

**LA PROBABILIDAD DE
LA MECANICA CUANTICA:
UNA INTRODUCCION**

UNA CONFERENCIA DADA EN EL EVENTO:

**METODOS ESTOCASTICOS
EN SISTEMAS DINAMICOS**

EN EL
CENTRO DE INVESTIGACION EN MATEMATICAS
(CIMAT)
GUANAJUATO, GTO.
EL 26 DE ENERO 2009
16:00

IMPARTIDA POR
STEPHEN B. SONTZ
CIMAT

NIVEL: **LICENCIATURA**
REQUISITO: **ALGEBRA LINEAL**

CASO ESPECIAL DE LA PROBABILIDAD CLASICA
QUE CONSTA DE:

1. UN CONJUNTO **FINITO** Ω .
2. **TODOS** LOS SUBCONJUNTOS $E \subset \Omega$ QUE SE LLAMAN **EVENTOS**.
3. UNA **FUNCION DE PROBABILIDAD** P

$$E \mapsto P(E) \in [0, 1]$$

O SEA, $0 \leq P(E) \leq 1$ PARA CADA $E \subset \Omega$.

$P(E)$ = **PROBABILIDAD** DEL EVENTO E .

TALES QUE

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_k)$

DONDE E_1, \dots, E_k SON **EVENTOS DISJUNTOS**,
O SEA, $E_i \cap E_j = \emptyset$ SI $i \neq j$.

ASI ES LA TEORIA (1600'S) DESARROLLADA PARA
ESTUDIAR **JUEGOS DE CARTAS**. ¿Y TAMBIEN
DE **DADOS**?

LA TEORIA DE **PROBABILIDAD CLASICA** DE **KOLMOGOROV** (1930'S) PARA EL CASO CUANDO Ω ES **INFINITO** NO VEREMOS **HOY**, DADO QUE TIENE UN NIVEL MAS AVANZADO CON MUCHOS DETALLES TECNICOS.

OTRO CONCEPTO CENTRAL EN ESTA TEORIA ES UNA **CANTIDAD OBSERVABLE**.

SON LAS ESTRUCTURAS MATEMATICAS QUE CORRESPONDEN A LOS NUMEROS **MEDIDOS** (U **OBSERVADOS**) EN EXPERIMENTOS.

UNA **VARIABLE ALEATORIA (OBSERVABLE)** ES UNA FUNCION CON VALORES REALES:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

EL **VALOR ESPERADO (VALOR PROMEDIO)** DE X CON RESPECTO A P ES

$$\langle X \rangle := \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) X(\omega)$$

DONDE $P(\omega) \equiv P(\{\omega\})$.

N.B. EL CONJUNTO

$$\{ X \mid X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \}$$

DE LAS VARIABLES ALEATORIAS ES UN ESPACIO VECTORIAL SOBRE \mathbb{R} DE DIMENSION $n = \text{card}(\Omega)$. TAMBIEN TIENE UN PRODUCTO CONMUTATIVO.

LA MECANICA CUANTICA DE PAULI, WIGNER
(~1930) EMPIEZA CON EL ESPACIO VECTORIAL

$\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \mid z_j \in \mathbb{C} \text{ PARA } 1 \leq j \leq n\}$
DE **DIMENSION FINITA** $n \geq 1$ SOBRE \mathbb{C} CON
SU **PRODUCTO INTERIOR**

$$\langle z, w \rangle := \sum_{j=1}^n z_j^* w_j$$

AQUI $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$,
 λ^* ES LA **CONJUGADA COMPLEJA** DE $\lambda \in \mathbb{C}$.

TAMBIEN \mathbb{C}^n TIENE UNA **NORMA** DADA POR

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = \sum_{j=1}^n |z_j|^2$$

LA MECANICA CUANTICA DE HEISENBERG
Y **SCHRÖDINGER** (1925-26) PARA EL CASO DE
DIMENSION **INFINITA** NO VEREMOS **HOY**, DADO
QUE TIENE UN NIVEL MAS AVANZADO CON
MUCHOS DETALLES TECNICOS.

IGUAL COMO LA PROBABILIDAD DE **KOLMOGOROV**,
ES IMPORTANTE PERO **NO HOY**.

