

RAMIFICACIÓN Y SUPERPROCESOS

LUIS G. GOROSTIZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS,
CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
E-MAIL: lgorosti@math.cinvestav.mx

RESUMEN. Este artículo de divulgación presenta un panorama introductorio de las teorías de ramificación y superprocesos con énfasis en algunas de sus facetas y de sus aplicaciones.

ABSTRACT. This article presents an introductory view of the theories of branching and superprocesses, with an emphasis on some of their aspects and their applications.

Dedico este artículo a Norma y Anabel

1. INTRODUCCIÓN

La relevancia de la teoría matemática de ramificación se debe a que trata uno de los procesos primordiales de la naturaleza: la reproducción. Los superprocesos nacieron de la teoría de ramificación. El campo es extenso porque tiene muchos aspectos y una gran variedad de aplicaciones. La teoría tiene problemas matemáticos interesantes y las aplicaciones tienen sus propias problemáticas. La ramificación se toca sólo de manera marginal en los cursos de probabilidad, y los superprocesos requieren conocimientos más avanzados. Mi propósito con este artículo es interesar a los estudiantes en estos temas. Este artículo está basado en parte en pláticas para estudiantes que he dado en diversas ocasiones, entre otras, un cursillo en la Universidad Nacional de Colombia, y recientemente, pláticas en el XL Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana en Monterrey (octubre 2007) y en el Congreso Regional de Probabilidad y Estadística en la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco (febrero 2008).

Veremos los procesos de ramificación y los superprocesos más sencillos, y algunos resultados sin entrar en cuestiones técnicas ni en demostraciones (las

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primaria: 60J80, Secundaria: 60F05.

Palabras Claves. Procesos de ramificación, sistemas de partículas, superprocesos, teoremas límites.

cuales en general no son sencillas). Ya que el objetivo es solamente exponer un panorama introductorio, algunos resultados están en forma simplificada. La selección del material es parcial debido a la amplitud del campo y un tanto sesgada por algunos temas que me han interesado.

Para leer este artículo es útil tener conocimientos básicos de teoría de probabilidad y procesos estocásticos (por ejemplo, al nivel de los libros de Hoel, Port y Stone, *Introduction to Probability Theory*, *Introduction to Stochastic Processes*), pero si no se tienen, basta con algo de cultura matemática e imaginación para percibir las ideas. Algunas partes del artículo requieren un poco más de conocimientos. La bibliografía contiene algunos textos que ayudarían al lector interesado a entrar en materia, y referencias para algunos resultados específicos que no se encuentran en libros y para temas adicionales. Casi todas las fórmulas están numeradas para identificarlas en caso que algún lector tenga preguntas.

2. SISTEMAS RAMIFICADOS DE PARTÍCULAS

2.1. Ideas generales. Consideremos una colección de partículas o individuos en un espacio que evolucionan a lo largo del tiempo de la manera siguiente. Al tiempo inicial, $t = 0$, hay un número aleatorio de partículas distribuidas aleatoriamente en el espacio. Cada una de esas partículas tiene una duración de vida aleatoria, al término de la cual muere o produce un número aleatorio de partículas hijas. Durante su vida, cada partícula se mueve de manera aleatoria en el espacio. Las partículas hijas actúan de la misma forma. Las leyes probabilísticas de vida, reproducción y movimiento de cada partícula son las mismas, y las evoluciones de todas ellas son independientes unas de otras. De esta forma, cada partícula inicial genera un árbol aleatorio, como se muestra en la Figura 1. La *ramificación* se refiere a la estructura de árbol. Las ramas representan las líneas de descendencia y su evolución temporal y espacial.

En general, el movimiento de las partículas es un proceso de Markov y puede tener saltos. Si cada partícula hace un salto al nacer a partir del lugar de su nacimiento y permanece donde cae, entonces la trayectoria de cada línea de descendencia es una caminata aleatoria en el espacio, y el sistema se llama *caminata aleatoria ramificada*. Si el movimiento de las partículas es el movimiento browniano, el sistema se llama *movimiento browniano ramificado*. Etc.

Un problema importante consiste en demostrar la existencia de un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) en el que está definido un sistema de partículas como el descrito, lo cual es necesario para desarrollar la teoría matemática. Esto ha sido resuelto y podemos dar por hecho que tal espacio de probabilidad existe.

Si las partículas tienen probabilidad positiva de morir sin dejar descendientes, el sistema se puede extinguir en tiempo finito, es decir, a partir de algún

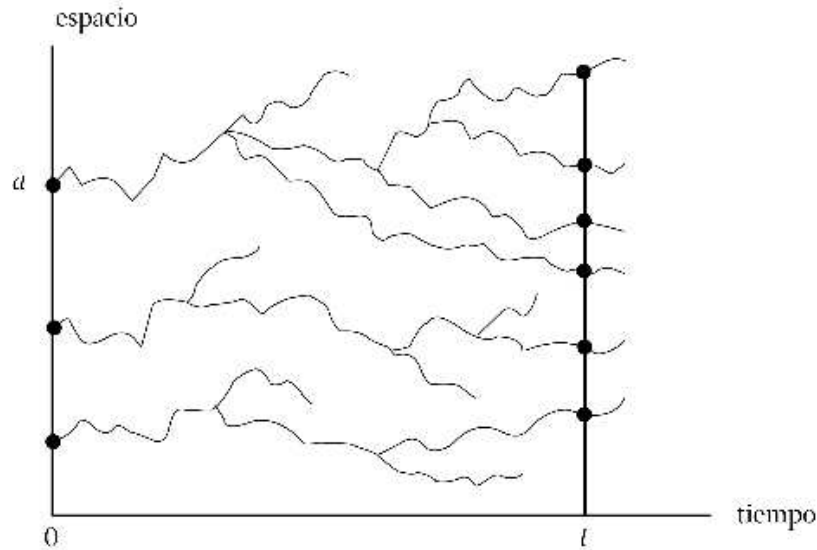


Figura 1

instante aleatorio finito ya no queda ninguna partícula. Por ello, uno de los problemas principales de la teoría es calcular la probabilidad de extinción del sistema.

Se pueden hacer muchas preguntas sobre este tipo de modelo estocástico. Por ejemplo: ¿el sistema se extingue o siempre hay alguna partícula viva?, ¿cuántas partículas hay al tiempo t ?, ¿cuál es la distribución espacial de las partículas al tiempo t y cómo cambia esta distribución en función de t ?, ¿qué tanto se aleja de la posición de una partícula inicial la partícula descendiente que más se aleja de ella hasta el tiempo t ?, ¿cuál es la distribución de las edades de las partículas presentes al tiempo t ?, ¿cuál es la distribución de las generaciones de las partículas presentes al tiempo t ?, ¿qué comportamientos asintóticos tiene el sistema al tiempo t cuando $t \rightarrow \infty$, por ejemplo, leyes fuertes (convergencia con probabilidad 1) y límites de fluctuaciones (convergencia en distribución)?, ¿cómo es el tiempo de ocupación de una región dada del espacio por partículas en un intervalo de tiempo, y cómo se comporta el tiempo de ocupación asintóticamente cuando el intervalo crece indefinidamente? Y muchas preguntas más. Los métodos que se han desarrollado para responder estas y otras preguntas son interesantes, y aún quedan problemas sin resolver.

En muchos casos interesa solamente la estructura genealógica de un sistema ramificado de partículas, es decir, las partículas no tienen movimiento en un

espacio; sólo se consideran sus vidas, sus reproducciones y las relaciones genealógicas entre partículas. La Figura 2 muestra la progenie de la partícula a de la Figura 1. Las primeras preguntas que se hacen se refieren al número total de partículas presentes al tiempo t generadas por una sola partícula inicial, como en la Figura 2.

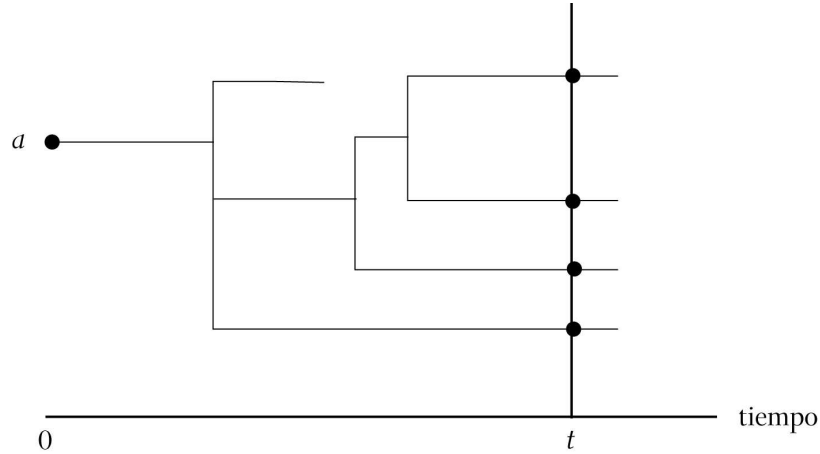


Figura 2

Un sistema ramificado de partículas en el espacio como el descrito es relativamente sencillo en el sentido de que todas las partículas evolucionan de acuerdo con las mismas leyes probabilísticas, e independientemente unas de otras. Aun en este caso los modelos presentan algunos problemas matemáticos difíciles. Hay sistemas ramificados más generales, cuyo análisis es más complicado, que mencionaré más adelante.

La mayoría de los comportamientos que veremos son de tipo asintótico, lo cual es usual en sistemas complejos porque su análisis detallado puede ser sumamente complicado y los límites dan información útil. Un ejemplo clásico de ello es el famoso teorema central de límite.

Los individuos de un sistema ramificado pueden ser vistos como entes abstractos, y así se les trata en la teoría matemática. En las aplicaciones, los individuos pueden representar objetos muy diversos, como veremos a continuación.

2.2. Los orígenes y algunos campos de aplicación. Los libros [4] y [11] y el artículo [13] contienen esbozos de la historia de los procesos de ramificación

y muchas referencias. Menciono solamente algunos precursores y pioneros. Un antecedente es la teoría de T. Malthus (1766-1834) sobre el crecimiento geométrico (o exponencial) de la población humana. F. Galton (1822-1911) y H.W. Watson (1827-1903) propusieron un modelo matemático para estudiar la probabilidad de extinción de los apellidos de alcurnia en la Gran Bretaña, tema que preocupaba a la aristocracia Victoriana. Antes de ellos, I.J. Bienaymé (1796-1878), cuyo trabajo estuvo casi olvidado por más de cien años, ya había estudiado ese tipo de problema en Francia. A.N. Kolmogorov (1903-1987), el padre de la teoría moderna de la probabilidad, fue de los primeros en investigar las matemáticas de los procesos de ramificación en Rusia. S. Ulam (1909-1984) investigó procesos de ramificación en relación con reacciones nucleares en cadena que ocurren en reactores nucleares y bombas atómicas, en el Laboratorio de Los Alamos, E.U.A.

