La Probabilidad de la Mecánica Cuántica:
Una Introducción en noventa minutos

Stephen Bruce Sontz
Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.
(CIMAT)
Guanajuato, Gto.
email: sontz@cimat.mx

Resumen:

Einstein decía en referencia a la mecánica cuántica: “The old one does not play dice” - y es cierto, porque la probabilidad que se usa en la mecánica cuántica no es la probabilidad clásica de juegos como los dados. Es el primer ejemplo históricamente hablando de una probabilidad que se llama no clásica o no conmutativa. Vamos a presentar lo básico de esta probabilidad a un nivel introductorio para estudiantes de licenciatura con conocimiento de álgebra lineal. Usamos la teoría de probabilidad con un espacio finito como analogía para el caso de dimensión finita de la probabilidad cuántica. No demostramos mucho porque el artículo está basado en una conferencia de noventa minutos. Entonces, cada afirmación que el lector no puede entender inmediatamente por experiencia propia debe ser su ejercicio. También, hay dos apéndices breves sobre temas relacionados para indicar que las ideas presentadas tienen otras aplicaciones. Otra vez subrayamos que toda la materia de este artículo de divulgación tiene el nivel de álgebra lineal de la licenciatura. Conocimiento de la mecánica cuántica no es necesario.

1 Probabilidad Clásica - Caso Finito

Un caso especial de la Probabilidad Clásica consta de:

1. un conjunto *finito* Ω,
2. *todos* los subconjuntos $E \subset \Omega$ que se llaman *Eventos*,
3. una *Función de Probabilidad* $P : E \mapsto P(E) \in [0, 1]$ es decir,
   $0 \leq P(E) \leq 1$ para cada $E \subset \Omega$.

Se dice que $P(E)$ es la *Probabilidad del Evento* E. Además se cumplen las propiedades siguientes:

1. $P(\emptyset) = 0$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. $P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_k)$ donde $E_1, \ldots, E_k$ son *Eventos Disjuntos*, o sea, $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Así es la teoría (1600's) desarrollada para estudiar juegos de cartas. Hoy día tiene muchas aplicaciones en ciencias como biología, ingenería, física, y por cierto matemáticas entre otras.

La teoría de *Probabilidad Clásica* de Kolmogorov (1930's, véase [7]) para el caso cuando Ω es *infinito* no veremos en este artículo, dado que tiene un nivel más avanzado con muchos detalles técnicos.

Un comentario clave aquí es que hay experimentos y observaciones con la propiedad que cuando están hechos bajo condiciones iniciales iguales (o esencialmente iguales) no siempre dan el mismo número como resultado. Es decir, hay un conjunto de dos o más números que son las mediciones posibles. Son los casos para los cuales hay necesidad de una teoría que no es determinista (que es una teoría que predice exactamente un solo número para un experimento u observación). En cambio una teoría que describe situaciones donde hay más que un resultado posible se llama una *Teoría de Probabilidad* que sea la teoría clásica de Kolmogorov u otra.

Entonces son importantes las estructuras matemáticas en la teoría que corresponden a los números *medidos* (u *observados*) en experimentos. En la probabilidad clásica esta estructura se llama una *Variable Aleatoria* y es por definición una función con valores reales:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

La idea atrás de esta definición es que los números en el rango (o imagen) de X (notación: $\mathrm{Ran}(X)$) son los valores medibles posibles.

Se define el *Valor Esperado* (o más bien el *Valor Promedio*) de X con respecto a P por

$$\langle X \rangle := \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) X(\omega) \quad \text{donde} \quad P(\omega) \equiv P(\{\omega\}).$$

Nótense que el conjunto $\{ X \bigm| X : \Omega \to \mathbb{R} \}$ de todas las variables aleatorias es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimension $n = \mathrm{card}(\Omega)$. También tiene un producto conmutativo dado por la multiplicación usual de funciones:

$$XY(\omega) := X(\omega)Y(\omega)$$

para cada $\omega \in \Omega$ donde X, Y son variables aleatorias.