ENTONCES: **LA LECTURA.**

PARA DEFINIR LAS CANTIDADES OBSERVABLES EN MECANICA CUANTICA, INTRODUCIMOS EL CONJUNTO DE **MATRICES** COMPLEJAS $n \times n$:

$$\text{MAT}(n; \mathbb{C}) := \{A = (A_{jk}), \text{ MATRIZ } n \times n, A_{jk} \in \mathbb{C}\}$$

CADA MATRIZ A DEFINE UN **MAPEO LINEAL**

$$A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n.$$

VICE VERSA CADA **MAPEO LINEAL** $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. VIENE DE UNA **MATRIZ** EN $\text{MAT}(n; \mathbb{C})$.

N.B. $\text{MAT}(n; \mathbb{C})$ ES UN **ESPACIO VECTORIAL** SOBRE \mathbb{C} DE DIMENSION n^2 . CUENTA CON UN PRODUCTO QUE ES **NO CONMUTATIVO** SI $n \geq 2$. (EL PRODUCTO USUAL DE MATRICES.)

TODA MATRIZ A TIENE UNA **ADJUNTA** A^* DONDE

$$(A^*)_{jk} := (A_{kj})^* \quad 1 \leq j, k \leq n$$

ES LA **TRANSPUESTA CONJUGADA**.

RESULTA QUE A^* ES LA MATRIZ UNICA TAL QUE

$$\langle A^*z, w \rangle = \langle z, Aw \rangle$$

PARA TODOS $z, w \in \mathbb{C}^n$.

SI $A = A^*$ SE DICE QUE ES **AUTO-ADJUNTA** (**O HERMITEANA**). NOTACION:

$$\text{HERM}(n) := \{A \in \text{MAT}(n; \mathbb{C}) \mid A = A^*\}$$

**LAS MATRICES AUTO-ADJUNTAS
(O HERMITEANAS) CORRESPONDEN
A LAS CANTIDADES MEDIDAS EN
EXPERIMENTOS.**

EJERCICIO:

HERM(n) ES UN **ESPACIO VECTORIAL** SOBRE LOS NUMEROS REALES Y **NO** LO ES SOBRE LOS COMPLEJOS. **NO** ES UNA **SUBALGEBRA** DE MAT($n; \mathbb{C}$). ADEMAS: $\dim_{\mathbb{R}} \text{HERM}(n) = n^2$.

EJEMPLO:

HERM(2) TIENE DIMENSION $2^2 = 4$ Y UNA BASE ESTA DADA POR LAS TRES **MATRICES DE PAULI**:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y LA **IDENTIDAD**, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

UNAS PROPIEDADES:

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 = -\sigma_2\sigma_1$$

$$\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1 = -\sigma_3\sigma_2$$

$$\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2 = -\sigma_1\sigma_3$$

VAMOS A USAR UN TEOREMA FUNDAMENTAL DEL **ALGEBRA LINEAL**: CADA MATRIZ AUTO-ADJUNTA TIENE UNA **DIAGONALIZACION**. LO SIGUIENTE ES UNA MANERA PARA DECIR ESTE TEOREMA.

SEA A UNA MATRIZ EN $\text{MAT}(n; \mathbb{C})$. SE DEFINE SU **POLINOMIO CARACTERISTICO** ASI:

$$p_A(\lambda) := \det(\lambda I - A)$$

ES UN POLINOMIO DE GRADO n . ($I \in \text{MAT}(n; \mathbb{C})$ ES LA IDENTIDAD.)

DIGAMOS QUE EL CONJUNTO DE LAS RAICES COMPLEJAS **DISTINTAS** DE $p_A(\lambda)$ ES

$$\text{SPEC}(A) := \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\} \subset \mathbb{C}$$

CON $1 \leq k \leq n$.

SE DICE QUE $\text{SPEC}(A)$ ES EL **ESPECTRO** DE A Y QUE $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ SON LOS **EIGENVALORES** DE A .

N.B. $\beta \in \mathbb{C}$ ES UN EIGENVALOR DE A .

$\iff \beta$ ES UNA RAIZ DE $p_A(\lambda)$. $\iff p_A(\beta) = 0$.

$\iff \det(\beta I - A) = 0$.

\iff LA MATRIZ $\beta I - A$ NO ES INVERTIBLE.

\iff **EL SUBESPACIO** $\ker(\beta I - A)$ **NO ES CERO**.

\iff EXISTE $z \in \mathbb{C}^n$ CON $z \neq 0$ Y $Az = \beta z$.