Las partículas o individuos de un sistema ramificado pueden ser de tipos muy diversos, ya que hay muchas “poblaciones” cuyos elementos pueden reproducirse, fragmentarse o desaparecer. Por ejemplo: moléculas, genes, virus, células, células cancerosas, bacterias, animales, especies de animales, personas, apellidos, grupos étnicos, plantas, enfermedades, neutrones, rayos cósmicos, galaxias, piedras, partículas contaminantes, archivos electrónicos, mensajes en redes de información, citas bibliográficas, valores financieros, partidos políticos, grupos terroristas, lenguajes, religiones, etc. Por ello, las aplicaciones de la teoría de ramificación se encuentran en muchos campos: genética, biología molecular, biología celular, evolución, inmunología, epidemiología, ecología, silvicultura, percolación, demografía, medicina, salud pública, astrofísica, telecomunicaciones, internet, industria minera, lingüística, economía y finanzas, sociología, etc. Los temas de investigación científica o matemática son un ejemplo de sistema ramificado: algunos generan nuevos temas y otros se extinguen. El siguiente ejemplo es muy ilustrativo. Los individuos son árboles, sus semillas son transportadas por el viento de manera aleatoria a otros sitios, en los cuales nacen nuevos árboles. Es una caminata aleatoria ramificada. ¿Cómo evoluciona el bosque de árboles en número y en extensión geográfica?

Los superprocesos son cierto tipo de límites de sistemas ramificados de partículas con distribución espacial. Sus estados no son colecciones de partículas distribuidas en el espacio, sino nubes de partículas infinitesimales. Los iniciadores de la teoría de superprocesos fueron S. Watanabe (alrededor de 1968) y D.A. Dawson (alrededor de 1975). Este campo tiene mucha actividad de investigación. Uno de sus aspectos más interesantes es su relación con ecuaciones diferenciales parciales.

3. MODELOS BÁSICOS

En esta sección consideramos el sistema generado por un solo individuo inicial y sin movimiento en un espacio. Varios de los resultados se encuentran en el libro [2]. Los artículos [7] y [8] contienen los resultados principales conocidos hasta sus fechas de publicación.

3.1. El proceso de Galton-Watson. El modelo de ramificación más simple es el de Galton-Watson, que está dado por una cadena de Markov $(N_n)_{n=0,1,2,\dots}$, llamada *proceso de Galton-Watson*, donde N_n es el número de individuos presentes en la n -ésima generación, con $N_0 = 1$ (un individuo inicial), como se muestra en la Figura 3. En este modelo la escala del tiempo está dada por las generaciones; no se consideran las duraciones de las vidas de los individuos. Visto de otra forma, cada individuo vive una unidad de tiempo.

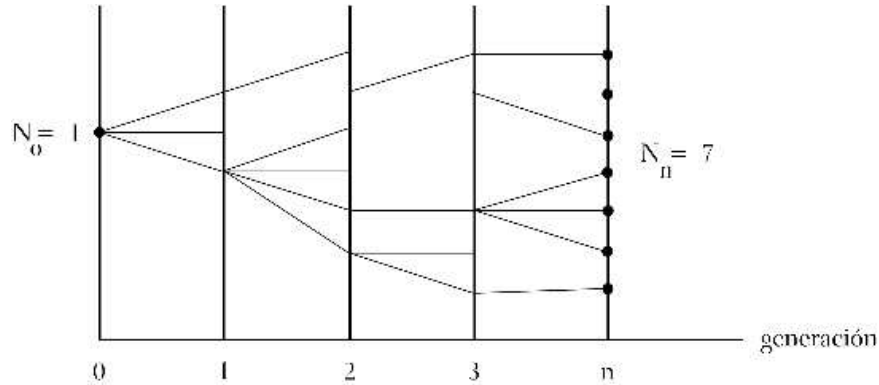


Figura 3

La pregunta que Bienaymé, Galton y Watson querían resolver era calcular la probabilidad de extinción, es decir, la probabilidad $P[N_n = 0 \text{ para algún } n]$ (es claro que $N_n = 0$ implica $N_m = 0$ para todo $m > n$).

La *ley de ramificación* (o *ley de reproducción*) del sistema es la distribución de probabilidad

$$p_k = \text{probabilidad de producir } k \text{ individuos} = P[N_1 = k], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

El caso $k = 0$ significa que el individuo o partícula muere sin dejar descendientes. La función generadora de esta ley es

$$(3.1) \quad f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

El valor medio de la ley de ramificación es

$$(3.2) \quad m = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = f'(1-),$$

que representa el número promedio de individuos generados en una reproducción. Supondremos que $m < \infty$. Se consideran tres casos:

- $m < 1$: ramificación subcrítica,
- $m = 1$: ramificación crítica,
- $m > 1$: ramificación supercrítica.

La función $f(s)$ definida por (3.1) es estrictamente convexa y tiene la forma que muestra la Figura 4.

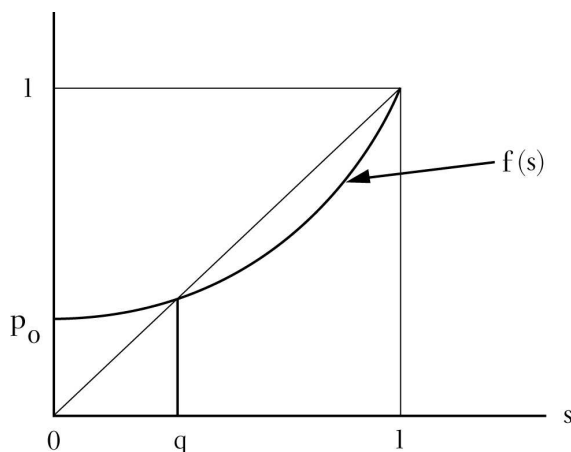


Figura 4

El valor q es la raíz más pequeña de la ecuación $f(s) = s$. Se observa que si $m \leq 1$ (en este caso, necesariamente $p_0 > 0$), entonces $q = 1$, y si $m > 1$, entonces $q < 1$. Resulta que q es la *probabilidad de extinción* del proceso de Galton-Watson. En los casos crítico y subcrítico el proceso se extingue con probabilidad 1, dicho también *casi seguramente* (c.s.), es decir, $P[N_n = 0 \text{ para algún } n] = 1$, y en el caso supercrítico, $P[N_n = 0 \text{ para algún } n] = q$. Así pues, el proceso se extingue con probabilidad q y sobrevive para siempre con probabilidad $1 - q$ (nótese que $q > 0$ si y sólo si $p_0 > 0$).

Supondremos además que la ley de ramificación tiene segundo momento finito, es decir, $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k < \infty$. Esto es una simplificación, pero se cumple

en muchos casos. Denotamos el segundo momento factorial y la varianza de la ley de ramificación, respectivamente, por

$$(3.3) \quad m_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p_k = f''(1-) \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k - m^2.$$

Muchos resultados valen con la hipótesis menos restrictiva $\sum_{k=1}^{\infty} (k \log k)p_k < \infty$, pero eso es más complicado.

Para estudiar el comportamiento asintótico de N_n cuando $n \rightarrow \infty$, definimos el proceso $W_n = N_n/m^n$, $n = 0, 1, \dots$. Es fácil ver que la esperanza condicional de W_{n+1} dado el pasado (el cual es W_1, \dots, W_n) cumple la condición

$$(3.4) \quad E[W_{n+1} | W_1, \dots, W_n] = W_n.$$

Esto se sigue de la relación $N_{n+1} = \sum_{j=1}^{N_n} X_j$, donde X_j es el número de individuos generados por el j -ésimo individuo de la generación n , usando el hecho que las variables aleatorias X_j son independientes, todas tienen distribución $(p_k)_k$, y son independientes del pasado. La expresión (3.4) significa que el proceso $(W_n)_{n \geq 0}$ es una martingala, y, siendo no negativa, por un teorema clásico de convergencia de martingalas existe el límite

$$(3.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} W_n = W \quad \text{c.s.},$$

donde W es una variable aleatoria no negativa ([2], p. 9). En los casos crítico y subcrítico se tiene $W = 0$. En el caso supercrítico W tiene una distribución absolutamente continua en $(0, \infty)$, tiene valor medio $E(W) = 1$ y varianza $\text{Var}(W) = \sigma^2/(m^2 - m)$, y $P[W = 0] = q$ (probabilidad de extinción).

En conclusión, sólo existen las posibilidades siguientes: en los casos crítico y subcrítico el proceso se extingue, y en el caso supercrítico se extingue con probabilidad q y crece geoméricamente como $m^n W$, asintóticamente cuando $n \rightarrow \infty$, con probabilidad $1 - q$. Esto último es el análogo estocástico de la ley de Malthus sobre el crecimiento geométrico de la población.

En el caso crítico ($m = 1$), un resultado interesante es el siguiente límite de la distribución de la variable aleatoria N_n/n condicionada a que el proceso no se haya extinguido:

$$(3.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{N_n}{n} \leq x \mid N_n > 0 \right] = 1 - \exp \left\{ -\frac{2x}{\sigma^2} \right\}, \quad x \geq 0;$$

es decir, condicionado a no extinción, N_n/n converge a una distribución exponencial cuando $n \rightarrow \infty$ ([2], p. 20). También hay límites condicionales para el caso subcrítico.

En el caso supercrítico ($m > 1$), el resultado (3.5) es del tipo de una ley fuerte para N_n , análoga a la ley fuerte de los grandes números, pero en este caso el límite es una variable aleatoria (no una constante). En el caso supercrítico

también se tiene un límite de fluctuaciones de N_n . Si $p_0 = 0$ (para simplificar), entonces

$$(3.7) \quad \frac{N_n - m^n W}{N_n^{1/2}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, \text{Var}(W)) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

donde \Rightarrow significa convergencia en distribución y $\mathcal{N}(0, a)$ es la distribución gaussiana de valor medio 0 y varianza a ; es decir, para cada $x \in (-\infty, \infty)$, recordando que $\text{Var}(W) = \sigma^2/(m^2 - m)$,

$$(3.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{N_n - m^n W}{N_n^{1/2}} \leq x \right] \\ = \frac{1}{(2\pi\sigma^2/(m^2 - m))^{1/2}} \int_{-\infty}^x \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma^2/(m^2 - m)} \right\} dy.$$

([2], p. 55). Este resultado se parece al teorema central de límite, pero en este caso la fluctuación es con respecto a la variable aleatoria $m^n W$ (no al valor medio de N_n).