2 Mecánica Cuántica - Caso Finito

La *Mecánica Cuántica* de Pauli y Wigner ($\sim$1930) empieza con el espacio vectorial

$$\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \mid z_j \in \mathbb{C} \ \text{para}\, 1 \leq j \leq n\}$$

de *dimension finita* $n \geq 1$ sobre $\mathbb{C}$ con su *producto interior*

$$\langle z, w \rangle := \sum_{j=1}^{n} z_j^* w_j.$$

Aquí $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$, β^* es la *conjugada compleja* de $\beta \in \mathbb{C}$. También $\mathbb{C}^n$ tiene una *norma* $|| \cdot ||$ dada por

$$||z||^2 = \langle z, z \rangle = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}^n.$$

La *Mecánica Cuántica* de Heisenberg y Schrödinger (1925-26) para el caso de dimensión *infinita* no veremos en este artículo, dado que tiene un nivel más avanzado con muchos detalles técnicos. Igual como la probabilidad clásica general de Kolmogorov, es importante pero no tenemos que estudiarla por lo pronto para nuestras metas. Por cierto, tarde o temprano, el estudiante tiene que aprender la probabilidad clásica, la mecánica cuántica y la probabilidad cuántica (entre otros temas) en el caso general. Por lo tanto recomendamos fuertemente la *lectura*.

Para definir las estructuras matemáticas en la mecánica cuántica que corresponden a cantidades medidas en experimento, introducimos el conjunto de *matrices* complejas $n \times n$

$$\mathrm{MAT}(n; \mathbb{C}) := \{A = (A_{jk}), \text{ matriz } n \times n, \ A_{jk} \in \mathbb{C}, \ 1 \leq j, k \leq n\}.$$

Nótense que cada matriz A define un mapeo lineal $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. (Usamos un abuso común de notación; el símbolo A denota a la matriz y al mapeo lineal correspondiente.) Recíprocamente cada mapeo lineal $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ viene de una matriz única en $\mathrm{MAT}(n; \mathbb{C})$. Resulta que $\mathrm{MAT}(n; \mathbb{C})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimension n^2. Cuenta con el producto usual de matrices que es *no conmutativo* si $n \geq 2$. Por ser un espacio vectorial con producto compatible, resulta que $\mathrm{MAT}(n; \mathbb{C})$ es un *álgebra* sobre $\mathbb{C}$.

Toda matriz A tiene una *matriz adjunta* A^* donde $(A^*)_{jk} := (A_{kj})^*$ para $1 \leq j, k \leq n$. Es la matriz transpuesta conjugada. Resulta que A^* es la matriz única tal que $\langle A^* z, w\rangle = \langle z, Aw\rangle$ para todos vectores $z, w \in \mathbb{C}^n$.

Si $A = A^*$ se dice que A es *Auto-Adjunta* (o *Hermitiana*). Notación:

$$\mathrm{HERM}(n) := \{A \in \mathrm{MAT}(n;) \mid A = A^*\}.$$

Las matrices auto-adjuntas corresponden a las cantidades medidas en experimentos con sistemas cuánticos. Vamos a ver más adelante con todo detalle la correspondencia, pero por lo pronto cabe subrayer que es por eso que las matrices auto-adjuntas son importantes en física cuántica.

Ejercicio: $\mathrm{HERM}(n)$ es un espacio vectorial sobre los números reales $\mathbb{R}$ y *no* lo es sobre los números complejos. $\mathbb{C}$. No es una subálgebra de $\mathrm{MAT}(n; \mathbb{C})$. Además: $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{HERM}(n) = n^2$. $\blacksquare$

Ejemplo: $\mathrm{HERM}(2)$ tiene dimensión $2^2 = 4$ y una base está dada por las tres *Matrices de Pauli*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y la identidad, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Unas propiedades de ellas:

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 = -\sigma_2\sigma_1, \qquad \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1 = -\sigma_3\sigma_2, \qquad \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2 = -\sigma_1\sigma_3.$$

3 Teoría Espectral

Vamos a usar un teorema fundamental del álgebra lineal: cada matriz auto-adjunta tiene una *diagonalización*. Lo siguiente es una manera para decir este teorema. Una referencia para esta sección es el texto [5] por Halmos.

