987). *Finite coverings by translates of centrally symmetric convex domains*, Discrete Comput. Geom. 2, 353-363.
- [8] G. Fejes Tóth and W. Kuperberg (1993). *A survey of recent results in the theory of packing and covering*, New trends in discrete and computational geometry, ed. by J. Pach, Springer-Verlag, 251-279.
- [9] G. Fejes Tóth (1995). *Densest packings of typical convex sets are not lattice-like*, Discrete Comput. Geom. 14, 1-8.
- [10] G. Fejes Tóth (1999). *Recent progress on packing and covering*, Contemporary Mathematics 223, 145-162.
- [11] L. Fejes Tóth (1950). *Some packing and covering theorems*, Acta Sci. Math. Szeged, 12/A, 62-67.
- [12] L. Fejes Tóth (1972). *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, 2nd edn. Springer, Berlin New York.
- [13] L. Fejes Tóth (1984). *Density bounds for packing and covering with convex discs*, Expo. Math. 2, 131-153.
- [14] L. Fejes Tóth (1986). *Densest packing of translates of the union of two circles*, Discrete Comput. Geom. 1, 307-314.
- [15] J.C. Fisher and R.E. Jamison (1998). *Properties of affinely regular polygons*, Geom. Dedicata 69, 241-259.
- [16] D. Ismailescu (1998). *Covering the plane with copies of a convex disk*, Discrete Comput. Geom. 20, 251-263.
- [17] D. Ismailescu (2001). *Inequalities between lattice packing and covering densities of centrally symmetric plane convex bodies*, Discrete Comput. Geom. 25, 365-388.
- [18] R. Kershner (1939). *The number of circles covering a set*, Amer. J. Math. 61, 665-671.
- [19] R. Kershner (1939). *On paving the plane*, Amer. J. Math. 61, 665-671.

- [20] G. Kuperberg and W. Kuperberg (1990). *Double-lattice packings of convex bodies in the plane*, Discrete Comput. Geom. 5, 389-397.
- [21] W. Kuperberg (1982). *Packing convex bodies in the plane with density greater than 3/4*, Geom. Dedicata 13, 149-155.
- [22] W. Kuperberg (1987). *An Inequality linking Packing and Covering Densities of Plane Convex Bodies*, Geom. Dedicata 23, 59-66.
- [23] W. Kuperberg (1989). *Covering the plane with congruent copies of a convex body*, Bull. London Math. Soc. 21, 82-86.
- [24] D. M. Mount and R. Silverman (1990). *Packing and covering the plane with translates of a convex polygon*, Journal of Algorithms 11, 564-580.
- [25] J. Pach and P.K. Agarwal (1995). *Combinatorial Geometry*, John Wiley & Sons, New York.
- [26] C.A. Rogers (1951). *The closest packing of convex two-dimensional domains*, Acta. Math. 86, 309-321.
- [27] E.H. Smith (2000). *A bound on the ratio between the packing and covering densities of a convex body*, Discrete Comput. Geom. 23, 325-331.
- [28] A. Thue (1892). *Om nogle geometrisk taltheoretiske theoremer*, Forhdl. Skand. Naturforsk.
- [29] Ulrich Betke and Wolfgang Weil (1991). *Isoperimetric Inequalities for the Mixed Area of Plane Convex Sets*, Arch. Math., 57, 501-507.
- [30] I.M. Yaglom and V.G. Boltianski (1961). *Convex Figures*, Holt, Rinehart and Winston, New York.
- [31] H. Minkowski (1904). *Dischteste gitterförmige Lagerung Kongruenter Körper*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 311-355.