3.2. El proceso de Bellman-Harris. En el modelo de Galton-Watson cada individuo vive una unidad de tiempo, y por lo tanto todos los individuos que coexisten pertenecen a la misma generación. En el modelo de Bellman-Harris los individuos se reproducen de la misma forma que en el de Galton-Watson, pero cada uno tiene su propia vida de duración aleatoria (independiente) con función de distribución G (no degenerada), como se ve en la Figura 5.

Sea Z_t el número de individuos presentes al tiempo t . El proceso estocástico $(Z_t)_{t \geq 0}$ es el *proceso de Bellman-Harris* (también llamado *proceso de ramificación con dependencia de la edad*). Si G es la función de distribución exponencial de parámetro V ,

$$(3.9) \quad G(t) = 1 - e^{-Vt}, \quad t \geq 0,$$

entonces $(Z_t)_{t \geq 0}$ tiene la propiedad de Markov. Esto es consecuencia de la falta de memoria de la distribución exponencial (si X es una variable aleatoria exponencial, entonces $P[X > s + t | X > s] = P[X > t]$). Para otras distribuciones G (no triviales) el proceso $(Z_t)_{t \geq 0}$ no tiene la propiedad de Markov, por lo que el análisis es más difícil.

Algunos de los resultados del proceso de Bellman-Harris son análogos a los del proceso de Galton-Watson, pero hay otros nuevos. (Seguimos con la suposición de segundo momento finito de la ley de ramificación).

En los casos crítico y subcrítico el sistema se extingue c.s., es decir, $P[Z_t = 0 \text{ para algún } t] = 1$, (es claro que $Z_t = 0$ implica $Z_{t+s} = 0$ para todo $s > 0$).

Se define la constante α , llamada *parámetro de Malthus*, como la raíz (única si existe) de la ecuación

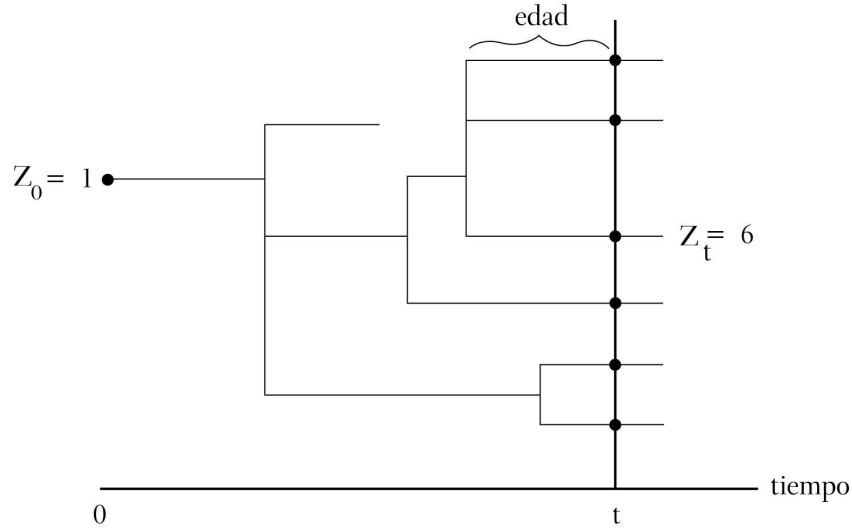


Figura 5

$$(3.10) \quad \int_0^\infty e^{-\alpha t} dG(t) = \frac{1}{m}.$$

Es claro que α existe en el caso supercrítico. Si G es exponencial de parámetro V , entonces $\alpha = V(m-1)$. En el caso supercrítico se define la constante

$$(3.11) \quad c = \frac{m-1}{\alpha m^2 \int_0^\infty t e^{-\alpha t} dG(t)}.$$

En lo que sigue hacemos las siguientes simplificaciones para el caso supercrítico: $p_0 = 0$, G no tiene átomo en 0 (los individuos tienen edad 0 al nacer), y G no es de tipo latiz (G no está soportada en una latiz). Consideremos el proceso $(W_t)_{t \geq 0}$ definido por $W_t = (e^{-\alpha t}/c)Z_t$. Resulta que existe una variable aleatoria no negativa W tal que

$$(3.12) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} W_t = W \quad \text{c.s.}$$

([2], p. 146, 152, [27].) Si G es exponencial, de manera análoga al modelo de Galton-Watson, la existencia del límite se sigue del hecho que en este caso $(W_t)_{t \geq 0}$ es una martingala. En los casos crítico y subcrítico, $W = 0$, y en el caso supercrítico la variable aleatoria W es absolutamente continua en $(0, \infty)$,

tiene valor medio $E(W) = 1$ y varianza

$$(3.13) \quad \text{Var}(W) = \frac{(m + m_2) \int_0^\infty e^{-2\alpha u} dG(u) - 1}{1 - m \int_0^\infty e^{-2\alpha u} dG(u)},$$

y $P[W = 0] = q$ (probabilidad de extinción) ([2], p. 111, 172, [4], p. 146).

Así, de manera semejante al modelo de Galton-Watson, la población se extingue o crece exponencialmente como $c e^{\alpha t} W$ asintóticamente cuando $t \rightarrow \infty$; de ahí que se haya llamado a α parámetro de Malthus, pues determina la forma del crecimiento exponencial de la población.

En el caso crítico, un resultado análogo a (3.6) es el siguiente: Si $\int_0^\infty t dG(t) = \mu < \infty$ y $t^2[1 - G(t)] \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces

$$(3.14) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P \left[\frac{Z_t}{t} \leq x \mid Z_t > 0 \right] = 1 - \exp \left\{ -\frac{2\mu x}{\sigma^2} \right\}, \quad x \geq 0.$$

([2], p. 169).

Un resultado de fluctuación análogo a (3.7) en el caso supercrítico con G exponencial (en este caso, $c = 1$) es el siguiente:

$$(3.15) \quad \frac{Z_t - e^{V(m-1)t} W}{Z_t^{1/2}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, \text{Var}(W)) \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty,$$

donde W es el límite de $e^{-V(m-1)t} Z_t$ cuando $t \rightarrow \infty$, dado por (3.12) ([2], p. 124). Creo que un resultado del tipo (3.15) debe cumplirse en el caso no markoviano (G no exponencial, con alguna condición), pero no lo he encontrado.

¿Cómo es la distribución de las edades de los individuos al tiempo t ? La edad de un individuo presente al tiempo t es el tiempo que ha vivido desde que nació hasta t (Figura 5). Sea $Z(x, t)$ el número de individuos cuyas edades al tiempo t no exceden $x > 0$. La proporción de tales individuos es la variable aleatoria $A(x, t) = Z(x, t)/Z_t$. En el caso supercrítico se tiene, para cada $x > 0$,

$$(3.16) \quad A(x, t) \rightarrow A(x) \quad \text{c.s. cuando } t \rightarrow \infty,$$

donde

$$(3.17) \quad A(x) = \frac{\int_0^x e^{-\alpha u} [1 - G(u)] du}{\int_0^\infty e^{-\alpha u} [1 - G(u)] du}, \quad x > 0,$$

y $A(x)$ se llama *distribución de edad estacionaria*. ([2], p. 179, [27].)

En el proceso de Bellman-Harris los individuos presentes al tiempo t pueden pertenecer a generaciones distintas. ¿Cómo se distribuyen las generaciones al tiempo t ? Sea $Y(y, t)$ el número de individuos pertenecientes a generaciones que no exceden y al tiempo t , es decir, que tienen no más de $\lfloor y \rfloor$ antepasados

($\lfloor \cdot \rfloor$ denota parte entera). La proporción de tales individuos es la variable aleatoria $B(y, t) = Y(y, t)/Z_t$. En el caso supercrítico se tiene

$$(3.18) \quad B(y_t(s), t) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^s e^{-y^2/2} dy \quad \text{c.s. cuando } t \rightarrow \infty,$$

si

$$(3.19) \quad y_t(s) = st^{1/2}\tilde{\gamma}^2\tilde{\mu}^{-3/2} + t\tilde{\mu}^{-1}, \quad -\infty < s < \infty,$$

(es claro que $y_t(s) > 0$ para t suficientemente grande), donde $\tilde{\mu}$ y $\tilde{\gamma}^2$ son el valor medio y la varianza de la función de distribución de probabilidad

$$(3.20) \quad \tilde{G}(t) = \int_0^t me^{-\alpha s} dG(s), \quad t \geq 0,$$

(véase (3.10)). Es claro que a medida que t aumenta, aparecen más y más generaciones. El resultado (3.18)-(3.19) significa que hay que observarlas de acuerdo con $y_t(s)$ para detectar la distribución a largo plazo. ([2], p. 233, 242, [37], la convergencia c.s. es consecuencia de resultados de [31]).

3.3. Relaciones entre los límites de Galton-Watson y de Bellman-Harris supercríticos. En el proceso de Bellman-Harris está inmerso un proceso de Galton-Watson, ya que se puede considerar el número de individuos pertenecientes a una misma generación, independientemente de las épocas en que viven. Existen las variables aleatorias no triviales W que hemos visto para dichos procesos en el caso supercrítico, dadas por (3.5) para Galton-Watson y por (3.12) para Bellman-Harris, pero son distintas, y ahora las denotamos por W_1 y W_2 , respectivamente. En general se sabe poco acerca de las distribuciones de esas variables aleatorias. Sin embargo, es natural preguntarse qué relaciones hay entre ellas ([2], p. 178, problema 13). Se tienen los siguientes resultados sobre las esperanzas condicionales de cada una dada la otra [30]:

$$(3.21) \quad E[W_2|W_1] = W_1,$$

de donde se sigue que

$$(3.22) \quad \text{Cov}(W_1, W_2) = \text{Var}(W_1) = \frac{\sigma^2}{m^2 - m},$$

y si G es exponencial,

$$(3.23) \quad E[W_1|W_2] = \frac{1}{f_{W_2}(W_2)} \mathcal{L}^{-1}\{(-\Psi'_{W_2})^{1/m}\}(W_2),$$

donde f_{W_2} es la función de densidad de W_2 , $\Psi_{W_2}(u) = Ee^{-uW_2}$, $u \geq 0$, es la transformada de Laplace de (la distribución de) W_2 , y $\mathcal{L}^{-1}\{ \cdot \}(x)$ denota transformada de Laplace inversa evaluada en x . Estos resultados se deducen

de una ecuación funcional para la transformada de Laplace conjunta de W_1 y W_2 , definida por

$$(3.24) \quad \Psi_{W_1, W_2}(u_1, u_2) = E(\exp\{-(u_1 W_1 + u_2 W_2)\}), \quad u_1, u_2 \geq 0.$$

Dicha ecuación funcional es

$$(3.25) \quad \Psi_{W_1, W_2}(u_1, u_2) = \int_0^\infty f(\Psi_{W_1, W_2}(u_1 m^{-1}, u_2 e^{-\alpha x})) dG(x),$$

donde f es la función generadora de la ley de ramificación dada por (3.1). (Esta ecuación es válida bajo la condición $\sum_k (k \log k) p_k < \infty$). Haciendo $u_1 = 0$ ó $u_2 = 0$ se obtienen las ecuaciones funcionales conocidas para W_1 y para W_2 ([2], p. 10, 172). En general no hay forma de resolver estas ecuaciones.