Sea A una matriz en $\mathrm{MAT}(n; \mathbb{C})$. Se define su *Polinomio Característico* por

$$p_A(\lambda) := \det(\lambda I - A).$$

Es un polinomio de grado $n \geq 1$ en λ con coeficientes complejos, donde λ es una variable compleja. (Aquí $I \in \mathrm{MAT}(n; \mathbb{C})$ es la identidad y det es el determinante.) Podemos escribir el conjunto de las raices complejas *distintas* de $p_A(\lambda)$ como

$$\mathrm{SPEC}(A) := \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\} \subset \mathbb{C}$$

con $1 \leq k \leq n$ (por el Teorema Fundamental de Álgebra). Decimos que $\mathrm{SPEC}(A)$ es el *Espectro* de A y que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son los *Eigenvalores* de A. Hay varias caracterizaciones de un eigenvalor. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\beta \in \mathbb{C}$ es un eigenvalor de A.
- $p_A(\beta) = 0$.
- $\det(\beta I - A) = 0$.
- La matriz $\beta I - A$ no es invertible.
- El subespacio $\ker(\beta I - A)$ no es cero. (Aquí $\ker(B) := \{z \mid Bz = 0\}$.)
- Existe $z \in \mathbb{C}^n$ con $z \neq 0$ y $Az = \beta z$. (z se llama un *eigenvector* de A.)

Quizás la última afirmación sea la propiedad más familiar para el lector. Sin embargo, vamos a usar la penúltima afirmación. Explícitamente, definimos los subespacios

$$V_j := \ker(\lambda_j I - A) \neq 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq k.$$

Entonces: $z \in V_j \iff (\lambda_j I - A)z = 0 \iff Az = \lambda_j z$, o sea, la acción de A en el subespacio V_j es igual a la acción de multiplicación por λ_j. Se dice que *A tiene el valor* λ_j en el subespacio V_j.

Si además A es auto-adjunta, entonces tenemos:

- Todos sus eigenvalores son reales.
- Los subespacios V_j son ortogonales, o sea, $\langle z_i, z_j \rangle = 0$ si $z_i \in V_i$, $z_j \in V_j$ para $i \neq j$.
- $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$. (Suma Directa)

Entonces, al formar la unión de una base ortonormal de V_1, de una base ortonormal de V_2, ..., de una base ortonormal de V_k, obtenemos una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ con la propiedad que el mapeo lineal

$$A = A^* : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

tiene una matriz diagonal en esta base ortonormal nueva. Ésto se llama la *diagonalización* de la matriz auto-adjunta A. Nótense que a lo largo de la diagonal hay $\dim V_1 \geq 1$ ocurrencias de λ_1, $\dim V_2 \geq 1$ ocurrencias de $\lambda_2, \ldots$, $\dim V_k \geq 1$ ocurrencias de λ_k.

Vamos a seguir un paso más adelante. En lugar de usar subespacios de $\mathbb{C}^n$ vamos a usar proyectores ortogonales. Sea $W \subset \mathbb{C}^n$ un subespacio de $\mathbb{C}^n$. Resulta que podemos *descomponer* $\mathbb{C}^n$ como

$$\mathbb{C}^n = W \oplus W^\perp$$

donde el subespacio

$$W^\perp := \{v \in \mathbb{C}^n \mid \langle v, w\rangle = 0 \text{ para todo } w \in W\}$$

se llama el *complemento ortogonal* de W en $\mathbb{C}^n$.

Entonces, al subespacio W asociamos el mapeo lineal $E_W : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definido por

$$E_W z := w$$

para $z \in \mathbb{C}^n$ con $z = w + v$ su descomposición única con $w \in W$, $v \in W^\perp$. Resulta que

$$E_W = E_W^* = E_W^2 \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Ran}(E_W) = W.$$

Si $E : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es un mapeo lineal que satiface $E = E^* = E^2$, se llama un *Proyector Ortogonal*. Y se dice que E_W es el *proyector ortonormal sobre* W.

Recíprocamente, para cada proyector ortogonal tenemos que $E = E_W$ para un subespacio único, a saber, $W = \mathrm{Ran}(E)$. En fin de cuentas, tenemos una correspondencia uno-a-uno y sobre (es decir, una biyección) entre el conjunto de todos los subespacios de $\mathbb{C}^n$ y el conjunto de todos los proyectores ortogonales en $\mathrm{MAT}(n; \mathbb{C})$.

Por fin, podemos anunciar el teorema de diagonalización.