ENTONCES DEFINIMOS LOS **SUBESPACIOS**

$$V_j := \ker(\lambda_j I - A) \neq 0 \quad \text{PARA } 1 \leq j \leq k.$$

ENTONCES: $z \in V_j \Leftrightarrow (\lambda_j I - A)z = 0 \Leftrightarrow Az = \lambda_j z$.
O SEA, LA **ACCION** DE A EN EL SUBESPACIO V_j
ES IGUAL A LA ACCION DE $\lambda_j I$.

SI **ADEMAS** A ES **AUTO-ADJUNTA**, ENTONCES:

- TODOS SUS EIGENVALORES SON **REALES**.
- LOS SUBESPACIOS V_j SON **ORTOGONALES**,
O SEA, $\langle z_i, z_j \rangle = 0$ SI $z_i \in V_i, z_j \in V_j$ PARA $i \neq j$.
- $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$ (**SUMA DIRECTA**)

ENTONCES, AL FORMAR LA UNION

DE UNA **BASE ORTONORMAL** DE V_1 ,

DE UNA **BASE ORTONORMAL** DE V_2 ,

...

DE UNA **BASE ORTONORMAL** DE V_k ,

OBTENEMOS UNA **BASE ORTONORMAL** DE \mathbb{C}^n
CON LA PROPIEDAD QUE EL MAPEO LINEAL

$$A = A^* : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

TIENE UNA **MATRIZ DIAGONAL** EN ESTA BASE
NUEVA. ES LA **DIAGONALIZACION** DE A .

A LO LARGO DE LA DIAGONAL HAY $\dim V_1 \geq 1$ OCURRENCIAS DE λ_1 , $\dim V_2 \geq 1$ OCURRENCIAS DE λ_2, \dots , $\dim V_k \geq 1$ OCURRENCIAS DE λ_k .

VAMOS A SEGUIR UN PASO MAS ADELANTE.
EN LUGAR DE USAR SUBESPACIOS DE \mathbb{C}^n VAMOS A USAR PROYECTORES ORTOGONALES.

SEA $W \subset \mathbb{C}^n$ UN **SUBESPACIO**. RESULTA QUE PODEMOS **DESCOMPONER** \mathbb{C}^n COMO

$$\mathbb{C}^n = W \oplus W^\perp \quad \text{DONDE}$$

$$W^\perp := \{v \in \mathbb{C}^n \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ PARA TODO } w \in W\}.$$

ENTONCES, AL SUBESPACIO W ASOCIAMOS EL **MAPEO LINEAL** $E_W : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ DEFINIDO POR

$$E_W z := w$$

PARA $z \in \mathbb{C}^n$ CON $z = w + v$ SU DESCOMPOSICION UNICA CON $w \in W$, $v \in W^\perp$. RESULTA QUE:

$$E_W = E_W^* = E_W^2 \quad \text{Y} \quad \text{Ran}(E_W) = W$$

SI $E : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ LINEAL SATIFACE $E = E^* = E^2$, SE LLAMA UN **PROYECTOR ORTOGONAL**.

RECIPROCAMENTE, PARA CADA PROYECTOR ORTOGONAL TENEMOS QUE $E = E_W$ PARA UN SUBESPACIO UNICO, A SABER, $W = \text{Ran}(E)$.

POR FIN, EL TEOREMA DE DIAGONALIZACION:

TEOREMA:

SI $A \in \text{MAT}(n, \mathbb{C})$ ES UNA MATRIZ AUTO-ADJUNTA, ENTONCES EXISTEN PROYECTORES ORTOGONALES $E_1 \neq 0, E_2 \neq 0, \dots, E_k \neq 0$ EN $\text{MAT}(n, \mathbb{C})$ Y NUMEROS **DISTINTOS** $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ TALES QUE

$$\begin{aligned} E_i E_j &= 0 \quad \text{SI } i \neq j \\ I &= E_1 + E_2 + \dots + E_k \\ A &= \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_k E_k \end{aligned}$$

ADEMAS, LOS PROYECTORES ORTOGONALES Y LOS NUMEROS REALS (CON LAS PROPIEDADES INDICADAS) SON UNICOS. ■

SE LLAMA EL **TEOREMA ESPECTRAL** PARA MATRICES AUTO-ADJUNTAS.

RECIPROCAMENTE, SI TENEMOS PROYECTORES ORTOGONALES Y NUMEROS REALS CON LAS PROPIEDADES INDICADAS, ENTONCES

$$A := \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_k E_k$$

ES UNA MATRIZ AUTO-ADJUNTA.

REFERENCIA: P. HALMOS, FINITE-DIMENSIONAL VECTOR SPACES, SPRINGER, 1974.