4. PROCESOS DE RAMIFICACIÓN CON ESTADO CONTINUO

Los procesos de Galton-Watson y de Bellman-Harris solamente toman valores enteros no negativos. Ahora veremos unos procesos de ramificación con espacio de estados continuo: $[0, \infty)$. Cuando el número de partículas de un sistema es muy grande, en lugar de considerar las partículas individuales conviene estudiar la densidad de partículas. Este enfoque, que se usa en física estadística, se emplea para obtener los procesos con estado continuo.

Consideremos el proceso de Galton-Watson, pero en lugar de una sola partícula inicial, como antes ($N_0 = 1$), ahora habrá muchas partículas iniciales. Antes supusimos implícitamente que cada partícula tiene una masa unitaria, y ahora las partículas tendrán masas muy pequeñas. Además, aceleraremos el tiempo de modo que en una unidad de tiempo ocurrirán muchas ramificaciones, y haremos que la ley de ramificación sea asintóticamente crítica. Todo esto se tiene de la manera siguiente: Sea $(N_n^{(r)})_{n=0,1,2,\dots}$, $r = 1, 2, \dots$, una sucesión de procesos de Galton-Watson. Para cada r definimos el proceso estocástico en tiempo continuo $(X_t^{(r)})_{t \geq 0}$ en la forma $X_t^{(r)} = N_{\lfloor rt \rfloor}^{(r)} / r$. Así, las ramificaciones ocurren en los instantes i/r , $i = 1, 2, \dots$, y cada partícula tiene masa $1/r$. Hacemos que las leyes de ramificación dependan de r de modo que el valor medio sea asintóticamente de la forma $m(r) \sim 1 + b/r$, $-\infty < b < \infty$ constante, cuando $r \rightarrow \infty$ ($m(r)$ es positivo para r suficientemente grande). Si existe el límite $X_0^{(r)} \rightarrow a$, constante positiva, cuando $r \rightarrow \infty$ (por lo tanto el número de partículas iniciales tiende a infinito), se obtienen como límites en distribución de $(X_t^{(r)})_{t \geq 0}$, cuando $r \rightarrow \infty$, procesos $(X_t)_{t \geq 0}$ que son difusiones en $[0, \infty)$ con ecuación de Kolmogorov (hacia atrás) de la forma

$$(4.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) = bx \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) + \frac{1}{2} cx \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, x),$$

con $X_0 = a$ y constante $c > 0$ que depende de los segundos momentos de las leyes de ramificación. Esto significa que $(X_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de Markov con

trayectorias continuas, tal que

$$(4.2) \quad E[X_t - a | X_0 = a] \sim bat$$

y

$$(4.3) \quad E[(X_t - a)^2 | X_0 = a] \sim cat$$

cuando $t \rightarrow 0$. ([2], p. 260, 262, [35].) Omíto el sentido preciso de la convergencia en distribución del proceso $(X_t^{(r)})_{t \geq 0}$ al proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ cuando $r \rightarrow \infty$, pero se puede pensar como algo análogo a la convergencia en distribución de variables aleatorias.

La probabilidad de extinción del proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ (con $X_0 = a$) es

$$q = \begin{cases} 1, & \text{si } b \leq 0 \text{ (casos críticos y subcrítico),} \\ \exp\{-2ba/c\}, & \text{si } b > 0 \text{ (caso supercrítico).} \end{cases}$$

El proceso de difusión $(X_t)_{t \geq 0}$ con ecuación de Kolmogorov (4.1) es solución no negativa de la ecuación diferencial estocástica

$$(4.4) \quad \begin{aligned} dX_t &= bX_t dt + (cX_t)^{1/2} dB_t, \quad t > 0, \\ X_0 &= a, \end{aligned}$$

donde $(B_t)_{t \geq 0}$ es el movimiento browniano estándar (cuyas trayectorias no son diferenciables). Cabe recordar que una ecuación diferencial estocástica de la forma (4.4) es simbólica y hay que entenderla en su forma integral. Una peculiaridad de la ecuación (4.4) es que no cae dentro de la teoría clásica de las ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô porque la función $x \mapsto x^{1/2}$ no es de Lipschitz. (Sobre esta ecuación, véase [36]). La teoría clásica de ecuaciones diferenciales estocásticas en el sentido de Itô puede verse en C. Tudor, Procesos Estocásticos, Tercera Edición, y a nivel más avanzado en T. Bojdecki, Teoría General de Procesos e Integración Estocástica, ambos libros publicados por Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana.)

El tipo de procesos estocásticos vistos aquí se llaman *difusiones de Feller* debido a que fueron obtenidas por W. Feller (en modelos de genética).

5. SISTEMAS ESPACIALES RAMIFICADOS

Veremos ahora dos tipos de límites de sistemas ramificados de partículas con distribución espacial.

5.1. Límites de alta densidad. El contenido de esta sección se puede consultar en [3], especialmente las bases para comprender mejor los resultados, así como los de la sección siguiente.

Para ejemplificar este tipo de sistemas espaciales y algunos de sus resultados, consideremos el siguiente modelo. Las partículas están en el espacio euclideo \mathbb{R}^d , tienen tiempo de vida con distribución exponencial de parámetro V y ley

de ramificación con varianza finita, y se mueven de acuerdo con el movimiento browniano estándar en dimensión d . Es un sistema de movimientos brownianos ramificados.

Sea $(N_t)_{t \geq 0}$ el proceso estocástico definido por

$N_t(A)$ = número de partículas presentes al tiempo t con posiciones en $A \subset \mathbb{R}^d$, (A es un conjunto de Borel). Para cada t , N_t es una medida de contar aleatoria en \mathbb{R}^d . Sobre la configuración inicial de partículas, N_0 , se pueden hacer distintas suposiciones, pero la más sencilla (en el sentido de que simplifica los cálculos) es que N_0 sea una medida aleatoria de Poisson homogénea, cuya medida de intensidad, $E(N_0)$, es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d , denotada por λ . Si A y B son conjuntos ajenos tales que $0 < \lambda(A), \lambda(B) < \infty$, $N_0(A)$ y $N_0(B)$ son variables aleatorias independientes, y la variable aleatoria $N_0(A)$ tiene distribución de Poisson con parámetro $\lambda(A)$, es decir,

$$(5.1) \quad P[N_0(A) = k] = \frac{1}{k!} (\lambda(A))^k e^{-\lambda(A)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

El proceso $(N_t)_{t \geq 0}$ tiene la propiedad de Markov debido a que la distribución de vida de las partículas es exponencial y a que el movimiento browniano es un proceso de Markov. Esto simplifica mucho el análisis.

Queremos estudiar la evolución del sistema cuando la densidad de partículas es muy alta, lo cual se tiene tomando la configuración inicial de Poisson con medida de intensidad $K\lambda$ y haciendo la constante K (llamada densidad) tender a infinito. Denotemos por $(N_t^K)_{t \geq 0}$ al proceso con densidad K . En particular, queremos encontrar el comportamiento asintótico del proceso de fluctuación, $(X_t^K)_{t \geq 0}$, definido por

$$(5.2) \quad X_t^K = \frac{N_t^K - E(N_t^K)}{K^{1/2}}$$

cuando $K \rightarrow \infty$.

Para empezar, hay que calcular el valor medio y la covarianza del proceso $(N_t)_{t \geq 0}$ (con $K = 1$). Usamos a veces la notación $\langle \mu, \varphi \rangle$ para la integral de la función φ con respecto a la medida μ , $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \mu(dx)$. En los cálculos interviene el semigrupo del movimiento browniano, $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$, definido por el operador

$$(5.3) \quad \mathcal{T}_t \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) p_t(x-y) dy,$$

donde φ es una función integrable y $p_t(x)$ es la densidad de transición del movimiento browniano en \mathbb{R}^d ,

$$(5.4) \quad p_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/2t}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0.$$

(La propiedad de semigrupo es $\mathcal{T}_{t+s} = \mathcal{T}_t \mathcal{T}_s$, que es una forma de expresar la propiedad de Markov del proceso de movimiento.) La simplificación que se obtiene al tomar la medida aleatoria de Poisson con medida de intensidad λ se debe a que λ es invariante respecto a \mathcal{T}_t : $\langle \lambda, \mathcal{T}_t \varphi \rangle = \langle \lambda, \varphi \rangle$.

En lo que sigue, φ pertenece al espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ de las funciones infinitamente diferenciables y rápidamente decrecientes. Pronto veremos la razón para escoger este espacio.

Para calcular el valor medio $E(\langle N_t, \varphi \rangle)$ y la covarianza $\text{Cov}(\langle N_s, \varphi \rangle, \langle N_t, \psi \rangle)$, primero se obtienen ecuaciones integrales por medio del llamado argumento de renovación, que se hace partiendo de una sola partícula inicial y condicionando con respecto al instante de la primera ramificación ([2], p. 138), se resuelven esas ecuaciones y se usan fórmulas para el valor medio y la covarianza de sistemas de Poisson. Se encuentran los siguientes resultados:

$$(5.5) \quad E(\langle N_t, \varphi \rangle) = e^{\alpha t} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx, \quad t \geq 0, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

$$(5.6) \quad \begin{aligned} K(s, \varphi; t, \psi) &= \text{Cov}(\langle N_s, \varphi \rangle, \langle N_t, \psi \rangle) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{\alpha s} \mathcal{T}_s(\varphi e^{\alpha(t-s)} \mathcal{T}_{t-s} \psi)(x) dx \\ &+ m_2 V \int_0^s \int_{\mathbb{R}^d} e^{\alpha u} \mathcal{T}_u(\varphi e^{\alpha(t-s+2u)} \mathcal{T}_{t-s+2u} \psi)(x) dx ds, \end{aligned} \quad 0 \leq s \leq t, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

donde α es el parámetro de Malthus, definido por (3.10); en el caso presente, $\alpha = V(m-1)$, donde m es el valor medio de la ley de ramificación, y m_2 es el segundo momento factorial. Nótese que

$$(5.7) \quad K(s, \varphi; t, \psi) = K(s, \varphi; s, U_{t-s} \psi),$$

donde $(U_t)_{t \geq 0}$ es el semigrupo $U_t = e^{\alpha t} \mathcal{T}_t$.