Teorema: Si $A \in \mathrm{MAT}(n, \mathbb{C})$ es una matriz auto-adjunta, entonces existe un entero k con $1 \leq k \leq n$ y existen proyectores ortogonales $E_1 \neq 0$, $E_2 \neq 0, \ldots$, $E_k \neq 0$ en $\mathrm{MAT}(n, \mathbb{C})$ y números reales *distintos* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tales que

$$\begin{aligned} E_i E_j &= 0 \quad \text{si} \quad i \neq j, \\ I &= E_1 + E_2 + \cdots + E_k, \\ A &= \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k. \end{aligned}$$

Además, el entero k, los proyectores ortogonales y los números reals (con las propiedades indicadas) son únicos. ■

Se llama el *Teorema Espectral* para matrices auto-adjuntas. Recíprocamente, si tenemos un entero $k \geq 1$ y proyectores ortogonales y números reals con las propiedades indicadas y luego definimos

$$A := \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k,$$

resulta que A es una matriz auto-adjunta. Esta representación de A se llama su *representación espectral.* Es una forma canónica de A.

Es importante notar que hay una biyección: $\lambda_j \longleftrightarrow E_j$.

4 Más del Mundo Clásico

Vamos a considerar nuevamente la teoría clásica de Ω finito no vacio con $n = \text{card}(\Omega) \geq 1$, pero ahora sin función de probabilidad P.

Para cada evento $\Lambda \subset \Omega$ definimos su *función característica* χ_Λ por

$$\chi_\Lambda(\omega) := \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in \Lambda, \\ 0 \text{ si } \omega \notin \Lambda. \end{cases}$$

Se sigue que $\chi_\Lambda = \chi_\Lambda^* = \chi_\Lambda^2$ y además $\Lambda = \chi_\Lambda^{-1}(1)$. (Aquí χ_Λ^2 es el producto usual de funciones como ya hemos definido.)

Además resulta que cada función $\chi : \Omega \to \mathbb{C}$ que satiface $\chi = \chi^* = \chi^2$ es la función característica de un evento único Λ, a saber, $\chi = \chi_\Lambda$ donde $\Lambda = \chi^{-1}(1)$. En fin de cuentas tenemos una correspondencia uno-a-uno y sobre (una biyección) entre el conjunto de eventos en Ω y el conjunto de las funciones características con dominio Ω.

Además supongamos que $A : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función arbitraria (variable aleatoria). Entonces $\text{Ran}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ para un entero k tal que $1 \leq k \leq n$ y para λ_1, λ_2, ..., λ_k *números reales distintos.*

Nótense que si definimos el espectro de A (notación: $\text{SPEC}(A)$) como el conjunto de números reales λ tal que la función $\lambda - A$ no tiene inversa multiplicativa, entonces $\text{SPEC}(A) = \text{Ran}(A)$.

Para cada *"eigenvalor"* $\lambda_j \in \text{SPEC}(A)$ definimos el evento

$$\Lambda_j := \{\omega \in \Omega \mid A(\omega) = \lambda_j\} = A^{-1}(\lambda_j) \neq \emptyset.$$

Se dice que Λ_j es el evento donde (o cuando) A *tiene el valor* λ_j. Se sigue que son *eventos disjuntos* con

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{k} \Lambda_j.$$

Entonces, $E_j := \chi_{\Lambda_j} \neq 0$ para cada $j = 1, 2, \ldots, k$. Otra vez hay una biyección: $\lambda_j \longleftrightarrow E_j$. Además,

$$E_i E_j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j,$$
$$1 = E_1 + E_2 + \cdots + E_k,$$
$$A = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k.$$

Se llama la forma canónica de una función simple, un lema básico en un curso introductorio de la medida. Hay que recordar que una *función simple* es una función (medible) cuyo rango tiene un número finito de valores. Por cierto, este lema no dice nada sobre medidas igual como el teorema espectral para matrices auto-adjuntas no dice nada sobre medidas de probabilidad cuántica.

Entonces, tenemos la misma estructura algebráica en este caso conmutativo de funciones como en el caso no conmutativo de matrices.

(A veces se dice que *Cuantización* es: "*Operadores en lugar de Funciones*". Pero no es un teorema, tal cuál. Resulta que hay muchas cuantizaciones. Más bien es una idea que puede ser muy útil, aún más útil que unos teoremas.)

5 Regresando al Mundo Cuántico

Sabiendo como interpretar la forma canónica de una función simple, podemos dar por analogía la intepretación física en la mecánica cuántica de una matriz auto-adjunta $A = A^*$, a saber, cada eigenvalor λ_j de A es un *resultado posible* de un experimento que mide la cantidad física correspondiente a A y que no hay otros resultados posibles.