SEA Ω **FINITO NO VACIO** CON $n = \text{card}(\Omega) \geq 1$.
(SIN FUNCION DE PROBABILIDAD P).

PARA CADA **EVENTO** $\Lambda \subset \Omega$ ASOCIAMOS SU
FUNCION CARACTERISTICA χ_Λ . ENTONCES,
 $\chi_\Lambda = \chi_\Lambda^* = \chi_\Lambda^2$ Y ADEMAS $\Lambda = \chi_\Lambda^{-1}(1)$.

ADEMAS UNA FUNCION $\chi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ QUE SATIFACE
 $\chi = \chi^* = \chi^2$ ES LA **FUNCION CARACTERIS-**
TICA DE UN **EVENTO UNICO** Λ , A SABER,
 $\chi = \chi_\Lambda$ DONDE $\Lambda = \chi^{-1}(1)$.

ADEMAS SUPONGAMOS QUE $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ES UNA
FUNCION (**VARIABLE ALEATORIA**). ENTONCES
 $\text{Ran}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ PARA $1 \leq k \leq n$ CON
 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ **NUMEROS REALES DISTINTOS**.

PARA CADA “**EIGENVALOR**” λ_j DEFINIMOS

$$\Lambda_j := \{\omega \in \Omega \mid A(\omega) = \lambda_j\} = A^{-1}(\lambda_j) \neq \emptyset.$$

SON **EVENTOS DISJUNTOS** CON $\Omega = \cup_{j=1}^k \Lambda_j$.
ENTONCES, $E_j := \chi_{\Lambda_j} \neq 0$ PARA CADA j , Y

$$E_i E_j = 0 \quad \text{SI } i \neq j$$

$$1 = E_1 + E_2 + \dots + E_k$$

$$A = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_k E_k$$

A VECES SE DICE QUE **CUANTIZACION** ES:
“**OPERADORES EN LUGAR DE FUNCIONES**”.

INTEPRETACION EN MECANICA CUANTICA:

SEA $A = A^*$ UNA MATRIZ AUTO-ADJUNTA.
SUS **EIGENVALORES** SON LOS
RESULTADOS POSIBLES DE UN
EXPERIMENTO QUE MIDE LA CANTIDAD
FISICA CORRESPONDIENTE.

EJEMPLO: LAS MATRICES $\frac{1}{2}\sigma_1, \frac{1}{2}\sigma_2, \frac{1}{2}\sigma_3$
CORRESPONDEN A LOS COMPONENTES DEL **SPIN**
DE UN SISTEMA FISICO CON **SPIN** = 1/2. TODAS
TIENEN EL MISMO ESPECTRO: $\{-1/2, 1/2\}$.

UN **EVENTO (CUANTICO)** ES:

UN PROYECTOR ORTOGONAL E , O MAS BIEN,
UN SUBESPACIO V DE \mathbb{C}^n .

SI E ES UN EVENTO CON $\dim_{\mathbb{C}} \text{Ran} E = 1$, SE DICE
QUE ES UN **ESTADO O ESTADO CUANTICO**
(PURO). EQUIVALENTEMENTE, UN ESTADO ES
UN **SUBESPACIO $V \subset \mathbb{C}^n$ DE DIMENSION 1**.

LA MANERA QUE USAMOS EN **FISICA** PARA DEFINIR
UN ESTADO ES TOMAR $z \in \mathbb{C}^n$ CON $\|z\| = 1$.

DEFINE EL SUBESPACIO $\mathbb{C}z \subset \mathbb{C}^n$ DE DIMENSION 1.

POR CIERTO, HAY QUE **IDENTIFICAR** VECTORES

$w, z \in \mathbb{C}^n$ CON $\|w\| = \|z\| = 1 \iff \mathbb{C}w = \mathbb{C}z \iff$

EXISTE $\alpha \in \mathbb{C}$ CON $|\alpha| = 1$ TAL QUE $w = \alpha z$.

UN ESTADO PURO CUANTICO ESTA CARACTERIZADO POR SER UN **EVENTO ATOMICO**, A SABER, UN SUBESPACIO NO IGUAL A CERO CUYOS SUBESPACIOS SON SOLAMENTE EL SUBESPACIO **MISMO** Y EL SUBESPACIO **CERO**.