Antes de seguir adelante, hay que hacer una observación sobre las fluctuaciones al tiempo inicial $t = 0$ cuando $K \rightarrow \infty$. La configuración inicial, N_0^K , es una medida aleatoria de Poisson uniforme en \mathbb{R}^d con intensidad K , y su fluctuación es $N_0^K - E(N_0^K) = N_0^K - K\lambda$. ¿Qué sucede con ella cuando $K \rightarrow \infty$? Para obtener un límite no trivial hay que poner una normalización adecuada (de modo que la varianza tenga un límite no trivial):

$$X_0^K = \frac{N_0^K - K\lambda}{K^{1/2}}.$$

Debido al centramiento, X_0^K es una medida aleatoria con signo en \mathbb{R}^d , pero sucede que el límite cuando $K \rightarrow \infty$, que denotamos X_0 , se sale del espacio de medidas con signo. Para verificar esto, se puede ver que la medida de variación

de X_0 es infinita c.s.. Se puede demostrar que X_0 toma valores en el espacio de distribuciones temperadas, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, que es el dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Ésta es la razón para tomar las funciones φ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. El espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ contiene funciones generalizadas, por ejemplo la delta de Dirac. En este caso, la notación $\langle X_0, \varphi \rangle$ se refiere a la dualidad en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. El límite X_0 es un elemento aleatorio de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ tal que para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\langle X_0, \varphi \rangle$ es una variable aleatoria gaussiana con valor medio 0 y varianza $\langle \lambda, \varphi^2 \rangle$. Las realizaciones de X_0 (es decir, $X_0(\omega)$ para cada ω en el espacio de probabilidad subyacente Ω) son funciones generalizadas sobre \mathbb{R}^d que no son funciones ordinarias. La variable aleatoria X_0 en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ se llama *ruido blanco* en \mathbb{R}^d , nombre que proviene de la ingeniería electrónica. El ruido blanco en dimensión 1 se puede imaginar de manera intuitiva como un proceso estocástico cuyos valores en tiempos distintos son independientes, idénticamente distribuidos, con valor medio 0 y varianza infinita. Con este antecedente, no es extraño que el límite cuando $K \rightarrow \infty$ de las fluctuaciones definidas por (5.2) sea un proceso que toma valores en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Se obtienen los siguientes resultados:

Levy de grandes números (límite hidrodinámico): para cada $t > 0$,

$$(5.8) \quad \frac{1}{K} \langle N_t^K, \varphi \rangle \rightarrow e^{\alpha t} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx \quad \text{en la media cuadrática cuando } K \rightarrow \infty,$$

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Nótese que el límite es el valor medio dado por (5.5).

Límite de fluctuaciones: el proceso $(X_t^K)_{t \geq 0}$ definido por (5.2) converge en distribución, cuando $K \rightarrow \infty$, a $(X_t)_{t \geq 0}$, que es un proceso gaussiano centrado con valores en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ cuya covarianza es

$$(5.9) \quad \text{Cov}(\langle X_s, \varphi \rangle, \langle X_t, \psi \rangle) = K(s, \varphi, t, \psi), \quad s \leq t, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

donde $K(s, \varphi; t, \psi)$ está dado por (5.6). El sentido preciso de esta convergencia en distribución requiere bastante información técnica que omito.

Usando (5.7) se puede demostrar que el proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ satisface la siguiente ecuación diferencial parcial estocástica en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$:

$$(5.10) \quad dX_t = \left(\frac{1}{2} \Delta^* + \alpha \right) X_t dt + dW_t,$$

$X_0 =$ ruido blanco en \mathbb{R}^d , (Δ es el Laplaciano en \mathbb{R}^d , $\frac{1}{2}\Delta$ es el generador infinitesimal del movimiento browniano en \mathbb{R}^d , que es la derivada del semigrupo \mathcal{T}_t en $t = 0$, y Δ^* es el operador adjunto de Δ), y $(W_t)_{t \geq 0}$ es un proceso

gaussiano centrado en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ cuya covarianza está dada por

$$(5.11) \quad \text{Cov}(\langle W_s, \varphi \rangle, \langle W_t, \psi \rangle) = \int_0^{s \wedge t} Q_u(\varphi, \psi) du, \quad s, t \geq 0,$$

con

$$(5.12) \quad Q_u(\varphi, \psi) = e^{\alpha u} [(m_2 V - \alpha) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \psi(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \varphi(x) \cdot \nabla \psi(x) dx],$$

(\cdot es el producto interior en \mathbb{R}^d y ∇ es el gradiente). El proceso gaussiano $(W_t)_{t \geq 0}$ caracterizado por (5.11)-(5.12) es un movimiento browniano en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ con núcleo de covarianza $Q_u(\varphi, \psi)$. (Este tipo de ecuaciones se pueden ver en [28].)

Lo anterior vale también si no hay ramificación ($V = 0$); es decir, cada partícula se mueve indefinidamente de acuerdo con el movimiento browniano. En este caso, $\alpha = 0$ y la ecuación (5.10) con (5.11)-(5.12) se reduce al análogo estocástico de la ecuación de Fokker-Planck que se estudia en física estadística respecto a la evolución de un gas de partículas en el espacio.

5.2. Límites de fluctuaciones del tiempo de ocupación. El contenido de esta sección está en varios artículos citados en [29], de los mismos autores.

Continuamos con el sistema espacial ramificado de la sección anterior. Veremos qué ocurre con el tiempo de ocupación con ramificación crítica ($\alpha = 0$). Para simplificar, supondremos que la ramificación es binaria, es decir, se producen 0 ó 2 partículas con probabilidad 1/2 para cada posibilidad.

El *tiempo de ocupación* del proceso $(N_t)_{t \geq 0}$ es el proceso $(Y_t)_{t \geq 0}$ definido por

$$(5.13) \quad Y_t = \int_0^t N_s ds, \quad t \geq 0.$$

Nótese que $\langle Y_t, \mathbf{1}_A \rangle$ es la suma de los tiempos que el conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ está ocupado por partículas del sistema durante el intervalo de tiempo $[0, t]$. Ahora no aumentamos la densidad de partículas, como lo hicimos en la sección anterior, sino que aceleramos el tiempo por el factor T , de modo que consideramos el proceso

$$(5.14) \quad Y_t^T = \int_0^{Tt} N_s ds, \quad t \geq 0,$$

y el proceso de fluctuación correspondiente, $(X_t^T)_{t \geq 0}$, está definido por

$$(5.15) \quad X_t^T = \frac{Y_t^T - E(Y_t^T)}{F_T} = \frac{1}{F_T} \int_0^{Tt} (N_s - \lambda) ds,$$

donde se ha usado el hecho $E(N_s) = \lambda$ (véase (5.5)). F_T es una normalización adecuada que tiende a ∞ cuando $T \rightarrow \infty$, tal que el proceso $(X_t^T)_{t \geq 0}$ tenga

límite en distribución no trivial. Hay que determinar F_T y describir el proceso límite.

Se obtienen los siguientes resultados dependientes de la dimensión d . En todos los casos, los procesos límites toman valores en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Si $d = 3$ y $F_T = T^{3/4}$, el proceso $(X_t^T)_{t \geq 0}$ converge en distribución, cuando $T \rightarrow \infty$, al proceso

$$(5.16) \quad (X_t)_{t \geq 0} = V^{1/2} \lambda \xi,$$

donde $\xi = (\xi_t)_{t \geq 0}$ es un proceso real, continuo, gaussiano centrado, autosimilar, con covarianza

$$(5.17) \quad \text{Cov}(\xi_s, \xi_t) = s^h + t^h - \frac{1}{2}[(s+t)^h + |t-s|^h], \quad s, t \geq 0,$$

y $h = 3/2$. (La autosimilitud significa que para cualquier constante positiva a , el proceso $(\xi_{at})_{t \geq 0}$ tiene la misma distribución que el proceso $(a^k \xi_t)_{t \geq 0}$ para una constante k ; en este caso $k = h/2$.) El proceso ξ es un caso especial de movimiento browniano sub-fraccionario, que no es un proceso de Markov y tiene la propiedad de *dependencia a gran distancia* (llamada también *memoria larga*), en el sentido de que la covarianza de incrementos sobre intervalos decrece asintóticamente como una potencia negativa de la distancia entre los intervalos; más precisamente, en este caso, si $u < v$ y $s < t$,

$$(5.18) \quad \text{Cov}(\xi_v - \xi_u, \xi_{t+\tau} - \xi_{s+\tau}) \sim \frac{3}{16}(t-s)(v^2 - u^2)\tau^{-3/2} \text{ cuando } \tau \rightarrow \infty.$$

El proceso ξ con covarianza (5.17) (definido en general para $h \in (0, 2)$) se llama *movimiento browniano sub-fraccionario* debido a que la correlación de los incrementos en intervalos ajenos es más débil y su covarianza decrece más rápido que en el caso del *movimiento browniano fraccionario*, cuya covarianza es $\frac{1}{2}(s^h + t^h - |s-t|^h)$, $h \in (0, 2)$. En este sentido, el movimiento browniano sub-fraccionario es “intermedio” entre el movimiento browniano fraccionario y el movimiento browniano usual, y de ahí su nombre.

El movimiento browniano fraccionario y el movimiento browniano sub-fraccionario no son semimartingalas (véase el concepto de semimartingala en los libros de Tudor y de Bojdecki mencionados en la Sección 4), excepto para $h = 1$, que en ambos casos corresponde al movimiento browniano usual, por lo que el cálculo estocástico con respecto a ellos tiene que ser diferente del cálculo estocástico de Itô. Recientemente se han desarrollado teorías nuevas para el caso del movimiento browniano fraccionario. Los procesos estocásticos de memoria larga y que no son semimartingalas son tema de gran interés en la actualidad, debido a que aparecen en muchos campos de aplicación: hidrología, turbulencia, telecomunicaciones, matemáticas financieras, genética, tráfico, entre otros [38].

Sigamos con los resultados.

Si $d = 4$ y $F_T = (T \log T)^{1/2}$, el proceso $(X_t^T)_{t \geq 0}$ converge en distribución, cuando $T \rightarrow \infty$, al proceso

$$(5.19) \quad (X_t)_{t \geq 0} = \frac{V^{1/2}}{4\pi} \lambda B,$$

donde $B = (B_t)_{t \geq 0}$ es el movimiento browniano estándar en dimensión 1.