También el proyector ortogonal asociado E_j debe ser el evento cuántico que corresponde a la medición de λ_j. Por lo tanto, definimos un *Evento (Cuántico)* como un proyector ortogonal E en $\mathrm{MAT}(n; \mathbb{C})$, o más bien, un subespacio V de $\mathbb{C}^n$.

Ejemplo: Las matrices $\frac{1}{2}\sigma_1$, $\frac{1}{2}\sigma_2$, $\frac{1}{2}\sigma_3$ corresponden a los tres componentes del *spin* de un sistema físico con spin 1/2 en direcciones ortogonales en el espacio euclideano $\mathbb{R}^3$. (Para aprender la *física* de spin, hay que leer un texto de física cuántica. Aquí hablamos solamente de la *matemática* de spin.)

Ejercicio: Encontrar la representación espectral para estas tres matrices.

Si E es un evento con $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ran} E = 1$, se dice que es un *Estado* o más bien un *Estado Cuántico (Puro)*. Equivalentemente, un estado es un subespacio

$V \subset \mathbb{C}^n$ de dimension uno. (Está dificil explicar esta definición sin mencionar la evolución temporal de un sistema cuántico, cosa que no haremos.)

En física se dice que un estado es un vector $z \in \mathbb{C}^n$ con $||z|| = 1$, porque este vector define el subespacio $\mathbb{C}z \subset \mathbb{C}^n$ de dimensión uno. Por cierto, hay que *identificar* vectores $w, z \in \mathbb{C}^n$ con $||w|| = ||z|| = 1 \iff \mathbb{C}w = \mathbb{C}z \iff$ existe $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$ tal que $w = \alpha z$.

Los expertos ya saben que el conjunto de los estados cuánticos puros es el *espacio proyectivo complejo* de dimensión $n-1$ sobre los complejos: $\mathbb{C}P^{n-1}$. Para ellos que no son expertos recomendamos nuevamente la *lectura*.

Ya tenemos el lenguaje suficiente para describir la Probabilidad Cuántica.

Un Principio de la Mecánica Cuańtica:
Si un sistema cuántico empieza en un estado $z \in \mathbb{C}^n$ con $||z|| = 1$ y se mide la cantidad física asociada a la matriz auto-adjunta

$$A = A^* = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k,$$

escrita en su representación espectral, entonces el experimento da el valor λ_j con *Frecuencia Relativa*

$$\langle z, E_j z\rangle = ||E_j z||^2.$$

(Después de la medición el estado final es $E_j z / ||E_j z||$, un cambio que se llama: *el colapso de la función de onda*. Pero es algo que no usaremos.) ■

Primero, debemos notar que

$$0 \le \langle z, E_j z\rangle \le 1 \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=1}^{k} \langle z, E_j z\rangle = 1.$$

Si se mide λ_j se dice que el evento cuántico E_j ha *sucedido*. Pero cada evento cuántico se encuentra en la representación espectral de alguna matriz auto-adjunta. Entonces, tenemos que definir la probabilidad para cada evento, no meramente para los eventos en la representación espectral de A. Por lo tanto definimos la *Probabilidad Cuántica* para que suceda el evento cuántico E (arbitrario) en el estado z por

$$\mathrm{Prob}(E; z) := \langle z, Ez\rangle = ||Ez||^2.$$

Es importantísimo notar que el mapeo $E \to \langle z, Ez\rangle \in [0, 1]$ (con el estado z fijo) *no* es una función de probabilidad clásica (de Kolmogorov) si $n \ge 2$.

Supongamos que tenemos una matriz auto-adjunta $A = A^* = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j E_j$ (en la representación espectral) y un estado $z \in \mathbb{C}^n$, o sea, $||z|| = 1$. Entonces el *Valor Esperado de A en el estado z* está definido por

$$\langle A \rangle_z := \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle z, E_j z \rangle = \langle z, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j E_j z \rangle = \langle z, Az \rangle .$$

Ésto nos da otra manera de pensar en que es el estado z. Se define el mapeo lineal $\rho : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ donde $\mathcal{A} = \mathrm{MAT}(n; \mathbb{C})$ por

$$\rho(M) := \langle z, Mz \rangle \quad \text{para} \quad M \in \mathcal{A}.$$

Entonces, tenemos las tres propiedades siguientes.
ρ es *real:* $\rho(M^*) = (\rho(M))^*$ para toda $M \in \mathcal{A}$.
ρ es *positivo:* $\rho(M^* M) \geq 0$ para toda $M \in \mathcal{A}$.
ρ es *normalizado:* $\rho(I) = 1$.
Así se puede generalizar la idea de un estado al contexto de una *-álgebra $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{C}$ con unidad I que es un álgebra sobre los complejos $\mathbb{C}$ con un mapeo $A \mapsto A^* \in \mathcal{A}$ para cada $A \in \mathcal{A}$ tal que para $A, B \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$,
2. $(\lambda A)^* = \lambda^* A^*$,
3. $(AB)^* = B^* A^*$,
4. $A^{**} = A$.