LOS EXPERTOS YA SABEN QUE EL CONJUNTO DE LOS ESTADOS CUANTICOS PUROS ES EL **ESPACIO PROYECTIVO COMPLEJO** DE DIMENSION $n - 1$ SOBRE LOS COMPLEJOS:

$$\mathbb{C}P^{n-1}$$

PARA ELLOS QUE NO SON EXPERTOS:
LA LECTURA.

YA TENEMOS EL LENGUAJE SUFICIENTE PARA DESCRIBIR LA **PROBABILIDAD CUANTICA**.

UN PRINCIPIO DE MECANICA CUANTICA:

SI UN SISTEMA FISICO EMPIEZA EN UN ESTADO $z \in \mathbb{C}^n$ CON $\|z\| = 1$ Y SE MIDE LA CANTIDAD FISICA ASOCIADA A LA MATRIZ AUTO-ADJUNTA

$$A = A^* = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k$$

ENTONCES EL EXPERIMENTO DA EL VALOR λ_j CON **FRECUENCIA RELATIVA**

$$\langle z, E_j z \rangle = \|E_j z\|^2$$

DESPUES DE LA MEDICION EL ESTADO FINAL ES

$$E_j z / \|E_j z\|$$

(COLLAPSE OF THE WAVE FUNCTION.) ■

PRIMERO, DEBEMOS NOTAR QUE

$$0 \leq \langle z, E_j z \rangle \leq 1 \quad \text{Y} \quad \sum_{j=1}^k \langle z, E_j z \rangle = 1$$

SI SE MIDE λ_j SE DICE QUE EL EVENTO E_j HA **SUCEDIDO**. POR LO TANTO DEFINIMOS LA **PROBABILIDAD CUANTICA** PARA QUE SUCEDA EL EVENTO E EN EL ESTADO z POR: $\langle z, E z \rangle$.

$E \rightarrow \langle z, E z \rangle \in [0, 1]$ **NO** ES UNA PROBABILIDAD CLASICA (DE **KOLMOGOROV**) SI $n \geq 2$.

SUPONGAMOS QUE TENEMOS UNA MATRIZ AUTO-ADJUNTA $A = A^* = \sum_{j=1}^k \lambda_j E_j$ Y UN ESTADO $z \in \mathbb{C}^n$, O SEA, $\|z\| = 1$. ENTONCES EL **VALOR ESPERADO DE A EN EL ESTADO** z ES

$$\langle A \rangle_z := \sum_{j=1}^k \lambda_j \langle z, E_j z \rangle = \langle z, \sum_{j=1}^k \lambda_j E_j z \rangle = \langle z, Az \rangle$$

ESTO NOS DA OTRA MANERA DE PENSAR EN QUE ES EL ESTADO z . SE DEFINE EL MAPEO LINEAL $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ DONDE $\mathcal{A} = \text{MAT}(n; \mathbb{C})$ POR:

$$\rho(M) := \langle z, Mz \rangle \quad \text{PARA } M \in \mathcal{A}$$

ρ ES **REAL**: $\rho(M^*) = (\rho(M))^* \quad \forall M \in \mathcal{A}$.

ρ ES **POSITIVO**: $\rho(M^*M) \geq 0 \quad \forall M \in \mathcal{A}$.

ρ ES **NORMALIZADO**: $\rho(I) = 1$.

ASI SE PUEDE **GENERALIZAR** LA IDEA DE UN ESTADO AL CONTEXTO DE UNA *-ALGEBRA \mathcal{A} SOBRE \mathbb{C} CON UNIDAD I . UN **ESTADO** DE \mathcal{A} ES $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ LINEAL CON LAS TRES PROPIEDADES.

LA PROBABILIDAD CLASICA (Ω, P) ES EL **CASO** CUANDO $\mathcal{A} = \{Y : \Omega \rightarrow \mathbb{C}\}$ ES LA *-ALGEBRA SOBRE \mathbb{C} Y $\rho(Y) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)Y(\omega)$ ES EL ESTADO.

ADEMAS SE SUELE DECIR QUE P ES EL ESTADO.

ENTONCES LA **PROBABILIDAD CUANTICA**
(MURRAY Y VON NEUMANN) CONSTA DE

- EL ESPACIO VECTORIAL \mathbb{C}^n CON PRODUCTO INTERIOR.
- LOS EVENTOS CUANTICOS, A SABER, LOS PROYECTORES ORTOGONALES EN $\text{MAT}(n, \mathbb{C})$.
- LOS ESTADOS CUANTICOS.
- LAS MATRICES AUTO-ADJUNTAS.
- LAS FORMULAS PARA CALCULAR LAS PROBABILIDADES CUANTICAS, VALORES ESPERADOS, ETCETERA.