Si $d \geq 5$ y $F_T = T^{1/2}$, el proceso $(X_t^T)_{t \geq 0}$ converge en distribución, cuando $T \rightarrow \infty$, al proceso de Wiener $(W_t)_{t \geq 0}$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ con covarianza

$$(5.20) \quad \begin{aligned} \text{Cov}(\langle W_s, \varphi \rangle, \langle W_t, \psi \rangle) &= (s \wedge t) \frac{1}{\pi^{d/2}} \left\{ \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{\varphi(x)\psi(y)}{|x-y|^{d-2}} dx dy \right. \\ &\quad \left. + \frac{V}{16} \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) \int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{\varphi(x)\psi(y)}{|x-y|^{d-4}} dx dy \right\}, \quad s, t \geq 0. \end{aligned}$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función gama. Nótese que la covarianza está dada en términos de potenciales de Newton; el segundo término se escribe como integral del producto de potenciales de Newton. (Véase [28] para esta clase de procesos de Wiener generalizados.)

Las observaciones principales sobre estos resultados son las siguientes. La normalización del tipo teorema central de límite clásico, $F_T = T^{1/2}$, se tiene para las dimensiones “altas”, $d \geq 5$. En la dimensión “baja”, $d = 3$, se necesita una normalización más grande que en el caso clásico, lo cual es típico cuando el límite tiene memoria larga. En la dimensión “crítica”, $d = 4$, que es la transición entre los dos casos anteriores, la normalización $F_T = (T \log T)^{1/2}$ representa fluctuaciones de un orden mayor (dado por el factor $\log T$) que el que se esperaría. Este tipo de fenómeno ocurre en algunos modelos de física estadística cuando hay una transición entre fases distintas. En las dimensiones $d \geq 4$ no hay memoria larga, ya que el movimiento browniano (ya sea real o en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$) tiene incrementos independientes. Otra transición interesante es que mientras que en las dimensiones $d = 3$ y 4 las realizaciones del proceso límite son medidas aleatorias (la medida de Lebesgue λ multiplicada por un proceso estocástico real), en las dimensiones $d \geq 5$ el proceso límite es generalizado, es decir, toma valores en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ que no son medidas. No hay límites de fluctuaciones en las dimensiones $d = 1$ y 2 porque en ellas el sistema se extingue localmente (para $d = 2$ hay un resultado ergódico); sin embargo, aumentando la densidad de partículas en forma semejante a la sección anterior, es posible contrarrestar la extinción y obtener límites no triviales de fluctuaciones también en esas dimensiones. Las propiedades de los límites de las fluctuaciones, de acuerdo con la dimensión, son importantes en relación con lo que significan sobre el comportamiento del sistema ramificado de partículas.

Acerca del movimiento browniano fraccionario, cabe señalar que para el sistema sin ramificación ($V = 0$), en la dimensión $d = 1$ se obtiene un límite parecido a (5.16), pero en lugar del movimiento browniano sub-fraccionario aparece el movimiento browniano fraccionario con covarianza $\frac{1}{2}(s^{3/2} + t^{3/2} - |s - t|^{3/2})$. Esto es consecuencia de que la medida aleatoria de Poisson homogénea (la configuración inicial) es un estado de equilibrio del sistema sin ramificación. El mismo tipo de fenómeno ocurre en dimensión $d = 3$ para el sistema ramificado, si se inicia con un estado de equilibrio (el cual es una medida aleatoria que existe en dimensiones $d \geq 3$, pero no es de Poisson). El movimiento browniano fraccionario es el único proceso gaussiano centrado, autosimilar con incrementos estacionarios, y está ligado a condiciones de equilibrio.

Los resultados de las dos últimas secciones se pueden extender a movimientos de partículas y leyes de ramificación más generales.

6. SUPERPROCESOS

Los *superprocesos*, o *procesos de Dawson-Watanabe*, se obtienen como límites de sistemas espaciales ramificados de partículas de manera análoga a los procesos de ramificación con estado continuo.

Consideremos nuevamente un sistema de movimientos brownianos ramificados en \mathbb{R}^d como el descrito en la sección 5.1, pero ahora con una ley de ramificación que no necesariamente tiene varianza finita, cuya función generadora es de la forma

$$(6.1) \quad f(s) = s + b(s - 1) + c(1 - s)^{1+\beta}, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

donde $-1 < b \leq c$, $0 < c \leq (1 + b)/(1 + \beta)$, $0 < \beta \leq 1$ (las condiciones sobre b y c son para que f sea función generadora). El valor medio de esta ley de ramificación y el parámetro de Malthus son $m = 1 + b$ y $\alpha = Vb$, y el segundo momento de la ley es finito si y sólo si $\beta = 1$, y en este caso el segundo momento factorial es $m_2 = 2c$. Si la configuración inicial N_0 es de Poisson con medida de intensidad $E(N_0) = \mu$ (una medida localmente finita en \mathbb{R}^d , no necesariamente la medida de Lebesgue), usando un argumento de renovación se encuentra que el funcional de Laplace de N_t , definido por

$$(6.2) \quad L_{N_t}(\varphi) = E(\exp\{-\langle N_t, \varphi \rangle\}), \quad \varphi \in C_K(\mathbb{R}^d), \quad \varphi \geq 0,$$

($C_K(\mathbb{R}^d)$ es el espacio de las funciones continuas con soporte compacto), está dado por

$$(6.3) \quad L_{N_t}(\varphi) = \exp\{-\langle \mu, v_\varphi(t) \rangle\},$$

donde $v_\varphi(x, t), x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0$, es la solución (única) de la ecuación diferencial parcial no lineal

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \left(\frac{1}{2} \Delta + Vb \right) v - Vcv^{1+\beta}, \\ v(x, 0) &= 1 - e^{-\varphi(x)}. \end{aligned}$$

(Véase [32]).

Para obtener un límite procedemos de manera semejante a la sección 4, tomando una sucesión de procesos con $r \nearrow \infty$. En la r -ésima etapa de aproximación cada partícula tiene una masa pequeña, $1/r$, el parámetro de la vida exponencial es $V_r = Vr^\beta$ (de modo que la vida media es $1/Vr^\beta$, y por tanto las partículas viven poco tiempo), la ley de ramificación es asintóticamente crítica con $b_r = br^{-\beta}$, esto es, el valor medio tiene asintóticamente la forma $m(r) \sim 1 + br^{-\beta}$, y la configuración inicial de Poisson, $N_0^{(r)}$, tiene medida de intensidad $r\mu$, donde μ es una medida localmente finita en \mathbb{R}^d (de modo que la densidad de partículas es alta en el soporte de μ). Esto se parece mucho a la manera como se obtiene el proceso de ramificación con estado continuo como un límite cuando $r \rightarrow \infty$, excepto que ahora partimos del proceso de Bellman-Harris markoviano en lugar del proceso de Galton-Watson (pero se pueden obtener los mismos resultados usando Galton-Watson). Con la suposición sobre la configuración inicial de Poisson se tiene que $N_0^{(r)}/r \Rightarrow \mu$ cuando $r \rightarrow \infty$. Sea $(N_t^{(r)})_{t \geq 0}$ el proceso definido por

$N_t^{(r)}(A)$ = número de partículas presentes al tiempo t con posiciones en $A \subset \mathbb{R}^d$.

(A boreliano). A partir de (6.2)-(6.4) se demuestra que el proceso $(N_t^{(r)})_{t \geq 0}$ converge en distribución, cuando $r \rightarrow \infty$, a un proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ con valores en $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, un espacio adecuado de medidas localmente finitas en \mathbb{R}^d . La distribución de la medida aleatoria X_t está caracterizada por su funcional de Laplace,

$$(6.5) \quad L_{X_t}(\varphi) = E(\exp\{-\langle X_t, \varphi \rangle\}), \quad \varphi \in C_K(\mathbb{R}^d), \quad \varphi \geq 0,$$

que está dado por

$$(6.6) \quad L_{X_t}(\varphi) = \exp\{-\langle \mu, u_\varphi(t) \rangle\},$$

donde $u_\varphi(x, t), x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0$, es la solución (única) de la ecuación diferencial parcial no lineal

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \left(\frac{1}{2} \Delta + Vb \right) u - Vcu^{1+\beta}, \\ u(x, 0) &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Nótese que $X_0 = \mu$ y $0 < c \leq 1/(1 + \beta)$. (Véase [32]).

El proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ es un *super movimiento browniano*, que es un caso especial de superproceso. Una imagen intuitiva de un superproceso es una nube de partículas infinitesimales que evoluciona de manera aleatoria en el espacio y en el tiempo (algo semejante a las nubes de la vida real).

Las ecuaciones (6.4) y (6.7) son iguales, pero sus condiciones iniciales son distintas. Comparando los funcionales de Laplace de N_t , (6.3)-(6.4), y de X_t , (6.6)-(6.7), se advierte la siguiente relación entre X_t y el proceso $(N_t)_{t \geq 0}$ que le dio origen:

$$(6.8) \quad L_{N_t}(\varphi) = L_{X_t}(1 - e^{-\varphi}).$$

Esto significa que N_t tiene la distribución de una medida aleatoria de Cox dirigida por X_t , es decir, N_t es una medida aleatoria de Poisson doblemente estocástica, cuya medida de intensidad aleatoria es X_t . (El funcional de Laplace de una medida aleatoria de Poisson con medida de intensidad μ está dado por $\exp\{-\int(1 - e^{-\varphi(x)})\mu(dx)\}$.)

Si las partículas no tienen movimiento (dicho de otra forma, si el espacio se reduce a un punto) y consideramos el caso $\beta = 1$, el proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ no es otra cosa que el proceso de ramificación con estado continuo, que cumple la ecuación diferencial estocástica (4.4). Lo mismo ocurre si μ es una medida finita (lo cual implica que X_t es una medida aleatoria finita para cada t) y se considera la masa total de X_t . Entonces, una pregunta natural es si el super movimiento browniano satisface una ecuación diferencial estocástica análoga a (4.4), y sucede que así es, pero en versiones más complejas. Resulta que el proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ es singular en las dimensiones $d \geq 2$ (para cada t , X_t es una medida aleatoria singular), pero en la dimensión $d = 1$ es absolutamente continuo, y el proceso de densidad correspondiente, $(X_t(x))_{t \geq 0}$, satisface la ecuación diferencial parcial estocástica

$$(6.9) \quad dX_t(x) = \left(\frac{1}{2} \Delta^* + Vb \right) X_t(x) dt + (VcX_t(x))^{1/2} W(dt, dx), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

donde $W(dt, dx)$ es un ruido blanco en espacio-tiempo con intensidad $dt dx$ (medida de Lebesgue en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$). El significado preciso de la ecuación (6.9) requiere elementos avanzados que omito, pero se observa su semejanza con la ecuación (4.4), quitando la parte del movimiento, dada por Δ (y $V = 1$, sin pérdida de generalidad). En las dimensiones $d \geq 2$ también se tiene una ecuación diferencial parcial estocástica para $(X_t)_{t \geq 0}$, pero involucra conceptos todavía más complejos; en particular, el término $(VcX_t(x))^{1/2} W(dt, dx)$ es sustituido por un proceso estocástico del tipo llamado *medida martingala*. (Véase [36].)