Un *Estado* de una *-álgebra $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{C}$ es un mapeo lineal $\rho : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ que es real, positivo y normalizado (como arriba). Los elementos $A \in \mathcal{A}$ tal que $A = A^*$ (que se llaman los elementos *auto-adjuntos* o *reales*) corresponden a las matrices auto-adjuntas en la mecánica cuántica y, como veremos al rato, las variables aleatorias en la probabilidad clásica. (A veces se dice que cada elemento $A \in \mathcal{A}$ es una variable aleatoria.) De todos modos hemos llegado a un nivel de generalización donde el concepto de evento no desempeña un papel tan importante.

La probabilidad clásica (Ω, P) es el caso cuando $\mathcal{A} = \{Y \mid Y : \Omega \to \mathbb{C}\}$ es la *-álgebra sobre $\mathbb{C}$ y $\rho(Y) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) Y(\omega)$ es el estado. Además se suele decir que P es el estado, debido que ρ determina P únicamente.

6 Conclusión

Entonces la *Probabilidad Cuántica* (que empezó con los trabajos de Murray y von Neumann en los 1930's) en nuestro caso de dimensión finita consta de:

- El espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ con su producto interior.
- Los eventos cuánticos.
- Los estados cuánticos.
- Las matrices auto-adjuntas.
- Las fórmulas para calcular las probabilidades cuánticas, valores esperados, etcétera.

Preguntas y Respuestas:

- Einstein decía a propósito de la mecánica cuántica: "The old one does not play dice." ¿Es cierto? Si, porque juegos con dados están descritos por la probabilidad clásica, mientras que en la mecánica cuántica la probabilidad es otra.
- ¿Hay otras probabilidades no clásicas? Si, muchísimas. Cada *-álgebra con un estado dado es un ejemplo. Y la probabilidad libre es una teoría de probabilidad muy estudiada.
- La Estadística (Clásica) estudia *grosso modo* el problema inverso: como ir de datos experimentales a modelos probabilistas clásicos.

  ¿Hay *Estadística Cuántica*? Claro que si. Véase [11].
- ¿Hay sistemas dinamicos *cuánticos*? Si, son temas como la ecuación de Schrödinger y los procesos estocásticos cuánticos.

7 El Porvenir

La finalidad de este artículo es darle al lector las ganas para seguir adelante con estudios de la probabilidad cuántica y temas relacionados. Damos ahora unas referencias, pero es una lista pequeña. Son nuestras preferencias. Hay muchas otras referencias buenas.

Antes de nada vale la pena aprender un poco de la física cuántica. Una introducción muy intuitiva es [4]. Unas referencias para la probabilidad cuántica son [3], [6] y [8]. Luego hay que estudiar la teoría espectral en dimensión infinita. Por eso uno puede leer [9] o volumen I de [12]. Para la ecuación de Schrödinger, recomendamos [14] para un nivel introductorio y los volúmenes II, III y IV de Reed y Simon [12] para un nivel avanzado. Para otros modelos de evolución temporal, incluyendo los procesos cuánticos estocásticos, véase [2]. Para una introducción a spin (y bosones y fermiones), véase [14]. Para el cálculo cuántico estocástico, hay el texto [10].

Por cierto, hay aún más temas interesantes como C^*-álgebras y álgebras de von Neumann, probabilidad libre, cuantizaciones de todo tipo con sus probabilidades, etcétera. Pero el lector debe descubrir el placer de buscar por su propia cuenta en bibliotecas, librerías e Internet.

Apéndice #1: Lógica Cuántica

La *Lógica Cuántica*, debida a Birkhoff y von Neumann [1], es el conjunto de todos los eventos cuánticos (por lo pronto, todos los subespacios de $\mathbb{C}^n$) que ahora se llaman *Proposiciones Cuánticas*.