PREGUNTAS:

- **EINSTEIN:**
“THE OLD ONE DOES NOT PLAY DICE.” ¿CIERTO?
- ¿HAY OTRAS PROBABILIDADES NO CLASICAS?
- LA **ESTADISTICA** (CLASICA) ESTUDIA *GROSSO MODO* EL **PROBLEMA INVERSO**: COMO IR DE DATOS EXPERIMENTALES A MODELOS PROBABILISTAS CLASICOS.
¿HAY **ESTADISTICA CUANTICA**?
- ¿HAY SISTEMAS DINAMICOS **CUANTICOS**?

POSTRE #1

LA **LOGICA CUANTICA** ES EL CONJUNTO DE TODOS LOS EVENTOS CUANTICOS (POR LO PRONTO, TODOS LOS SUBESPACIOS DE \mathbb{C}^n) QUE SE LLAMAN **PROPOSICIONES CUANTICAS** EN ESTE CONTEXTO.

TIENEN LAS OPERACIONES LOGICAS SIGUIENTES:

1. **CONJUGACION:** $V \wedge W := V \cap W$
2. **DISJUNCION:** $V \vee W := V \oplus W$
3. **NEGACION:** $\sim V := V^\perp$

HAY UN **ORDER PARCIAL** \leq DEFINIDO POR

$$V \leq W \iff V \wedge W = V \iff V \subset W$$

CON UN UNICO **ELEMENTO MINIMO**

$$0 := \{0\} \subset \mathbb{C}^n$$

Y UN UNICO **ELEMENTO MAXIMO**

$$1 := 0^\perp = \mathbb{C}^n$$

PERO NO ES UN ALGEBRA BOOLEANA SI $n \geq 2$
DADO QUE

EJERCICIO: $U \wedge (V \vee W) = (U \wedge V) \vee (U \wedge W)$
NO ES SIEMPRE CIERTO CUANDO $n \geq 2$.

POSTRE #2

UN CASO INTERESANTE DE LA MECANICA CUANTICA ES $n = 2$, DONDE TENEMOS QUE EL ESPACIO DE ESTADOS ES $\mathbb{C}P^1 \cong S^3/S^1 \cong S^2$.

UN TAL ESTADO SE LLAMA UN **QUBIT** EN LA **COMPUTACION CUANTICA** Y EN LA **INFORMACION CUANTICA**.

ENTONCES HAY UNA **ESFERA DE QUBITS**.

EN EL CASO $n = 2$ DE PROBABILIDAD CLASICA, TENEMOS $\Omega = \{\uparrow, \downarrow\}$, DIGAMOS, QUE TIENE DOS EVENTOS ATOMICOS (ESTADOS PUROS) QUE SON $\{\uparrow\}$ Y $\{\downarrow\}$; CADA UNO SE LLAMA UN **BIT**.

ENTONCES HAY **DOS BITS**.

POR ESO HAY UNA DIFERENCIA MUY GRANDE ENTRE LA **COMPUTACION CUANTICA** Y LA **COMPUTACION CLASICA**. POR EJEMPLO HAY **ALGORITMOS CUANTICOS** MUCHISIMO MAS RAPIDOS QUE LOS **ALGORITMOS CLASICOS** CONOCIDOS.

REFERENCIAS:

G. Birkhoff y J. von Neumann, The logic of quantum mechanics, *Ann. Math.* **37** (1936) 823–843.

A.M. Chebotarev, Lectures on Quantum Probability, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, Textos Nivel Avanzado 14, 2000.

E.B. Davies, Quantum Theory of Open Systems, Academic Press, 1976.

P. Halmos, Finite-Dimensional Vector Spaces, Springer, 1974.

A.S. Holevo, Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory, North-Holland, 1982.

P.-A. Meyer, Quantum Probability for Probabilists, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1538, Springer, 1993.

J. von Neumann, Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, Princeton University Press, 1955.

K.R. Parthasarathy, An Introduction to Quantum Stochastic Calculus, Birkhäuser, 1992.

Resumen: Einstein decia en referencia a la mecanica cuantica: “God does not play dice” - y es cierto, porque la probabilidad de la mecanica cuantica no es la probabilidad clasica de juegos como los dados. Es el primer ejemplo de una probabilidad que se llama no conmutativa. Vamos a presentar lo basico de esta probabilidad a un nivel introductorio.