Hay muchos otros resultados sobre superprocesos. Solamente mencionaré uno que tiene relación con una de las aplicaciones que veremos más adelante. Consideremos el superproceso $(X_t)_{t \geq 0}$ en dimensión d que corresponde al movimiento de partículas dado por el proceso α -estable esféricamente simétrico de Lévy, $0 < \alpha \leq 2$ (este proceso tiene incrementos independientes y estacionarios, la función característica del proceso al tiempo t es $z \mapsto \exp\{-t|z|^\alpha\}$, la distribución correspondiente se conoce explícitamente sólo en los casos $\alpha = 1$ (proceso de Cauchy), $\alpha = 2$ (movimiento browniano) y $\alpha = 1/2$; no confundir α con el parámetro de Malthus), y a una ley de ramificación determinada por (6.1) en el caso crítico, $b = 0$. Entonces, si $X_0 = \lambda$ (medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d), se tiene que para $d > \alpha/\beta$ el sistema *persiste*, lo cual significa que X_t converge en distribución, cuando $t \rightarrow \infty$, a un límite X_∞ que es una medida aleatoria en \mathbb{R}^d tal que $E(X_\infty) = \lambda$, y X_∞ es un estado estacionario del proceso $(X_t)_{t \geq 0}$, mientras que para $d \leq \alpha/\beta$, el límite es la medida nula. Esto se llama *dicotomía de persistencia/extinción* [33]. Este resultado tiene interpretación. La constante α representa la movilidad de las partículas, ya que en un instante dado el proceso α -estable esféricamente simétrico tiene momentos finitos solamente de orden estrictamente menor que α , si $\alpha < 2$. Al disminuir α , aumentan las fluctuaciones del proceso. La constante β representa la fertilidad de la ley de reproducción, ya que el número de partículas producidas tiene momentos finitos solamente de orden estrictamente menor que β , si $\beta < 1$. Al disminuir β , aumentan las fluctuaciones del número de partículas producidas, pero como la ramificación es crítica, también aumenta la probabilidad de muerte. Entonces, para una dimensión d dada, si β disminuye, quedan regiones vacías debido a la extinción local, pero disminuyendo α suficientemente (de modo que se preserve la relación $d > \alpha/\beta$), se aumenta la probabilidad de que algunas partículas lleguen a las regiones vacías desde otras regiones antes de morir, contrarrestando así la extinción y restableciendo la persistencia.

El super movimiento browniano tiene una propiedad de *universalidad*. Para explicar esto partamos del teorema central de límite clásico, ampliamente conocido (tanto, que algún diputado lo mencionó en las discusiones sobre la elección presidencial de 2006 en México, a propósito de los errores cometidos en las casillas de votación). El teorema central de límite vale para sumas de cualesquiera variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas cuya distribución tenga segundo momento finito. Esta generalidad es impresionante, y el hecho que el límite sea la distribución gaussiana significa que esta distribución de probabilidad tiene una propiedad de universalidad. De manera análoga, el movimiento browniano es el límite de caminatas aleatorias generadas por sumas de variables aleatorias independientes como a las que se refiere el teorema central de límite; esto es el “principio de invarianza” de Donsker. Pero

el movimiento browniano también ocurre como límite de muchos otros procesos más complejos, y es un concepto esencial en matemáticas y en muchas ciencias. Es un paradigma de universalidad. Algo semejante ocurre con el super movimiento browniano. En sus orígenes apareció en relación con modelos estocásticos de ramificación, como lo hemos visto, pero recientemente se ha demostrado que también surge como límite de otros sistemas estocásticos con mecanismos distintos de la ramificación.

En general, dado un proceso de Markov en \mathbb{R}^d que representa el movimiento de las partículas individuales, se puede construir un superproceso correspondiente, que es un proceso de Markov con valores en un espacio de medidas $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. El término “superproceso” fue introducido por E.B. Dynkin para expresar la idea de que ese proceso en $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ se construye “arriba” del proceso en \mathbb{R}^d . Lo mismo se puede hacer con procesos de Markov en otros espacios. La teoría de superprocesos es extensa y difícil, y tiene muchos contactos con el análisis; en particular son importantes sus relaciones con ecuaciones diferenciales parciales [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22].

7. MODELOS MÁS GENERALES

Algunos ejemplos de modelos de ramificación más generales, o con algunas características especiales, son los siguientes.

En los modelos de Galton-Watson y de Bellman-Harris la población se extingue o crece indefinidamente de manera exponencial. En las poblaciones biológicas reales esto no sucede porque hay factores que inhiben el crecimiento desmedido, como la falta de alimento o de espacio para todos los individuos. Algunos autores han formulado, analizado y aplicado modelos de ramificación que representan más fielmente a las poblaciones biológicas reales y sus evoluciones. En particular, en el modelo de Crump-Mode-Jagers (en tiempo continuo) cada individuo puede generar descendientes varias veces durante su vida, como ocurre en la mayoría de las poblaciones biológicas [11].

Hay modelos donde la distribución del tiempo de vida y la ley de ramificación dependen del tiempo y/o de la posición de la partícula en el espacio.

En los modelos multitipo cada partícula tiene un tipo que la distingue, perteneciente a un conjunto de tipos (que puede ser finito o infinito), y cada tipo de partícula tiene sus propias leyes de evolución y puede producir partículas de tipos distintos del suyo. En el análisis de los modelos multitipo hay resultados análogos a los de Galton-Watson y de Bellman-Harris. En ello juega un papel importante la teoría de Perron-Frobenius de matrices no negativas.

En los modelos que hemos visto se estudia la progenie de las partículas iniciales. En los modelos con inmigración hay además partículas que aparecen

de manera aleatoria en el tiempo (y en el espacio, si es el caso), las cuales también producen nuevas partículas.

Otro tipo de modelos son los referentes a medios aleatorios. En ese caso las propiedades del sistema, por ejemplo la ley de ramificación, pueden cambiar de manera aleatoria. En los modelos catalíticos la ramificación sólo puede darse en presencia de un catalizador, que es una especie de medio aleatorio.

Hay modelos donde no hay independencia de las evoluciones de las partículas. Por ejemplo, modelos con interacciones, en los que la evolución de una partícula depende de alguna manera de otras partículas, y modelos con ramificaciones en dos niveles, donde, además de la ramificación individual, grupos de partículas (por ejemplo, descendientes de un antepasado común) pueden desaparecer todas juntas o generar un número aleatorio de copias de todo el grupo.

Hay modelos en los que se introduce un control estocástico sobre la ley de ramificación para evitar la extinción y la explosión de la población.

También hay modelos en los que las partículas tienen sexo, y se necesita la colaboración de partículas de distintos sexos para la reproducción.

En los modelos con distribución espacial la estructura del espacio juega un papel importante. Por ejemplo, los sistemas tienen comportamientos distintos en espacios euclidianos y en espacios ultramétricos.

Algunos de los modelos de ramificación mencionados también tienen versiones superprocesos, y los superprocesos tienen su propio desarrollo, como ya se ha dicho.

Otra rama que ha salido de los procesos de ramificación está formada por los *árboles aleatorios continuos*, tema que fue iniciado por D. Aldous [39], y que a su vez tiene muchas ramas y contactos con otras áreas de las matemáticas.

8. ALGUNAS APLICACIONES

Muchas de las aplicaciones de las teorías de ramificación y superprocesos se encuentran en biología [10], [11], [12], [13] y en otras ciencias, pero también las hay dentro de las propias matemáticas. Aquí veremos dos aplicaciones de este tipo en áreas matemáticas que no tienen relación aparente con la ramificación.

8.1. Gráficas aleatorias. La teoría clásica de gráficas aleatorias se inició con los trabajos de Erdős y Rényi alrededor de 1950. Una clase de esas gráficas es $G(n, p)$, con $0 < p < 1$, definida como sigue: hay n vértices, y cada par de ellos se conecta con probabilidad p , o no se conecta con probabilidad $1 - p$, independientemente para cada par de vértices. Se buscan propiedades de la gráfica $G(n, p)$ cuando $n \rightarrow \infty$, para lo cual la probabilidad de conexión p debe depender de n de la forma $p = c/n$, donde c es una constante positiva ($c < n$). Existen resultados referentes a los tamaños de las *componentes* de la gráfica, que son conjuntos de vértices que están todos conectados. Uno de los resultados

principales es el siguiente. Si $c < 1$, la componente más grande de $G(n, p)$ tiene orden $O(\log n)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Si $c > 1$, hay una única componente, llamada “gigante”, que contiene asintóticamente rn vértices cuando $n \rightarrow \infty$, donde $r \in (0, 1)$ es solución de la ecuación

$$(8.1) \quad e^{-rc} = 1 - r,$$

y todas las demás componentes tienen a lo más orden $O(\log n)$. Así, la probabilidad de que un vértice dado pertenezca a la componente gigante es r cuando $n \rightarrow \infty$. Al pasar c de la izquierda a la derecha de 1, ocurre un doble salto en el tamaño de la componente más grande (el orden cambia primero de $\log n$ a $n^{2/3}$ y luego de $n^{2/3}$ a n). Estos resultados se han obtenido de varias maneras, principalmente con métodos combinatorios.

¿Qué tienen que ver los procesos de ramificación con las gráficas aleatorias $G(n, p)$? Empezando con un vértice dado, la probabilidad de que esté conectado a k vértices está dada por la distribución binomial

$$p_k = \binom{n-1}{k} \left(\frac{c}{n}\right)^k \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{n-1-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

($c < n$). Esta distribución converge a la distribución de Poisson de parámetro c cuando $n \rightarrow \infty$, dada por

$$p_k = \frac{e^{-c} c^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

La función generadora de esta distribución de Poisson es

$$f(s) = e^{-c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k s^k}{k!} = e^{-c(1-s)}, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

De lo visto en la sección 3.1, sabemos que la probabilidad de extinción del proceso de Galton-Watson con ley de ramificación Poisson de parámetro c , es la raíz más pequeña de la ecuación $f(s) = s$, que en este caso es $e^{-c(1-s)} = s$. Haciendo $r = 1 - s$ se tiene $e^{-rc} = 1 - r$, que es la ecuación (8.1), y el proceso de Galton-Watson no se extingue con probabilidad r . Resulta así que hay una relación entre la no extinción del proceso de Galton-Watson y la existencia de la componente gigante de la gráfica $G(n, c/n)$. Aunque esto parece ser sólo una analogía rudimentaria, esta idea ha sido empleada para demostrar rigurosamente el resultado de Erdős-Rényi sobre la existencia de la componente gigante. Esto se puede ver en [23], [24], [25], [26].