Tienen las operaciones lógicas siguientes:

1. *Conjugación:* $V \wedge W := V \cap W$
2. *Disjunción:* $V \vee W := V \oplus W$
3. *Negación:* $\sim V := V^\perp$

Hay un *orden parcial* $\leq$ definido por

$$V \leq W \Longleftrightarrow V \wedge W = V \Longleftrightarrow V \subset W$$

con un único *elemento mínimo*

$$0 := \{0\} \subset \mathbb{C}^n$$

y un único *elemento máximo*

$$1 := 0^\perp = \mathbb{C}^n.$$

Pero no es un álgebra Booleana si $n \geq 2$ dado que

Ejercicio: $U \wedge (V \vee W) = (U \wedge V) \vee (U \wedge W)$ no es siempre cierto cuando $n \geq 2$. ■

A pesar de su belleza, no hay mucha actividad en investigación hoy día en lógica cuántica. Pero hay algo en el texto [15].

Apéndice #2: Qubits

Un caso interesante de la mecánica cuántica es $n = 2$, donde tenemos que el espacio de estados es $\mathbb{C}P^1 \cong S^3/S^1 \cong S^2$. (Aquí S^n es la esfera de dimensión n de vectores de norma uno en $\mathbb{R}^{n+1}$.)

Un tal estado se llama un *Qubit* en la *Computación Cuántica* y en la *Información Cuántica*. Entonces hay una esfera de qubits.

En el caso $n = 2$ de probabilidad clásica, tenemos $\Omega = \{\uparrow, \downarrow\}$, digamos, que tiene dos estados puros que son $\{\uparrow\}$ y $\{\downarrow\}$; cada uno se llama un *Bit*. Entonces hay solamente dos bits.

Por eso hay una diferencia muy grande entre la *computación cuántica* basada en qubits y la *computación clásica* basada en bits. Por ejemplo hay *algoritmos cuánticos* muchísimo más rapidos que los *algoritmos clásicos* conocidos.

Hay mucha investigación en estas áreas con muchos problemas abiertos. Véase [11] y [13].

8 Agradecimientos

Este artículo empezó como una conferencia que impartí en el evento "Métodos Estocásticos en Sistemas Dinámicos, La Probabilidad y su interacción con otras areas de la Mathemática". Tuvo lugar en el Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), Guanajuato, Gto., México, 26-30 de enero de 2009. Quiero agradecerles a todos los organizadores (Xavier Gómez Mont, Renato Iturriaga, José Alfredo López Mimbela, Joaquín Ortega y Ekaterina Todorova) por su invitación tan amable para participar en ese evento. También quiero subrayer que el entusiamo, interés y apoyo de Luigi Accardi son cosas sin las cuales nunca habría yo empezado a aprender las maravillas de la probabilidad cuántica. Molte grazie, Gigi.

References

[1] G. Birkhoff y J. von Neumann, The logic of quantum mechanics, *Ann. Math.* **37** (1936) 823–843.

[2] A.M. Chebotarev, Lectures on Quantum Probability, Textos Nivel Avanzado **14**, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 2000.

[3] E.B. Davies, Quantum Theory of Open Systems, Academic Press, 1976.

[4] R. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, The Feynman Lectures on Physics, Vol. III, Addison Wesley, 1965.

[5] P. Halmos, Finite-Dimensional Vector Spaces, Springer, 1974.

[6] A.S. Holevo, Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory, North-Holland, 1982.

[7] A. Kolmogorov, Foundations of the Theory of Probability, Chelsea, 1956.

[8] P.-A. Meyer, Quantum Probability for Probabilists, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1538, Springer, 1993.

[9] J. von Neumann, Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, Princeton University Press, 1955.

[10] K.R. Parthasarathy, An Introduction to Quantum Stochastic Calculus, Birkhäuser, 1992.

[11] D. Petz, Quantum Information Theory and Quantum Statistics, Springer, 2007.

[12] M. Reed y B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Vols. I–IV, Academic Press, 1972–1979.

[13] M.B. Ruskai, Open Problems in Quantum Information Theory, preprint, 2007. arXiv:0708.1901v1 [quant-ph]

[14] A. Sudbery, Quantum Mechanics and the Particles of Nature: An Outline for Mathematicians, Cambridge University Press, 1986.

[15] N. Weaver, Mathematical Quantization, Chapman & Hall/CRC Press, 2001.