A pesar de que los procesos de ramificación y las gráficas aleatorias son modelos distintos, se pueden relacionar debido a que hay una ecuación que les es común. Este tipo de analogías suelen ocurrir en las matemáticas y vale mucho la pena aprovecharlas.

8.2. Ecuaciones (seudo) diferenciales parciales no lineales. Es conocido el hecho que algunos problemas analíticos se pueden resolver con métodos probabilísticos, a veces en casos más generales que con métodos analíticos y con la ventaja de tener modelos que permiten interpretaciones concretas de las soluciones. Son ejemplos clásicos el problema de Dirichlet en teoría de potencial y la fórmula de Feynman-Kac para perturbaciones de la ecuación del calor.

Consideremos la ecuación diferencial parcial (6.7), que es una perturbación no lineal de la ecuación del calor. Más generalmente, sustituyamos a $\frac{1}{2}\Delta$ por una potencia fraccionaria del Laplaciano, $\Delta_\alpha = -(-\Delta)^{\alpha/2}$, $0 < \alpha \leq 2$, que no es un operador diferencial si $\alpha < 2$; es un operador pseudodiferencial. (Para $\alpha = 2$ denotamos $\Delta_2 = \frac{1}{2}\Delta$). Se sabe que Δ_α es el generador infinitesimal del proceso α -estable esféricamente simétrico en \mathbb{R}^d , que ya fue introducido en la sección 6. Pongamos $b = 0$ (caso crítico) y $V = 1$ (sin pérdida de generalidad) en la ecuación (6.7). Para el superproceso $(X_t)_{t \geq 0}$ correspondiente con $X_0 = \lambda$ (medida de Lebesgue), se tiene, como en (6.5), (6.6) y (6.7):

$$(8.2) \quad E(\exp\{-\langle X_t, \varphi \rangle\}) = \exp\{-\langle \lambda, u_\varphi(t) \rangle\}, \quad \varphi \in C_K(\mathbb{R}^d), \varphi \geq 0,$$

donde $u_\varphi(x, t)$ satisface la ecuación (seudo) diferencial parcial no lineal

$$(8.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta_\alpha u - cu^{1+\beta}, \\ u(x, 0) &= \varphi(x). \end{aligned}$$

¿Qué se puede decir sobre el comportamiento de $u_\varphi(x, t)$ cuando $t \rightarrow \infty$? Resulta que si $\varphi \neq 0$, entonces

$$(8.4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |u_\varphi(x, t)| dx \begin{cases} > 0, & \text{si } d > \frac{\alpha}{\beta}, \\ = 0, & \text{si } d \leq \frac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Éste es un resultado puramente analítico, que se obtiene como consecuencia inmediata de la dicotomía de persistencia/extinción mencionada en la sección 6, la cual es un resultado puramente probabilístico, y de la relación (8.2).

El resultado (8.4) ha sido demostrado también con métodos analíticos para el caso $\alpha = 2$, en que el operador Δ_α es diferencial, pero es más difícil hacerlo de manera analítica para $\alpha < 2$. Con el método probabilístico, usando el superproceso es prácticamente lo mismo hacerlo con $\alpha < 2$ que con $\alpha = 2$. (Véase [33]). Estas mismas ideas han sido usadas para obtener resultados

análogos a (8.4) para soluciones de sistemas de ecuaciones (seudo) diferenciales parciales no lineales a partir de superprocesos multitypo [34].

Conclusión

Espero que la lectura de este artículo le haya permitido al lector formarse una idea general, aunque parcial, de la temática de las teorías de los procesos de ramificación y los superprocesos, y apreciar lo fructífero que puede ser el combinar distintas áreas de las matemáticas, como se ha visto en los ejemplos.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. José Alfredo López-Mimbela sus comentarios, que me ayudaron a mejorar este trabajo, al Comité Editorial de la revista *Miscelánea Matemática* (Sociedad Matemática Mexicana) por el permiso para incluir en este artículo los temas de procesos de ramificación sin movimiento que aparecen en el artículo “Ramificación”, a ser publicado dicha revista, y a un árbitro anónimo por sus útiles observaciones. Este trabajo se hizo con apoyo del proyecto CONACyT 45684-F.

Procesos de ramificación

BIBLIOGRAFÍA

- [1] S. Asmussen, H. Hering, *Branching Processes*. *Birkhäuser*, (1983).
- [2] K.B. Athreya, P. Ney, *Branching Processes*. *Springer-Verlag*, (1972).
- [3] B. Fernández, Teoremas Límites de Alta Densidad para Campos Aleatorios Ramificados. *Aportaciones Matemáticas*, Comunicaciones 2, Sociedad Matemática Mexicana, (1986).
- [4] T.E. Harris, *The Theory of Branching Processes*. *Springer-Verlag*, (1963).
- [5] A. Liemant, K. Matthes, A. Wakolbinger, *Equilibrium Distributions of Branching Populations*. *Akademie-Verlag*, (1988).
- [6] B.A. Sevastianov, *Procesos de Ramificación* (en ruso). *Nauka*, (1971).
- [7] V.A. Vatutin, A.M. Zubkov, *Branching Processes I*. *J. Soviet Math.* **39** (1987), 2431-2475.
- [8] V.A. Vatutin, A.M. Zubkov, *Branching Processes II*. *J. Soviet Math.* **67** (1993), 3407-3485.
- [9] A. Wakolbinger, *Poblaciones Aleatorias Ramificadas y sus Equilibrios*. *Aportaciones Matemáticas*, Notas de Investigación 6, Sociedad Matemática Mexicana, (1994).

Aplicaciones de procesos de ramificación en biología

- [10] P. Haccou, P. Jagers, V.A. Vatutin, *Branching Processes: Variation, Growth and Extinction of Populations*. *Cambridge University Press*, (2005).
- [11] P. Jagers, *Branching Processes with Biological Applications*. *Wiley*, (1975).

- [12] M. Kimmel, D.E. Axelrod, Branching Processes in Biology. *Springer*, (2002).
- [13] A.G. Pakes, Biological Applications of Branching Processes. en Handbook of Statistics, Vol. **21** "Stochastic Processes: Modelling and Simulation", D.N. Shanbhag, C.R. Rao (editors). *North-Holland*, (2003), 693-773.

Superprocesos

- [14] D.A. Dawson, Measure-Valued Markov Processes. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour 1991, *Lecture Notes in Mathematics* **1541**, 1-260, *Springer*, (1993).
- [15] D.A. Dawson, E.A. Perkins, Historical Processes. *Memoirs of the American Mathematical Society* **454**, (1991).
- [16] D.A. Dawson, E.A. Perkins, Measure-Valued Processes and Renormalization of Branching Particle Systems, en "Stochastic Partial Differential Equations: Six Perspectives". *Mathematical Surveys and Monographs*, **64**, *American Mathematical Society*, (1999).
- [17] E.B. Dynkin, An Introduction to Branching Measure-Valued Processes. *CRM Monograph Series*, **6**, *American Mathematical Society*, (1994).
- [18] E.B. Dynkin, Diffusions, Superdiffusions and Partial Differential Equations. *Colloquium Publications*, **50**, *American Mathematical Society*, (2002).
- [19] A.M. Etheridge, An Introduction to Superprocesses. University Lecture Series, **20**, *American Mathematical Society*, (2000).
- [20] J.-F. Le Gall, Spatial Branching Processes, Random Snakes and Partial Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics, ETH Zürich, *Birkhäuser*, (1999).
- [21] Z. Li, Measure-Valued Branching Markov Processes. libro en preparación.
- [22] E.A. Perkins, Dawson-Watanabe Superprocesses and Measure-Valued Diffusions. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour 1999, *Lecture Notes in Mathematics* **1781**, 125-324, *Springer*, (2002).

Gráficas aleatorias y ramificación

- [23] N. Alon, J.H. Spencer, The Probabilistic Method, Second Edition. *Wiley*, (2000).
- [24] R. Durrett, Random Graph Dynamics. *Cambridge University Press*, 2007.
- [25] G. Grimmett, Probability on Graphs. *PIMS-UBC*, (2008) Summer School in Probability.
- [26] S. Janson, T. Luczak, A. Rucinski, Random Graphs. *Wiley*, (2000).

Artículos especializados sobre algunos resultados

- [27] K.B. Athreya, N. Kaplan, *Convergence of the age distribution in the one-dimensional age-dependent branching process*. *Ann. Probab.*, **4**, (1976), 38-50.
- [28] T. Bojdecki, L.G. Gorostiza, *Langevin equations for \mathcal{S} '-valued Gaussian processes and fluctuation limits of infinite particle systems*. *Probab. Th. Rel. Fields*, **73** (1986), 227-244.
- [29] T. Bojdecki, L.G. Gorostiza, A Talarczyk, *Self-similar stable processes arising from high-density limits of occupation times of particle systems*. *Potential Analysis* **28** (2008), 71-103.
- [30] L.G. Gorostiza, *A note on the limits of branching processes*. *Bol. Soc. Mat. Mexicana* **21** (1976), 62-64.
- [31] L.G. Gorostiza, N. Kaplan, *Invariance principle for branching random motions*. *Bol. Soc. Mat. Mexicana* **25** (1980), 63-86.
- [32] L.G. Gorostiza, J.A. López-Mimbela, *An occupation time approach for convergence of measure-valued processes, and the death process of a branching system*. *Stat. Prob. Lett.* **21** (1994), 59-67.

- [33] L.G. Gorostiza, A. Wakolbinger, *Persistence criteria for a class of critical branching particle systems in continuous time*. Ann. Probab. **19** (1991), 266-288.
- [34] L.G. Gorostiza, A. Wakolbinger, *Convergence to equilibrium of critical branching particle systems and superprocesses, and related nonlinear partial differential equations*. Acta Appl. Math. **27** (1992), 269-291.
- [35] J. Lamperti, *The limit of a sequence of branching processes*. Zeit. für Wahrschein. Geb. **7** (1967), 271-288.
- [36] S. Méléard, S. Roelly, *A generalized equation for a continuous measure branching process*, *Stochastic Partial Differential Equations and Applications II*. Lect. Notes Math. **1390**. Proceedings Trento (Springer, Berlin, (1988)), 171-186.
- [37] M.L. Samuels, *Distribution of the branching process among generations*. J. Appl. Prob. **8** (1971), 655-667.

Procesos estocásticos de memoria larga

- [38] P. Doukhan, G. Oppenheim, M.S. Taqqu (editores), *Theory and Applications of Long-Range Dependence*. Birkhäuser (Boston), (2003).

Arboles aleatorios continuos

- [39] D. Aldous, *The continuum random tree I*. Ann. Probab. **19** (1991), 1-28, y artículos subsiguientes del mismo y de otros autores.